<u>СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”</u>

<u>СТОПАНСКИ ФАКУЛТЕТ</u>

ТЕМА: ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРИЯТА НА ПОРТФЕЙЛА

<u>Изготвил:</u>

Радина Таланова
фак. № 11413

<u>Преподавател:</u>

Проф. дмн. Иван Иванов

София

Януари 2021

Съдържание

Въведение

Съществуват много на брой литературни източници, свързани с теории за портфейла. Основната цел на всички е да се определи коя от всички възможни инвестиции е най-добра, като има определен набор от активи. В тази разработка ще бъде разгледана теорията на Марковиц на инвестиционния портфейл и ще бъде демонстрирано приложението й.

Инвестицията е свързана с това как да постигнете максимална норма на възвръщаемост с минимално ниво на риск. Едно от основните опасения е създаването на оптимален инвестиционен портфейл, в който са диверсифицирани разлини ценни книжа и активи, които отговарят на желаното съотношение на риск и възвръщаемост. Самата диверсификация е стратегия, използвана за намаляване на риска чрез разпределяне на портфейла в много инвестиции. Счита се, че диверсификацията на портфолиото работи, тъй като цените на различните акции не се движат по абсолютно еднакъв начин. По тази причина диверсификацията работи най-добре, когато възвръщаемостите имат негативна корелация. (Brealey, Myers, Marcus, 2007)[1]. Рискът, който може да бъде намален чрез диверсификация, е само несистематичният или уникалният риск. Нарича се още диверсифицируем риск, тъй като включва рисковите фактори, засягащи фирмата. За разлика от него съществуват рискове, които не могат да бъдат избегнати с помощта на диверсификация, известни под общото наименование „пазарен риск“. Пазарният риск е предизвикан от икономически рискове, които могат да засегнат всички компании, като лихвен процент, политически рискове и т.н.

Освен диверсификацията за инвеститорите са важни още очакваната възвръщаемост и очакваната волатилност (риск) на портфейла.

Икономистът Хари Марковиц развива съвременната портфейла теория (MPT – Modern Portfolio Theory), при която се изчисляват очакваните риск и възврвръщаемост. Той печели нобелова награда за теорията си през 1990 година. Марковиц демонстрира формулата за изчисляване на дисперсията и твърди че дисперсията на нивото на възвръщаемост е значителен измеритен за риска на портфейла. Тази формула показва

[1] Brealey, A.R., Myers, C.S. and Marcus, J.A. (2007) Fundamentals of Corporate Finance. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.

важността и ефективността от диверсифицирането на инвестициите, за да се намали рискът на портфейла. По тази причина теорията е подкрепена от много икономисти като Шарп (1964), Линтнър (1965) и Мосин (1966). През 1964 Шарп въвежда т.нар. „Модел за оценка на капиталовите активи“ (CAPM – Capital Asset Pricing Model), при който възвръщаемостта на акцията е повлияна от риска, където рискът се нарича Бета. Бета е наклонът на регресията, който обяснява връзката между възвръщаемостта на акцията и възвръщаемостта на пазара. Теорията наподобява тази на Марковиц, според която колкото по-висок е рискът, толкова по-висока е възвръщаемостта. Теорията на Марковиц бива критикувана от Конно и Ямазаки, според които теорията не може да се използва поради изчислителната ѝ сложност. Те демонстрират, че оптималният модел на портфейла трябва да използва абсолютната средна стойност на риска от отклонение вместо средната стойност на дисперсията или че моделите за риск трябва да се базират на линейна програма вместо на квадратична програма. Суишър и Кастен откриват още, че използването на стандартно отклонение като показател за риск не е правилно, тъй възвръщаемостите на финансовите активи не следват нормално разпределение.

Въпреки че теорията на Марковиц не е перфектна, тя продължава да се използва в практиката и целта на това изследване е да демонстрира приложението ѝ. Моделът ще се приложи върху пет на брой актива, за да се определи оптималното разпределение на теглата в портфейла.[2]

Дългосрочни инвестиции

Първо трябва да помислим как традиционните инвестиции работят. След като инвеститор купи портфейл, възвръщаемостите обикновено се реинвестират в същия портфейл. Ако имаме 2 инвестиции, които имат нормално разпределение и еднаква средна възвръщаемост, но различна дисперсия, очакваната възвръщаемост накрая може да е много по-висока за инвестицията с по-ниска дисперсия. Например, ако се сравни възвръщаемостта от получаване два пъти на 110% и получаване на 120% веднъж и поддържане на 100% в следващия период, вторият вариант е много по-добър в дългосрочен план.

[2] The Journal of Economic Perspectives
Vol. 18, No. 3 (Summer, 2004)

Човешкото поведение

Много проучвания за човешкото поведение показват, че хората и по-точно инвеститорите се страхуват от риска. Смята се, че инвеститорът не е склонен да поема рискове, ако между две инвестиции със същата възвръщаемост, той/тя би предпочел тази с по-ниска дисперсия. Тази тема е изучавана в дълбочина от т.нар. теория за полезността. Един от типичните експерименти включва предлагане на случайна извадка от хора на опцията да получат определено количество или сума или да хвърлят монета и да получат двойно количество само ако монетата падне на определена страна. В повечето случай хората предпочитат сигурната сума пред 50/50 залога.[3]

Основни понятия

Моделът на Марковиц

Моделът на Марковиц предполага, че дневната възвръщаемост на всеки актив от всички съществуващи активи $\{R_i\}i\in I$ (където $I = \{1,\dots,n\}$) е нормално разпределен и има стандартно отклонение $\sigma_i := sqrt(Var(R_i))$ и средна възвръщаемост $r_i := E(R_i)$, както и че има сигурна корелация σ_{ij} между дадени два актива I, j от всички съществуващи I.

Проблемът, който се опитваме да решим, е: при дадена минимална искана възвръщаемост p ние искаме да инвестираме количество Mo между различни активи $i \in I$, инвестирайки x_i във всеки актив, понякога то максимум u_j, което е максимумът, който инвеститорът би вложил в един актив, по такъв начин, че рискът (дисперсията) на цялата инвестиция да е минимизиран. За да обобщим, проблемът на инвеститора може да се опише по следния начин:

Трябва да се минимизира

$$Min_x(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j),$$

предмет на

[3] Harrison, G. W., List, J. A., & Towe, C. (2004). Naturally Occurring Preferences and Exogenous Laboratory Experiments: A Case Study of Risk Aversion. Retrieved from http://exlab.bus.ucf.edu.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j r_j \geq \rho M_0.$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 ,$$

където x := (x_1, ..., x_n)[4].

Коефициент на Шарп

Коефициентът на Шарп (Sharpe ratio) е показател, който съпоставя постигнатата доходност от управлението на инвестиционен портфейл и поетия риск за постигане на тази доходност. При конструиране на показателя е залегнало схващането, че е оправдано инвестиционен риск да се поема само за реализиране на доходност, превишаваща т.нар. безрискова доходност. Математически коефициентът на Шарп представлява отношение на постигнатата доходност над безрисковата (т.нар. рискова премия) към стандартното отклонение на доходността, т.е. коефициентът на Шарп показва размера на полученото възнаграждение (рискова премия) за единица поет риск.[5]

Коефициентът на Шарп се изчислява по следната формула:

$$S = \left(\frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \right) ,$$

Където:

- Rp – очаквана възвръщаемост на портфейла

[4] Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory. (https://sites.math.washington.edu/~burke/crs/408/fin-proj/mark1.pdf).
[5] Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp

- Rf - безрисковата норма на възвръщаемост
- σp – стандартно отклонение на портфейла

Има определена критика към начина, по който коефициентът на Шарп използва стандартното отклоенние на възвръщаемостите като знаменател, което предполага нормална дистрибуция на възвръщаемостите. Често възвръщаемостите от финансови активи обаче се отдалечават от нормалното разпределение и по тази причина може понякога интерпретацията на коефициента на Шарп да е подвеждаща. Има други методи, които модифициран оригиналния коефициент, но в тази разработка ще се придържаме към традиционния коефициент на Шарп.

Ефективна граница

Ефективната граница се определя графично от портфейли, които увеличават максимално възвръщаемостта за риска, който инвеститорът поема. Възвръщаемостта зависи от различните инвестиционни комбинации, които образуват портфейла. Стандартното отклонение на ценна книга се използва като синоним на риск. В идеалния случай инвеститорът се стреми да състави портфейла от ценни книжа, предлагащи много добра доходност, но чието комбинирано стандартно отклонение е по-ниско от стандартните отклонения на отделните ценни книжа. Колкото по-малко са свързани помежду си ценните книжа (по-ниска ковариация), толкова по-ниско е стандартното отклонение. Ако тази комбинация от оптимизиране на парадигмата за възвръщаемост спрямо риск е успешна, тогава този портфейл трябва да бъде част от ефективната граница.[6]

Модел за оценка на капиталови активи (Capital Asset Pricing Model)

Моделът е въведен през 60-те години от различни автори независимо, тъй като представлява лесно и интуитивно опростяване на модела на Марковиц. CAPM е модел, който като моделът на Марковиц приема, че всеки актив следва нормално разпределение. При този модел обаче активите не са корелирани помежду си както в модела на Марковиц. Вместо това всички активи са линейна регресия на един единствен актив. Този модел предполага, че всеки актив е линейна регресия на целия

[6] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance (Vol. 7).

пазар. Този пазар е представен в модела чрез опредлен акти, който се нарича „пазарен портфейл". Това е порфейл, формиран от претеглената сума на всички съществуващи активи със същите тежести, с които участват в пазара, приемайки, че тези активи са безкрайно делими. Моделът приема следните предположения:

Всички инвеститори:

- Се опитват да максимизират икономическата полезност, са разионални и не са склонни към поемане на рискове.
- Са широко диверсифицирани между диапазон от инвестиции.
- Не могат да влияят върху цените, а ги приемат.
- Могат да дават и взимат на заем неограничени количества под безрисковия лихвен процент.
- Могат да търгуват през разходи за транзакции.

Освен това се предполага, че цялата информация е налична за всички в същото време.[7]

Линия на капиталовия пазар

Линията на капиталовия пазар отразява зависимостта между доходност и риск на ефективните портфейли, която се определя от Модела за оценка на капиталови активи. Обикновено тези портфейли включват комбинации на безрискови и рискови активи.

На вертикалната ос са показани очакваните норми на възвръщаемост, а на хоризонталната е показан рискът, измерен с коефициенти. Безрисковите ценни книжа (rf) имат βi = 1 и затова във фигурата са изобразени като отрязък от вертикалната ос.

Според модела за оценка на капиталовите активи всички инвеститори ще изберат позиция на линията на капиталовия пазар, като взимат и дават на заем на безрисковия процент, тъй като това максимизира възвръщаемостта за всяко ниво на риск.

Линията на капиталовия пазар се отличава от ефективната граница по това, че включва безрискови инвестиции. Там, където двете линии се пресичат, се намира най-ефективният портфейл.[8]

---

[7] Fama, E. F., & French, K. R. (n.d.). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence.
[8] Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/c/cml.asp

Линията на капиталовия пазар може да се определи по следната формула:

$$R_p = r_f + \frac{R_T - r_f}{\sigma_T}\sigma_p$$
,

където:

- R_p - възвръщаемост от портфейла
- R_f – безрисков процент
- R_t – възвръщаемост на пазара
- σ_p – стандартно отклонение на пазарната възвръщаемост
- σ_t - стандартно отклонение на възвръщаемостта от портфейла

Коригирана цена на затваряне

Коригираната цена на затваряне е изчислителна корекция, направена с цел да отразява точно стойността на тази акция след отчитане на всякакви корпоративни действия. Оригиналната цена на затваряне е крайната цена, при която акция или друг специфичен вид ценна книга се търгува, отразява цената на последната транзакция преди пазарът да затвори за дена.

Оригиналната цена на затваряне обаче не илюстрира най-точната оценка на акцията или ценната книга, тъй като няма да отчете каквито и да било действия, които биха могли да доведат до промяна на цената, като например разделения на акциите, дивиденти и т.н. Следователно коригираната цена на затваряне ще е по-точна интерпретация на представянето на акциите и е по-полезна при разглеждане на историческа информация.[9]

Методология

За целта на проучването са използвани пет актива, които са избрани на база на индустрията им, така че да попадат в различни, което допринася за диверсификацията на портфейла:

- Morgan Stanley – финанси;

[9] Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/a/adjusted_closing_price.asp

- Tesla Inc – автомобилна индустрия;
- Amazon.com Inc – търговия;
- Walt Disney Co – медийни услуги;
- Злато като суровина.

Използвани са исторически цени от януари 2012 до момента. Данните са изтеглени от Yahoo Finance.

Приложение в Python

Използван е Python 3.7.0 и библиотеките Numpy, Pandas, Matplotlib, Pandas_datareated, Scipy.

Първоначално са заредени всички използвани библиотеки.

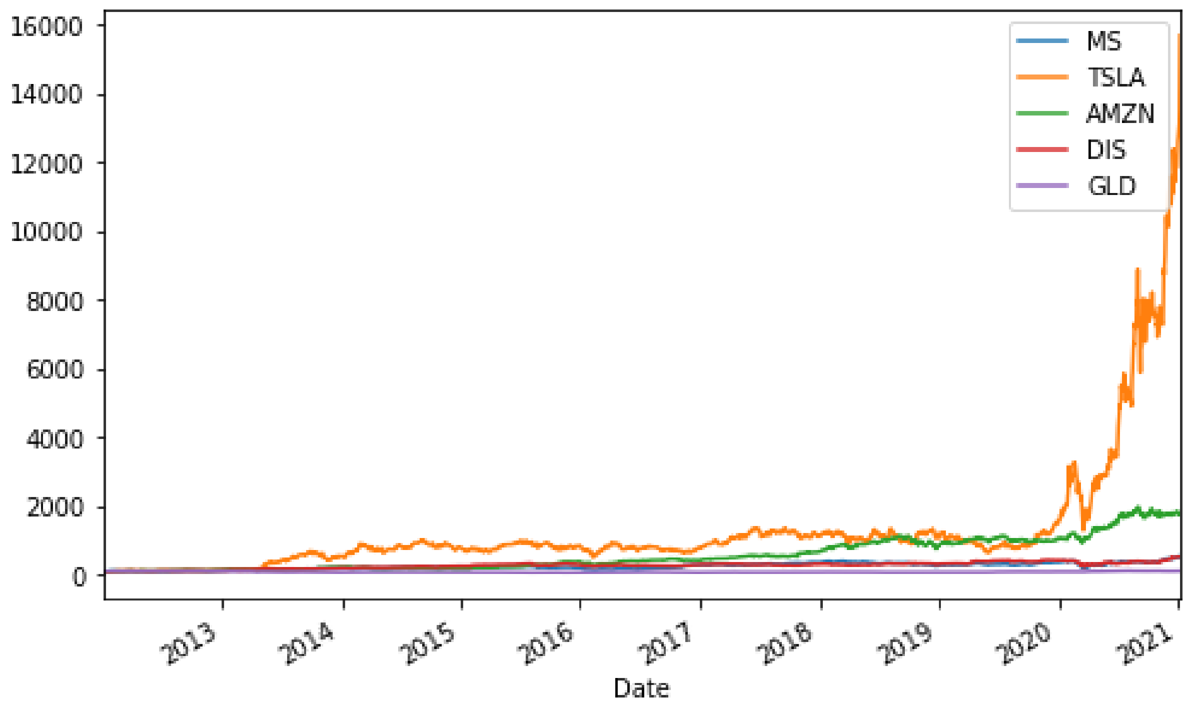
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from pandas_datareader import data as wb  #module has to be installed
import scipy.optimize as sco
import scipy.interpolate as sci
```

Следва да се импортират данни за избраните активи. За целта се създава вектор, съдържащ символите, с които се означават активите. Създава се променлива len, в която се записва броят на активите. Създава се нова таблица, която се запълва с историческите данни за коригираната цена на затваряне.

```
symbols = ['MS', 'TSLA', 'AMZN', 'DIS','GLD']
noa = len(symbols)
data = pd.DataFrame()
for sym in symbols:
 data[sym] = wb.DataReader(sym, data_source='yahoo',
 start='2012-01-01')['Adj Close']
```

Може да се проследи движението на активите във времето, като се начертае графика с нормализираните им цени.

```
(data / data.iloc[0] * 100).plot(figsize=(8, 5))
```



От графиката може да се види, че водеща през повечето време е TESLA.

При конструирането на оптимално портфолио вместо цените се използват възвръщаемостите. За изчисляването има се използва логаритмична функция.

```
rets = np.log(data / data.shift(1))
```

Сега отново начертаваме графика, но този път с възвръщаемостите.

```
plt.figure(figsize=(14, 7))
for c in rets.columns.values:
   plt.plot(rets.index, rets[c], lw=3, alpha=0.8,label=c)
plt.legend(loc='upper right', fontsize=12)
plt.ylabel('daily returns')
```

Може да се види, че Тесла има най-много отличаващи се големи промени – както положителни, така и отрицателни. От това можем да определим, че акциите на Тесла са най-рискови от избраните, докато например при златото не виждаме значителни големи промени, което означава, че е по-стабилна инвестиция.

Можем да разгледаме някои основни статистики.

Първо можем да видим средната годишна възвръщаемост на всеки актив. Умножението по 252 се извършва, тъй като в годината има 252 дни на търгуване.

```
rets.mean() * 252
```

Получаваме средни стойности:

AMZN 0.319629

GLD 0.011763

DIS 0.183307

TSLA 0.561344

MS 0.190331

Следва да проверим и ковариацията и корелацията между активите.

```
rets.cov() * 252
```

	MS	TSLA	AMZN	DIS	GLD
MS	0.105429	0.051126	0.034867	0.043623	-0.003776
TSLA	0.051126	0.309477	0.054631	0.034744	0.003215
AMZN	0.034867	0.054631	0.093759	0.024468	-0.000078
DIS	0.043623	0.034744	0.024468	0.058841	-0.001601
GLD	-0.003776	0.003215	-0.000078	-0.001601	0.023419

```
rets.corr()
```

	MS	TSLA	AMZN	DIS	GLD
MS	1	0.283041	0.350689	0.553860	-0.076001
TSLA	0.283041	1	0.320717	0.257467	0.037770
AMZN	0.350689	0.320717	1	0.329418	-0.001662
DIS	0.553860	0.257467	0.329418	1	-0.043123
GLD	-0.076001	0.037770	-0.001662	-0.043123	1

Едно от основните предположения е, че инвеститорът не може да задава къси позиции. Само дълги позиции са позволени, което означава, че 100% от богатството на инвеститора трябва да бъде разпределено между активите по такъв начин, че всички позиции да са дълги и всички заедно да се сумират до 100%.

Уравнението[10] показва формулата за очакваната възвръщаемост от портфолиото предвид зададените тегла на всеки актив.

[10] Hilpisch, Y. (2015). Python for Finance. Retrieved from http://oreilly.com/catalog/errata.csp?isbn=9781491945285

$$\begin{aligned} \mu_p &= E\left(\sum_I w_i r_i\right) \\ &= \sum_I w_i E(r_i) \\ &= \sum_I w_i \mu_i \\ &= w^T \mu \end{aligned}$$
,

където:

- I - брой активи
- r_i - вектор с нормално разпределени възвръщаемости
- i - очаквана възвръщаемост за актив i
- w_i – тегло, като $Iw_i=1$ и $w_i>=0$
- w^T - транспониран вектор от теглата

Решението, което трябва да вземем, е как да разпределим бюджета за всеки актив от портфейла. Ако нашият общ бюджет е 1, можем да определим теглата така, че да имат сбор равен на 1. За симулация на базовата теория ще генерираме пет случайно числа между 0 и 1 и ще нормализираме стойностите, така че сумата от всички да е равна на 1. Това са теглата.

```
weights = np.random.random(noa)
weights /= np.sum(weights)
```

Получаваме тегла:

0.09490678	0.19203857	0.13243488	0.37246436	0.20815541

С получените тегла и годишните средни стойности на възрвъщаемостите можем да получим очакваната възвръщаемост от портфейла.

```
np.sum(rets.mean() * weights) * 252
```

Очакваната възвръщаемост е 0.23891728075512025.

По същия начин можем да получим и очакваната дисперсия и очакваното стандартно отклонение.

Дисперсията между два актива ABC и XYZ може да се дефинира като:

$$\text{Covariance} = \frac{\sum (Return_{ABC} - Average_{ABC}) * (Return_{XYZ} - Average_{XYZ})}{(\text{Sample Size}) - 1}$$

Формулата за очакваната дисперсия е: $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2 2\sigma_2^2 + 2w_1w_2Cov_{1,2}$[11], където:

- w1 = тегло на първия актив
- w2 = тегло на втория актив
- σ1= стандартно отклонение на първия актив
- σ2 = стандартно отклонение на втория актив
- Cov1,2 = ковариацията между два актива, която може да бъде представена и като $p_{(1,2)}\sigma_1\sigma_2$, където p(1,2) е коефициентът на корелация между двата активка.

В Python тези изчисления могат да се извършат с помощта на NumPy библиотеката.

```
np.dot(weights.T, np.dot(rets.cov() * 252, weights))
```

Очакваната дисперсия е 0.039027378998407886.

```
np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(rets.cov() * 252, weights)))
```

Очакваното стандартно отклонение е 0.1975534838933697.

С това се поставят основите на селектирането на портфейл на база на средна стойност и дисперсия. От особено значение за инвеститорите са възможните профили на риск и възвръщаемост за даден набор от активи. За получаването на случайни тегла ще приложим Монте Карло симулация. Това става в цикъл, като на всяка итерация се симулира различно разпределение и се записват очакваната възвръщаемост и очакваната дисперсия.

```
prets = []
pvols = []
for p in range (2500):
```

[11] https://www.investopedia.com/terms/p/portfolio-variance.asp

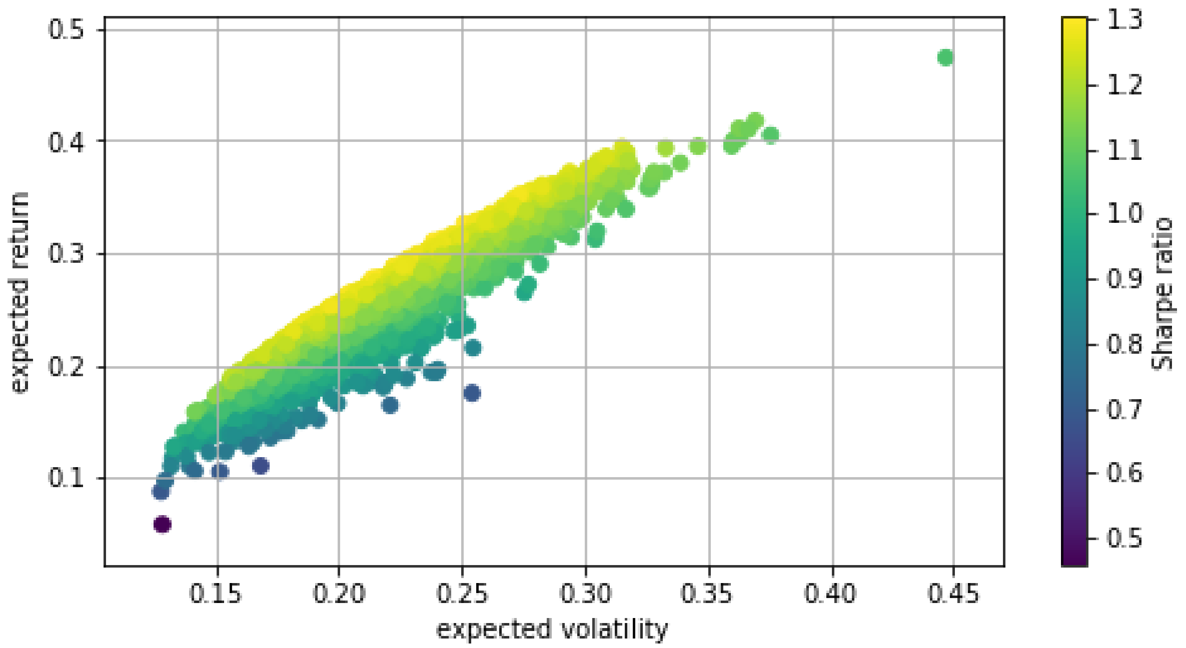
```
weights = np.random.random(noa)
weights /= np.sum(weights)
prets.append(np.sum(rets.mean() * weights) * 252)
pvols.append(np.sqrt(np.dot(weights.T,
 np.dot(rets.cov() * 252, weights))))

prets = np.array(prets)
pvols = np.array(pvols)
```

За да илюстрираме резултатите от симулацията, построяваме графика.

```
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.scatter(pvols, prets, c=prets / pvols, marker='o')
plt.grid(True)
plt.xlabel('expected volatility')
plt.ylabel('expected return')
plt.colorbar(label='Sharpe ratio')
```

Освен информация за очакваната възвръщаемост и очакваната дисперсия, получаваме и информация за т.нар. Шарп коефициент. Коефицентът на Шарп измерва постигнатата доходност спрямо поетия риск. Колкото е по висок коефицента на Шарп, толкова по-добре.



Ясно се вижда, че с увеличаването на възвръщаемостта нараства и очакваната дисперсия и за дадено ниво на риск има множество портфейли с различна възвръщаемост. Инвеститорите се интересуват от максималната възвръщаемост, която могат да постигнат за дадено ниво на риск, или минималният риск за дадено ниво на възвръщаемост. Този набор от портфейли съставя т.нар. ефективна граница (efficient frontier).

За да улесним работата си, можем да създадем функция, която връща основните статистики за портфейла – очаквана възвръщаемост, очаквана дисперсия, коефициент на Шарп, като приема като вход вектор от тегла.

```
def statistics(weights):
 weights = np.array(weights)
 pret = np.sum(rets.mean() * weights) * 252
 pvol = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(rets.cov() * 252, weights)))
 return np.array([pret, pvol, pret / pvol])
```

Получаването на оптималния портфейл в основата си е опцимизационен проблем. Целта е да се максимизира коефициента на Шарп (или да се минимизира отрицателната му стойност). Създаване функция, която извършва това.

```
def min_func_sharpe(weights):
 return -statistics(weights)[2]
```

Ограничението е, че сумата от теглата трябва да е равна на 1, което може да формулираме по следния начин:

```
cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
```

Също така трябва да ограничим теглата да бъдат между 0 и 1.

```
bnds = tuple((0, 1) for x in range(noa))
```

Остава само да зададем първоначално предположение за теглата. За целта използваме равно разпределение.

```
noa * [1. / noa,]
```

По този начин всеки актив получава първоначално тегло от 0.2.

Вече можем да извикаме функцията minimize от библиотеката scipy.optimize.

```
opts = sco.minimize(min_func_sharpe, noa * [1. / noa,], method='SLSQP',
bounds=bnds, constraints=cons)
```

Резултатът от функцията е обект, съдържащ множество различни данни. От него извличаме единствено оптималната композиция на портфейла.

0	0.229	0.426	0.264	0.081

Резултатът от оптимизацията е портфейл, включващ само четири от първоначалните пет актива.

Следва да проверим и статистиките на портфейла.

```
statistics(opts['x']).round(3)
```

Портфейлът има очаквана възвръщаемост от 31.4%, очаквана дисперсия от 24.1%, а коефициентът на Шарп е 1.305.

Следва да повторим същите стъпки, но този път за да създадем портфейл с минимална очаквана дисперсия. За целта дефинираме функция, която минимизира дисперсията.

```
def min_func_variance(weights):
 return statistics(weights)[1] ** 2
```

След това по същия начин извикваме функцията.

```
optv = sco.minimize(min_func_variance, noa * [1. / noa,],
method='SLSQP', bounds=bnds,
constraints=cons)
```

От получения резултат извличаме само композицията на портфейла.

0.056	0	0.089	0.194	0.661

Този път отново четири от петте актива са част от портфейла.

Проверяваме и статистиките.

```
statistics(optv['x']).round(3)
```

Портфейлът има очаквана възвръщаемост от 8.2%, очаквана дисперсия от 12.2%, а коефициентът на Шарп е 0.673.

Ефективна граница

Сега можем да начертаем ефективната граница по същия начин. Единствената разлика тук е, че трябва да итерираме по множество първоначални условия. Подходът, който възприемаме е, че фиксираме нивото на възвръщаемост и за всяко ниво получаваме тези тегла, които водят до минимална дисперсия.

Първо създаваме две условия – за фиксираните възвръщаемости и за сумата на теглата, и задаваме границите на теглата.

```
cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: statistics(x)[0] - tret},
{'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
bnds = tuple((0, 1) for x in weights)
```

След това дефинираме функция за минимизиране, която връща дисперсията от statistics функцията.

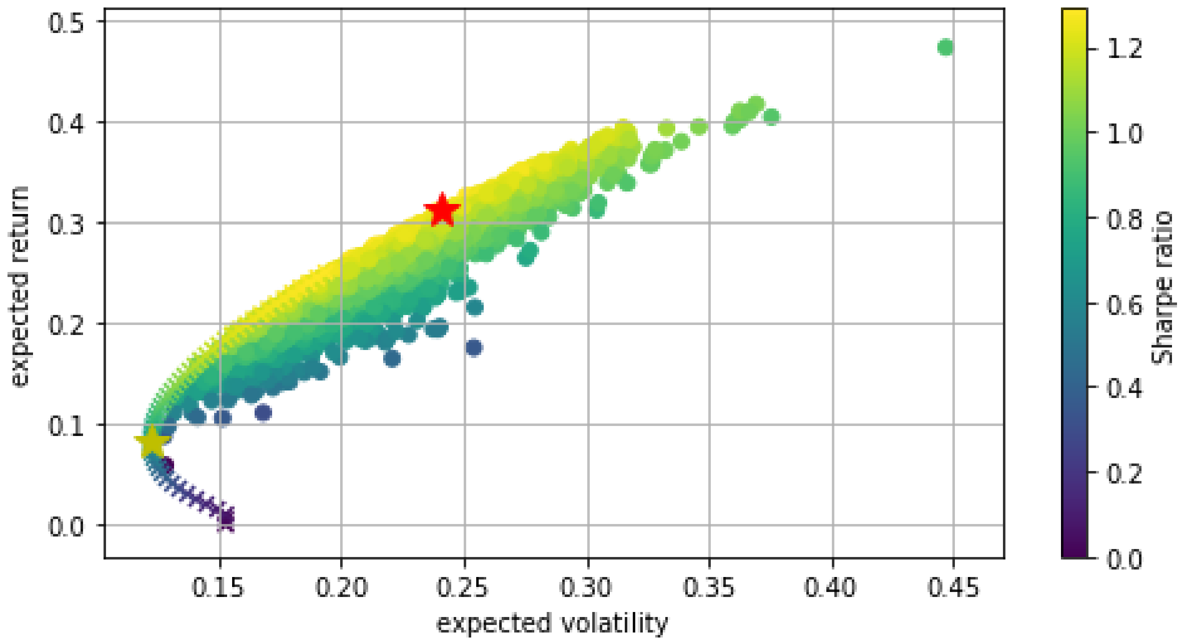
```
def min_func_port(weights):
 return statistics(weights)[1]
```

При итерацията по различни нива на възвръщаемост, едно от условията се променя, поради което речника с условия (cons) се актуализира на всяка итерация.

```
trets = np.linspace(0.0, 0.25, 50)
tvols = [] #condition dictionary
# iterate over target returns levels
for tret in trets:
 cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: statistics(x)[0] - tret},
{'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})
 res = sco.minimize(min_func_port, noa * [1. / noa,], method='SLSQP',
 bounds=bnds, constraints=cons)
 tvols.append(res['fun'])
tvols = np.array(tvols)
```

Визуализираме резултатите от оптимизацията.

```
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.scatter(pvols, prets, c=prets / pvols, marker='o')
plt.scatter(tvols, trets,
c=trets / tvols, marker='x')
plt.plot(statistics(opts['x'])[1], statistics(opts['x'])[0],
'r*', markersize=15.0)
plt.plot(statistics(optv['x'])[1], statistics(optv['x'])[0],
'y*', markersize=15.0)
plt.grid(True)
plt.xlabel('expected volatility')
plt.ylabel('expected return')
plt.colorbar(label='Sharpe ratio')
```



X-овете индикират оптималните портфейли за всяко ниво на възвръщаемост, а двете големи звезди показват портфейла с минимална дисперсия (в най-ляво) и портфейла с максимален коефициент на Шарп. Ефективната граница се състои от всички оптимални портфейли с по-висока възвръщаемост от портфейла с минимална дисперсия. Тези портфейли доминират всички останали по отношение на очакваната възвръщаемост за дадено ниво на риск.

Линия на капиталовия пазар

За изчисляването на линията на капиталовия пазар ни е необходима функционална приблизителна стойност и първият дериват на ефективната граница. За получаването им използваме кубична сплайн интерполация, като включваме само портфейлите от ефективната граница.

```
ind = np.argmin(tvols)
evols = tvols[ind:]
erets = trets[ind:]
tck = sci.splrep(evols, erets)
```

Вече имаме възможност да дефинираме продължителна деференцируема функция f(x) за ефективната граница и функция за първия дериват df(x).

```
def f(x):
```

```
 ''' Efficient frontier function (splines approximation). '''
 return sci.splev(x, tck, der=0)
def df(x):
 ''' First derivative of efficient frontier function. '''
 return sci.splev(x, tck, der=1)
```

Функцията, която описва капиталовата пазарна линия, трябва да отговаря на няколко условия, представени със следните уравнения:

$$
\begin{aligned}
t(x) &= a + b \cdot x \\
t(0) &= r_f && \Leftrightarrow \quad a = r_f \\
t(x) &= f(x) && \Leftrightarrow \quad a + b \cdot x = f(x) \\
t'(x) &= f'(x) && \Leftrightarrow \quad b = f'(x)
\end{aligned}
$$

За решаването на тези уравнение дефинираме функция, която връща резултатите от тях.

```
def equations(p, rf=0.01):
 eq1 = rf - p[0]
 eq2 = rf + p[1] * p[2] - f(p[2])
 eq3 = p[1] - df(p[2])
 return eq1, eq2, eq3
```

За решаването на фуникцията използваме функцията fsolve от scipy.optimize. Задаваме първоначална параметризация в допълнение към функцията с уравнения.

```
opt = sco.fsolve(equations, [0.01, 0.5, 0.15])
```

Получаваме следния резултат:

```
([0.01      , 1.31438343, 0.24453399])
```

Както искахме, a=rf=0.01.

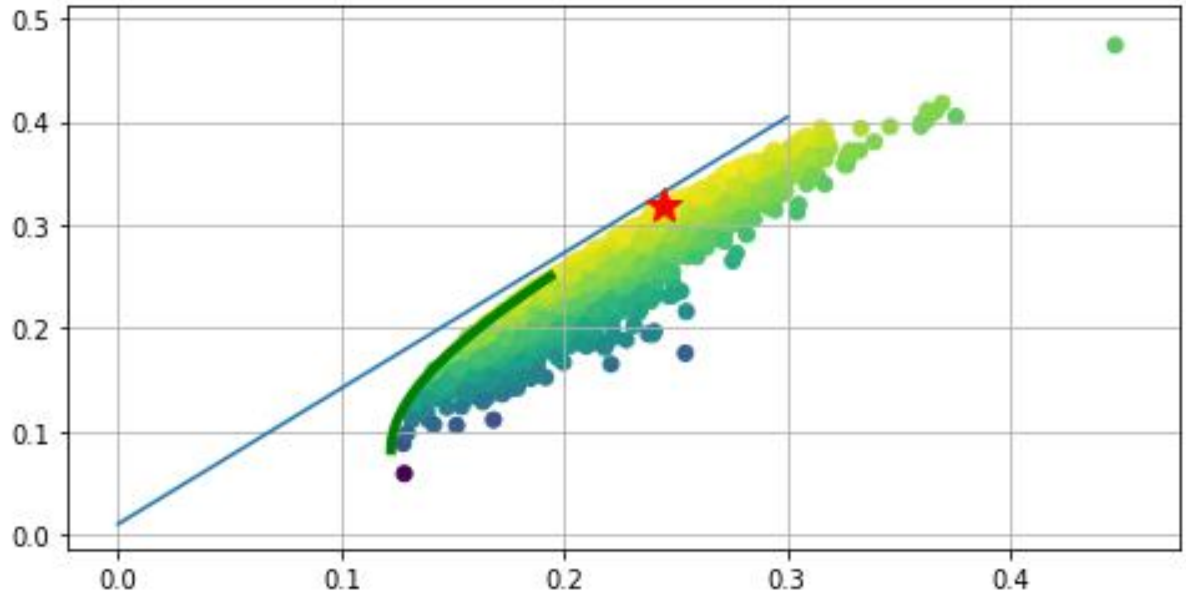
Проверяваме и резултата от уравненията, който също е очакваният.

```
np.round(equations(opt), 6) Out: [ 0.      ,  0.012276, -0.003001]
```

Визуализираме резултатите.

```
plt.figure(figsize=(8, 4))
```

```
plt.scatter(pvols, prets,
c=(prets - 0.01) / pvols, marker='o')
plt.plot(evols, erets, 'g', lw=4.0)
cx = np.linspace(0.0, 0.3)
plt.plot(cx, opt[0] + opt[1] * cx, lw=1.5)
plt.plot(opt[2], f(opt[2]), 'r*', markersize=15.0)
plt.grid(True)
plt.axhline(0, color='k', ls='—', lw=2.0)
plt.axvline(0, color='k', ls='—', lw=2.0)
plt.xlabel('expected volatility')
plt.ylabel('expected return')
plt.colorbar(label='Sharpe ratio')
```



Звездата показва оптималния портфейл от ефективната граница, където капиталовата пазарна линия ще пресече точката на безрискова инвестиция (0, rf=0.01).

Проверяваме оптималните тегла на портфейла.

0	0.234	0.433	0.265	0.068

Само четири от първоначалните пет актива са включени в портфейла.

Проверяваме и статистиките на портфейла.

```
statistics(res['x'].round(3))
```

Портфейлът има очаквана възвръщаемост от 31,9%, очаквана дисперсия от 24,4%, а коефициентът на Шарп е 1.305.

Допълнителна диверсификация

Един от начините за получаване на по-голяма диверсификация е избиране на активи, които не са корелирани, или имат негативна корелация помежду си. По този начин, ако цената на един актив рязко спадне, то не се очаква същото да се случи и с другите. Може да се постигне, като за първоначален набор от активи се изберат повече на брой, след което се определят възвръщаемостите им и се прегледа корелационната матрица. Този подход обаче не важи за времена на икономически кризи, тъй като тогава тенденцията е повечето активи да вървят в една посока, което ги прави корелирани. [12]

[12] https://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/uncorrelated-assets-diversification.asp#:~:text=Correlation%20statistically%20measures%20the%20degree,assets%20included%20in%20the%20portfolio.