• قضیه ۱) بسط جمله‌ای تیلور $\ln(1+x)$ به صورت زیر است: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$

حول $x_0 = 0$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \longrightarrow \text{به استقرا}$$

$$f^{k}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$f^{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)! \times -k}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^k} \checkmark$$

$$\xrightarrow{x_0=0} \frac{f^{k}(x_0) x^k}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \longrightarrow$$ مساوی جمله‌ها با جملات تیلور ✓

• قضیه ۲) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$\xrightarrow{\text{تابع یک‌به‌یک و پوشا}} x = \sinh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{x + \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1}}{2} = x \checkmark$$

• قضیه ۳) بسط جمله‌ای تیلور $1/(1-x)$ به صورت زیر است: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$

حول $x_0 = 0$

$$f(x) = 1/(1-x)$$

$$f'(x) = -1/(1-x)^2 \longrightarrow \text{به استقرا}$$

$$f^{k}(x) = \frac{k!}{(1-x)^k} \longrightarrow f^{k+1}(x) = \frac{-(k+1)k! \times -1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+1}} \checkmark$$

$x_0 = 0 \longrightarrow \dfrac{f^{(k)}(x_0)\, x^k}{k!} = x^k \longrightarrow$ مساوی جمله‌های چند جمله‌ای تیلور ✓

• تمرین ۴) $\cos x \geq 1 - x^2/2$ ، برای چند جمله‌ای درجه ۲ $\cos x$ داریم:

بین $x \in [0,1]$

$P_2(x) = 1 - x^2/2$

$\text{error} = \dfrac{\sin(c)\, x^3}{3!} \xrightarrow{\sin c \geq 0} \text{error} \geq 0 \longrightarrow \cos x = 1 - x^2/2 + \text{error}$

$c \in [0,1]$

$\cos x \geq 1 - x^2/2$ ✓

• تمرین ۵) $\sin x \leq x$ ، برای چند جمله‌ای درجه ۱ $\sin x$ داریم:

بین $x \in [0,1]$

$P_1(x) = x$

$\text{error} = \dfrac{-\sin(c)\, x^2}{2!} \xrightarrow{\sin c \geq 0} \text{error} \leq 0 \longrightarrow \sin x = x + \text{error}$

$c \in [0,1]$

$\sin x \leq x$ ✓

تمرین محاسبات عددی

پردین شاهدی ۴۰۱۱۰۶۰۹۴

1 الف)

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

روش ۱ $\rightarrow \ln(1+x) = \sum_{K=1}^{\infty} -\frac{(-1)^K x^K}{K}$

$$\rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K(-x)^K}{K} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^K}{K}$$

$$\rightarrow \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^K}{K}\left(1-(-1)^K\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \checkmark$$

ب) روش ۲ $\rightarrow \sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \rightarrow f(0)=0$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow f'(0)=1$$

$$\frac{d^2 \sinh^{-1} x}{dx^2} = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}} \rightarrow f''(0)=0$$

$$\frac{d^3 \sinh^{-1} x}{dx^3} = -\frac{(x^2+1)^{3/2} - 3x^2(x^2+1)^{1/2}}{(x^2+1)^3} = \frac{3x^2}{(x^2+1)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \rightarrow f^{3}(0) = -1$$

$$\frac{d^4 \sinh^{-1} x}{dx^4} = \frac{6x(x^2+1)^{5/2} - 15x^3(x^2+1)^{3/2}}{(x^2+1)^5} + \frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{9x}{(x^2+1)^{5/2}} - \frac{15x^3}{(x^2+1)^{7/2}}$$

$$\rightarrow f^{4}(0)=0$$

$$\frac{d^5 \sinh^{-1} x}{dx^5} = \frac{90x^2}{(1+x^2)^{7/2}} + \frac{9}{(1+x^2)^{5/2}} + \frac{105x^4}{(1+x^2)^{9/2}} \longrightarrow f^{(5)}(0) = 9$$

$$\longrightarrow \sinh^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} \checkmark$$

ج) $$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2-x} + \frac{4}{x-3} = \frac{3/2}{1-x/2} - \frac{4/3}{1-x/3}$$

$$\text{تمرین ۳} \longrightarrow 1/1-x = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$\longrightarrow \frac{x+1}{x^2-5x+6} = 3/2 \sum_{i=0}^{\infty} (x/2)^i - 4/3 \sum_{i=0}^{\infty} (x/3)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{i+1}} - \frac{4}{3^{i+1}}\right) x^i \checkmark$$

۲) الف) طبق تمرین ۳ داریم $$1/1-x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \longrightarrow 1/1+x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$$

$$1/1+e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (e^{-x})^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^{-ix}$$

ب) $$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^{-(i+1)x} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} e^{-ix}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} e^{-ix} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^{i+1} e^{-ix} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{e^{-ix}}{-i} \Big|_0^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \checkmark$$

ج) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \xrightarrow{u=e^{-x}} \int_1^0 \frac{-du}{1+u} = \ln(1+u)\Big]_0^1 = \ln 2$

$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ✓

۳) الف) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}dx \xrightarrow{u=e^x} \int_1^e \frac{du}{u(u-1)} = \int_1^e \frac{du}{u-1} - \int_1^e \frac{du}{u}$

$= \ln(u-1)\Big]_1^e - \ln u\Big]_1^e = -\infty \longrightarrow$ واگرا ✓

ب) تیلور ۲ $\longrightarrow \cos x \geq 1 - x^2/2$

$\longrightarrow x^2/2 \geq 1-\cos x \longrightarrow 2/x^2 \leq \frac{1}{1-\cos x}$

$\longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}dx \geq \int_0^1 2/x^2\,dx = -2/x\Big]_0^1 = +\infty$

$\longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}dx = +\infty \longrightarrow$ واگرا ✓

ج) تیلور $\longrightarrow \sin x \leq x \longrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}$

$\longrightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2/3\, x^{3/2}\Big]_0^1 = 2/3$

$\longrightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx \leq 2/3$ + تابع روی بازه‌ی $[0,1]$ مثبت است

$\longrightarrow$ همگرا ✓

۴) طبق قضیه ۴ می‌دانیم

$$\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots$$

خطای مرتبه ۲n+۱ چندجمله‌ای تیلور $\cos x$ ←

$$e = \left| \frac{\cos^{(2n+2)}(c)\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|$$

$$e = \left| \frac{\cos(c)\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| < 10^{-3}$$

کافی است تا درجه‌ی ۳ را محاسبه کنیم

$$\xrightarrow{\text{for } n=1} e < 10^{-3} \checkmark$$

$$\longrightarrow \cos(\pi/9) \approx P_3(\pi/9) = 1 - \tfrac{1}{2}(\pi/9)^2 = \underline{0.939} \checkmark$$

۵) الف) برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی ۲ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$P_2(x,y,z) = f(1,1,1) + \left((x-1)\partial/\partial x + (y-1)\partial/\partial y + (z-1)\partial/\partial z\right) f(1,1,1)$$
$$+ \left((x-1)\partial/\partial x + (y-1)\partial/\partial y + (z-1)\partial/\partial z\right)^2 f(1,1,1)/2!$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x e^{x^2+yz}}{y+z} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = e^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z\, e^{x^2+yz}(y+z) - e^{x^2+yz}}{(y+z)^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = e^2/4$$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = e^2/4$ ← تقارن y و z در مسئله

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2e^{x^2+yz} + 4x^2 e^{x^2+yz}}{y+z} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) = 3e^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \times \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{x^2+yz}}{y+z} = 2x \frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{@(1,1,1)} = e^2/2$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) = e^2/2 \longleftarrow$ تقارن y, z در مسئله

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(z - \frac{1}{y+z}\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(z - 1/_{y+z}\right) + \frac{f}{(y+z)^2} \longrightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{@(1,1,1)} = e^2/4$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) = e^2/4 \longleftarrow$ تقارن y, z در مسئله , $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(f\left(z - 1/_{y+z}\right)\right)$

$\longrightarrow @(1,1,1) = 3e^2/4$

در نهایت داریم:

$$P_2(x,y,z) = \frac{e^2}{2} + e^2(x-1) + e^2/4\,(y-1) + e^2/4\,(z-1)$$
$$+ 3e^2/2\,(x-1)^2 + e^2/8\,(y-1)^2 + e^2/8\,(z-1)^2$$
$$+ e^2/2\,(x-1)(y-1) + e^2/2\,(x-1)(z-1) + 3e^2/4\,(y-1)(z-1) \checkmark$$

ب) برای محاسبه خطای تیلور مرتبه ۱ داریم:

$f(x,y) = \quad \sqrt{x^2+y^3}$

$$f(x,y) = f(1,2) + 0.04 \frac{\partial}{\partial x} f(1,2)$$
$$- 0.02 \frac{\partial}{\partial y} f(1,2) + e \longleftarrow \text{خطا}$$

$$e = \frac{0.04^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_c, y_c) + \frac{0.02^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_c, y_c) + 0.04 \times 0.02 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_c, y_c)$$

• طوری که x_c در بازه [۱, ۱٫۰۴] ، y_c در بازه [۱٫۹۸, ۲] قرار دارد.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^3}{(x^2+y^3)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \to @(1,2)=1/3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3(4x^2y+y^4)}{4(x^2+y^3)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \to @(1,2)=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-3xy^2}{2(x^2+y^3)^{3/2}}$$

$$\xrightarrow[y\in[1.98,\,2]]{x\in[1,\,1.03]} (x^2+y^3)^{3/2}>25 \to \frac{1}{(x^2+y^3)^{3/2}}<25^{-1}$$

$$'' \to \left|\partial^2 f/\partial x^2\right| < 8/25 < 0.5$$

$$'' \to \left|\partial^2 f/\partial y^2\right| < \frac{3\times 32}{4\times 25} < 1 \quad (x^2<2)$$

$$'' \to \left|\partial^2 f/\partial x\partial y\right| < 12/25 < 0.5$$

$$\to e < 0.5\times\frac{0.03^2}{2}+1\times\frac{0.02^2}{2}+0.5\times 0.02\times 0.03 = 6.25\times 10^{-4} < 10^{-3}$$

تقریب مرتبه ۱ تیلور کافی می باشد.

$$\to f(1.03,\,1.98) \approx \underset{3}{f(1,2)} + 0.03\,\frac{\partial}{\partial x}\underset{1/3}{f(1,2)} - 0.02\,\frac{\partial}{\partial y}\underset{2}{f(1,2)} = \underline{2.970}\ \checkmark$$