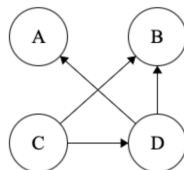
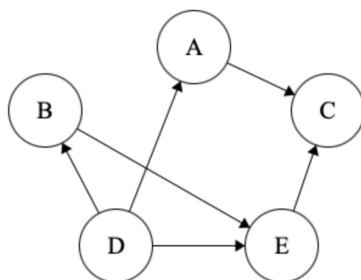


سوال اول

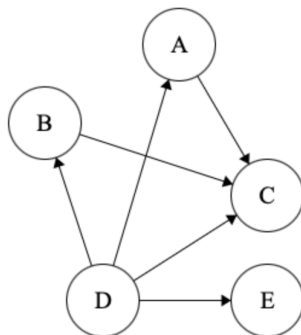
شکل زیر را برای جهت هرکدام از یال‌ها پیشنهاد می‌دهیم. سپس تمام مسیرهای بدون جهت از متغیر A به B را بررسی می‌کنیم.
مسیر ADB: این مسیر فقط از یک سه‌تایی تشکیل شده است که یک سه‌تایی غیرفعال علت‌مشتک است. (غیر فعال چون وضعیت متغیر D را می‌دانیم.)
مسیر ADCB: این مسیر از دو سه‌تایی تشکیل شده است. از بین این سه‌تایی‌ها یک سه‌تایی غیرفعال زنجیره‌ای است. (غیر فعال چون وضعیت متغیر D را می‌دانیم.)
در نتیجه داریم: $A \perp B \mid D$



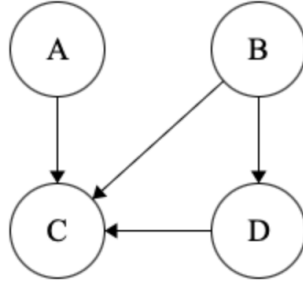
مسیر ADB: این مسیر فقط از یک سه‌تایی تشکیل شده است که یک سه‌تایی غیرفعال علت‌مشتک است. (غیر فعال چون وضعیت متغیر D را می‌دانیم.)
مسیر ACEB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال اثرمشتک (ACE) دیده می‌شود که بعلت مشاهده نشدن C، غیر فعال است.
مسیر ACEDB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال اثرمشتک (ACE) دیده می‌شود که بعلت مشاهده نشدن C، غیر فعال است.
مسیر ADEB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال علت‌مشتک (ADE) دیده می‌شود که بعلت مشاهده شدن D، غیر فعال است.
در نتیجه داریم: $A \perp B \mid D$



مسیر ADB: این مسیر فقط از یک سه‌تایی تشکیل شده است که یک سه‌تایی غیرفعال علت‌مشتک است. (غیر فعال چون وضعیت متغیر D را می‌دانیم.)
مسیر ACB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال اثرمشتک (ACB) دیده می‌شود که بعلت مشاهده نشدن C، غیر فعال است.
مسیر ACDB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال اثرمشتک (ACD) دیده می‌شود که بعلت مشاهده نشدن C، غیر فعال است.
در نتیجه داریم: $A \perp B \mid D$



مسیر ACB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال اثرمشترک (ACB) دیده می‌شود که بعلت مشاهده نشدن C، غیر فعال است.
 مسیر ACDB: در این مسیر یک سه‌تایی غیرفعال زنجیره‌ای (BDC) دیده می‌شود که بعلت مشاهده شدن D، غیر فعال است.
 در نتیجه داریم: $A \perp B \mid D$



سوال دوم)

$$\begin{aligned}
 P(A, C, D|+f) &\propto P(A, C, D, +f) = \\
 \sum_{b,g,e} P(A, B=b, C, D, E=e, +f, G=g) &= \sum_{b,g,e} P(A)P(b|A)P(C|b)P(e|b)P(D|e)P(+f|D, e)P(g|+f) = \\
 \sum_{b,g} P(A)P(b|A)P(C|b)P(g|+f) \sum_e P(e|b)P(D|e)P(+f|D, e) &= \sum_{b,g} P(A)P(b|A)P(C|b)P(g|+f) f_1(b, D, +f) = \\
 \sum_b P(A)P(b|A)P(C|b) f_1(b, D, +f) \sum_g P(g|+f) &= \sum_b P(A)P(b|A)P(C|b) f_1(b, D, +f) f_2(+f) = \\
 P(A) \sum_b P(b|A)P(C|b) f_1(b, D, +f) f_2(+f) &= P(A) f_3(A, C, D, +f)
 \end{aligned}$$

$$f_1(b, D, +f) = \sum_e P(e|b)P(D|e)P(+f|D, e) = P(D, +f|b)$$

$$f_2(+f) = \sum_g P(g|+f) = 1$$

$$f_3(A, C, D, +f) = \sum_b P(b|A)P(C|b) f_1(b, D, +f) f_2(+f) = \sum_b P(b|A)P(C|b)P(D, +f|b) = P(C, D, +f|A)$$

$$P(A) f_3(A, C, D, +f) = P(A)P(C, D, +f|A) = P(A, C, D, +f) \rightarrow \text{correct solution}$$

- 1) f_1 was created by joining the tables of variables E, D and $F = +f$ then summing out E
- 2) f_2 was created by summing out $G = g$ on the table for variable G
- 3) f_3 was created by joining the tables of variables B, C, f_1, f_2 then summing out B

سوال سوم)
(الف)

$$\begin{aligned}
 w_1 &= P(+b|+a) \times P(-c|+a, +b) = 0.8 \times 0.6 = 0.48 \\
 w_2 &= P(+b|-a) \times P(-c|-a, +b) = 0.3 \times 0.75 = 0.225 \\
 w_3 &= P(+b|-a) \times P(-c|-a, +b) = 0.3 \times 0.75 = 0.225 \\
 w_4 &= P(+b|+a) \times P(-c|+a, +b) = 0.8 \times 0.6 = 0.48 \\
 w_5 &= P(+b|+a) \times P(-c|+a, +b) = 0.8 \times 0.6 = 0.48
 \end{aligned}$$

$$P(+a|+b, -c) = \frac{w_1 + w_4 + w_5}{\sum w_i} = 0.762$$

(ب)

$$P_{\text{Prior}}(+d) = \frac{\#(\text{samples with } +d)}{\#(\text{samples})} = 0.6$$

(ج)

$$\begin{aligned}
&\rightarrow P(+b|+a, +c, +d) \\
&= \frac{P(+a, +b, +c, +d)}{\sum_b P(+a, b, +c, +d)} \\
&= \frac{P(+a)P(+b|+a)P(+c|+a, +b)P(+d|+a)}{\sum_b P(+a)P(b|+a)P(+c|+a, b)P(+d|+a)} \\
&= \frac{P(+a)P(+b|+a)P(+c|+a, +b)P(+d|+a)}{P(+a)P(+d|+a) \sum_b P(b|+a)P(+c|+a, b)} \\
&= \frac{P(+b|+a)P(+c|+a, +b)}{\sum_b P(b|+a)P(+c|+a, b)} = \frac{0.8 \times 0.4}{0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.8} = 0.667
\end{aligned}$$

سوال چهارم)

$$P_{\infty}(A) = 0.1P_{\infty}(S) + 0.6P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(S) = 0.8P_{\infty}(S) + 0.6P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(R) = 0.2P_{\infty}(S) + 0.4P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(S) + P_{\infty}(R) = 1$$

$$\rightarrow P_{\infty}(S) = 0.75, P_{\infty}(R) = 0.25$$

$$\rightarrow P_{\infty}(A) = 0.075 + 0.15 = 0.225$$

سوال پنجم)

(الف)

جداول احتمال مدل پنهان مارکوف به این صورت است:

X_t	O_t	$P(O_t X_t)$
Awake	Noise	0.7
Awake	No Noise	0.3
Sleep	Noise	0.1
Sleep	No Noise	0.9

X_t	X_{t+1}	$P(X_{t+1} X_t)$
Awake	Awake	0.7
Awake	Sleep	0.3
Sleep	Sleep	0.6
Sleep	Awake	0.4

X_0	$P(X_0)$
Awake	0.7
Sleep	0.3

(ب)

$$P(x_t, e_{1:t}) = \sum_{x_{t-1}} P(x_t, x_{t-1}, e_{1:t}) = P(e_t|x_t) \sum_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})P(x_{t-1}, e_{1:t-1})$$

$$P(x_3, 0, 1, 1) = \sum_{x_2} P(x_3, x_2, 0, 1, 1) = P(1|x_3) \sum_{x_2} P(x_3|x_2)P(x_2, 0, 1)$$

$$P(x_2, 0, 1) = \sum_{x_1} P(x_2, x_1, 0, 1) = P(1|x_2) \sum_{x_1} P(x_2|x_1)P(x_1, 0)$$

$$P(x_1, 0) = P(0|x_1)P(x_1)$$

$$P(0|0)P(0) = 0.9 \times 0.3 = 0.27$$

$$P(0|1)P(1) = 0.3 \times 0.7 = 0.21$$

$$\begin{aligned}
P(x_2 = 0, 0, 1) &= P(1|x_2 = 0) (P(x_2 = 0|x_1 = 0)P(x_1 = 0|0) + P(x_2 = 0|x_1 = 1)P(x_1 = 1|0)) \\
&= 0.1 \times (0.6 \times 0.27 + 0.3 \times 0.21) = 0.0225
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x_2 = 1, 0, 1) &= P(1|x_2 = 1) (P(x_2 = 1|x_1 = 0)P(x_1 = 0|0) + P(x_2 = 1|x_1 = 1)P(x_1 = 1|0)) \\
&= 0.7 \times (0.4 \times 0.27 + 0.7 \times 0.21) = 0.1785
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x_3 = 0, 0, 1, 1) &= P(1|x_3 = 0)(P(x_3 = 0|x_2 = 0)P(x_2 = 0|0, 1) + P(x_3 = 0|x_2 = 1)P(x_2 = 1|0, 1)) \\
&= 0.1 \times (0.6 \times 0.0225 + 0.3 \times 0.1785) = 0.006705 \\
P(x_3 = 1, 0, 1, 1) &= P(1|x_3 = 1)(P(x_3 = 1|x_2 = 0)P(x_2 = 0|0, 1) + P(x_3 = 1|x_2 = 1)P(x_2 = 1|0, 1)) \\
&= 0.7 \times (0.4 \times 0.0225 + 0.7 \times 0.1785) = 0.093765
\end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\text{No Noise, Noise, Noise}) = P(0, 1, 1) = P(x_3 = 0, 0, 1, 1) + P(x_3 = 1, 0, 1, 1) = 0.10047$$

سوال ششم)
(الف)

$$\begin{aligned}
P(x_0 = 0, O_0 = B) &= P(B|x_0 = 0)P(x_0 = 0) = 0.03 \\
P(x_0 = 1, O_0 = B) &= P(B|x_0 = 1)P(x_0 = 1) = 0.56
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
P(x_1 = 0, B, B) &= P(B|x_1 = 0)(P(x_1 = 0|x_0 = 0)P(x_0 = 0, B) + P(x_1 = 0|x_0 = 1)P(x_0 = 1, B)) \\
&= 0.1 \times (0.5 \times 0.03 + 0.4 \times 0.56) = 0.0239 \\
P(x_1 = 1, B, B) &= P(B|x_1 = 1)(P(x_1 = 1|x_0 = 0)P(x_0 = 0, B) + P(x_1 = 1|x_0 = 1)P(x_0 = 1, B)) \\
&= 0.8 \times (0.5 \times 0.03 + 0.6 \times 0.56) = 0.2808
\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
P(x_1 = 0|B, B) &= \frac{P(x_1 = 0, B, B)}{P(x_1 = 1, B, B) + P(x_1 = 0, B, B)} = \frac{0.0239}{0.3047} = 0.0784 \\
P(x_1 = 1|B, B) &= \frac{P(x_1 = 1, B, B)}{P(x_1 = 1, B, B) + P(x_1 = 0, B, B)} = \frac{0.2808}{0.3047} = 0.9216
\end{aligned}$$

Transition Probabilities:

$X_t \backslash X_{t+1}$	D	E	F	G
D	0.4	0.3273	0.1636	0.1091
E	0.24	0.4	0.24	0.12
F	0.12	0.24	0.4	0.24
G	0.1091	0.1636	0.3273	0.4

$$V_1(D) = 0.25 \times 0.011 = 0.00275$$

$$V_1(E) = 0.25 \times 0.023 = 0.00575$$

$$V_1(F) = 0.25 \times 0.140 = 0.0350$$

$$V_1(G) = 0.25 \times 0.712 = 0.178$$

$$V_2(D) = \max(V_1(D)P(D|D), V_1(E)P(D|E), V_1(F)P(D|F), V_1(G)P(D|G)) \times P(e_2|D) = V_1(G)P(D|G) \times P(e_2|D) = 1.55 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_2(E) = \max(V_1(D)P(E|D), V_1(E)P(E|E), V_1(F)P(E|F), V_1(G)P(E|G)) \times P(e_2|E) = V_1(G)P(E|G) \times P(e_2|E) = 5.53 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_2(F) = \max(V_1(D)P(F|D), V_1(E)P(F|E), V_1(F)P(F|F), V_1(G)P(F|G)) \times P(e_2|F) = V_1(G)P(F|G) \times P(e_2|F) = 6.99 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_2(G) = \max(V_1(D)P(G|D), V_1(E)P(G|E), V_1(F)P(G|F), V_1(G)P(G|G)) \times P(e_2|G) = V_1(G)P(G|G) \times P(e_2|G) = 5.43 \times 10^{-2}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_3(D) = \max(V_2(D)P(D|D), V_2(E)P(D|E), V_2(F)P(D|F), V_2(G)P(D|G)) \times P(e_3|D) = V_2(G)P(D|G) \times P(e_3|D) = 5.33 \times 10^{-5}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_3(E) = \max(V_2(D)P(E|D), V_2(E)P(E|E), V_2(F)P(E|F), V_2(G)P(E|G)) \times P(e_3|E) = V_2(G)P(E|G) \times P(e_3|E) = 1.87 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_3(F) = \max(V_2(D)P(F|D), V_2(E)P(F|E), V_2(F)P(F|F), V_2(G)P(F|G)) \times P(e_3|F) = V_2(G)P(F|G) \times P(e_3|F) = 2.33 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_3(G) = \max(V_2(D)P(G|D), V_2(E)P(G|E), V_2(F)P(G|F), V_2(G)P(G|G)) \times P(e_3|G) = V_2(G)P(G|G) \times P(e_3|G) = 1.80 \times 10^{-2}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_4(D) = \max(V_3(D)P(D|D), V_3(E)P(D|E), V_3(F)P(D|F), V_3(G)P(D|G)) \times P(e_4|D) = V_3(G)P(D|G) \times P(e_4|D) = 3.55 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_4(E) = \max(V_3(D)P(E|D), V_3(E)P(E|E), V_3(F)P(E|F), V_3(G)P(E|G)) \times P(e_4|E) = V_3(G)P(E|G) \times P(e_4|E) = 2.02 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_4(F) = \max(V_3(D)P(F|D), V_3(E)P(F|E), V_3(F)P(F|F), V_3(G)P(F|G)) \times P(e_4|F) = V_3(G)P(F|G) \times P(e_4|F) = 1.94 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

$$V_4(G) = \max(V_3(D)P(G|D), V_3(E)P(G|E), V_3(F)P(G|F), V_3(G)P(G|G)) \times P(e_4|G) = V_3(G)P(G|G) \times P(e_4|G) = 1.30 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \text{max at G}$$

If we go on till V_8 , we find that the most probable final state is G, and backtracking leaves us with this sequence of notes:
GGGEFFFG

(ب

$$P_1 = D, P_2 = E, P_3 = F, P_4 = G$$

1.1) weighting:

$$w_1 = 0.011, w_2 = 0.023, w_3 = 0.140, w_4 = 0.712$$

1.2) normalizing:

$$\widetilde{w}_1 = 0.0124, \widetilde{w}_2 = 0.0256, \widetilde{w}_3 = 0.158, \widetilde{w}_4 = 0.804$$

1.3) resampling → each interval between 0 and 1 based on the weights corresponds to a note

$$P_1 = \text{sample}(0.6284) = G, P_2 = \text{sample}(0.1842) = F, P_3 = \text{sample}(0.5482) = G, P_4 = \text{sample}(0.77) = G$$

2.1) elapse of time → each interval between 0 and 1 based on the transition probabilities corresponds to a note

$$P_1 = \text{sample}(0.3556) = F, P_2 = \text{sample}(0.8090) = G, P_3 = \text{sample}(0.1113) = E, P_4 = \text{sample}(0.5338) = F$$

2.2) weighting:

$$w_1 = 0.120, w_2 = 0.763, w_3 = 0.019, w_4 = 0.120$$

2.3) normalizing:

$$\widetilde{w}_1 = 0.117, \widetilde{w}_2 = 0.747, \widetilde{w}_3 = 0.0186, \widetilde{w}_4 = 0.117$$

2.4) resampling → each interval between 0 and 1 based on the weights corresponds to a note

$$P_1 = \text{sample}(0.0043) = F, P_2 = \text{sample}(0.3455) = G, P_3 = \text{sample}(0.2198) = G, P_4 = \text{sample}(0.2875) = G$$

3.1) elapse of time → each interval between 0 and 1 based on the transition probabilities corresponds to a note

$$P_1 = \text{sample}(0.057) = D, P_2 = \text{sample}(0.8803) = G, P_3 = \text{sample}(0.5927) = F, P_4 = \text{sample}(0.6177) = G$$

3.2) weighting:

$$w_1 = 0.009, w_2 = 0.83, w_3 = 0.131, w_4 = 0.83$$

3.3) normalizing:

$$\widetilde{w}_1 = 0.005, \widetilde{w}_2 = 461, \widetilde{w}_3 = 0.073, \widetilde{w}_4 = 0.461$$

2.4) resampling → each interval between 0 and 1 based on the weights corresponds to a note

$$P_1 = \text{sample}(0.5034) = F, P_2 = \text{sample}(0.8624) = G, P_3 = \text{sample}(0.7918) = G, P_4 = \text{sample}(0.3254) = G$$

$$P(X_3 = G | \text{evidence}) = 0.75$$