بسم رب شهر رمضان

تمرینات سری سوم – فصل سوم و چهارم

لطفا تمرینات خود را خوانا و در قالب HW?_name_stdnumber.pdf بنویسید و تا قبل از موعد تحویل بارگذاری نمایید.
(نمونه HW3_Ross Geller_9631057.pdf)

دقت کنید که سوال پیاده سازی امتیازی می باشد و میتوانید با پایتون یا متلب ان را نوشته و به همراه فایل PDF در قالب فایل زیپ با فرمت HW?_name_stdnumber.zip بفرستید. زمان تحویل تمرین ها تا ساعت 24 روز جمعه 26 اردیبهشت می باشد.

درصورت داشتن هرگونه ابهام در سوال ، به ایمیل linalgebra.spring2020@gmail.com پیام دهید.

1- فرض کنید ماتریس های A,B,C,D,I ماتریس های n*n باشند و A معکوس پذیر باشد.

الف) ماتریس های X و Y را به گونه ای پیدا کنید که ماتریس زیر، تجزیه LU باشد.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & ۰ \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & Y \end{bmatrix}$$

و سپس نشان دهید:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (detA).det(D - CA^{-۱}B)$$

ب) نشان دهید اگر AC=CA آنگاه:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = det(AD - CB)$$

2- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید و دلیل آن را بیان نمایید.

آ) دترمینان $S^{-1}AS$ برابر det(A) می باشد.
ب) اگر A یک ماتریس 4×4 باشد، دترمینان 4A برابر است با 4det(A)
ج) ماتریس های AB وBA دترمینان برابری دارند.
د) دترمینان هر ماتریس پادمتقارن برابر با صفر است.
ه) اگر دترمینان A صفرباشد، حداقل یکی از cofactor ها باید صفر باشد.
و) $Adj\ A^T = (Adj\ A)^T$

3- با استفاده از عملیات سطری ثابت کنید.

$$det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

4- اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که فقط از ± 1 تشکیل شده است، نشان دهید دترمینان آن بر 2^{n-1} بخش پذیر است.

5- با استفاده از روش کرامر

الف) ستون دوم ماتریس A^{-1} را بدون محاسبه بقیه ستون ها به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) ثابت کنید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C1n & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

6- با فرض اینکه B={b1,b2} و C={c1,c2}. ماتریس تبدیل فضایی از B به C و از C به B را بنویسید.

a) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7- موارد خواسته شده را برای ماتریس زیر بیابید. (راه حل بطور کامل ذکر شود)

Rank number , dim(NULL(A)) , Column Bases , Row Bases

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix},$$

8- صحیح بودن یا غلط بودن گزاره های زیر را مشخص کنید. (حداقل یک سطر توضیح و دلیل)

- فضای row space یک ماتریس ، همان فضای column space ترانهاده ی همان ماتریس است. یا به عبارت بهتر RowSpace(A) == ColumnSpace(A^T)
- اگر B فرم اشلون ماتریس A باشد ،آنگاه ستون های pivot در ماتریس B ، پایه های فضای Column Space برای A را شکل میدهند.

- $R2$ یک ساب اسپیس دو بعدی برای $R3$ میباشد.
- اگر $v1,v2,\dots,vn$ پایه هایی برای فضای برداری W باشند ، آنگاه هر فضای برداری دارای بیش از n ستون وابسته ی خطی است
- اگر $v1,v2,\dots,vn$ پایه هایی برای فضای برداری W باشند ، آنگاه هر فضای برداری دارای کمتر از n ستون یک پایه برای W هستند.
- اگر $Ax=0$ سازگار باشد ، آنگاه $Col(A) = Rn$ میباشد (n تعداد ستون های ماتریس A است)

9- جمله ی $p(t) = 1 - t/2 + t^3$ را در فضای B بیاورید و جمله ی $x = (1/t , 2t , 1, -8)$ که در فضای B تعریف شده است ، به فضای چندجمله ای ها تبدیل نمایید.

$B = (t^3 + t^2 , \quad 1 + 2t + 3t^2 \quad , t + t^3 \quad , 1 + t^2 + 5t^3)$

10-برای subspace های زیر ، پایه مشخص نمایید.

$$\textbf{1.} \left\{ \begin{bmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{bmatrix} : s, t \text{ in } \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{2.} \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ -4b \\ -2a \end{bmatrix} : a, b \text{ in } \mathbb{R} \right\}$$

$$\textbf{3.} \left\{ \begin{bmatrix} 2c \\ a-b \\ b-3c \\ a+2b \end{bmatrix} : a, b, c \text{ in } \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{4.} \left\{ \begin{bmatrix} p+2q \\ -p \\ 3p-q \\ p+q \end{bmatrix} : p, q \text{ in } \mathbb{R} \right\}$$

11-اگر $H=span\{v1,v2,v3,v4\}$ آنگاه بردار های $v1,\dots v4$ را میتوان به عنوان پایه های فضای برداری H در نظر گرفت؟ فضای H چه شرطی باید داشته باشد تا مطمئن باشیم ، بردار های $v1$ تا $v4$ پایه های آن هستند؟

پیاده‌سازی (امتیازی): فضاهای برداری

می‌خواهیم پایه‌ای برای فضای پوچ، فضای سطری، و فضای ستونی ماتریس $A_{m \times n}$بیابیم و همچنین ستون‌های غیرمحوری ماتریس را برحسب ترکیب‌خطی پایه‌ی فضای ستونی بنویسیم. برای این کار:

۱- از کنسول، ورودی را به فرمت زیر دریافت کنید:

- در خط اول دو عدد دریافت کند که اولی m و دومی n است.
- در m خط بعدی، در هر خط n عدد دریافت کند. (که سطرهای ماتریس $A_{m \times n}$ می‌باشد)

۲- ماتریس افزوده [A|0] را به فرم پلکانی تبدیل کنید و آن را چاپ کنید.

حال با توجه به درایه‌های محوری، سطر و ستون‌های محوری و غیر محوری:

۳- پایه‌ای برای فضای پوچ ماتریس A بیابید.

۴- پایه‌ای برای فضای سطری A را بدست آورید.

۵- یک پایه بر اساس ستون‌های محوری ماتریس A برای فضای ستونی بیابید.

۶- در قدم آخر، آن ستون‌هایی از ماتریس A که به عنوان پایه انتخاب نشده اند را، به صورت ترکیب‌خطی پایه‌ی فضای ستونی بنویسید.

تست‌کیس:

3 5

-3 6 -1 1 -7

1 -2 2 3 -1

2 -4 5 8 -4

ماتریس A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

فرم پلکانی ماتریس افزوده:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ی فضای پوچ:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پایه‌ی فضای سطری:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پایه‌ی فضای ستونی:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

سایر ستون‌ها به صورت ترکیب‌خطی پایه‌ی فضای ستونی:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

نکته: لازم است فرمت ورودی رعایت شود اما فرمت خروجی مهم نیست، زیرا کدها به صورت دستی تصحیح خواهند شد.