

به نام حضرت دوست

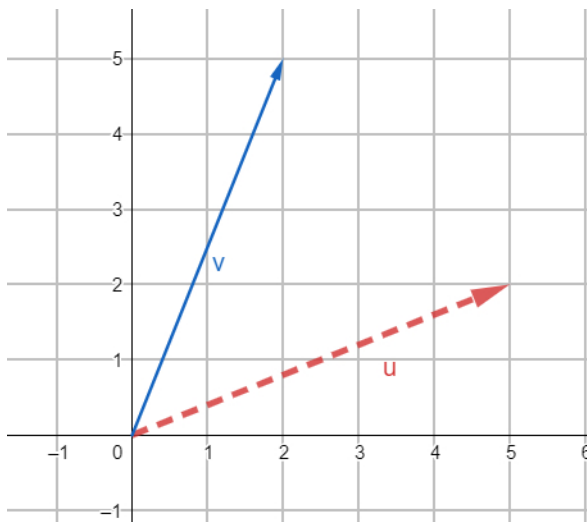
تمرینات سری چهارم – فصل 5 و 6

لطفا تمرینات خود را خوانا و در قالب **HW?_name_stdnumber.pdf** بنویسید و تا قبل از موعد تحویل بارگذاری نمایید. (نمونه **HW4_Ross Geller_9631057.pdf**)

دقت کنید که سوال پیاده سازی امتیازی می باشد و میتوانید با پایتون یا متلب آن را نوشته و به همراه گزارش و فایل PDF در قالب فایل زیپ با فرمت **HW?_name_stdnumber.zip** بفرستید. زمان تحویل تمرین ها تا ساعت 24 روز جمعه 16 خرداد می باشد.

در صورت داشتن هرگونه ابهام در سوال ، به ایمیل **linalggebra.spring2020@gmail.com** پیام دهید.

- 1- فرض کنید u و v بردار هایی باشند که به صورت زیر نشان داده شده اند و بردار ویژه های ماتریس A به ابعاد 2×2 هستند. مقادیر ویژه ی متناظر آن ها به ترتیب 2 و 3 می باشد. تبدیل $T: R^2 \rightarrow R^2$ یک تبدیل خطی با ضابطه ی $T(x) = Ax$ می باشد که در آن x یک بردار در فضای R^2 است، هم چنین $w = u + v$ است. بر روی دستگاه مختصات زیر بردار های $T(u)$ ، $T(v)$ و $T(w)$ را به دقت رسم کنید.



- 2- الف) اثبات کنید λ مقدار ویژه ی ماتریس A است، اگر و تنها اگر λ مقدار ویژه ی ماتریس A^T باشد. (راهنمایی: نشان دهید $(A - \lambda I)$ و $(A^T - \lambda I)$ چگونه با یکدیگر در ارتباطند.)

ب) در مورد چند جمله ای مشخصه ی ماتریس های A و A^T چه می توان گفت؟ چرا؟

ج) اگر Q معکوس پذیر باشد نشان دهید ماتریس $A=QR$ با ماتریس $A_1=RQ$ مشابه است.

3- نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ دارای مقدار ویژه مختلط خواهد بود، اگر θ مضربی از π نباشد. نتیجه را به صورت هندسی تفسیر کنید.

4- ماتریس زیر را در صورت امکان قطری سازی (Diagonalize) کنید. دو عدد از مقادیر ویژه $\lambda_1 = 4$ و $\lambda_2 = 5$ می باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

5- تبدیل خطی $T: R^3 \rightarrow R^3$ به صورت $T(x) = Ax$ است؛ به طوری که A یک ماتریس 3×3 با مقادیر ویژه 5، 5 و -2 است. آیا یک پایه β برای R^3 وجود دارد به طوری که β - matrix تبدیل T یک ماتریس قطری (Diagonal matrix) باشد؟ توضیح دهید.

6- بردارهای زیر را از نظر Orthogonal بودن چک کنید. در صورت Orthogonal بودن، آنها را به بردارهای Orthonormal تبدیل نمایید.

$$A. \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B. \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C. \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \quad D. \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

7- مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های متناظر با آنها را برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

8- ثابت کنید که ماتریس $U_{m \times n}$ دارای ستون‌های orthonormal است اگر و تنها اگر $U^T U = 1$.

9- پایه ی زیر را با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت، Orthonormal سازید.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

10- برای معادله ی $Ax=b$ مجموعه جواب least square را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

11- صحت یا عدم صحت گزاره های زیر را مشخص کنید. (علت و یا مثال نقض بنویسید)

- اگر ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند ، آنگاه می توان گفت که $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ ($\hat{\mathbf{x}}$ یک مجموعه جواب least square می باشد)
- برای هر ماتریس A می توان گفت که $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ ($\hat{\mathbf{x}}$ یک مجموعه جواب least square می باشد)
- اگر \mathbf{y} در زیرفضای W وجود داشته باشد ، آنگاه میتوان گفت orthogonal projection برای \mathbf{y} در W ، خود \mathbf{y} میشود.
- اگر ستون های ماتریسی بر هم عمود باشند ، به آن ماتریس ، ماتریس Orthogonal گوییم.

پیاده‌سازی (امتیازی): تخمین مبتلایان به بیماری کرونا در روزهای آتی

یکی از مسائل موجود در حوزه یادگیری ماشین، مسئله‌ی رگرسیون (Regression) است که در آن به دنبال این هستیم که ارتباط یک متغیر وابسته (Dependent Variable) را با یک یا چند متغیر مستقل (Independent Variable) پیدا کنیم.

پس از مشخص شدن نحوه‌ی این ارتباط، می‌توانیم متغیر وابسته را، با داشتن مقادیر متغیرهای مستقل، تخمین بزنیم.

روش‌های متعددی برای رگرسیون وجود دارد که ما در فصل ۶، با روش Least Squares برای رگرسیون خطی و رگرسیون چند جمله‌ای آشنا شدیم.

در پیاده‌سازی این تمرین می‌خواهیم با بررسی تعداد مبتلایان کرونا از ابتدای شیوع این بیماری، به پیش‌بینی روند گسترش بیماری در روزهای آینده بپردازیم. در اینجا متغیر وابسته تعداد مبتلایان و متغیر آزاد، روز می‌باشد.

برای این کار:

۱- تعداد کل مبتلایان به کرونا به تفکیک روزها و کشورها در فایل `total_cases.csv` در ریپازیتوری زیر وجود دارد (این فایل هر روز آپدیت می‌شود):

<https://github.com/owid/covid-19-data/tree/master/public/data/ecdc>

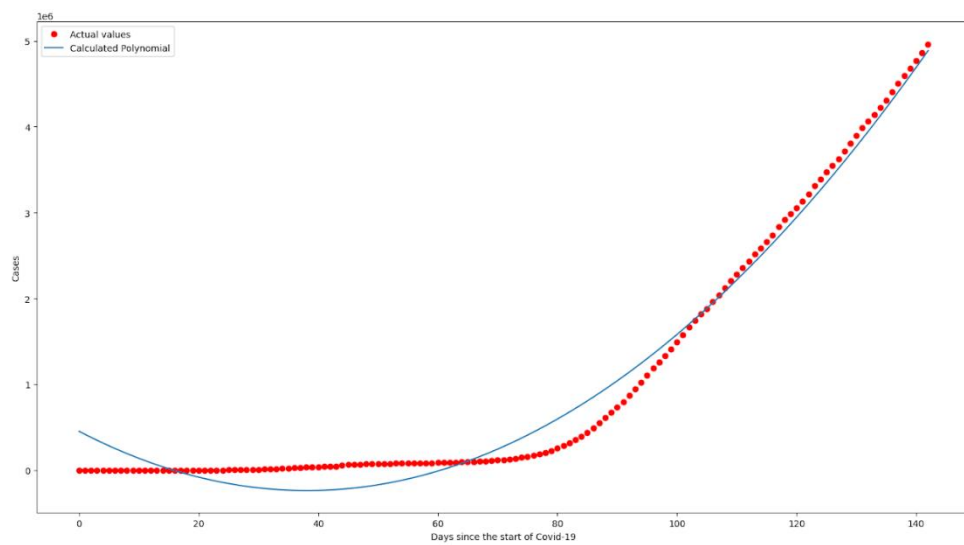
۲- این فایل را دریافت کنید و در کد خود آن را باز کرده و ستون دوم آن (که تعداد کل مبتلایان در جهان در روزهای پشت‌سر هم است) را در یک آرایه ذخیره کنید. (راهنمایی: در پایتون می‌توانید از کتابخانه `pandas` استفاده کنید.)

۳- برای اینکه بتوانید پیش‌بینی خود را تست کنید، فرض کنید که آمار ۷ روز اخیر را نداریم و می‌خواهیم با توجه به روزهای قبلی، آن را پیش‌بینی کنیم. پس ۷ روز اخیر را به عنوان داده‌های ورودی روش کمترین مربعات در نظر بگیرید.

۴- ضرایب کمترین مربعات برای معادله $y = b_0 + b_1t + b_2t^2$ را بدست آورید.

۵- حال با توجه به ضرایب یافته شده برای چندجمله‌ای بالا، تخمین تعداد مبتلایان در ۷ روز آخر را محاسبه کنید و با مقادیر واقعی مقایسه کنید.

۶- (امتیازی) تعداد واقعی مبتلایان و تعداد بدست آمده از طریق جایگذاری در چندجمله‌ای بدست آمده را در تمام روزها رسم کنید. (راهنمایی: در پایتون می‌توانید از کتابخانه `matplotlib` استفاده کنید.) حاصل مشابه زیر خواهد بود:



گزارش:

گزارش مختصری بنویسید و در آن ضرایب چند جمله‌ای بدست آمده، مقادیر واقعی و مقادیر پیش‌بینی شده در ۷ روز آخر، و تاریخ آن ۷ روز را بنویسید.