به نام حضرت دوست

تمرینات سری دوم – فصل دوم

لطفا تمرینات خود را خوانا و در قالب HW?_name_stdnumber.pdf بنویسید و تا قبل از موعد تحویل بارگذاری نمایید.
(نمونه HW1_Ross Geller_9631057.pdf)

دقت کنید که سوال پیاده سازی امتیازی می باشد و میتوانید با پایتون یا متلب ان را نوشته و به همراه فایل PDF در قالب فایل زیپ با فرمت HW?_name_stdnumber.zip بفرستید. زمان تحویل تمرین ها تا ساعت 24 روز 22 فروردین می باشد و قابل تمدید نخواهد بود.

درصورت داشتن هرگونه ابهام در سوال ، به ایمیل linalgebra.spring2020@gmail.com پیام دهید.

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (اثبات یا مثال نقض بیاورید)

1) ستون های ماتریس AB ، همان ترکیب خطی ستون های A میباشد با وزن درایه های ستونی ماتریس B
2) $(ABC)^T = C^T A^T B^T$
3) ضرب دو ماتریس وارون پذیر ، وارون پذیر است
4) برای اینکه B وارون ماتریس A باشد ، باید در معادله ی AB=I و یا BA=I صدق کند.
5) برای اینکه B وارون ماتریس A باشد ، باید در معادله ی AB=BA=I صدق کند.
6) اگر ماتریسهای B و AB هر دو مربعی وارونپذیر باشند، A نیز معکوس پذیر است.

2- به سوالات زیر پاسخ دهید.

1) ماتریس B را با توجه به اطلاعات زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ and } AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$$

2) فرض کنید ستون آخر ماتریس B صفر نیست و ستون آخر ماتریس AB صفر است. درمورد ستون های A چه میتوان گفت؟ چرا؟
3) معکوس تبدیل های زیر را بیابید.

$$T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$$

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -2x_1 + 7x_2)$$

4) اگر دو تبدیل T , U تبدیل های خطی باشند که Rn را به Rn میبرند و داشته باشیم T(U(x))=x برای تمام x های عضو Rn. آنگاه درمورد U(T(x)) چه میتوان گفت؟ چرا؟

3- اگر معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix}$ ، ماتریس $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ P & I & 0 \\ Q & R & I \end{bmatrix}$ باشد ؛ P,Q,R را بر حسب A,B,D بنویسید.

4- تجزیه LU را برای ماتریس زیر به دست آورید و با استفاده از آن معادله Ax=b را حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

5- با استفاده از تجزیه LU وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$[A] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

6- اگر $A = L_1U_1$ و $A = LU$ و همه ی فاکتور ها $(L_1,\ U_1,\ \mathrm{L},\ \mathrm{U})$ وارون پذیر باشند، ثابت کنید:
$U = U_1$ و $L = L_1$

7- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) یک پایه برای Nul A بیابید.

ب) یک پایه برای Col A بیابید.

8- با فرض آن که $H=\mathrm{span}\{V_1, V_2, V_3\}$ و $B=\{V_1, V_2, V_3\}$ نشان دهید B یک پایه برای H است و x در H قرار دارد. هم چنین بردار مختصات B برای x را پیدا کنید.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 17 \\ -8 \end{bmatrix}$$

9- A را به گونه ای بیابید که مجموعه داده شده زیر همان Col(A) باشد.

$$\left\{\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix}; r,s,t \in R\right\}$$

پیاده‌سازی (امتیازی): تجزیه LU و محاسبه ماتریس وارون به کمک آن

می‌دانیم که می‌توان از روش کاهش سطری، در زمان $O(n^3)$ یک معادله $Ax = b$ را حل کرد. اما هنگامی که می‌خواهیم چند معادله‌ی $Ax = b$ که در آن‌ها A یکسان است و فقط b تفاوت دارد را حل کنیم، بجای اینکه هر بار $O(n^3)$ زمان صرف کنیم، بهتر است که ابتدا و تنها یکبار ماتریس A را به صورت LU در زمان $O(n^3)$ تجزیه کنیم و سپس برای حل هر معادله $O(n^2)$ زمان صرف کنیم.

می‌خواهیم برنامه‌ای بنویسیم که ابتدا ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را به صورت LU تجزیه کند، سپس به کمک آن ماتریس وارون A^{-1} را حساب کنیم. برای این کار:

۱- از کنسول، ورودی را به فرمت زیر دریافت کند:

- در خط اول عدد n را دریافت کند.
- در n خط بعدی، در هر خط n عدد دریافت کند. (که سطرهای ماتریس A می‌باشد)

۲- تابعی بنویسید که A را گرفته، L و U را از روشی که خوانده‌اید حساب کند و خروجی دهد. (ورودی‌ها به گونه‌ای خواهند بود که بدون هیچ عملیات جابه‌جایی سطری، بتوان ماتریس U را حساب کرد و در نتیجه تجزیه LU در آن‌ها همواره ممکن است.)

پس دستگاه $Ax = b$ تبدیل می‌شود به $L(Ux) = b$ که نیاز است به ترتیب دو دستگاه $Ly = b$ و $Ux = y$حل شوند. پس:

۳- تابعی بنویسید که از روش forward-substitution دستگاه $Ly = b$ را حل کند.

۴- تابعی بنویسید که از روش backward-substitution دستگاه $Ux = y$را حل کند.

حال به کمک توابعی که نوشتیم می‌خواهیم ماتریس وارون A^{-1} را حساب کنیم.

اگر مجهول یعنی وارون A را X بنامیم، برای یافتن آن باید این معادله را حل کنیم: $AX = I$

اگر دقت کنیم، $Ax_i = e_i$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ که x_i ستون i ام ماتریس X و e_i ستون i ام ماتریس همانی می‌باشد.
در نتیجه برای یافتن ماتریس X باید آن را به صورت ستون به ستون از حل معادلات $Ax_i = e_i$ حساب کنیم که در آن‌ها A همواره ثابت است، پس:

۵- از ۳ تابعی که در بالا نوشته‌اید استفاده کنید تا A^{-1} را حساب کنید.

خروجی: ماتریس‌های L و U و A^{-1} چاپ شوند.

نکته: فرمت ورودی باید حتما رعایت شود اما فرمت خروجی مهم نیست، زیرا کدها به صورت دستی تصحیح خواهند شد.

- forward-substitution همان الگوریتمی است که برای پیدا کردن ماتریس پلکانی استفاده می‌کنیم با این تفاوت که دیگر نیازی نیست ضریبی از کل سطر را از سطرهای پایین کم کنیم و صرفا کافی است که ضریبی از درایه محوری را از درایه‌های پایین کم کنیم، چون‌که سایر درایه‌ها در آن سطر صفر هستند. به همین دلیل است که زمان اجرای آن به‌جای $O(n^3)$ می‌شود $O(n^2)$.

- backward-substitution هم همان الگوریتمی است که با آن ماتریس پلکانی را به ماتریس پلکانی کاهش‌یافته تبدیل می‌کنیم که آن هم $O(n^2)$ زمان می‌گیرد.