به نام حضرت دوست

تمرینات سری اول – فصل اول

لطفا تمرینات خود را خوانا و در قالب HW?_name_9631???.pdf بنویسید و تا قبل از موعد تحویل بارگذاری نمایید.
(نمونه HW1_Ross Geller_9631057.pdf)

درصورت داشتن هرگونه ابهام در سوال ، به ایمیل linalgebra.spring2020@gmail.com پیام دهید.

1- به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف- بدون حل کامل ، چک کنید که آیا معادلات زیر سازگار (consistent) است یا خیر؟ دلیل خود را ذکر کنید.

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\quad - 4x_4 &= -10 \\ 3x_2 + 3x_3 \qquad\quad &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

ب- معادله ای خطی بر حسب g , h , k بنویسید که منجرو به سازگاری ماتریس زیر گردد.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

ج- ماتریسی بنویسید که دارای پاسخ x1=3 , x2=-2 , x3=-1 باشد.(فاقد درایه ی صفر باشد)

د- در چه صورت ماتریس ضرایب/افزوده 3x5 سازگار است؟ (از نظر تعداد درایه های محوری در ردیف و ستون)

2- درستی و نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (برای هردرستی اثبات و دلیل بیاورید و برای هر نادرستی مثال نقض)

الف) تجسم هندسی span{u,v} که u , v هر کدام یک بردار در فضای 3 بعدی هستند ، صفحه ای گذرا از مبدا است.

ب) معادله ی [A b] به ازای تمام b ها سازگار است اگر در تمام سطرها درایه ی محوری موجود باشد.

ج) مجموعه جواب Ax=b تمام بردار هایی هستند به فرم $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, که Vh مجموعه جواب معادله ی Ax=0 میباشد.

د) اگر $\forall i \; v_i \in R^n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشدهر یک از v_i ها را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

ه) اگر T یک تبدیل خطی باشد $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است اگر و تنها اگر $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ مستقل خطی باشد.

و) فرض کنید A یک ماتریس $n * n$ و b یک بردار در R^n باشد با این شرط که $Ax = b$ جواب یکتا دارد. در این صورت ستون های A فضای R^n را تولید می کنند.

ز) اگر $S \subset R^n$ مستقل خطی باشد و $v \in (R^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است.

ح) اگر x یک جواب غیر بدیهی $Ax = 0$ باشد، آنگاه تمام مولفه های x غیر صفر است.

3- ماتریس های A و B را به فرم زیر درنظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

الف) چند سطر A دارای درایه ی محوری است؟ آیا معادله ی Ax=b به ازای تمام b ها در R4 جواب دارد؟

ب) آیا تمام b ها در R4 را میتوان به فرم ترکیب خطی ستون های B نوشت؟ آیا ستون های B فضای R3 را اسپن میکنند؟ درمورد A چطور؟!

4- در موارد زیر مقدار h را طوری تعیین کنید که بردارها وابسته ی خطی باشند.

الف) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ h \\ 3 \end{bmatrix}$

در موارد زیر فرض کنید مجموعه بردارها مستقل خطی باشند، در مورد a,...,f چه می توان گفت؟

ج) $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$

---

5 - با در نظر داشتن $v \neq 0$ و p در فضای R^n، می دانیم خطی که از p در جهت v میگذرد با معادله ی $x = p + tv$ نمایش داده می شود. نشان دهید تبدیل خطی $T: R^n \to R^n$ این خط را به یک خط دیگر و یا به یک نقطه نگاشت می کند.

6- ثابت کنید اگر $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$بردارهایی مستقل خطی باشند، در نتیجه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$به ازای n های فرد، مستقل خطی خواهند بود.

اگر v_1 تا v_n، n بردار باشند و داشته باشیم که$\{v_1, v_2 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}$بردارهایی مستقل خطی هستند، ثابت کنید که خود بردارهای $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ نیز مستقل خطی خواهند بود.

7- آیا می‌توان ماتریس تبدیل‌ای یافت که هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z+1 \end{bmatrix}$ تبدیل کند؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

موفق و پیروز باشید.