Равновесие в матричных играх

Вопросы

1

> Рассмотрите матричную игру для двух игроков с нулевой суммой. Такая игра задается матрицей выигрыша P для первого игрока (I), где P_{jk} задает выигрыш I игрока, если он играет стратегию j, а игрок II играет стратегию k. Так как игра с нулевой суммой, то если игрок I выигрывает P_{jk}, то игрок II выигрывает $-P_{jk}$. Какой стратегии должен придерживаться игрок II, если известно, что игрок I всегда играет стратегию j_0?

$G_I \setminus G_{II}$		II (k)				
		1	…	k_0	…	N_{II}
I (j)	1	$P_{11} \setminus -P_{11}$	…	$P_{1k_0} \setminus -P_{1k_0}$	…	$P_{1N_{II}} \setminus -P_{1N_{II}}$
	…	…	…	…	…	…
	j_0	$P_{j_0 1} \setminus -P_{j_0 1}$	…	$P_{j_0 k_0} \setminus -P_{j_0 k_0}$	…	$P_{j_0 N_{II}} \setminus -P_{j_0 N_{II}}$
	…	…	…	…	…	…
	N_I	$P_{N_I 1} \setminus -P_{N_I 1}$	…	$P_{N k_0} \setminus -P_{N k_0}$	…	$P_{N_I N_{II}} \setminus -P_{N_I N_{II}}$

Для максимизации своего выигрыша игрок II должен выбирать такую стратегию k_0, что его выигрыш $-P_{j_0 k_0}$ является наибольшим среди всех возможных вариантов $-P_{j_0 1}, \ldots, -P_{j_0 N_{II}}$:

$$k_0 = \underset{k}{argmax}(-P_{j_0 k}) = \underset{k}{argmin}\, P_{j_0 k}.$$

2

> Если предположить, что игроки не могут кооперироваться, то в каких случаях обоим игрокам не выгодно менять свою стратегию? Как это связано с оптимальностью по Парето и равновесием Неша?

Игроку не выгодно менять свою стратегию, если текущий получаемый им выигрыш является максимумом (или одним из них) по всем возможным выборам стратегии другого игрока. Это значит, что выбранные игроками стратегии (j_0, k_0) должны удовлетворять условиям:

$$P_{j_0 k_0} = \max_j P_{j k_0} \left(\Leftrightarrow j_0 = \underset{j}{argmax}\, P_{j k_0}\right)$$
$$-P_{j_0 k_0} = \max_k (-P_{j_0 k}) \Leftrightarrow P_{j_0 k_0} = \min_k P_{j_0 k} \left(\Leftrightarrow k_0 = \underset{k}{argmin}\, P_{j_0 k}\right).$$

Оптимальность по Парето — "значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других"[1].

Равновесие Нэша — "ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют"[2]. Требуемое условие как раз и является равновесием Нэша.

Любая оптимальная по Парето комбинация стратегий является равновесием Нэша. Действительно, если бы это было не так, то, значит, один .

1 https://ru.wikipedia.org/wiki/Эффективность_по_Парето
2 https://ru.wikipedia.org/wiki/Равновесие_Нэша

3

> Можно ли предложить пример игры не имеющий равновесия по Нешу?

(TODO)

4

> Если предположить, что оба игрока выбирают стратегию случайным образом, какой в среднем выигрыш будут иметь оба игрока?

При заданных распределениях вероятности $p_I(j)$ и $p_{II}(k)$ выбора игроками своих стратегий:

$$E[G_I]=\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}} p_I(j)\,p_{II}(k)\,P_{jk}\,,$$

$$E[G_{II}]=\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}} p_I(j)\,p_{II}(k)(-P_{jk})=-\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}} p_I(j)\,p_{II}(k)\,P_{jk}=-E[G_I]\,.$$

Если для обоих игроков эти распределения равномерны, то:

$$E[G_I]=\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}}\frac{1}{N_I}\frac{1}{N_{II}}P_{jk}=\frac{\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}}P_{jk}}{N_I N_{II}}\,.$$

5

> Если игрок I случайным образом выбирает стратегию, то как следует выбирать стратегию игроку II?

$$p_{II}^{(max)}=\underset{p_{II}}{argmax}\,E[G_{II}]=\underset{p_{II}}{argmax}(-E[G_I])=\underset{p_{II}}{argmin}\,E[G_I]=\underset{p_{II}}{argmin}\sum_{1\le j\le N_I}\sum_{1\le k\le N_{II}} p_I(j)\,p_{II}(k)P_{jk}=$$
$$=\underset{p_{II}}{argmin}\sum_{1\le k\le N_{II}}\left(\sum_{1\le j\le N_I} p_I(j)\,P_{jk}\right)p_{II}(k)=(\delta_{k k_0})_{1\le k\le N_{II}},\ k_0=\underset{k}{argmin}\sum_{1\le j\le N_I} p_I(j)\,P_{jk}$$

Метод Штурма

$$a<b\,, x_2<x_1\le y_1<y_2, x_1+y_1=x_2+y_2=z$$
$$a-b<0, x_1-x_2<0$$
$$(a-b)(x_1-x_2)>0$$
$$a(x_1-x_2)-b(x_1-x_2)>0$$
$$a(x_1-x_2)+b(z-x_1-z+x_2)>0$$
$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)>0$$
$$a\,x_2+b\,y_2<a\,x_1+b\,y_1$$

6

> Если оба игрока играют смешанные стратегии и они не могут кооперироваться, то в каком случае им не выгодно менять свои стратегии?

(TODO)

7

> Каким образом можно найти равновесия по Нешу для смешанных стратегий?

(TODO)

8

Рассмотрите матричную игру для дилеммы узника, найдите равновесие по Нешу для детерминированных и для смешанных стратегий, а также средние выигрыши обоих игроков на этих равновесиях. Могут ли узники выиграть больше, если они могут кооперироваться?

(TODO)

9

Рассмотрите игру Камень, ножницы, бумага. Какова оптимальная стратегия этой игры? Какие равновесия по Нешу возможны в симметричных играх с нулевой суммой для двух игроков?

(TODO)

10

Сформулируйте условие равновесия по Нешу в смешанных стратегиях для матричной игры с произвольным числом игроков.

(TODO)

11

Предложите алгоритм нахождения равновесия по Нешу из предыдущего пункта.

(TODO)

Черновик

n = 1

I	1	2	...	a
	p_1	p_2	...	p_a
	$\pi_I(1)$	$\pi_I(2)$	...	$\pi_I(a)$

$$\sum_{i=1}^{a} p_i = 1$$

$$E[\pi_I] = \sum_{i=1}^{a} p_i \pi_I(i)$$

$$p = ? : \forall q : q \cdot \pi_I \le p \cdot \pi_I$$

$$p_0 = \underset{S(p)=1}{\arg\max}\, p \cdot \pi_I$$

$$L = p \cdot \pi_I + \lambda (p \cdot I - 1)$$

$$\frac{dL}{dp_i} = \pi_I(i) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\pi_I(i)$$

$$\frac{dL}{\lambda} = p \cdot I - 1 = 0 \Leftrightarrow p \cdot I = 1 \Leftrightarrow True$$

$$\underset{p,\, p \cdot I = 1}{argmax}\, P \cdot p$$

$$L = P \cdot p + \lambda (p \cdot I - 1)$$

$$\frac{dL}{dp_t} = P_t + \lambda = 0$$

$$...$$

$$p_t = [t = \underset{i}{argmax}\, P_i]$$

n = 2

I \ II		1	2	...	b
		$p_{II,1}$	$p_{II,2}$	...	$p_{II,b}$
1	$p_{I,1}$	$\pi_{I\backslash II}(1, 1)$	$\pi_{I\backslash II}(1, 2)$	...	$\pi_{I\backslash II}(1, b)$
2	$p_{I,2}$	$\pi_{I\backslash II}(2, 1)$	$\pi_{I\backslash II}(2, 2)$	...	$\pi_{I\backslash II}(2, b)$
...	...	...	...	...	...
a	$p_{I,a}$	$\pi_{I\backslash II}(a, 1)$	$\pi_{I\backslash II}(a, 2)$	...	$\pi_{I\backslash II}(a, b)$

$$\sum_{i=1}^{a} p_{I,i} = \sum_{j=1}^{b} p_{II,j} = 1, p_I, p_{II} \geq 0$$

$$E[\pi_k] = \sum_{1\leq i\leq a} \sum_{1\leq j\leq b} p_{I,i} p_{II,j} \pi_k(i,j) = \sum_{1\leq i\leq a} \left(\sum_{1\leq j\leq b} p_{II,j} \pi_k(i,j) \right) p_{I,i} = \sum_{1\leq j\leq b} \left(\sum_{1\leq i\leq a} p_{I,i} \pi_k(i,j) \right) p_{II,j}$$

$$P = I:$$

$$P_I = \left(\sum_{1\leq j\leq b} p_{II,j} \pi_I(i,j) \right)_{1\leq i\leq a}$$

$$L_I = P_I \cdot p_I + \lambda_I (p_I \cdot I - 1)$$

$$\frac{dL_I}{dp_{I,i}} = P_{I,i} + \lambda_I = 0$$

$$\frac{dL_I}{\lambda_I} = 1 - p_I \cdot I = 0 \Leftrightarrow p_I \cdot I = 1 \Leftrightarrow True$$

$$\begin{cases} 1\leq i\leq a: \sum_{1\leq j\leq b} \pi_I(i,j) p_{II,j} + \lambda_I = 0 \\ 1\leq j\leq b: \sum_{1\leq i\leq a} \pi_{II}(i,j) p_{I,i} + \lambda_{II} = 0 \\ p_I \cdot I = 1 \\ p_{II} \cdot I = 1 \end{cases}$$

A	$p_{I,1}$	...	$p_{I,a}$	$p_{II,1}$	...	$p_{II,b}$	λ_1	λ_2	B
I.1	0	...	0	$\pi_I(1, 1)$	...	$\pi_I(1, b)$	1	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
I.a	0	...	0	$\pi_I(a, 1)$	...	$\pi_I(a, b)$	1	0	0
II.1	$\pi_I(1, 1)$	...	$\pi_I(a, 1)$	0	...	0	0	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
II.b	$\pi_I(1, b)$	...	$\pi_I(a, b)$	0	...	0	0	1	0
λ.1	1	...	1	0	...	0	0	0	1
λ.2	0	...	0	1	...	1	0	0	1

Gradient ascend

$$p_{i,j} - \text{for player \#i and their strategy \#j, the probability of this player choosing this strategy}$$
$$p_i = (p_{i,j})_{0\le j<|s_i|} - \text{for player \#i, their probability profile}$$
$$\forall\, 0\le i<n: \sum_{0\le j<|s_i|} p_{i,j} = 1$$
$$p = (p_i)_{0\le i<n} - \text{the total probability profile}$$
$$E[\pi_i] = \sum_{0\le t_0<s_0} \dots \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \prod_{0\le j<n} p_{j,t_j} \pi_i((t_j)_{0\le j<n}) = \sum_{0\le t_i<s_i} \left(\sum_{\cdots} \prod_{0\le j<n,\, j\ne i} p_{j,t_j} \pi((t_i)_{0\le i<n}) \right) p_{i,t_i} = P_i \cdot p_i$$
$$P_i = \sum_{0\le t_0<s_0} \cdots \sum_{0\le t_{i-1}<s_{i-1}} \sum_{0\le t_{i+1}<s_{i+1}} \cdots \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \prod_{0\le j<i,\, i+1\le j<n} p_{j,t_j} \pi_i((t_l)_{0\le l<n}) =$$
$$P_i = \sum_{0\le t_0<s_0} \cdots \sum_{0\le t_{i-1}<s_{i-1}} \prod_{0\le j<i} \left(\sum_{0\le t_{i+1}<s_{i+1}} \cdots \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \prod_{i+1\le j<n} p_{j,t_j} \pi_i((t_l)_{0\le l<n}) \right)$$
$$p_k \to q_k,\ p \to (p_i)_{0\le i<k} : (q_k) : (p_i)_{k<i<n}$$
$$\bar{E}[\pi_i] = \sum_{0\le t_0<|s_0|} \dots \sum_{0\le t_{n-1}<|s_{n-1}|} \prod_{0\le i<k} p_{i,t_i} q_{k,t_k} \prod_{k<i<n} p_{i,t_i} \pi_i((t_i)_{0\le i<n})$$
$$\forall\, 0\le i<n\ \forall q_i : \bar{E}[\pi_i] \le E[\pi_i]$$
$$\sum_{0\le t_0<s_0} \cdots \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \prod_{0\le j<n} p_{j,t_j} \pi_i((t_j)_{0\le j<n}) = \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \left(\sum_{0\le t_0<s_0} \cdots \sum_{0\le t_{n-2}<s_{n-2}} \prod_{0\le j<n} p_{j,t_j} \pi_i((t_j)_{0\le j<n}) \right) p_{n-1,t_{n-1}} = \cdots =$$
$$= \sum_{0\le t_{n-1}<s_{n-1}} \left(\dots \sum_{0\le t_0<s_0} \pi_i((t_j)_{0\le j<n})\, p_{0,t_0} \dots \right) p_{n-1,t_{n-1}}$$
$$\pi_i \in M[s_0, \dots, s_{n-1}]$$
$$p_i \in M[s_i] \underset{?}{=} M[1, \dots, 1, s_i]$$
$$E_i \underset{?}{=} p_{n-1} \cdots p_0 \pi_i$$
$$E_i \underset{?}{=} \pi_i p_{n-1} \cdots p_0$$
$$P_i \underset{?}{=} p_{i-1} \cdots p_0 \pi_i p_{n-1} \cdots p_{i+1}$$
$$p_k^{(n+1)} = proj_S(p_k^{(n)} + k g)$$
$$\forall\, 0\le h<n, h\ne i : \bar{E}[\pi_h] \ge E[\pi_h]; \bar{E}[\pi_i] > E[\pi_i]$$
$$\bar{E}_h \ge E_h$$
$$p_{n-1} \cdots p_{i+1} \bar{p}_i p_{i-1} \cdots p_0 \pi_h \ge p_{n-1} \cdots p_{i+1} p_i p_{i-1} \cdots p_0 \pi_h$$
$$p_{n-1} \cdots p_{i+1} \bar{p}_i p_{i-1} \cdots p_0 \pi_h - p_{n-1} \cdots p_{i+1} p_i p_{i-1} \cdots p_0 \pi_h \ge 0$$
$$p_{n-1} \cdots p_{i+1} (\bar{p}_i - p_i) p_{i-1} \cdots p_0 \pi_h \ge 0$$
$$\frac{dE_h}{dp_i} \Delta p_i \ge 0$$
$$max(E_1 + min(\Delta E_2, 0) \cdot \alpha),\ cor(\alpha, i) > 0$$
$$\Delta p_i := \underset{\Delta p_i}{argmax}\, X$$
$$X := E_i(p_1, \dots, p_i + \Delta p_i, \dots, p_n) + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(E_j(p_1, \dots, p_i + \Delta p_i, \dots, p_n) - E_j(p_1, \dots, p_n), 0) \cdot \alpha_j \approx$$
$$\approx E_i + \frac{dE_i}{dp_i} \cdot \Delta p_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(E_j + \frac{dE_j}{dp_i} \cdot \Delta p_i - E_j, 0) \cdot \alpha_j = E_i + \frac{dE_i}{dp_i} \cdot \Delta p_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(\frac{dE_j}{dp_i} \cdot \Delta p_i, 0) \cdot \alpha_j \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \frac{dE_i}{dp_i} \cdot \Delta p_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(\frac{dE_j}{dp_i} \cdot \Delta p_i, 0) \cdot \alpha_j$$
$$X := \bar{E}_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(\bar{E}_j - E_j, 0) \cdot \alpha_j = \bar{E}_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} (min(\bar{E}_j, E_j) - E_j) \cdot \alpha_j \overset{C}{=} \bar{E}_i + \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i} min(\bar{E}_j, E_j) \cdot \alpha_j$$

$$\frac{d}{d\,p_i}X=\frac{d}{d\,p_i}(\bar{E}_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}min(\bar{E}_j,E_j)\cdot\alpha_j)=\frac{d}{d\,p_i}\bar{E}_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}\alpha_j\frac{d}{d\,p_i}min(\bar{E}_j,E_j)=$$

$$=\frac{d}{d\,p_i}\bar{E}_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}\alpha_j\begin{cases}\frac{d}{d\,p_i}\bar{E}_j & \bar{E}_j<E_j\\ 0 & \bar{E}_j\ge E_j\end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}min(f(x),c)=\frac{d}{dx}\begin{cases}f(x) & f(x)<c\\ c & f(x)\ge c\end{cases}=\begin{cases}\frac{d}{dx}f(x) & f(x)<c\\ \frac{d}{dx}c & f(x)\ge c\end{cases}=\begin{cases}f' & f(x)<c\\ 0 & f(x)\ge c\end{cases}$$

$$X_x:=(\frac{d\,E_i}{d\,p_i})_x\cdot(\Delta\,p_i)_x+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}min((\frac{d\,E_j}{d\,p_i})_x\cdot(\Delta\,p_i)_x,0)\cdot\alpha_j$$

$$\Delta:=(\Delta\,p_i)_x,\,d_j:=(\frac{d\,E_j}{d\,p_i})_x$$

$$\Delta<0:X_x=d_i\cdot\Delta-\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}max(d_j,0)\cdot\Delta\cdot\alpha_j=\Delta(d_i-\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}max(d_j,0)\cdot\alpha_j)$$

$$\Delta=0:X_x=0$$

$$\Delta>0:X_x=d_i\cdot\Delta+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}min(d_j,0)\cdot\Delta\cdot\alpha_j=\Delta(d_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}min(d_j,0)\cdot\alpha_j)$$

$$D>0$$

$$+D\,x_p\text{ vs }-D\,x_m$$

$$D(x_p+x_m)\text{ vs }0$$

$$x_p+x_m\text{ vs }0$$

$$x_p+x_m=2\,d_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}(min(d_j,0)-max(d_j,0))\cdot\alpha_j=2\,d_i+\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}(-|d_j|)\,\alpha_j=2\,d_i-\sum_{1\le j\le n,\,j\ne i}|d_j|\,\alpha_j$$

$$2\,d_i-S\text{ vs }0$$

$$2\,d_i\text{ vs }S$$

$$min(-a\,x,0)=-max(a\,x,0)$$

$$min(a,b)-max(a,b)=-|a-b|$$

$$E:=\sum_{1\le i\le n}E_i$$

$$\nabla_h E=\nabla_h\sum_{1\le i\le n}E_i=\sum_{1\le i\le n}\nabla_h E_i=\sum_{1\le i\le n}p_{h-1}\cdots p_1\pi_i\,p_n\cdots p_{h+1}=p_{h-1}\cdots p_1(\sum_{1\le i\le n}\pi_i)\,p_n\cdots p_{h+1}=p_{h-1}\cdots p_1\Pi\,p_n\cdots p_{h+1}$$

Projection of a point onto a plane

$$\bar{n}\neq\bar{0}$$
$$\bar{p}\in(\bar{n},d)\Leftrightarrow\bar{n}\cdot\bar{p}=d$$

$$\bar{y}=proj_{(\bar{n},d)}(\bar{x})\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{y}\in(\bar{n},d)\\ \bar{x}-\bar{y}\parallel\bar{n}\end{cases}$$
$$\bar{x}-\bar{y}\parallel\bar{n}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\bar{y}=\bar{x}-k\bar{n}$$

$$\bar{y}\in(\bar{n},d)$$
$$\bar{n}\cdot\bar{y}=d$$
$$\bar{n}(\bar{x}-k\bar{n})=d$$
$$\bar{n}\cdot\bar{x}-k\bar{n}\cdot\bar{n}=d$$
$$k\bar{n}\cdot\bar{n}=\bar{n}\cdot\bar{x}-d$$
$$k=\frac{\bar{n}\cdot\bar{x}-d}{\bar{n}\cdot\bar{n}}$$

$$\bar{y}=\bar{x}-\frac{\bar{n}\cdot\bar{x}-d}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n}$$

* * *

$$(1,0,\dots,0)\in(I,l)\Rightarrow l=(1,0,\dots,0)\cdot I=1$$
$$proj_S(x)=x-\frac{u\cdot x-l}{u\cdot u}u=x-(u\cdot x-1)u=x-u\cdot xu+u=x+u-u\cdot xu$$
$$p^{(n)}\in S=(\bar{u},1),\ p^{(n)}\in C=\bar{u}^s$$

p[n] $\to^?$ p[n+1]:

$$q=proj_S(d)$$

- #1: $k=max\{k\in\mathbb{R}\mid p^{(n)}+kq\in C\}$
  $p^{(n+1)}=p^{(n)}+kq=p^{(n)}+k\,proj_S(d)=proj_S(p^{(n)}+kq)=proj_S(p^{(n)}+k\,proj_S(d))$
- #2: $k=max\{k\in\mathbb{R}\mid proj_S(p^{(n)}+kd)\in C\}$
  $p^{(n+1)}=proj_S(p^{(n)}+kd)$

proj(p[n] + k*d) = p[n] + k*q

$$q=rej(d,I)=d-\frac{d\cdot I}{I\cdot I}I=d-(d\cdot I)I$$
$$q_t=(d-(d\cdot I)I)_t=d_t-d\cdot I\,I_t=d_t-d\cdot I\cdot 1=d_t-d\cdot I$$
$$p_3=p+kd$$
$$p_4=p_3+\frac{l-I\cdot p_3}{I\cdot I}I=p_3+(l-I\cdot p_3)I=p+kd+(l-I\cdot(p+kd))I=$$
$$=p+kd+(l-I\cdot p-kI\cdot d)I=p+kd+lI-I\cdot pI-kI\cdot dI=$$
$$=p+lI-I\cdot pI+k(d-I\cdot dI)=p+I-I\cdot pI+k(d-I\cdot dI)=p+k(d-I\cdot dI)$$
$$(p+I-I\cdot pI)_t=p_t+I_t-(I\cdot pI)_t=p_t+I_t-I\cdot pI_t=p_t+1-I\cdot p\cdot 1=p_t+1-I\cdot p=p_t+1-1=p_t$$
$$(d-I\cdot dI)_t=d_t-(I\cdot dI)_t=d_t-I\cdot dI_t=d_t-I\cdot d\cdot 1=d_t-I\cdot d$$

$$p_2=p+kq$$
$$\forall\,0\le t<s:$$
$$0\le p_{2,t}\le 1$$
$$0\le p_t+kq_t\le 1$$
$$-p_t\le kq_t\le 1-p_t$$
$$q_t>0:-\frac{p_t}{q_t}\le k\le\frac{1-p_t}{q_t}=-\frac{p_t}{q_t}+\frac{1}{q_t}=\frac{1-p_t}{d_t-d\cdot I}$$
$$q_t<0:-\frac{p_t}{q_t}\ge k\ge\frac{1-p_t}{q_t}=-\frac{p_t}{q_t}+\frac{1}{q_t}=\frac{1-p_t}{d_t-d\cdot I}$$
$$q_t=0:-p_t\le 0\le 1-p_t\Leftrightarrow p_t\ge 0,p_t\le 1\Leftrightarrow True$$

$$0\le p_{4,t}\le 1$$
$$0\le p_t+k(d_t-I\cdot d)\le 1$$
$$-p_t\le k(d_t-I\cdot d)\le 1-p_t$$
$$d_t-I\cdot d>0:\frac{-p_t}{d_t-I\cdot d}\le k\le\frac{1-p_t}{d_t-I\cdot d}=\frac{p_t-1}{I\cdot d-d_t}$$
$$d_t-I\cdot d<0:\frac{p_t}{I\cdot d-d_t}=\frac{-p_t}{d_t-I\cdot d}\ge k\ge\frac{1-p_t}{d_t-I\cdot d}$$
$$d_t-I\cdot d=0:-p_t\le 0\le 1-p_t\Leftrightarrow 0\le p_t,p_t\le 1\Leftrightarrow True$$

Alternative symmetrization

$$(z_1,\dots,z_a):z_i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(p_1,\dots,p_a):p_i\geq 0,p\cdot I=1$$
$$f:f(0)=0,f(-x)=f(x),f'(0)\neq undef,\lim_{x\to\infty}f(x)=c$$
$$z_i=0\Rightarrow f(z_i)=0\Rightarrow p_i=0$$
$$(t_i),t_i\geq 0,t\neq 0:T=t\cdot I,p_i=\frac{t_i}{T}$$
$$t_i=z_i^2,z\neq 0$$
$$z\in\mathbb{R}^a/0\to z_s=(z_i^2)\to p=\frac{z_s}{z_s\cdot I}$$
$$L_I=P_I\cdot p_I+\lambda_I(p_I\cdot I-1)=(P_I+\lambda_I I)\cdot p_I-\lambda_I=(P_I+\lambda_I I)\cdot\frac{z_{Is}}{z_{Is}\cdot I}-\lambda_I$$
$$\frac{dL_I}{dz_{Ii}}=(P_I+\lambda_I I)\frac{z_{Is}'z_{Is}\cdot I-z_{Is}(z_{Is}\cdot I)'}{(z_{Is}\cdot I)^2}=(P_I+\lambda_I I)\frac{(2\delta_{ji}z_{Ij})_j\cdot(z_{Is}\cdot I)-2z_{Is}z_{Ii}}{(z_{Is}\cdot I)^2}=0$$
$$(P_I+\lambda_I I)((\delta_{ji}z_{Ij})_j\cdot(z_{Is}\cdot I)-x_{Is}z_{Ii})=0$$
$$(P_I+\lambda_I I)(\delta_{ji}z_{Ij})_j(z_{Is}\cdot I)-(P_I+\lambda_I I)z_{Is}z_{Ii}=0$$
$$(P_{Ii}+\lambda_I)z_{Ii}z_{Is}\cdot I-(P_I+\lambda_I I)z_{Is}z_{Ii}=0$$
$$P_{Ii}z_{Ii}z_{Is}I-P_I z_{Is}z_{Ii}=0$$
$$z_{Ii}(P_{Ii}z_{Is}I-P_I z_{Is})=0$$
$$z_{Ii}=0\vee P_{Ii}z_{Is}I-P_I z_{Is}=0$$
$$P_{Ii}(z_{I1}^2+\dots+z_{Ia}^2)-(P_{I1}z_{I1}^2+\dots+P_{Ia}z_{Ia}^2)=0$$
$$(P_{Ii}I-P_I)z_{Is}=0$$
$$\frac{dL_1}{\lambda_1}=1-p_1\cdot I=0\Leftrightarrow p_1\cdot I=1\Leftrightarrow True$$
$$\begin{cases}1\leq i\leq a:\sum\limits_{1\leq j\leq b}\pi_1(i,j)p_{2,j}+\lambda_1=0\\ 1\leq j\leq b:\sum\limits_{1\leq i\leq a}\pi_2(i,j)p_{1,i}+\lambda_2=0\\ p_1\cdot I=1\\ p_2\cdot I=1\end{cases}$$

$$L_I=P_I\cdot p_I+\lambda_I(p_I\cdot I-1)$$
$$0\leq t<s_I:\frac{dL_I}{dp_{I,t}}=P_{I,t}+\lambda_I=0$$
$$\frac{dL_I}{\lambda_I}=1-p_I\cdot I=0\Leftrightarrow p_I\cdot I=1\Leftrightarrow True$$
$$\begin{cases}0\leq p<n:\\ \quad 0\leq t<s_p:\\ \quad\quad P_{p,t}+\lambda_p=0\\ \quad p_p\cdot I=1\end{cases}$$
$$a_2=a-\frac{a\cdot b}{b\cdot b}b=\frac{a(b\cdot b)-(a\cdot b)b}{b\cdot b}=\frac{|a||b||b|a_0(b_0\cdot b_0)-|a||b||b|(a_0\cdot b_0)b_0}{|b||b|(b_0\cdot b_0)}=$$
$$=|a|\frac{a_0(b_0\cdot b_0)-(a_0\cdot b_0)b_0}{(b_0\cdot b_0)}=|a|(a_0-(a_0\cdot b_0)b_0)$$

x	**y**	**z**	**a**	**r**
t	t	z	0	?
t	y	t	120	?
x	t	t	240	?
t	t	t	*	0
0	0	1	0	1
0	1	0	120	1
1	0	0	240	1