Парадоксы теории вероятностей

Парадокс Монти Холла

В развлекательной передаче Монти Холла игроку предлагали следующую ситуацию. Перед вами находятся три двери, за каждой дверью спрятана либо коза, либо машина. Известно, что машина одна, а коз две. У игрока первоначально нет никакой информации, где что находится. Игроку предлагается выбрать одну дверь, в конце передачи ведущий откроет выбранную дверь, и игрок получит то, что находится за дверью, в качестве приза. Затем ведущий открывает одну из оставшихся дверей, за открытой дверью находится коза. Ведущий предлагает игроку выбор: хочет ли он поменять свой выбор, учитывая новую информацию.

Вопросы

1

> Какова вероятность найти машину за первоначально выбранной дверью после демонстрации ведущим козы? Какова вероятность выиграть машину изменив выбор?

Поскольку мы не знаем, чем руководствовался ведущий при выборе двери, следует считать нахождение за ней козы фактом, а не случайным событием. В этом случае вероятность нахождения машины за выбранной дверью до открытия другой двери равна 1/3, а после — 1/2. То же самое можно сказать и про вторую неоткрытую дверь.

2

> Можно ли утверждать, что вероятность обнаружить машину за первоначально выбранной игроком дверью не меняется при поступлении информации, что за одной из оставшихся дверей находится коза, так как выбор двери игроком был осуществлен раньше, чем игроку показали козу? Изменится ли вероятность открыть машину, если за открытой ведущим дверью окажется машина?

(TODO)

3

> Будет ли результат одинаков при следующих условиях: а) ведущий знает, что за дверью находится коза, и целенаправленно открывает дверь с козой; б) ведущий выбирает оставшиеся после выбора игрока двери равновероятно, и коза оказывается за дверью случайно?

(TODO)

4

> Посчитайте вероятности выигрыша машины при сохранении и смене своего выбора для следующей вариации игры. Всего имеется D дверей, за которыми спрятаны C машин и D-C коз. Игрок выбирает дверь, затем ведущий открывает одну из дверей, за которой спрятана коза, причем он никогда не открывает дверь, которую выбрал игрок. Наконец игроку предлагается сохранить свой выбор или выбрать любую из закрытых дверей.

(TODO)

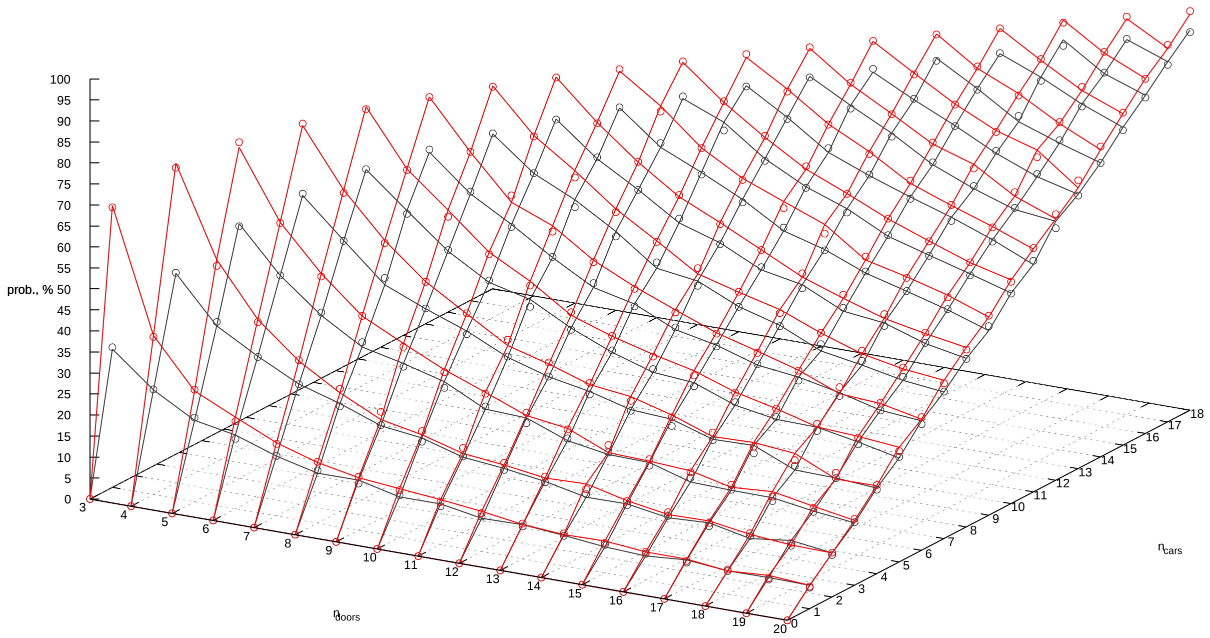
5

Как изменится ответ, если ведущий откроет N дверей, за G из которых окажутся козы, а за N-G будут машины? В каком случае игроку выгодно поменять выбор?

(TODO)

6

При изучении парадоксов люди склонны ошибаться. Считая полученные выше предсказания для вероятностей выигрыша со сменой и без смены выбора гипотезами, проверить эти гипотезы статистически. Моделью игры будет некое размещение коз и машин в указанном количестве за дверьми (т.е. просто вектор значений коза/машина). Без ограничения общности можно считать, что игрок первоначально всегда выбирает первую дверь, а меняет выбор на вторую дверь. Выполните численное моделирование, сгенерировав выборку из M реализаций игры, и посчитайте долю выигрышей при сохранении выбора двери и при смене выбора.



(TODO)

7

Как сгенерировать размещение машин за дверьми так, чтобы все размещения были равновероятны?

Последовательно для каждой из дверей будем помещать за неё машину с вероятностью C/N, где C — количество ещё не размещённых машин, N — количество ещё не «заполненных» дверей.

Докажем индукцией по количеству дверей n, что вероятность любого размещения k машин одинакова и равна $P(n,k)=\frac{1}{C_n^k}=\frac{k!(n-k)!}{n!}$.

Если n = 0, то k = 0 и $P(n,k)=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{0!(0-0)!}{0!}=\frac{1\cdot 1}{1}=1$, что согласуется с тем, что единственное размещение — пустое, и вероятность которого равна 1.

Пусть n > 0. Рассмотрим первую дверь. Если за ней нужно разместить машину, то мы сделаем это с вероятностью k/n, и нам останется конкретным образом разместить k-1 машину за n-1 дверью, вероятность чего равно P(n-1, k-1). Поскольку размешение машин за 1-й дверью и за всеми остальными вместе взятыми — независимы, то общая вероятность размещения всех машин равна произведению вероятностей этих событий. Т.о.

$$P(n,k)=\frac{k}{n}P(n-1,k-1)=\frac{k}{n}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!}=\frac{k(k-1)!(n-k)!}{n!}=\frac{k!(n-k)!}{n!}.$$

Аналогично, если за первой дверью нужно разместить козу, то

$$P(n,k)=\frac{n-k}{n}P(n-1,k)=\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}=\frac{(n-k)(k-1)!(n-1-k)!}{n!}=\frac{k!(n-k)!}{n!}.$$

8

> Насколько точную оценку вероятности выигрыша дает найденная по выборке доля выигрышей? Как зависит точность от размера выборки?

(TODO)

9

> Можем ли мы принять нашу гипотезу о вероятности выигрыша, или должны отвергнуть ее?

(TODO)

10

> В описанной выше процедуре моделирования каждое размещение машин за дверьми использовалось только один раз при подсчете выигрышей при изменении выбора двери. Не является ли это пустым расходом ресурсов? Мы можем считать, что выбор меняется не только на вторую дверь, но также на третью, четвертую и т.д., т.е. считая размещение фиксированным, мы для каждой из дверей увеличим счетчик выигрышей, если за дверью находится машина, и увеличим счетчик проигрышей, если за машиной находится коза, тем самым увеличив в D-2 раза размер выборки. Дадут ли оба метода моделирования один результат?

(TODO)

Черновик

1. Перед нами ряд из nd дверей. За nc из них — автомобили, за остальными — козы. Их распределение случайно, ни от чего не зависит и все его варианты равновероятны.
2. Мы выбираем одну из дверей (не открывая её).
3. Ведущий случайно и ни от чего не зависимо выбирает с одинаковой вероятностью одну из дверей, не выбранную нами и за которой находиться коза, и открывает её.
4. Мы можем изменить свой выбор двери на любую из ещё не открытых.
5. Какова вероятность, что за выбранной нами в конечном итоге дверью будет автомобиль в зависимости от того, изменили мы выбор или нет?

nd — кол-во дверей, nd ≥ |{выбранная нами дверь, открытая ведующим дверь, другая выбранная нами дверь}| = 3.

nc — кол-во автомобилей, nc ≥ 0.

ng — кол-во коз, ng ≥ |{за выбранной нами дверью, за открытой ведущим дверью}| = 2.

nc + ng = nd.

Обозначение	Тип	Описание	Свойства
D	$\mathbb{O}$n	Распределение коз и автомобилей за дверьми	$\lvert\{x\in D \mid x=\mathrm{g}\}\rvert=n_{\mathrm{g}}$ $\lvert\{x\in D \mid x=\mathrm{c}\}\rvert=n_{\mathrm{c}}$
D_i	$\mathbb{O}$ = {g, c}	объект за дверью i	
d_i	$\mathbb{O}$ = {g, c}	объект за дверью i	
C_1	$\mathbb{D}$ = 1..nd	номер изначально выбранной двери	
$p_{C_1}(?)$	$\mathbb{D} \to \mathbb{P}$	распределение C_1	
$O=O(d,c_1)$		номер открытой двери	$O\neq c_1$, $D_O=g$
$p_O(o \mid C_1=c_1)$		распределение $O(C_1)$ при условии $C_1=c_1$	
$C_2=C_2(c_1,o)$		номер двери после смены	$C_2\neq c_1$, $C_2\neq O$
$p_{C_2}(c_2 \mid C_1=c,O=o)$		распределение $C_2(c_1,o)$ при условии $C_1=c_1,O=o$	
$C_3=C_3(c_1,o)$		номер двери, выбранной в конечном итоге	$C_3\neq O$

$P(D_{C_1}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)$ vs $P(D_{C_2}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)$

$\underset{C_3}{argmax}\, P(D_{C_3}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)$

Без смены выбора

Распределения:

- Автомобили и козы
- Выбор двери
- Открытая дверь

$$d:\ d_{c_1}=c$$

$$P(C_1=c_1\wedge O=o \mid D=d)=P(C_1=c_1 \mid D=d)P(O=o \mid D=d\wedge C_1=c_1)=$$
$$=P(C_1=c_1)P(O=o \mid D=d\wedge C_1=c_1)=p_{C_1}(c_1)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)$$

$$P(C_1=c_1\wedge O=o)=\sum_{d\in R[D]}P(D=d)P(C_1=c_1\wedge O=o \mid D=d)=\sum_{d\in R[D]}p_D(d)p_{C_1}(c_1)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)=$$
$$=p_{C_1}(c_1)\sum_{d\in R[D]}p_D(d)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)$$

$$P(D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o)=P(D=d)P(C_1=c_1\wedge O=o \mid D=d)=p_D(d)p_{C_1}(c_1)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)$$

$$P(D=d \mid C_1=c_1\wedge O=o)=\frac{P(D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o)}{P(C_1=c_1\wedge O=o)}=\frac{p_D(d)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)}{\sum_{d\in R[D]}p_D(d)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)}$$

$$P(D_{C_1}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)=\sum_{d\in R[D]}P(D=d \mid C_1=c_1\wedge O=o)P(D_{C_1}=c \mid D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o)=$$
$$=\sum_{d\in R[D]}P(D=d \mid C_1=c_1\wedge O=o)[d_{c_1}=c]=\sum_{d\in R[D],d_{c_1}=c}P(D=d \mid C_1=c_1\wedge O=o)=$$
$$=\frac{\sum_{d\in R[D],d_{c_1}=c}p_D(d)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)}{\sum_{d\in R[D]}p_D(d)p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)}$$

$$\frac{1}{C_n^{n_c}}\sum_{d\in R[D]}[d_{c_1}=c]=\frac{C_{n-1}^{n_c-1}}{C_n^{n_c}}=$$

$$=\frac{\frac{(n-1)!}{(n_c-1)!(n-n_c)!}}{\frac{n!}{n_c!(n-n_c)!}}=\frac{(n-1)!\,n_c!}{n!(n_c-1)!}=\frac{n_c}{n}$$

$$P(C_1=c_1\wedge O=o)=P(C_1=c_1)P(O=o\mid C_1=c_1)=p_{C_1}(c_1)p_O(o\mid C_1=c_1)$$

$$P(O=o\wedge D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=P(O=o\mid C_1=c_1)P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=p_O(o\mid C_1=c_1)p_{D_{c_1}}(c)$$

$$P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge D_{C_1}=c)=P(C_1=c_1)P(O=o\wedge D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=$$

$$=P(C_1=c_1)P(O=o\mid C_1=c_1)P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=p_{C_1}(c_1)p_O(o\mid C_1=c_1)p_{D_{c_1}}(c)$$

$$P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1\wedge O=o)=\frac{P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge D_{C_1}=c)}{P(C_1=c_1\wedge O=o)}=$$

$$=\frac{P(C_1=c_1)P(O=o\wedge D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)}{P(C_1=c_1)P(O=o\mid C_1=c_1)}\underset{?\neq 0}{=}\frac{P(O=o\mid C_1=c_1)P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)}{P(O=o\mid C_1=c_1)}\underset{?\neq 0}{=}$$

$$=P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=p_{D_{c_1}}(c)=\frac{n_c}{n_d}$$

$$P(C\mid A\wedge B)=\frac{P(A\wedge B\wedge C)}{P(A\wedge B)}$$

Со сменой выбора

$$P_X(D_2=c)=P_X(D_1=c)P_X(D_2=c\mid D_1=c)+P_X(D_1=g)P_X(D_2=c\mid D_1=g)$$

$$P(D_{C_2}=c\mid C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)=\frac{P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2\wedge D_{C_2}=c)}{P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)}=$$

$$=\frac{P(C_1=c_1)P(O=o\wedge C_2=c_2\wedge D_{C_2}=c\mid C_1=c_1)}{P(C_1=c_1)P(O=o\wedge C_2=c_2\mid C_1=c_1)}\underset{?\neq 0}{=}\frac{P(O=o\mid C_1=c_1)P(C_2=c_2\wedge D_{C_2}=c\mid C_1=c_1\wedge O=o)}{P(O=o\mid C_1=c_1)P(C_2=c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)}\underset{?\neq 0}{=}$$

$$=P(D_{C_1}=c\mid C_1=c_1)=p_{D_{c_1}}(c)$$

$$d,c_2:\ \ d_{c_2}=c$$

$$P(D=d\wedge C_2=c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)=\frac{P(D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)}{P(C_1=c_1\wedge O=o)}=$$

$$=\frac{p_D(d)\,p_{C_1}(c_1)\,p_O(o\mid D=d\wedge C_1=c_1)\,p_{C_2}(c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)}{p_{C_1}(c_1)\sum_{d\in R[D]}p_D(d)\,p_O(o\mid D=d\wedge C_1=c_1)}\underset{?\neq 0}{=}$$

$$=\frac{p_D(d)\,p_O(o\mid D=d\wedge C_1=c_1)\,p_{C_2}(c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)}{\sum_{d\in R[D]}p_D(d)\,p_O(o\mid D=d\wedge C_1=c_1)}$$

$$P(D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)=P(D=d\wedge C_1=c_1)P(O=o\wedge C_2=c_2\mid D=d\wedge C_1=c_1)=$$

$$=P(D=d\wedge C_1=c_1)P(O=o\mid D=d\wedge C_1=c_1)P(C_2=c_2\mid D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o)=$$

$$=P(D=d\wedge C_1=c_1)P(O=o\mid D=d\wedge C_1=c_1)P(C_2=c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)$$

$$=p_D(d)\,p_{C_1}(c_1)\,p_O(o\mid D=d\wedge C_1=c_1)\,p_{C_2}(c_2\mid C_1=c_1\wedge O=o)$$

$$P(D_{C_2}=c \mid C_1=c_1 \wedge O=o)=$$
$$=\sum_{d\in R[D],\, c_2\in R[C_2]} P(D=d\wedge C_2=c_2 \mid C_1=c_1\wedge O=o)\, P(D_{C_2}=c \mid D=d\wedge C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)=$$
$$=\sum_{d\in R[D],\, c_2\in R[C_2]} P(D=d\wedge C_2=c_2 \mid C_1=c_1\wedge O=o)[d_{c_2}=c]=$$
$$=\sum_{d\in R[D],\, c_2\in R[C_2],\, d_{c_2}=c} P(D=d\wedge C_2=c_2 \mid C_1=c_1\wedge O=o)=$$
$$=\frac{\sum_{d\in R[D],\, c_2\in R[C_2],\, d_{c_2}=c} p_D(d)\, p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)\, p_{C_2}(c_2 \mid C_1=c_1\wedge O=o)}{\sum_{d\in R[D]} p_D(d)\, p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)}$$

$$\sum_{d\in R[D],\, d_{c_1}=c} p_D(d)\, p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)$$ vs
$$\sum_{d\in R[D],\, c_2\in R[C_2],\, d_{c_2}=c} p_D(d)\, p_O(o \mid D=d\wedge C_1=c_1)\, p_{C_2}(c_2 \mid C_1=c_1\wedge O=o)$$
$$P(D_{C_2}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)=P(D_{C_1}=g\wedge D_{C_2}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)+P(D_{C_1}=c\wedge D_{C_2}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)=$$
$$=P(D_{C_1}=g \mid C_1=c_1\wedge O=o)\, P(D_{C_2}=c \mid D_{C_1}=g\wedge C_1=c_1\wedge O=o)+$$
$$+P(D_{C_1}=c \mid C_1=c_1\wedge O=o)\, P(D_{C_2}=c \mid D_{C_1}=c\wedge C_1=c_1\wedge O=o)$$
$$P_X(D_{C_1}=g)\, P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)+P_X(D_{C_1}=c)\, P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)\, ?\, P_X(D_{C_1}=c)$$
$$(1-P_X(D_{C_1}=c))\, P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)+P_X(D_{C_1}=c)\, P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)\, ?\, P_X(D_{C_1}=c)$$
$$P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)\, ?\, P_X(D_{C_1}=c)(P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)-P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)+1)$$

$$P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2)=P(C_1=c_1)\, P(O=o, C_1=c_1)\, P(C_2=c_2, C_1=c_1, O=o)=$$
$$=p_{C_1}(c_1)\, p_O(c_1, o)\, p_{C_2}(c_1, o, c_2)$$
$$P(C_1=c_1\wedge O=o\wedge C_2=c_2\wedge D_{C_1}=c)=$$
$$=P(C_1=c_1)\, P(O=o, C_1=c_1)\, P(C_2=c_2, C_1=c_1, O=o)\, P(D_{C_2}=c, C_1=c_1, O=o, C_2=c_2)$$
$$P(D_{C_2}=c, C_1, O, C_2)=(c_1, o, c_2 \rightarrow P(D_{C_2}=c, C_1=c_1, O=o, C_2=c_2))=p_D(c_2 \mid c_1, o, c_2)$$

Выбрали дверь с автомобилем: $p_0=\frac{N_c}{N_d}$. Выбрали дверь с козой: $1-p_0=\frac{N_d-N_c}{N_d}$.

I — the object behind the initially chosen door
O — the object behind the opened door
F — the object behind the finally chosen door

$$P(F=c, O=g) \underset{F=I}{=} P(I=c, O=g)=\frac{P(I=c\wedge O=g)}{P(O=g)}=\frac{P(I=c\wedge Sure)}{P(Sure)}=\frac{P(I=c)}{1}=P(I=c)$$
$$P(F=c, O=g)=P(I=c\wedge F=c, O=g)+P(I=g\wedge F=c, O=g)=P(I=c\wedge F=c)+P(I=g\wedge F=c)$$
$$p_0(N_d, N_c)=\frac{N_c}{N_d}$$
$$p_1(N_d, N_c)=\frac{N_c}{N_d}\cdot\frac{N_c-1}{N_d-2}+\frac{N_d-N_c}{N_d}\cdot\frac{N_c}{N_d-2}=\frac{N_c(N_d-1)}{N_d(N_d-2)}$$
$$N_d\geq 3 \;\Rightarrow\; N_d-1>N_d-2>0 \;\Rightarrow\; \frac{N_d-1}{N_d-2}>1 \;\Rightarrow\; p_1\geq p_0$$

$$P_X(D_{C_2}=c)=P_X(D_{C_1}=c)P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)+P_X(D_{C_1}=g)P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)=$$
$$=P_X(D_{C_1}=c)(P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)-T)+(1-P_X(D_{C_1}=c))P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)=$$
$$=P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)-P_X(D_{C_1}=c)T=P_X(D_{C_1}=c)K$$
$$P_X(D_{C_1}=c)S-P_X(D_{C_1}=c)T=P_X(D_{C_1}=c)K \Leftrightarrow S-T=K$$
$$T=P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)-P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)=$$
$$=P(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=g)/P(D_{C_1}=g)-P(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=c)/P(D_{C_1}=c)=$$
$$=(P(D_{C_2}=c)-P(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=c))/(1-P(D_{C_1}=c))-P(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=c)/P(D_{C_1}=c)=(B-C)/(1-A)-C/A$$
$$S=P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g)/P_X(D_{C_1}=c)=P_X(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=g)/P_X(D_{C_1}=g)/P_X(D_{C_1}=c)=$$
$$=(P_X(D_{C_2}=c)-P_X(D_{C_2}=c \wedge D_{C_1}=c))/(1-P_X(D_{C_1}=c))/P_X(D_{C_1}=c)=(B-C)/(1-A)/A=(B-C)/((1-A)A)$$
$$K=S-T=(B-C)/((1-A)A)-(B-C)/(1-A)+C/A=\frac{B-C}{A(1-A)}-\frac{(B-C)A}{A(1-A)}+\frac{C(1-A)}{A(1-A)}=$$
$$=\frac{B-C-AB+AC+C-AC}{A(1-A)}=\frac{B-AB}{A(1-A)}=\frac{B(1-A)}{A(1-A)}=\frac{B}{A}\underset{?}{\geq}1$$
$$B \geq A$$
$$\frac{N_c}{N_d}=P_X(D_{C_1}=c), \frac{N_c-1}{N_d-2}=P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=g), \frac{N_d-N_c}{N_d}=P_X(D_{C_1}=g), \frac{N_c}{N_d-2}=P_X(D_{C_2}=c, D_{C_1}=c)$$
$$\frac{N_d-N_c}{N_d}=\frac{N_d}{N_d}-\frac{N_c}{N_d}=1-\frac{N_c}{N_d}=1-P_X(D_{C_1}=c)=P_X(D_{C_1}=g)$$

Два конверта

Вопросы

1

> В парадоксе неявно предполагается, что сумма денег в конверте не ограничена и все суммы равновероятны. Возможно ли это?

Если бы сумма была не ограничена, существовало бы бесконечно много её вариантов, поскольку иначе существовало бы максимальное её значение. Если бы при этом все значения имели одну и ту же вероятность $p>0$, то общая вероятность была бы равна $p \cdot \infty = \infty$, что невозможно.

2

> Если известно, что бюджет ведущего ограничен сверху и снизу некоторыми суммами, стоит ли вам меняться конвертами, если вы получили минимально возможную или максимально возможную сумму в конверте?

(TODO)

3

> Считая, что суммарное количество денег S в конвертах есть случайная величина, имеющая плотность распределения f_S, найти вероятность того, что у противника больше денег в конверте, если в вашем конверте оказалась сумма X=x.

Итак, пусть X — сумма денег в нашем конверте, Y — в конверте противника. Заранее известно, что X + Y = S и либо X = 2Y, либо Y = 2X. Наблюдено, что X = x. Требуется найти P(Y > X | X = x).

$$P(Y>X \mid X=x)=\frac{P(Y>X \wedge X=x)}{P(X=x)}\underset{1}{=}\frac{P(Y>X \wedge ((X<Y \wedge S=3x) \vee (X>Y \wedge S=3x/2)))}{P((X<Y \wedge S=3x) \vee (X>Y \wedge S=3x/2))}\underset{2}{=}$$
$$\underset{2}{=}\frac{P(X<Y \wedge S=3x)}{P(X<Y \wedge S=3x)+P(X>Y \wedge S=3x/2)}\underset{3}{=}\frac{P(X<Y)\cdot P(S=3x)}{P(X<Y)\cdot P(S=3x)+P(X>Y)\cdot P(S=3x/2)}\underset{4,5}{=}$$
$$\underset{4,5}{=}\frac{1/2\cdot f_S(3x)}{1/2\cdot f_S(3x)+1/2\cdot f_S(3x/2)}=\frac{f_S(3x)}{f_S(3x)+f_S(3x/2)}$$

Примечания:

1. X = x могло получиться только тогда, когда X = x, Y = 2X = 2x, S = X + Y = x + 2x = 3x, или тогда, когда X = x, Y = X/2 = x/2, S = X + Y = x + x/2 = 3x/2.
2. Y > X и X > Y несовместны.
3. Выбор конверта с большей суммой и распределение общей суммы независимы.
4. Выбор конверта с большей суммой равновероятен.
5. Будет считать, что вероятность случайной величины принять некоторое значение равна плотности её распределения в этом значении.

4

> Можно ли теперь утверждать, что если одному из игроков обмен выгоден, то второму обмен не выгоден, тем самым парадокс разрешается?

(TODO)

5

> Найдите математическое ожидание суммы денег в конверте противника, если в вашем конверте оказалась сумма X=x. Найдите ваш выигрыш при обмене конвертами, как функцию x.

(TODO)

6

> Как изменится ответ, если ведущий подыгрывает вашему противнику, отдавая ему конверт с большей суммой с вероятностью p? Стоит ли производить обмен, если p=1? А если p=0? Как это согласуется с общей формулой?

(TODO)

7

> Проведите численное моделирование игры: сгенерируйте выборку значений суммы в двух конвертах, разложите случайным образом суммы по конвертам. Отметьте реализации игры, в которых вам достался конверт с наибольшей суммой, для всех реализаций посчитайте величину выигрыша при обмене конвертами. Сгруппировав игры по близким значениям сумм в конверте первого игрока, посчитайте долю реализаций с большей суммой в конверте первого игрока и средний выигрыш первого игрока при обмене конвертами внутри каждой группы. Постройте графики оценки условной вероятности получить конверт с максимальной суммой и условного математического ожидания выигрыша при обмене конвертами, как функции от числа денег в конверте игрока X.

(TODO)

Черновик

1. Имеется два конверта: a и b.
2. В конверт a кладут *X* денег.
3. В конверт b кладут *2X* денег.

4. X распределено согласно дискретному неотрицательному распределению с функцией вероятности p_X.
5. Нам выдают один из конвертов: вероятность получить конверт e ($e = a$, b) равна p_e; $p_a + p_b = 1$.
6. Мы открываем выданный нам конверт и знаем сумму денег y в нём.
7. Таким образом мы знаем:
   1. p_X — распределение X;
   2. в конверте b в 2 раза больше денег, чем в конверте a;
   3. p_a — вероятность получить коверт a;
   4. y — сумма денег в полученном нами конверте.
8. Каково мат. ожидание z суммы денег в другом конверте?
9. Каково мат. ожидание d прибыли при смене конвертов?

Доп. обозначения:

- $s(e)$ — сумма денег в конверте e
- Y — полученный нами конверт
- Z — не полученный нами конверт

Искомая величина — мат. ожидание суммы в не полученном нами конверте, при условии, что сумма в полученном нами конверте известна:

$$z=E[s(Z)\mid s(Y)=y].$$

Конверт с суммой денег y мы могли получить ровно в следующий двух случаях:

- в конверт a положили y, и нам достался конверт a;
- в конверт b положили y, и нам достался конверт b:

$$s(Y)=y \;\Leftrightarrow\; Y=a\wedge s(a)=y\vee Y=b\wedge s(b)=y.$$

Если в конверте b сумма денег равна y, то в конверте a — в 2 раза меньше, т.е. y/2, поэтому:

$$Y=a\wedge s(a)=y\vee Y=b\wedge s(b)=y \;\Leftrightarrow\; Y=a\wedge s(a)=y\vee Y=b\wedge s(a)=y/2.$$

Т.о.

$$z=E[s(Z)\mid Y=a\wedge s(a)=y\vee Y=b\wedge s(a)=y/2].$$

По формуле полного условного мат. ожидания:

$$z=\frac{E[s(Z)\mid Y=l\wedge s(l)=y]P(Y=l\wedge s(l)=y)+E[s(Z)\mid Y=g\wedge s(l)=y/2]P(Y=g\wedge s(l)=y/2)}{P(Y=l\wedge s(l)=y)+P(Y=g\wedge s(g)=y)}=$$

$$=\frac{(2y)m_l p_X(y)+(y/2)m_g p_X(y/2)}{m_l p_X(y)+m_g p_X(y/2)}=\frac{(2y)m_l p_X(y)+(y/2)(1-m_l)p_X(y/2)}{m_l p_X(y)+(1-m_l)p_X(y/2)}$$

Мат. ожидание прибыли:

$$d=E[s(Z)-s(Y),s(Y)=y]=E[s(Z),s(Y)=y]-E[s(Y),s(Y)=y]=z-y$$

Условное мат. ожидание

Пусть

- S — дискретное вероятностное пространство;
- H — событие в S;
- T — событие в S, T ⊇ H;
- X — неотрицательная случайная, определённая на T.

Тогда мат. ожидание X при условии, что имеет место H:

$$E[X\mid H]=\sum_{h\in H}X(h)P(h\mid H)=\sum_{h\in H}X(h)\frac{P(h\wedge H)}{P(H)}\underset{h\in H}{=}\sum_{h\in H}X(h)\frac{P(h)}{P(H)}=\frac{\sum_{h\in H}X(h)P(h)}{P(H)}=\frac{1}{P(H)}\sum_{h\in H}X(h)P(h).$$

Сумма $\sum_{h\in H}$ определена, поскольку все её слагаемые неотрицательны.

Формула полного условного мат. ожидания:

$$A\cap B=\varnothing:\;\; E[X\mid A\vee B]=\frac{\sum_{A\vee B}X(h)P(h)}{P(A\vee B)}\underset{A\cap B=\varnothing}{=}\frac{\sum_{A}X(h)P(h)+\sum_{B}X(h)P(h)}{P(A)+P(B)}=\frac{E[X\mid A]P(A)+E[X\mid B]P(B)}{P(A)+P(B)}$$