Лабораторная работа №1-2

Головизнин Э. О.

25 мая 2018 г.

1 Сигналы телекоммуникационных систем. Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция

1.1 Цель работы

Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов. Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

1.2 Постановка задачи

- В командном окне MATLAB и в среде Simulink промоделировать синусиодальный и прямоугольный сигналы с различными параметрами. Получить их спектры. Вывести график.

- Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполните расчет преобразования Фурье. Перечислите свойства преобразования Фурье.

- С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом,воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции, сравните время работы обоих алгоритмов.

- Быстрая корреляция

1.3 Теоретический раздел

- Классификация сигналов:

  – Детерминированными являются сигналы, значения которых заранее известны, т. к. они повторяются через определенный интервал времени — период (например, гармоническое колебание или любой периодический сигнал).

  – Случайными являются сигналы, значение которых заранее неизвестно и может быть предсказано лишь с некоторой вероятностью.

- Простыми являются сигналы, которые описываются простой математической моделью (например, гармоническое колебание).
- Сложными являются сигналы, которые не могут быть описаны простой математической моделью.
- Аналоговыми (непрерывными) являются сигналы, которые могут принимать любые значения по уровню в некоторых пределах и являются непрерывными функциями времени.
- Дискретными являются сигналы, которые могут принимать некоторые значения из определенных как по уровню так и/или по времени.

- Спектр сигнала – это набор синусоидальных волн, которые, будучи надлежащим образом скомбинированы, дают изучаемый нами сигнал во временной области.

- Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является *периодический сигнал* $s(t)$ со следующим свойством:

$$s\left(t\right) = s\left(t \pm nT\right), n = 1, 2, \ldots$$

Здесь T – период сигнала.

Известно, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы элементарных гармонических сигналов с помощью *рядов Фурье*. Это возможно, если функция, описывающая сигнал, отвечает *условиям Дирихле*:

1. В пределах периода T функция имеет конечное число экстремумов.
2. В пределах периода T функция может иметь конечное количество точек разрыва, причем только первого рода.

Ряд Фурье может быть применен для представления сигналов конечной длительности. При этом устанавливается временной интервал, для которого нужно построить ряд. Тем самым подразумевается периодическое продолжение сигнала за границами рассматриваемого интервала.

Разложению в *ряд Фурье* могут подвергаться периодические сигналы. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Для того чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

– не должно быть разрывов 2-ого рода;
– число разрывов 1-ого рода должно быть конечно;
– число экстремумов должно быть конечным.

Для непериодических сигналов разложение в ряд Фурье неприменимо, но эта проблема решается путем предельного перехода в предположении, что сигнал имеет период, стремящийся к бесконечности.

В синусно-косинусной форме ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \tag{1}$$

Коэффициенты a_k и b_k рассчитываются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(k\omega t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(k\omega t)dt,$$

Применив к формуле 1 тригонометрические преобразования, можно заменить сумму синуса и косинуса на косинус той же частоты с иной амплитудой и некоторый начальной фазой. В результате получается вещественная форма ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k),$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi = \arctan(b_k/a_k)$.

Наиболее часто в радиотехнике употребляется комплексная форма ряда Фурье:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}).$$

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром, а совокупность фаз – фазовым спектром.

- Преобразование Фурье является математической основой, которая связывает временной или пространственный сигнал (или же некоторую модель этого сигнала) с его представлением в частотной области.
Формула прямого преобразования Фурье:

$$\dot{S}\left(\omega\right) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{dt}. \tag{2}$$

Формула обратного преобразования Фурье:

$$s\left(t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{dw}. \tag{3}$$

Чтобы преобразование Фурье было применимо, сигнал должен удовлетворять следующим требованиям:

  - должны выполняться условия Дирихле;
  - сигнал должен быть *абсолютно интегрируемым*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|s\left(t\right)\right| \mathrm{dt} < \infty.$$

Модуль спектральной функции называется *амплитудным спектром*, а ее аргумент – *фазовым спектром.*

Преобразование Фурье ставит в соответствие сигналу, заданному во времени, его спектральную функцию. При этом говорят, то осуществляется *переход из временной области в частотную.* Преобразование Фурье взаимно-однозначно, поэтому спектральная функция содержит столько же информации, сколько и исходный сигнал.

- *Корреляция.*
Если два сигнала похоже меняются при переходе от точки к точке, то меру их корреляции можно вычислить, взяв сумму произведений соответствующих пар точек.
Другими словами, если рассмотреть две независимые и случайные последовательности данных, сумма произведений стремится к бесконечно малому случайному числу по мере увеличения пар точек. Это объясняется тем, что все числа равновероятны, так что пары произведений компенсируются при сложении, ибо числа могут быть как положительными, так и отрицательными. В то же время, если сумма конечна, это указывает на наличие корреляции.

Отрицательная сумма указывает на отрицательную корреляцию, т.е. увеличение одной переменной связано с уменьшением другой. Таким образом, взаимную корреляцию r12(n) двух последовательностей данных x1(n) и x2(n), содержащих по N элементов, можно записать как

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n) \tag{4}$$

Впрочем, такое определение взаимной корреляции дает результат, который зависит от числа взятых точек. Чтобы это исправить, результат нормируется на число точек (делится на N). Данную операцию можно также рассматривать как усреднение суммы произведений. Итак, получаем следующее улучшенное определение:

$$r_{12} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n) \tag{5}$$

- *Быстрая корреляция.* Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции:

  $$r_{12} = \frac{1}{N}\mathcal{F}_D^{-1}[\overline{X_1}(k)X_2(k)],$$

  где $X_1(k) = \mathcal{F}_D[x_1(n)]$, $X_2(k) = \mathcal{F}_D[x_2(n)]$, $\mathcal{F}_D[...], \mathcal{F}_D^{-1}[...]$ – прямое и обратное дискретные преобразования Фурье (ДПФ) соответственно, которые обычно вычисляются с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Если число членов в последовательностях $x_1(n)$ и $x_2(n)$ достаточно велико, то данный метод, называемый *быстрой корреляцией*, дает результат быстрее, чем непосредственный расчет взаимной корреляции.

2 Ход работы

2.1 Синусоидальные сигналы и их спектры:

Построение графика синусоидального сигнала и получение спектра:

```
% Синусоидальный сигнал
t = 0:0.001:1;
plot(t, my_sin(t));
points = 1024;
figure;
```

```
plot(abs(fft(my_sin(t), points)));

function func = my_sin(t)
    A = 2.3; % амплитуда
    f = 5; % частота
    ph = 5; % сдвиг фазы

    func = A * sin(2 * pi * f * t + ph);
end
```

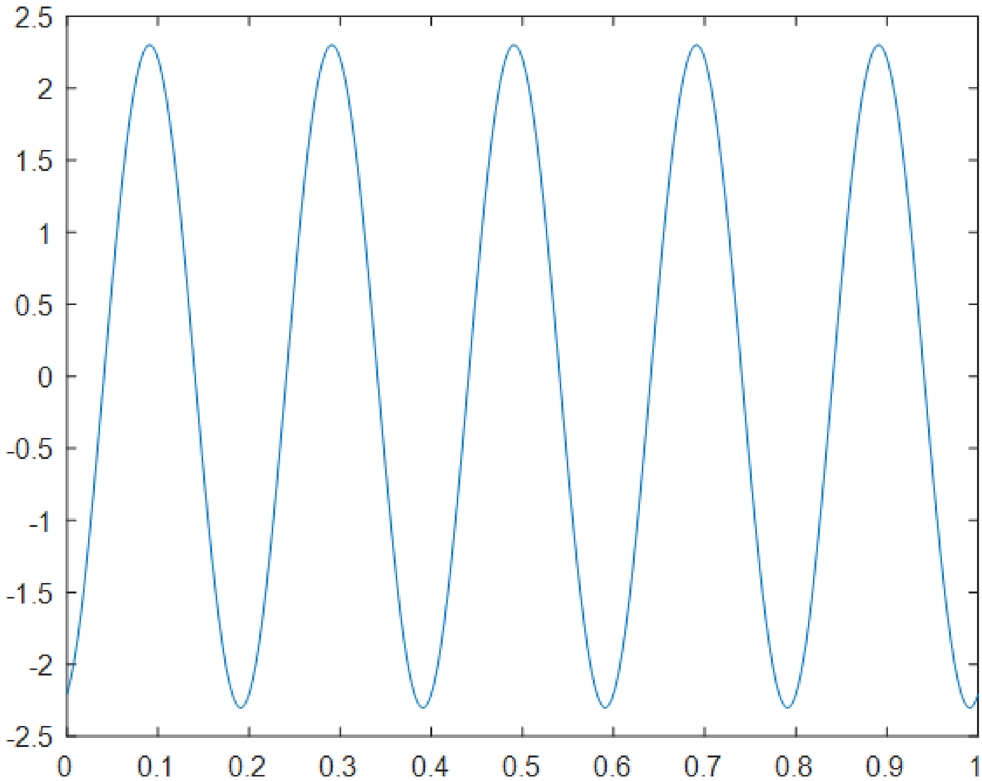

Рис. 1: Синусоидальный сигнал 1

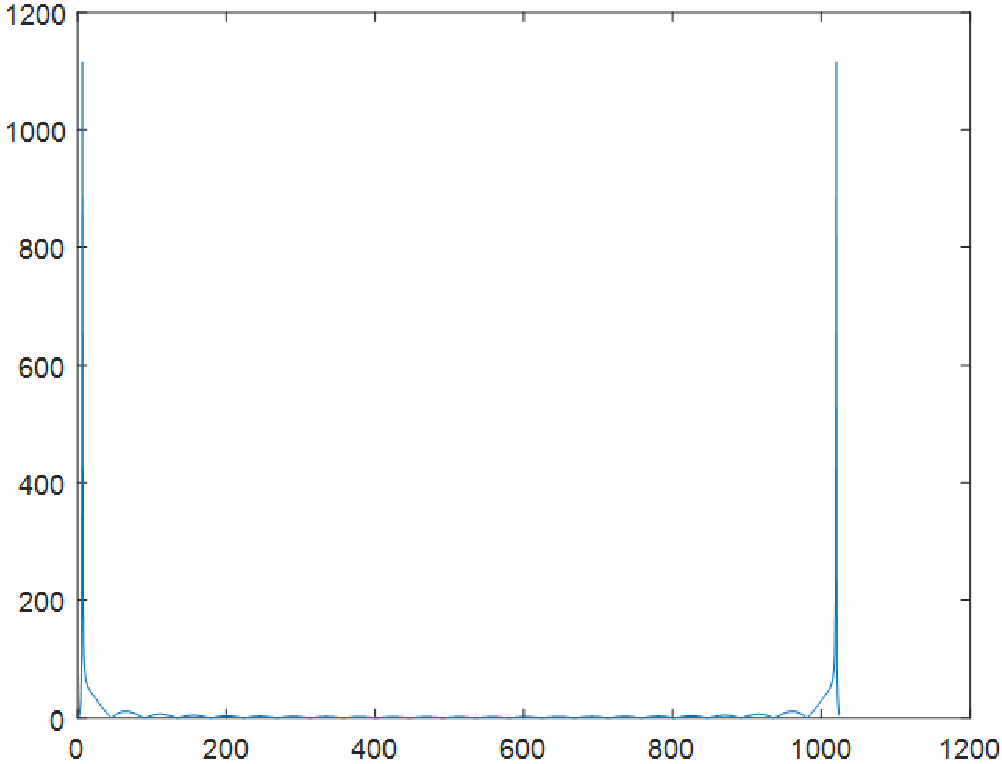

Рис. 2: Спектр синусоидального сигнала 1

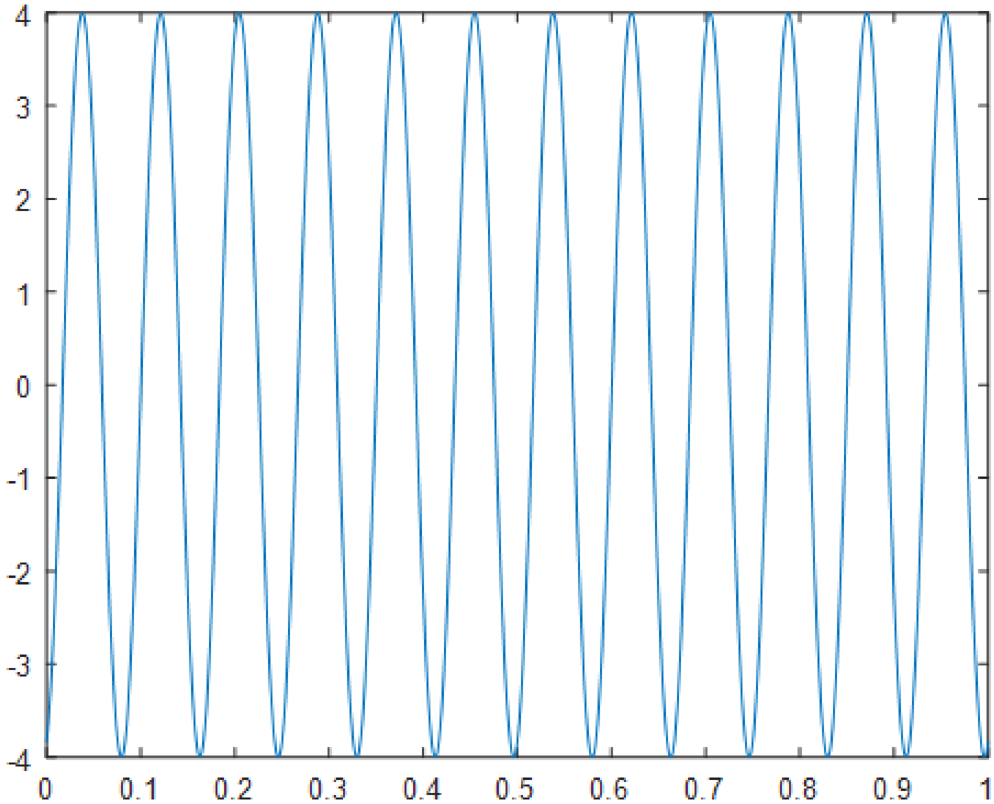

Рис. 3: Синусоидальный сигнал 2

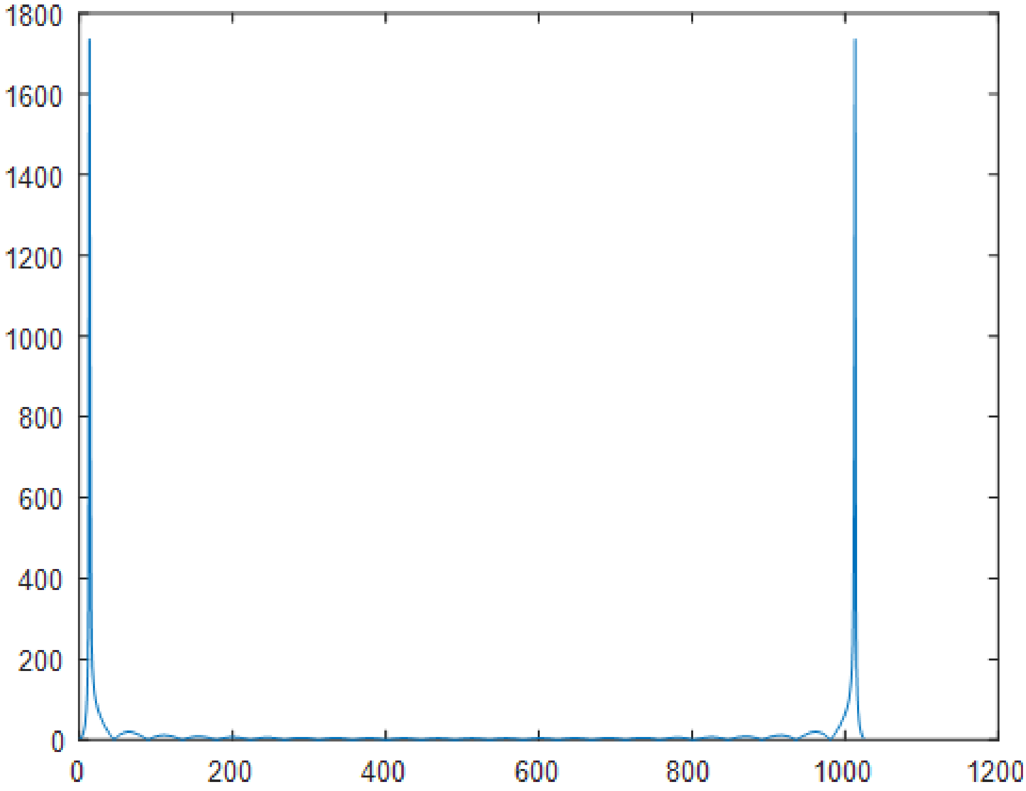

Рис. 4: Спектр синусоидального сигнала 2

2.2 Прямоугольный импульс

Построение графика прямоугольного сигнала и получение спектра:

```
% Прямоугольный сигнал
t = 0:0.01:50;
figure;
plot(t, my_rect(t));
points = 1024;
figure;
plot(abs(fft(my_rect(t), points)));

function func = my_rect(t)
    A = 4; % амплитуда
    duty = 30; % период заполнения

    func = A * square(t, duty);
end
```

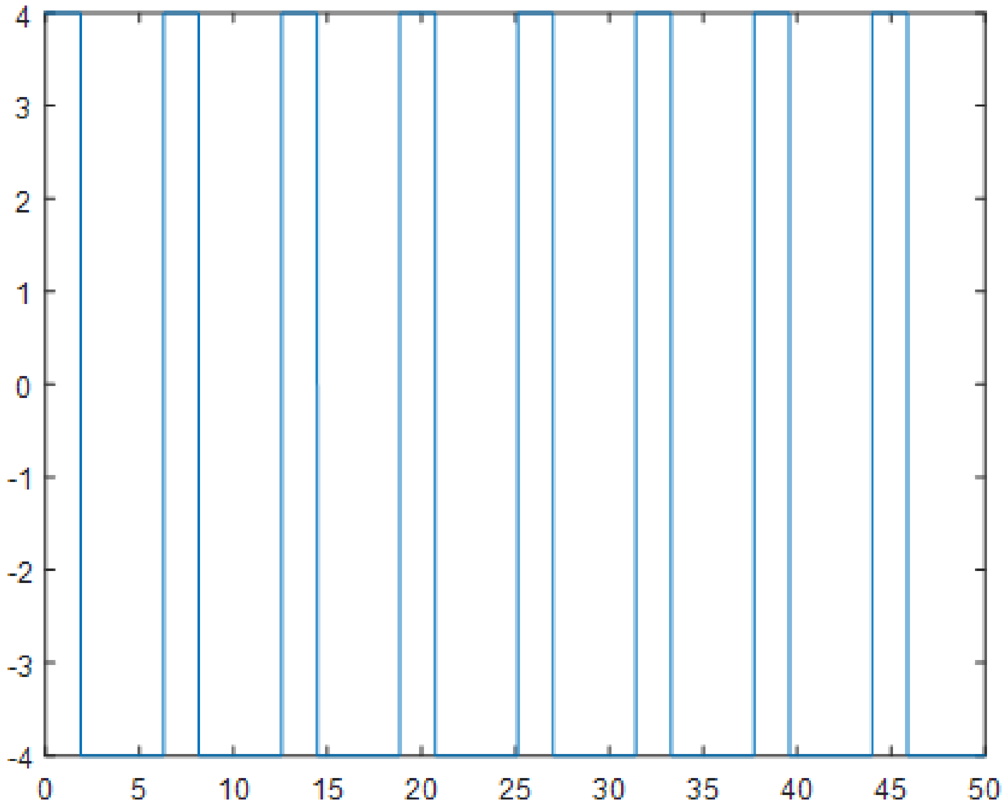

Рис. 5: Прямоугольный сигнал 1

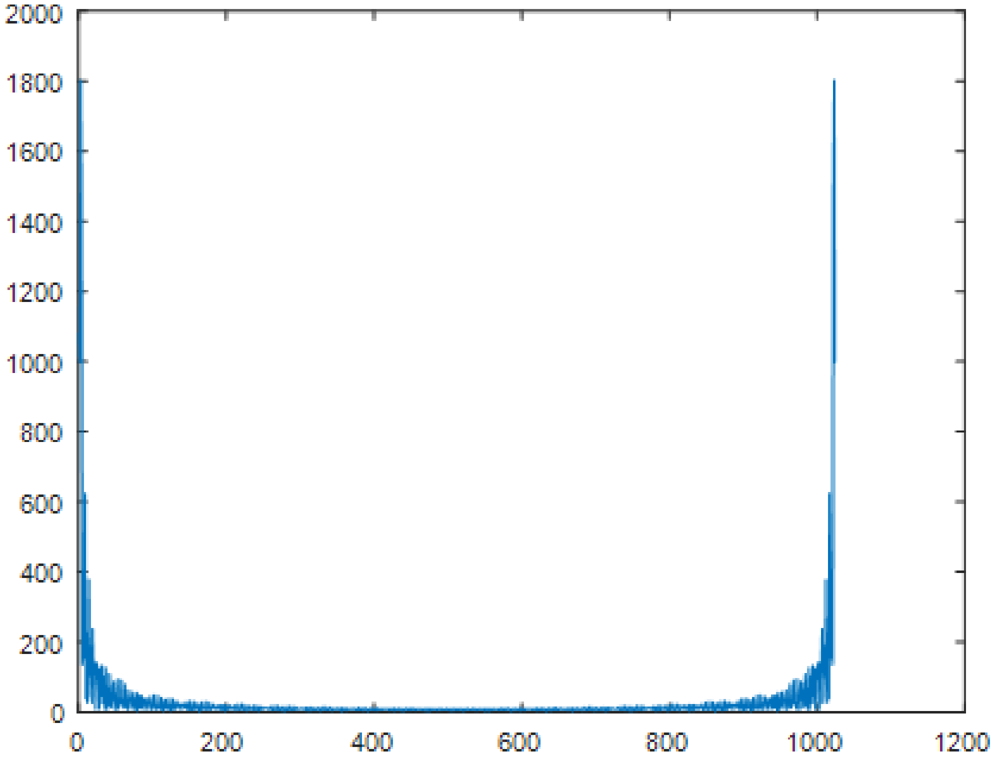

Рис. 6: Спектр прямоугольного сигнала 1

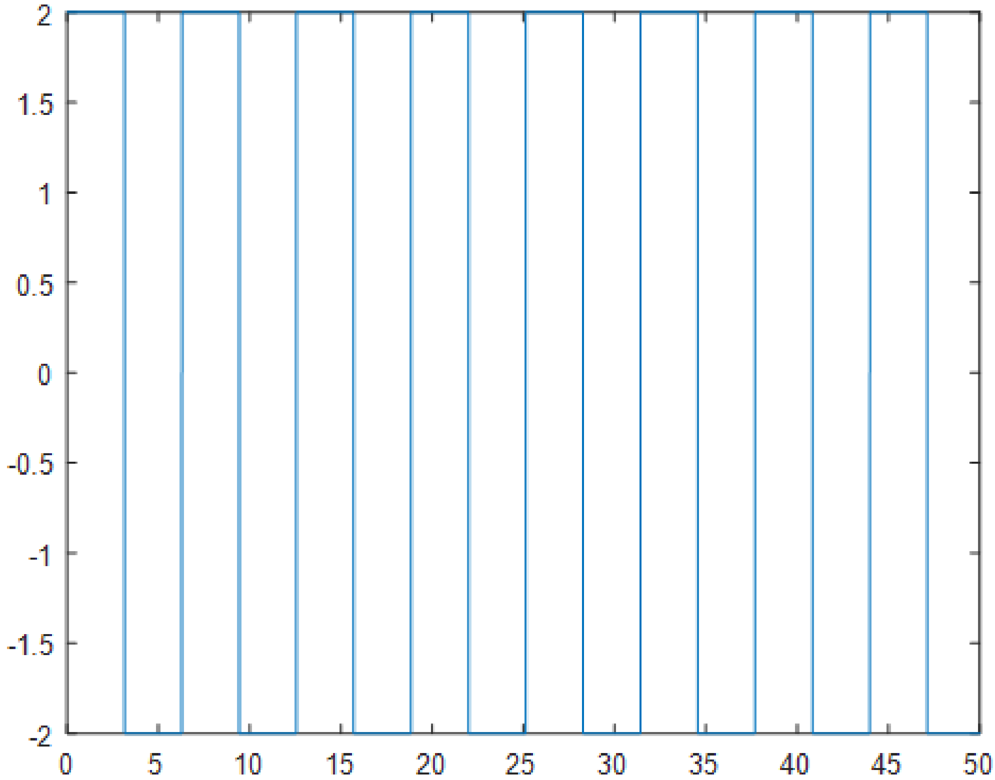

Рис. 7: Прямоугольный сигнал 2

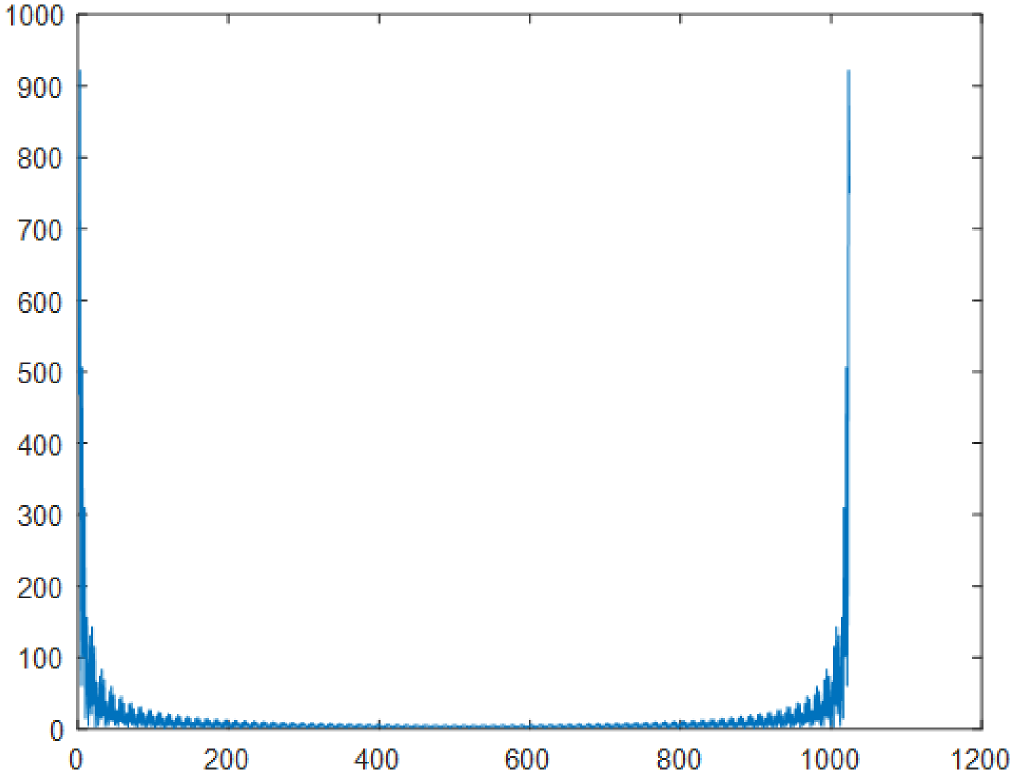

Рис. 8: Спектр прямоугольного сигнала 2

2.3 Simulink

2.3.1 Исследование синусоидального сигнала

Модель получения графика синусоидального сигнала и спектра:

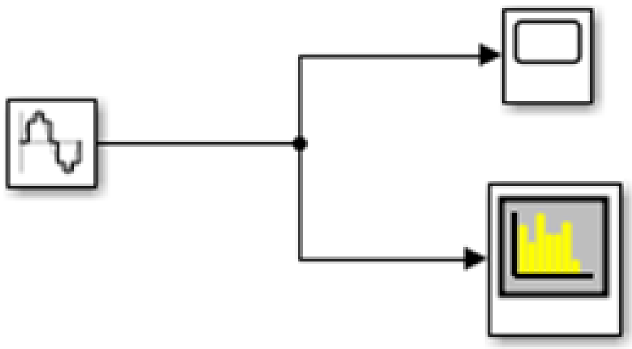

Рис. 9: Схема для синусоидального сигнала

Параметры синусоидального сигнала:

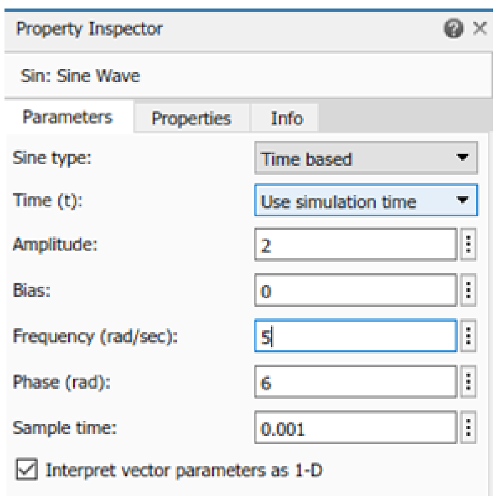

Рис. 10: Параметры синусоидального сигнала

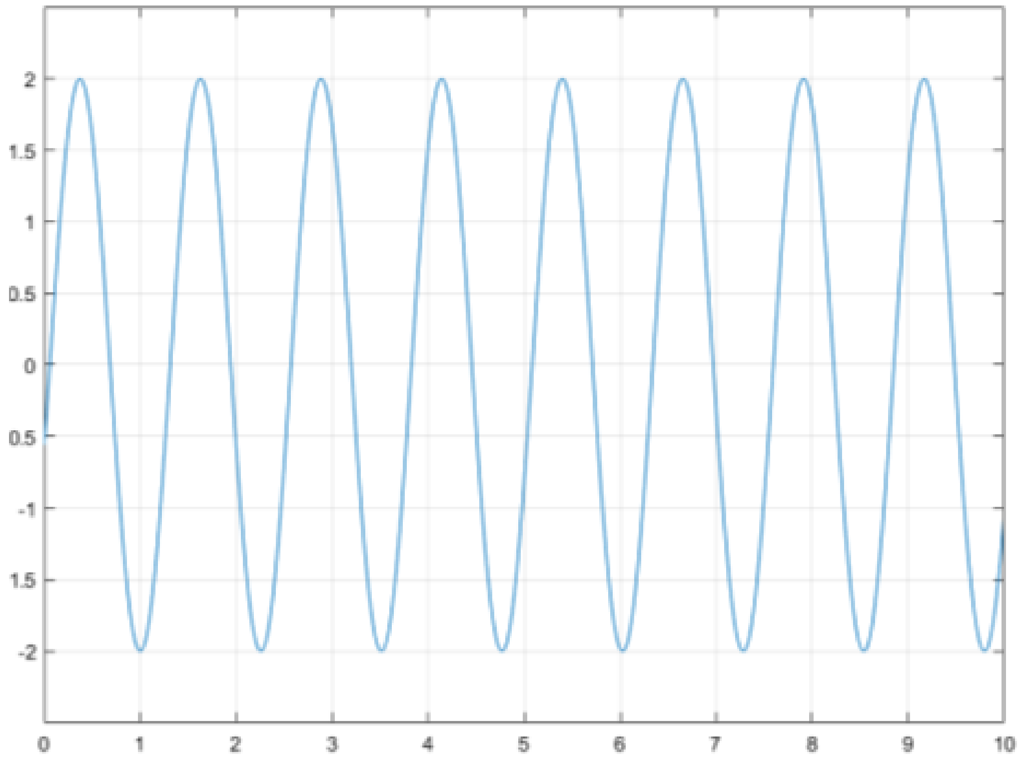

Рис. 11: Синусоидальный сигнал 1

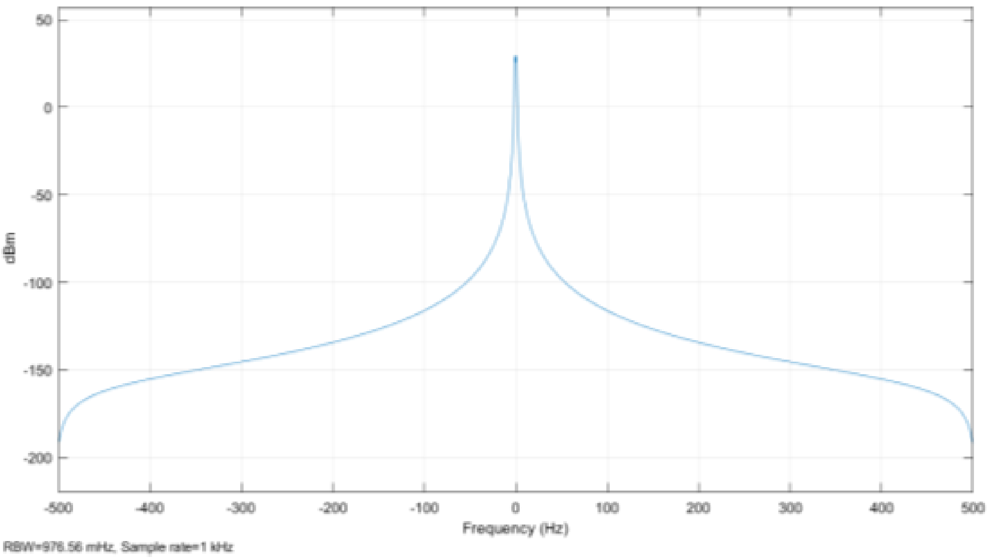

Рис. 12: Спектр синусоидального сигнала 1

Параметры синусоидального сигнала:

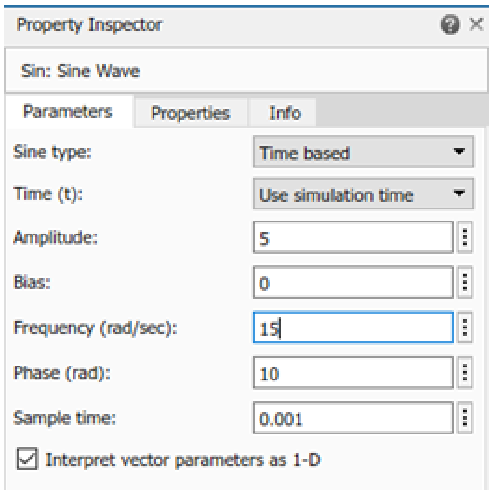

Рис. 13: Параметры синусоидального сигнала

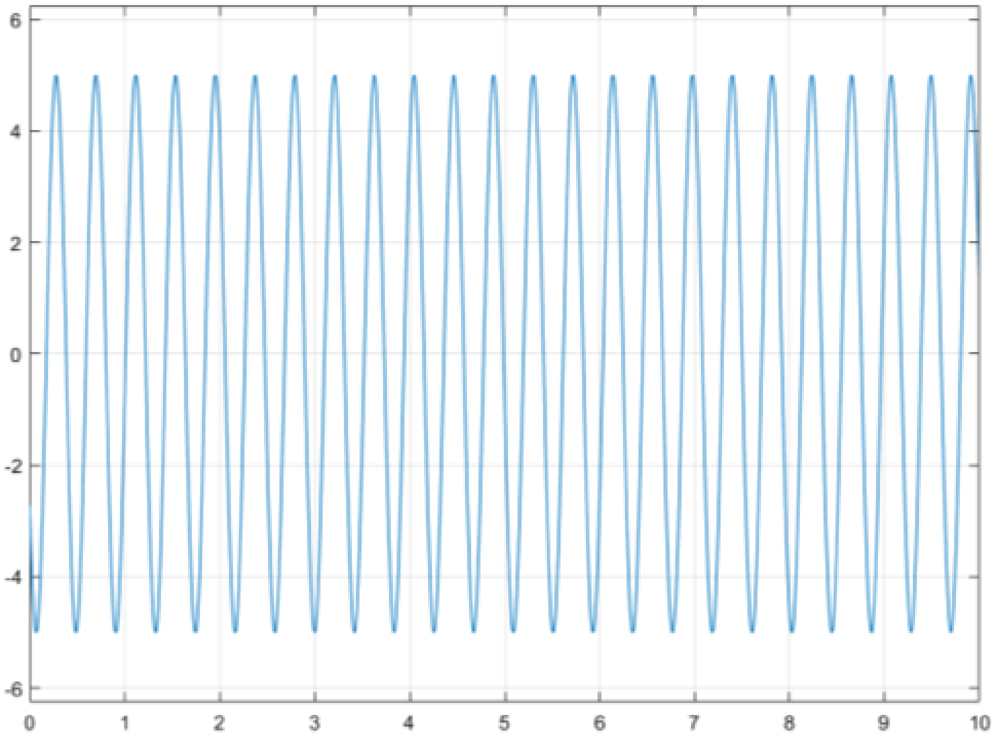

Рис. 14: Синусоидальный сигнал 2

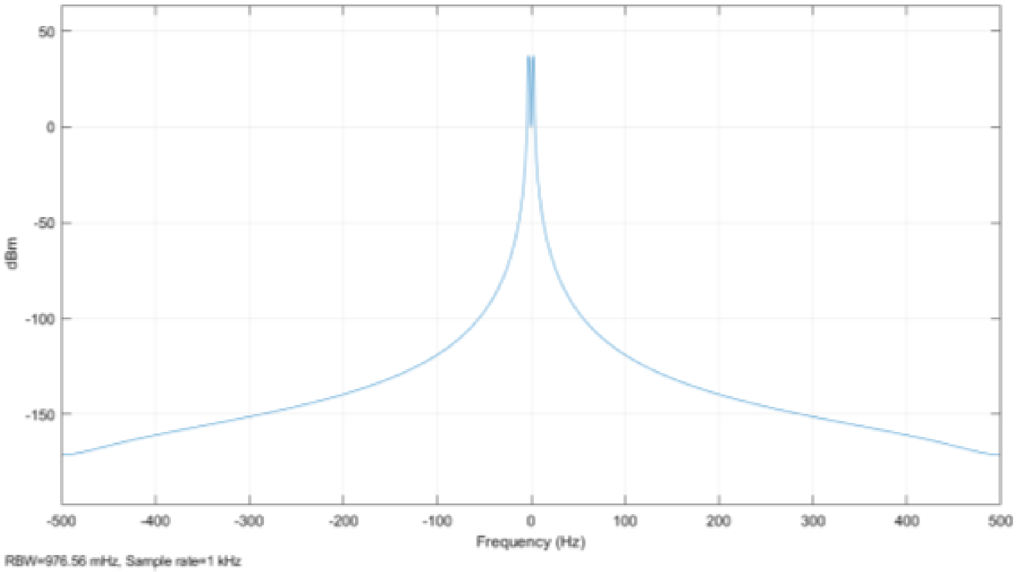

Рис. 15: Спектр синусоидального сигнала 2

2.3.2 Исследование прямоугольного сигнала

Модель получения графика прямоугольного сигнала и спектра:

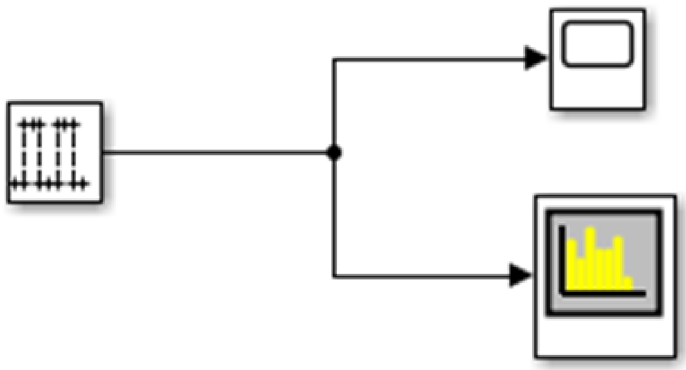

Рис. 16: Схема для прямоугольного сигнала

Параметры прямоугольного сигнала:

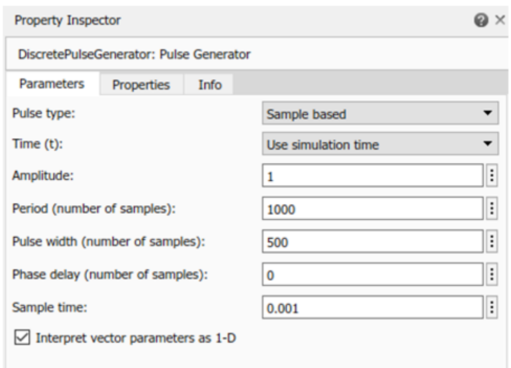

Рис. 17: Параметры прямоугольного сигнала

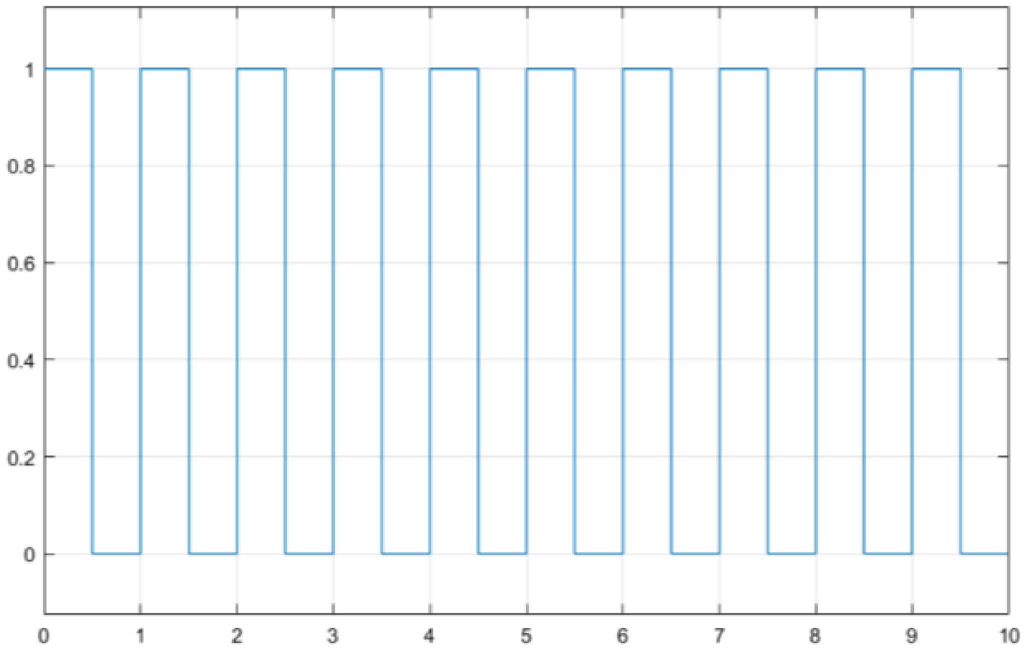

Рис. 18: Прямоугольный сигнал 1

Параметры прямоугольного сигнала:

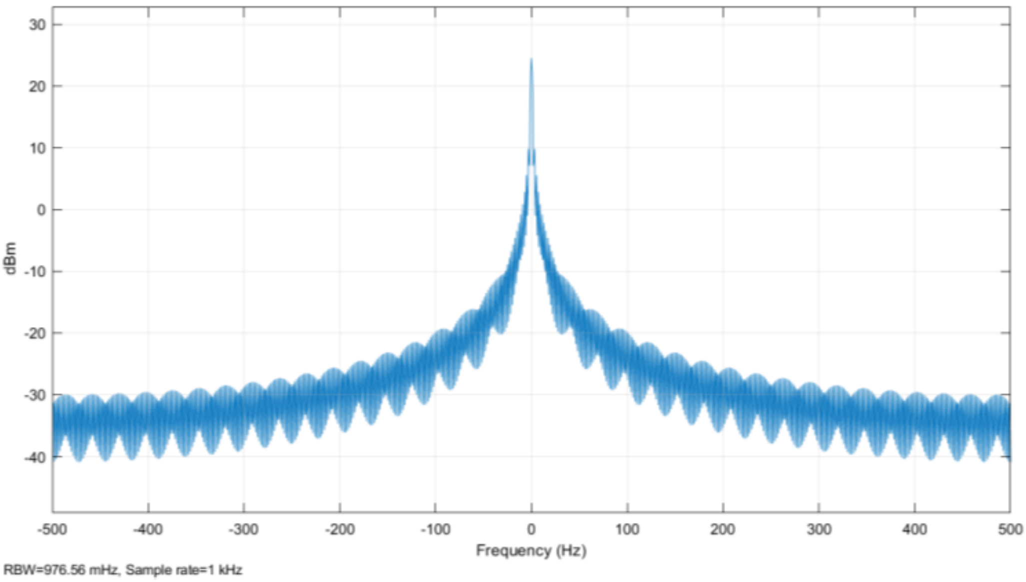

Рис. 19: Спектр прямоугольного сигнала 1

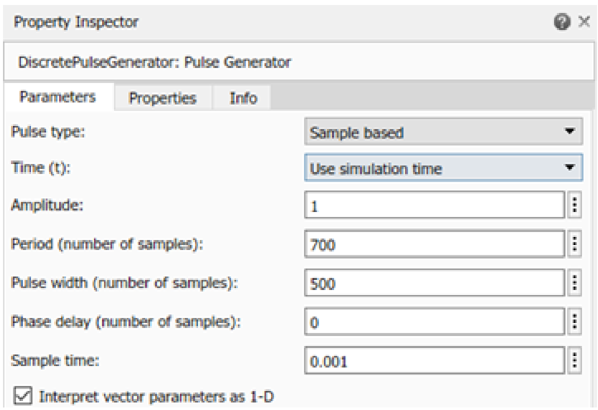

Рис. 20: Параметры прямоугольного сигнала

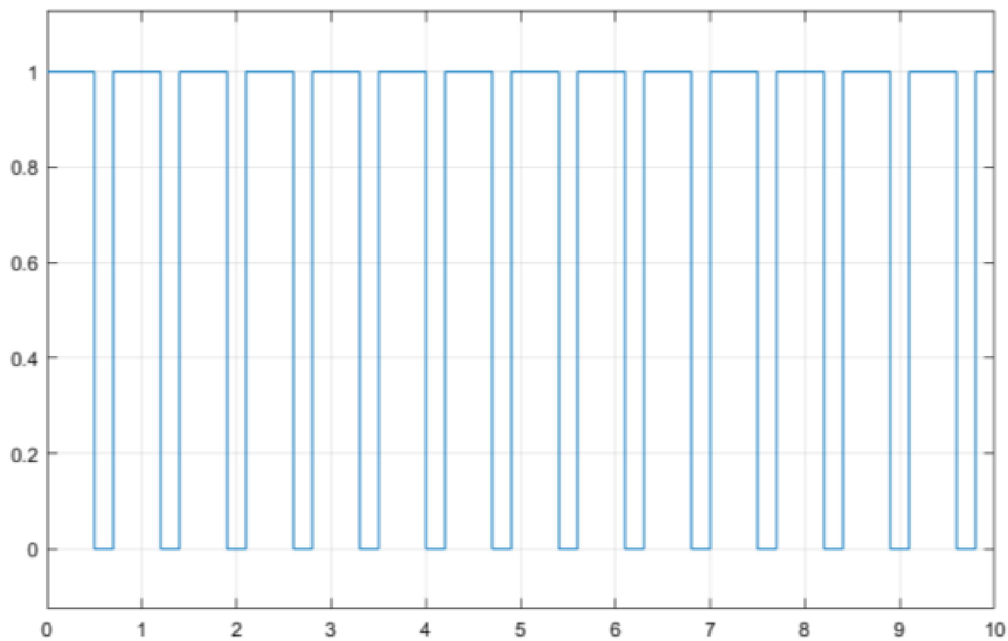

Рис. 21: Прямоугольный сигнал 2

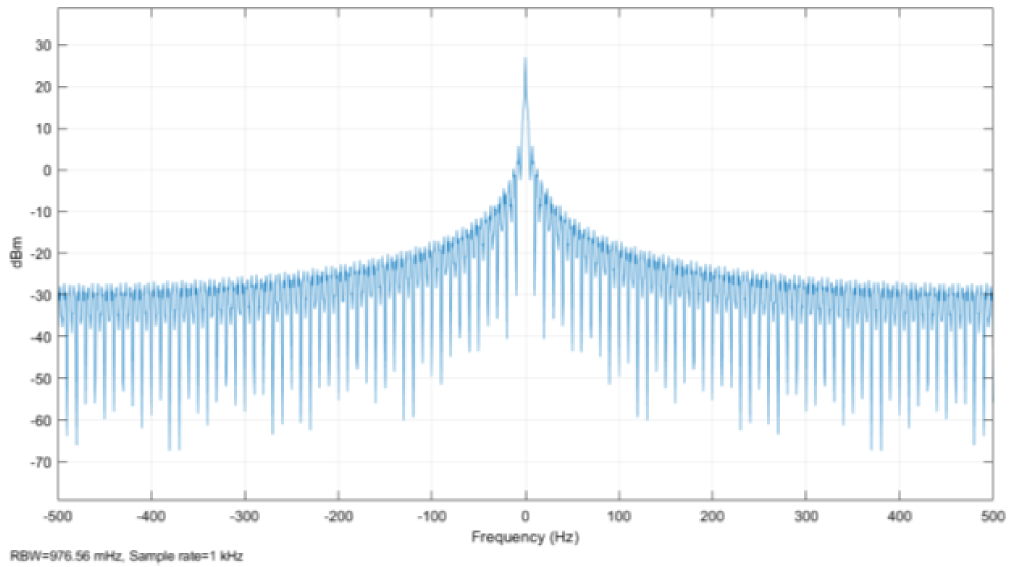

Рис. 22: Спектр прямоугольного сигнала 2

2.4 Синхропосылка

Есть синхропосылка [101] в сигнале [0001010111000010]. С помощью функций xcorr и ifft в MATLAB вычислим корреляцию и быструю корреляцию.

```
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
package = [1 0 1];

% Вычисление корреляции
tic;
[corr, lags] = xcorr(signal, package);
toc;

figure;
plot(lags, corr);
```

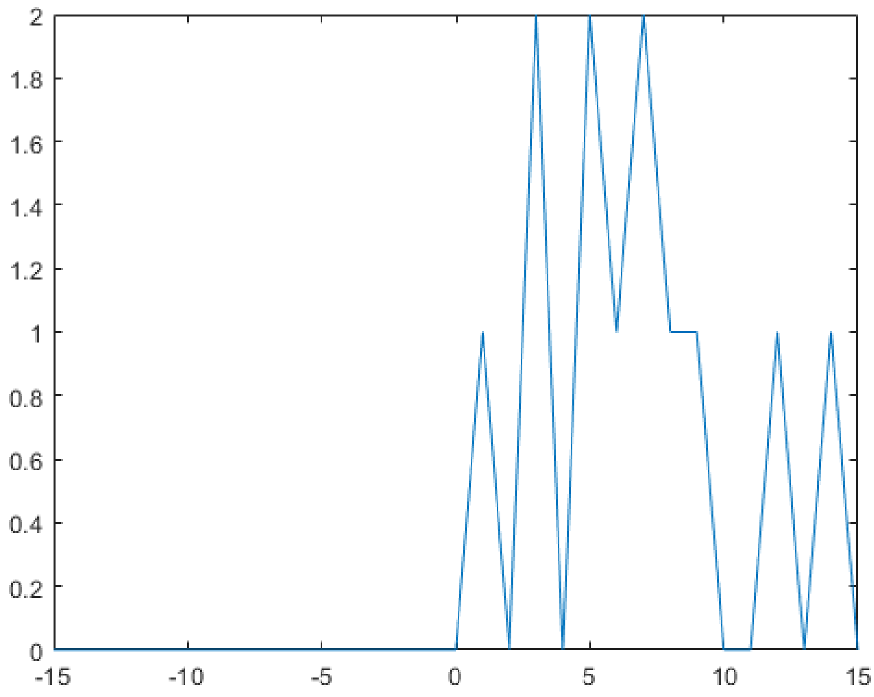

Рис. 23: Вычисление корреляции xcorr

```
% Быстрая корреляция
f = numel(signal)-1;

tic;
corr = ifft(fft(package, 2 * f).*fft(signal, 2 * f));
lags2 = [-f:f-1];
toc;

figure
plot(lags2, corr);
```

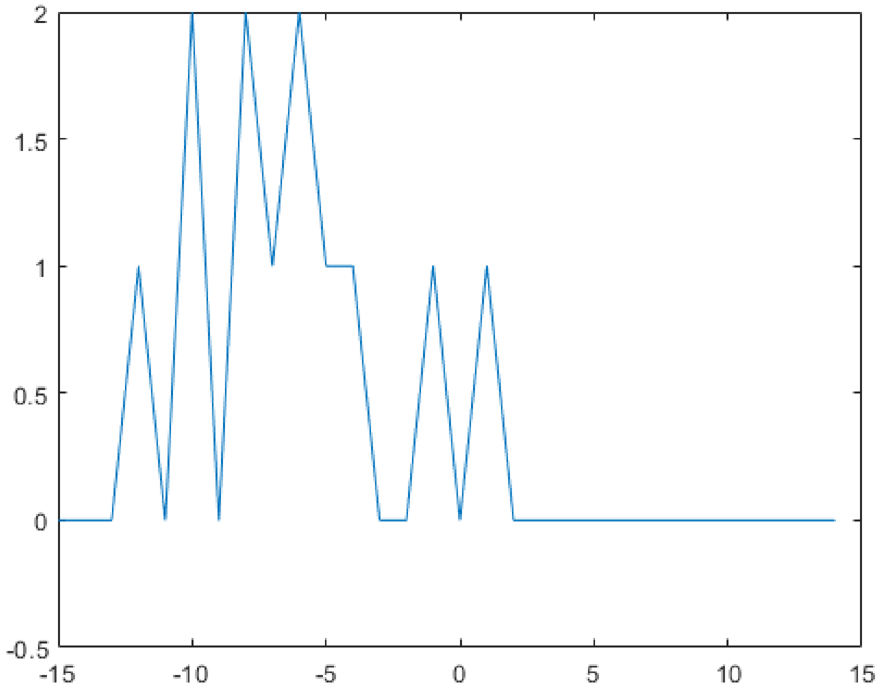

Рис. 24: Вычисление корреляции ifft

Сравним время алгоритмов. (Tic и toc считает истекшее время)

```
Elapsed time is 0.002871 seconds.
Elapsed time is 0.000201 seconds.
```

Алгоритм быстрой корреляции работает быстрее.

3 Выводы

Сигнал – физическая величина, в основном изменяющаяся в зависимости от времени. Сигналы могут быть детерминированными и случайными, периодическимм и непериодическими. По времени сигналы могут делиться на непрерывные и дискретные.

С помощью преобразования Фурье можно получить частотный спектр.С помощью этого преобразования сигнал будет представлен в виде коэффициентов амплитуд и фаз частот, составляющих этот сигнал. Преобразование Фурье используется в обработке растровых изображений, телекоммуникации, исследовании и измерении сигналов, радиолокации. Корреляционный анализ вычисляет взаимосвязь сигналов на рассматриваемом временном интервале.