KATEDRA AUTOMATYKI

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

LABORATORIUM METOD OPTYMALIZACJI

METODY GRADIENTOWE

Kraków, październik 1996

Zadanie 1. *Obserwacja zjawiska zygzakowania.*

Należy przeanalizować wpływ wydłużenia zbiorów poziomicowych funkcjonału kwadratowego i punktu startowego na tempo zbieżności metody najszybszego spadku.
Badania przeprowadzić dla fukncjonału :
Znaleźć minimum funkcji celu

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + a x_2^2$$

wybierając kolejno a=1, a=0.5, a=0.3.

Zadanie 2. *Badania porównawcze gradientowych metod optymalizacji.*

Badania porównawcze gradientowych metod optymalizacji przeprowadzić dla funkcjonału :

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 6x_1 x_2 + x_2^2 + 4.5\left(e^{x_1} - x_1 - 1\right) + 1.5\left(e^{x_2} - x_2 - 1\right)$$

Przyjąć, że norma gradientu w punkcie zatrzymania algorytmu, ma być nie większa niż 0.001. Pole obserwacji graficznej : $|x_1| \le 3, |x_2| \le 3$. Punkt startowy : (-3,3) {dla metody największego spadku wypróbować też punkt (-3,1)). Maksymalna liczba iteracji : 20. Maksymalny czas obserwacji : 7minut.

W badaniach porównawczych należy wziąć pod uwagę, jak zależy $Q^{apr} - Q^{*}$ i $\left\| x^{apr} - x^{*} \right\|$ od liczby iteracji i od czasu obliczeń. Oznaczenia :

x^{apr} - aktualne przybliżenie rozwiązania optymalnego, $Q^{apr} = Q(x^{apr})$,

x^{*} - rozwiązanie optymalne , $Q^{*} = Q(x^{*})$,

Uwzględnić również wartości normy gradientu. Z przeprowadzonej analizy porównawczej wysnuć wnioski co do efektywności poszczególnych algorytmów.

Zadanie 3.

Zaobserwować działania różnych metod zmiennej metryki dla funkcjonału :

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + a x_2^2$$

wybierając kolejno a=1, a=0.5, a=0.3.

Zadanie 4. *Badania porównawcze gradientowych metod optymalizacji.*

Badania porównawcze metod zmiennej metryki przeprowadzić dla funkcjonału :

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 6x_1 x_2 + x_2^2 + 4.5\left(e^{x_1} - x_1 - 1\right) + 1.5\left(e^{x_2} - x_2 - 1\right)$$

Przyjąć, że norma gradientu w punkcie zatrzymania algorytmu, ma być nie większa niż 0.001. Pole obserwacji graficznej : $|x_1| \le 3, |x_2| \le 3$. Punkt startowy : (-3,3) {dla metody największego spadku wypróbować też punkt (-3,1)).

W badaniach porównawczych należy wziąć pod uwagę, jak zależy $Q^{apr} - Q^*$ i $\|x^{apr} - x^*\|$ od liczby iteracji i od czasu obliczeń. Oznaczenia :

x^{apr} - aktualne przybliżenie rozwiązania optymalnego, $Q^{apr} = Q(x^{apr})$,

x^* - rozwiązanie optymalne , $Q^* = Q(x^*)$,

Uwzględnić również wartości normy gradientu. Z przeprowadzonej analizy porównawczej wysnuć wnioski co do efektywności poszczególnych algorytmów.

Zadanie 5.

„Dolina bananowa” Rossenbrocka. Wyznaczyć minimum funkcji :

$$Q(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

na mapę poziomic doliny nanieść punkty pośrednie poszczególnych kroków oraz położenie baz.

1. Opis programów dla MATLAB-a.

Do przeprowadzenia ćwiczenia należy użyć następujących m-plików :
apropa. m, ekspan.m, gradie.m, koszt.m, granad.m, zlpod.m, kierun.m . Pliki te należy odpowiednio zmodyfikować dla wykonywanego zadania.

1.1. apropa.m

function [zw,qw,z,q]=apropa(x0,d,zw,qw,maxit,z,q)

APROPA Wielokrotna aproksymacja (interpolacja) paraboliczna II stopnia.
Dane:
- zw(1) - lewy koniec przedziału nieokreśloności
- zw(2) - punkt wewnętrzny
- zw(3) - prawy koniec przedziału nieokreśloności
- qw(i) - wartość wskaźnika jakości w punkcie zw(i)
- maxit - liczba kroków.

Wartości wskaźnika jakości wylicza się w KOSZT.M. W każdym kroku aktualnym przybliżeniem rozwiązania optymalnego jest para (zw(2),qw(2)), a aktualnym przedziałem nieokreśloności - (zw(1),zw(3)).

1.2. ekspan.m

function [zw,qw,wskaz,z,q]=ekskon(x0,d,zn,maxit,epsil)

EKSKON Metoda ekspansji - kontrakcji na dodatniej półprostej, wychodzącej w kierunku d z punktu x0
Dane:

z(1)=0	-	punkt startowy
zn	-	krok początkowy
alfa	-	współczynnik ekspansji
beta	-	współczynnik kontrakcji
maxit	-	maksymalna liczba kroków ekspansji
epsil	-	minimalna długość kroku kontrakcji.

Wyjście:

wskaz=0	-	kontrakcja bez powodzenia
=2	-	kontrakcja z powodzeniem
=1	-	ekspansja bez obramowania
=3	-	ekspansja z obramowaniem
zw	-	macierz wynikowych wartości argumentu:
zw(1)	-	lewy koniec przedziału nieokreśloności
zw(2)	-	przybliżenie rozwiązania optymalnego
zw(3)	-	prawy koniec przedziału nieokreśloności
qw	-	macierz wynikowych wartości kosztu: qw(i)=koszt(zw(i))
z	-	zawiera wszystkie wartości argumentu, dla których wyliczono koszt (w kolejności liczenia)
q	-	odpowiednia macierz wartości kosztu.

Wartości wskaźnika jakości wylicza się w KOSZT.M.

1.3. gradie.m

function g=gradie(x)

GRADIE Wyznacza analitycznie gradient funkcji kosztu w punkcie X. Na podstawie zdefiniowanej funkcji kosztu należy wpisać obliczony gradient.

1.4. koszt.m

function [q,x]=koszt(x,z,d)

KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych decyzyjnych x+z*d.

1.5. zlpod.m

function [zw,qw,z,q]=zlopod(x0,d,zw,qw,maxit,z,q)

ZLOPOD Metoda złotego podziału z punktem wewnętrznym.
Dane:

tau	-	współczynnik złotego podziału

zw(1) - lewy koniec przedziału nieokreśloności
zw(2) - punkt wewnętrzny
zw(3) - prawy koniec przedziału nieokreśloności
qw(i) - wartość wskaźnika jakości w punkcie zw(i)
maxit - liczba kroków.

Wartości wskaźnika jakości wylicza się w KOSZT.M.

1.6. granad.m

GRANAD Zawiera następujące metody gradientowe:

- najszybszego spadku (par=0)
- Fletchera - Reevesa (par=1)
- Polaka - Ribiere'a (par=2)
- z pełną formułą na współczynnik beta (par=3).

Oznaczenia :

maxit - maksymalna liczba iteracji górnego poziomu
x0 - aktualne przybliżenie rozwiązania optymalnego
e0 - metoda się zatrzymuje, gdy kwadrat normy gradientu n2 spadnie poniżej e0
g - gradient
d - kierunek poszukiwania
czod - częstość odnowy.

1.7. kierun.m

function [x0,wskaz]=kierun(x0,d)

KIERUN Przeszukuje kierunek d wychodząc z punktu x0.

1.8. zmenad.m

ZMENAD Zawiera następujące metody zmiennej metryki:

- Davidona - Fletchera - Powella (par=0)
- Wolfe'a - Broydena - Davidona (par=1)
- Broydena - Fletchera - Goldfarba - Shanno (par=2)
- Pearsona 1 (par=3)
- Pearsona 2 (par=4)
- McCormicka (par=5).

Oznaczenia: maxit - maksymalna liczba iteracji górnego poziomu
x0 - aktualne przybliżenie rozwiązania optymalnego
e0 - metoda się zatrzymuje, gdy kwadrat normy gradientu n2 spadnie poniżej e0
g - gradient
d - kierunek poszukiwania
v - aproksymacja odwrotności hesjanu
czod - częstość odnowy.

UWAGA !
Przy rozwiązywaniu zadań 1 i 2 w wykorzystać skrypt *granad.m*, a dla pozostałych *zmenad.m*.

2. Opracowanie wyników.

W sprawozdaniu należy umieścić :

- zmodyfikowane m-pliki,
- rozwiązania wszystkich zadań i ilustrację graficzną rozwiązań,
- opisy usterek zauważonych w działaniu programów,