Схема Горнера

Схема Горнера

Схема Горнера — алгоритм вычисления значения полинома в определенной точке. Алгоритм назван в честь британского математика В. Горнера, который впервые опубликовал этот алгоритм.

Алгоритм основывается на методе изменения представления. Так полином вида:

$$P(x)=a_o+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\ldots+a_n\cdot x^n$$

Может быть представлен в виде:

$$P(x)=a_o+x(a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^{n-1})$$

$$P(x)=a_o+x(a_1+x(a_2+a_3\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^{n-2}))$$

$$P(x)=a_o+x(a_1+x(a_2+x(a_3+\ldots+a_n\cdot x^{n-3})))$$

……………………………………………………..

$$P(x)=a_o+x(a_1+x(a_2+x(a_3+\ldots+x(a_{n-1}+a_n\cdot x))))$$

Пример иного представления полинома

$$P(x)=5+2x-3x^2+x^3+5x^4$$

$$P(x)=5+x(2-3x+x^2+5x^3)$$

$$P(x)=5+x(2+x(-3+x+5x^2))$$

$$P(x)=5+x(2+x(-3+x(1+5x)))$$

Преимущество указанного представления

$$P(x)=5+2x-3x^2+x^3+5x^4$$

Операций сложения - 4
Операций умножения - 10

$$P(x)=5+x(2+x(-3+x(1+5x)))$$

Операций сложения - 4
Операций умножения - 4

Схема вычисления значения полинома

Записывают коэффициенты полинома (включая и нулевые) в виде последовательности начиная от большей степени к меньшей.

$$P(x)=5+2x-3x^2+x^3+5x^4 \Rightarrow P(x)=5x^4+x^3-3x^2+2x+5 \Rightarrow$$

Степень	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Коэффициент	5	1	-3	2	5

Начальным значением устанавливают коэффициент при самой высокой степени. Последующие значения вычисляются как значение умноженное на x плюс коэффициент при степени на единицу меньше.

Степень	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Коэффициент	5	1	-3	2	5
x = 2	5 * 2 + 1 = 11	11 * 2 - 3 = 19	19 * 2 + 2 = 40	40 * 2 + 5 = 85	result = 85

Реализация алгоритма на Python

Функция для вычисления значения полинома

```
def gorner_scheme(poly_coff, x):
    result = poly_coff[0]
    for i in range(len(poly_coff) - 1):
        result = result * x + poly_coff[i + 1]
    return result
```

Некоторые применения схемы Горнера

Согласно теореме Безу остаток от деления полинома на двучлен вида (x-c) равен значению полинома в точке c.

$$P(x)=Q(x)\cdot(x-c)+P(c)$$

При этом многочлен Q(x) имеет степень на единицу меньше чем P(x)

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n \qquad Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$

$$P(x)-P(c)=Q(x)\cdot(x-c)$$

$$a_nx^n=b_{n-1}x^n \Rightarrow b_{n-1}=a_n$$

$$a_{n-1}x^{n-1}=b_{n-2}x^{n-1}-b_{n-1}\cdot c\,x^{n-1} \Rightarrow b_{n-2}=a_{n-1}+b_{n-1}\cdot c$$

$$a_{n-2}x^{n-2}=b_{n-3}x^{n-2}-b_{n-2}\cdot c\,x^{n-2} \Rightarrow b_{n-3}=a_{n-2}+b_{n-2}\cdot c$$

Таблица коэффициентов полинома полученного при делении

$$P(x)=5x^4+x^3-3x^2+2x+5$$

Вычислим коэффициенты полинома полученного при делении на $(x-2)$

Степень	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
a	5	1	-3	2	5
b		5	11	19	40

Эти коэффициенты были уже получены при вычислении значения полинома по схеме Горнера. Таким образом схему Горнера можно использовать для вычисления коэффициентов полинома полученного при делении полинома на выражение (x-n).

$$5x^4+x^3-3x^2+2x+5=(40+19x+11x^2+5x^3)\cdot(x-2)+85$$

$$5x^4+x^3-3x^2+2x+5=40x+19x^2+11x^3+5x^4-80-38x-22x^2-10x^3+85$$

$$5x^4+x^3-3x^2+2x+5=5x^4+x^3-3x^2+2x+5$$

Реализация на Java

Методы вычисления значения полинома и коэффициентов полинома частного

```java
public static double gornerScheme(double[] polyCoff, double c) {
    double result = polyCoff[0];
    for (int i = 0; i < polyCoff.length - 1; i++) {
        result = result * c + polyCoff[i + 1];
    }
    return result;
}

public static double[] quotientPolynomCalculate(double[] polyCoff, double c) {
    double[] coff = new double[polyCoff.length - 1];
    coff[0] = polyCoff[0];
    for (int i = 1; i < coff.length; i++) {
        coff[i] = c * coff[i - 1] + polyCoff[i];
    }
    return coff;
}
```

Быстрое вычисление значений в произвольной системе счисления

Число в позиционной системе счисления (с произвольной степенью) представимо в виде полинома. Использование схемы Горнера позволит быстро вычислить значение.

$$ACDC = A \cdot 16^3 + C \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + C \cdot 16^0$$

Степень	x^3	x^2	x^1	x^0
Коэффициент	A	C	D	C
x = 16	A * 16 + C = 172	172 * 16 + D = 2765	2765 * 16 + C = 44252	44252

Реализация на Fortran

Fortran

Функция вычисления по схеме Горнера

```
function gorner_scheme(poly_coff,x)
    implicit none
    real, intent(in)::poly_coff(:)
    real, intent(in)::x
    real::gorner_scheme
    integer::i
    gorner_scheme = poly_coff(1)
    do i = 1, size(poly_coff) - 1
        gorner_scheme = gorner_scheme * x + poly_coff(i+1)
    end do
end function gorner_scheme
```

Список литературы

1) Томас Кормен, Чарльз Лейзерсон, Рональд Ривест, Клиффорд Штайн // Алгоритмы: построение и анализ 3-е издание. — М.: «Вильямс», 2013. — С. 1328. ISBN 978-5-8459-1794-2