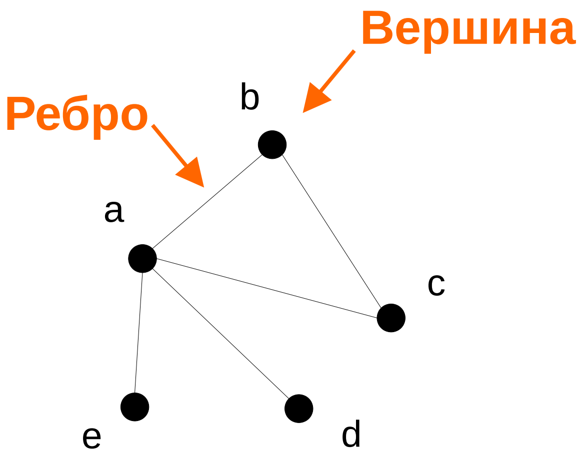
Структуры данных.
Графы. Вступление

Граф определение

Граф — конечное множество элементов (множество вершин — V) и конечное множество двухэлементных подмножеств из множества вершин (множество ребер — E). Граф обозначается как G(V,E).



Граф G(V,E)

Вершины V = {a,b,c,d,e}

Ребра E = {{a,b},{a,c},{a,d},{a,e},{b,c}}

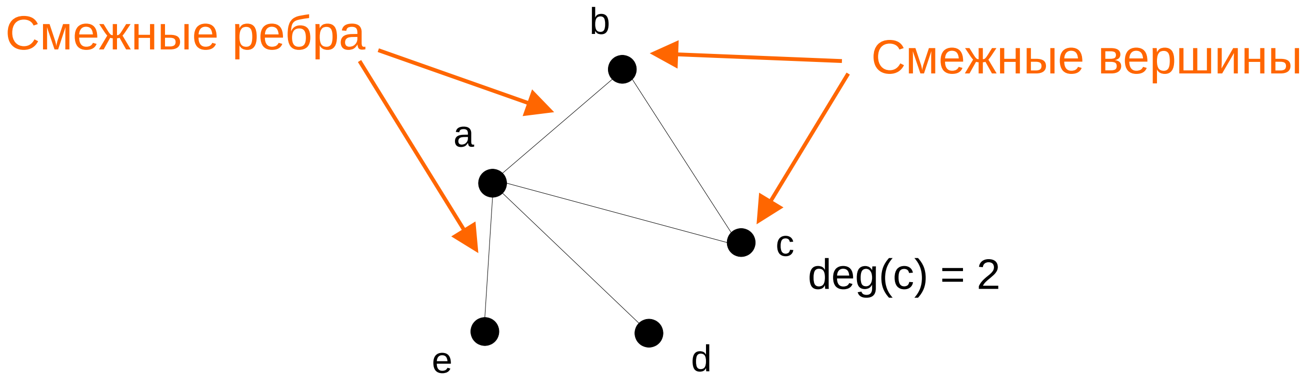
Ребра и вершины

Если {a,b} — ребро, тогда вершины a,b называют концами ребра. Ребро {a,b} называют инцидентным к вершинам a и b. И наоборот вершины a и b называют инцидентными к ребру {a,b}.

Две вершины называют смежными, если они являются концами одного и того же ребра (инцидентны одному и тому же ребру).

Два ребра называют смежными, если они инцидентны одной и той же вершине.

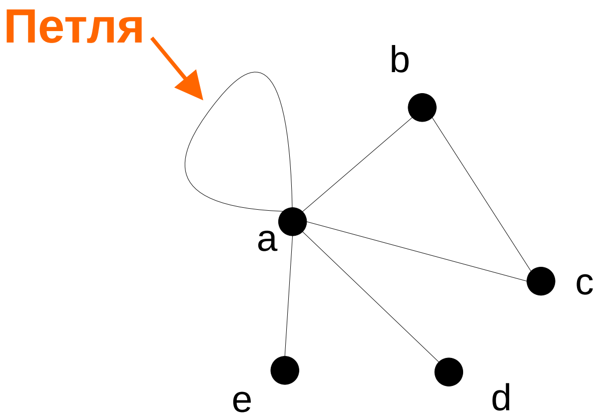
Степень вершины (deg(v)) - количество ребер, инцидентных данной вершине. Вершина степени 0, называется изолированной.



Граф с петлями

Ребро инцидентное только одной вершине называется петлей.

$\{a, a\} \in E$



Простой граф и псевдограф

Граф в котором отсутствуют петли называется простым графом.

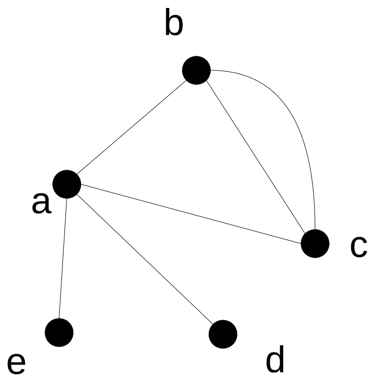
$$G(V,E), V \neq \varnothing, E \subseteq V \times V, \{v,v\} \notin E, v \in V$$

Граф в котором присутствуют петли называется псевдографом.

$$G(V,E), V \neq \varnothing, E \subseteq V \times V$$

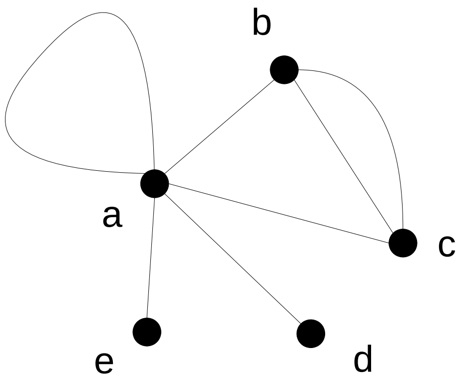
Мультиграф

При наличии нескольких ребер смежных одним и тем же вершинам, то такой граф называется мультиграфом. В таком случае мы уже получаем мультимножество ребер.



Псевдомультиграф

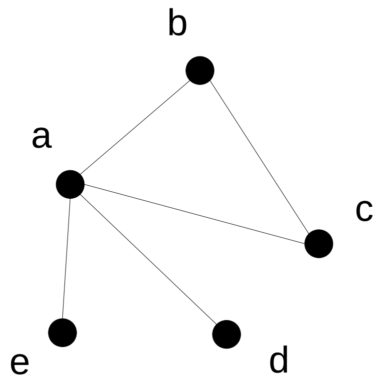
Мультиграф в котором присутствуют петли называют псевдомультиграф.



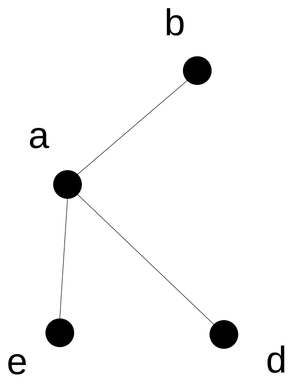
Подграф

Граф G'(V',E') называют подграфом графа G(V,E) в случае если V' является подмножеством V, а E' подмножеством E соответственно.

$$G'(V',E') \preccurlyeq G(V,E), V' \subseteq V, E' \subseteq E$$



Граф



Подграф

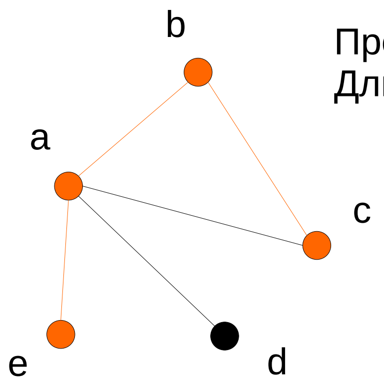
Путь

Путь(маршрут) конечная совокупность вершин графа, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершиной, ребром.

Длина пути — количество ребер составляющих путь.

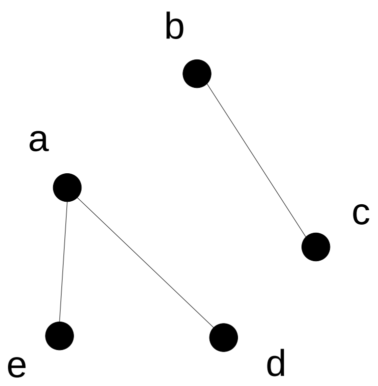
Простой путь — путь в котором нет повторяющихся вершин.

Граф называется связным, если имеется путь между двумя его различными вершинами.



Простой путь - e, a, b, c
Длина пути - 3

Связный граф



Не связный граф

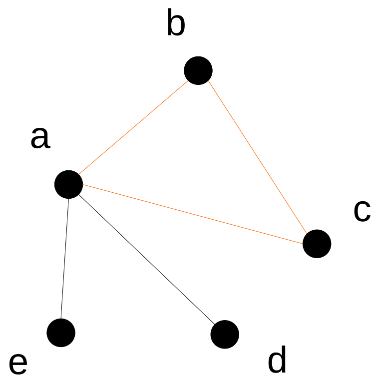
Цикл

Цикл — путь ненулевой длины, соединяющий вершину саму с собой и не содержащий повторяющихся ребер.

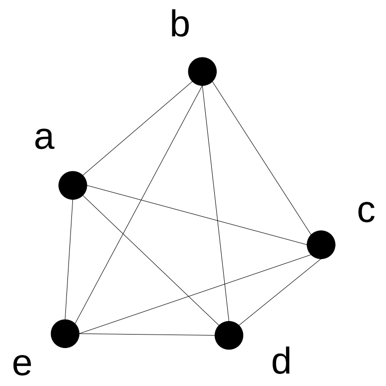
Простой цикл — цикл, соединяющий вершину саму с собой и не содержащий повторяющихся вершин (кроме данной).

Цикл называется n-циклом, если он содержит n вершин и n ребер.

Граф называется полным, если две его любые вершины соединены ребром.



Цикл — a, b, c, a



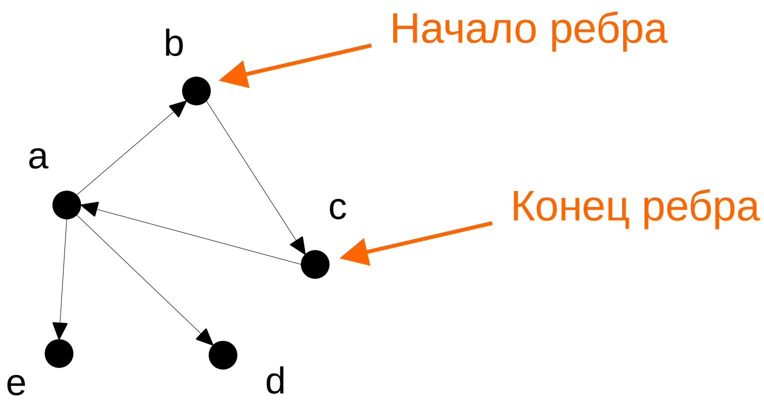
Полный граф

Ориентированный граф

Если для каждого ребра указанно направление, то такой граф называется ориентированным графом (ортграфом).

$$G(V,E), V \neq \varnothing, \langle \{v_1, v_2\}, \prec \rangle \in E, v \in V$$

Ориентированный граф описывается двумя множествами — непустым множеством вершин V и множеством упорядоченных пар (ориентированных ребер) различных элементов из V. Также нужно однозначное отображение вершины на начало ребра и вершины на конец ребра.

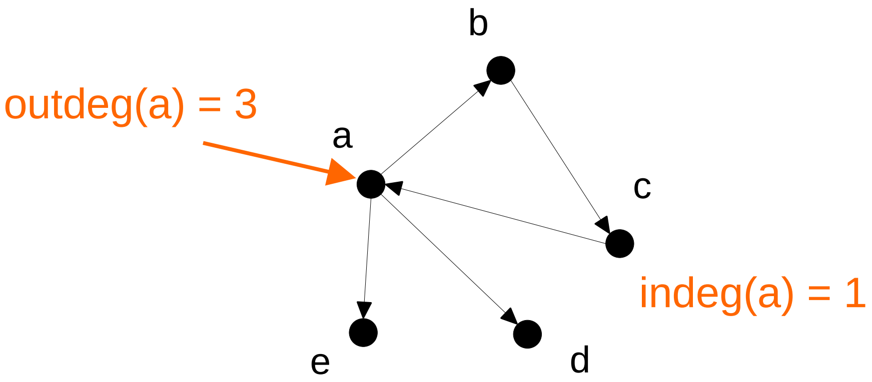


Степень выхода

Степень выхода вершины v называется количество ребер, для которых v является начальной вершиной (обозначается outdeg(v)).

Степенью входа вершины v называется количество ребер, для которых v является конечной вершиной (обозначается indeg(v)).

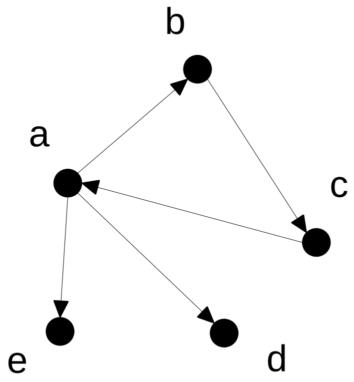
Если степень входа равна 0, то вершина называется источником, если степень выхода равна 0 то вершина называется стоком.



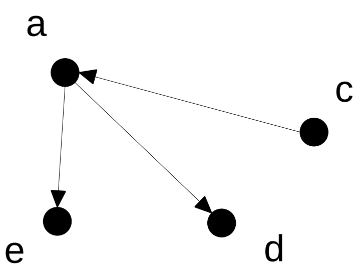
Ориентированный подграф

Ориентированный граф G’(V’,E’) называют ориентированным подграфом ориентированного графа G(V,E) в случае если V’ является подмножеством V, а E’ подмножеством E соответственно.

$$G'(V',E') \preccurlyeq G(V,E), V' \subseteq V, E' \subseteq E$$



Ориентированный граф



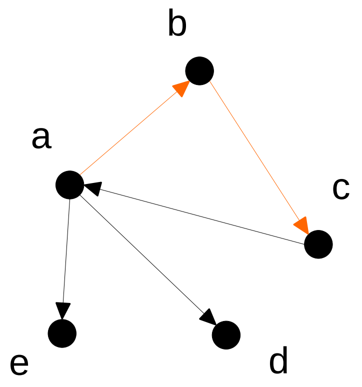
Ориентированный подграф

Ориентированный путь

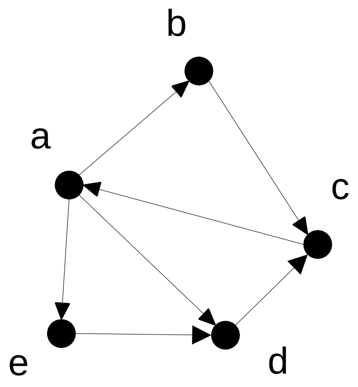
Ориентированный путь из вершины a в вершину b задается как последовательность ориентированных ребер соединяющих их. Причем a должно быть началом ориентированного ребра, b концом и конец каждого ребра должен совпадать с началом следующего ребра в этой последовательности.

Длиной ориентированного пути называется количество ориентированных ребер, входящих в путь.

Ориентированный граф называется сильно связанным если из любой вершины в другую имеется ориентированный путь.



Длина ориентированного пути от a до c равна 2.



Сильно связанный ориентированный граф

Список литературы

1) Джеймс А. Андерсон «Дискретная математика и комбинаторика». Издательский дом «Вильямс», 2004.