1 Textový popis bez obrázku

Nech (a,b,c) je bod, kde vychádza os motora, nech (A,B,C) je bod na stoličke, R je dĺžka hornej, r je dĺžka dolnej tyče.

Os motora smeruje defaultne (bez otočení) do záporného smeru osi y, dolná tyč je v kľude v smere osi x.

1.1 uhly

i) φ je odchýlenie dolnej tyče od osi x smerom ku kladnej časti osi z (**hľadaný uhol**).

ii) potom sa celý motor zakloní (zrotuje v rovine zy, od z ku y) o uhol β.

iii) Potom motor rotuje v rovine xy od x smerom ku y o uhol α.

(pozn. poradie rotácii je dôležité)

2 rovnice

Požadovaný uhol φ sa dá zistiť vyjadrením súradníc (x,y,z) stredného kĺbu (kde sa tyče stretajú) dvoma rovnicami:

1) dĺžka hornej tyče je R.

2) parametrické vyjadrenie stredného kĺbu pomocou súradníc motora.

2.1 1. rovnica

Matematicky, prvá rovnica je

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R^2 \tag{1}$$

2.2 2. rovnica

Parametrické vyjadrenie dostaneme postupnými rotáciami: Koniec dolnej tyče v kľude má (x,y,z) súradnice

$$(a,b,c)+(r,0,0)$$

Aby som nemusel stále písať bod (a,b,c), vyjadrím súradnicovú vzdialenosť bodu (x,y,z) od (a,b,c). Takto sa mení rotáciami:

$$\begin{pmatrix} r\\0\\0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\\0\\r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\beta) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\alpha)-r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)\\ r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\alpha)+r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)\\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

čiže druhá rovnica je

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\b\\c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\alpha)-r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)\\ r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\alpha)+r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)\\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

2.3 1. a 2. rovnica dokopy

Dosadením (2) do (1) získame:

$$\begin{aligned}[r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\alpha)-r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)+a-A]^2 \quad &+ \quad [r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\alpha)+r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)+b-B]^2 \\ &+ \quad [r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\beta)+c-C]^2=R^2 \end{aligned} \tag{3}$$

S využitím identity $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ sa dá rovnica prepísať do tvaru ($a-A$ si skrátime na Δa)

$$\begin{aligned} &\cos(\varphi)\left[2\Delta a\cdot r\cos(\alpha)+2\Delta b\cdot r\sin(\alpha)\right]\\ &+\sin(\varphi)\left[-2\Delta a\cdot r\sin(\beta)\sin(\alpha)+2\Delta b\cdot r\sin(\beta)\cos(\alpha)+2\Delta c\cdot r\cos(\beta)\right]\\ &=R^2-r^2-\Delta a^2-\Delta b^2-\Delta c^2 \end{aligned}$$

čo si skrátene označíme ako

$$D\cos(\varphi)+E\sin(\varphi)=G \tag{4}$$

kde

$$\begin{aligned} D&=2\Delta a\cdot r\cos(\alpha)+2\Delta b\cdot r\sin(\alpha)\\ E&=-2\Delta a\cdot r\sin(\beta)\sin(\alpha)+2\Delta b\cdot r\sin(\beta)\cos(\alpha)+2\Delta c\cdot r\cos(\beta)\\ G&=R^2-r^2-\Delta a^2-\Delta b^2-\Delta c^2 \end{aligned}$$

Rovnicu (4) teraz predelíme výrazom $\sqrt{D^2+E^2}$, čím dostaneme

$$\hat{D}\cos(\varphi) + \hat{E}\sin(\varphi) = \hat{G} \tag{5}$$

kde

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= D/\sqrt{D^2+E^2}\\
\hat{E} &= E/\sqrt{D^2+E^2}\\
\hat{G} &= G/\sqrt{D^2+E^2}
\end{aligned}$$

Keby sa nám teraz podarilo nájsť uhol ω taký, že $\sin(\omega) = \hat{D}$ a $\cos(\omega) = \hat{E}$, mohli by sme využiť súčtový vzorec pre sínusy

$$\hat{G} = \hat{D}\cos(\varphi) + \hat{E}\sin(\varphi) = \sin(\omega)\cos(vp) + \cos(\omega)\sin(\varphi) = \sin(\varphi + \omega)$$

Keďže platí $\hat{D}^2 + \hat{E}^2 = 1$, taký uhol existuje a je to $atan2(\hat{D}, \hat{E})$, t.j. uhol pod ktorým je vektor $(\hat{E}, \hat{D})$ v rovine.

Čiže máme $\omega = atan2(\hat{D}, \hat{E})$, pričom zostáva zriešiť rovnicu

$$\sin(\varphi + \omega) = \hat{G}\,,$$

kde ω aj $\hat{G}$ poznáme. Inverzný sínus má v jednej perióde 2 riešenia a to

- $arcsin(\hat{G})$
- $\pi - arcsin(\hat{G})$

Z čoho konečne dostávame

$$\varphi_{1,2} = \begin{cases} -\omega + arcsin(\hat{G}) \\ -\omega + \pi - arcsin(\hat{G}) \end{cases}$$

2.4 Diskusia k počtu riešení

- Ak $\hat{G}$ nie je v intervale $[-1, 1]$, neexistuje uhol θ taký, aby $\sin(\theta) = \hat{G}$. *arcsin* sa nedá použiť a dá sa teda predpokladať, že úloha nemá riešenie.
- Ak $\hat{G} = -1$ alebo $\hat{G} = 1$, vtedy $\varphi_1 = \varphi_2$ a úloha má teda iba 1 riešenie.
- V ostatných prípadoch (t.j. $\hat{G} \in (-1, 1)$) sú φ_1, φ_2 rôzne a úloha má teda 2 riešenia.

3 Zhrnutie (= too long, didn't read)

$$\begin{aligned}
\Delta a &= a - A\\
\Delta b &= b - B\\
\Delta c &= c - C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 2\Delta a \cdot r\cos(\alpha) + 2\Delta b \cdot r\sin(\alpha)\\
E &= -2\Delta a \cdot r\sin(\beta)\sin(\alpha) + 2\Delta b \cdot r\sin(\beta)\cos(\alpha) + 2\Delta c \cdot r\cos(\beta)\\
G &= R^2 - r^2 - \Delta a^2 - \Delta b^2 - \Delta c^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= D/\sqrt{D^2+E^2}\\
\hat{E} &= E/\sqrt{D^2+E^2}\\
\hat{G} &= G/\sqrt{D^2+E^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega &= atan2(\hat{D}, \hat{E})\\
\varphi_{1,2} &= \begin{cases} -\omega + arcsin(\hat{G}) \\ -\omega + \pi - arcsin(\hat{G}) \end{cases}
\end{aligned}$$