

Analýza matematické formulace RCPSP-AS

1 Notace

Množiny a indexy

Symbol	Význam
i, j	Indexy aktivit
l	Index alternativního podgrafa
k	Index alternativní větve
N	Množina všech aktivit
N^a	Množina alternativních aktivit
N^f	Množina fixních aktivit
L	Množina alternativních podgrafů
K_{p_l}	Množina alternativních větví v podgrafu l
N_{b_k}	Množina aktivit v alternativní větvi k
A	Množina precedenčních vztahů

Parametry

Symbol	Význam
p_l	Principální aktivita podgrafa l
t_l	Terminální aktivita podgrafa l
b_k	Větvící aktivita větve k
$\eta_{b_{k'}, p_l} = 1$	Podgraf l je vnořen do větve k'
$\kappa_{i,j} = 1$	Aktivita i je propojena s aktivitou j v jiné větvi

Rozhodovací proměnné

$$\begin{array}{ll} x_{i,t} \in \{0, 1\} & x_{i,t} = 1 \text{ pokud aktivita } i \text{ začíná v čase } t \\ y_i \in \{0, 1\} & y_i = 1 \text{ pokud je aktivita } i \text{ vybrána} \end{array}$$

2 Originální příklad z článku

Pro lepší pochopení notace používáme originální příklad z článku (Fig. 1, Table 4).

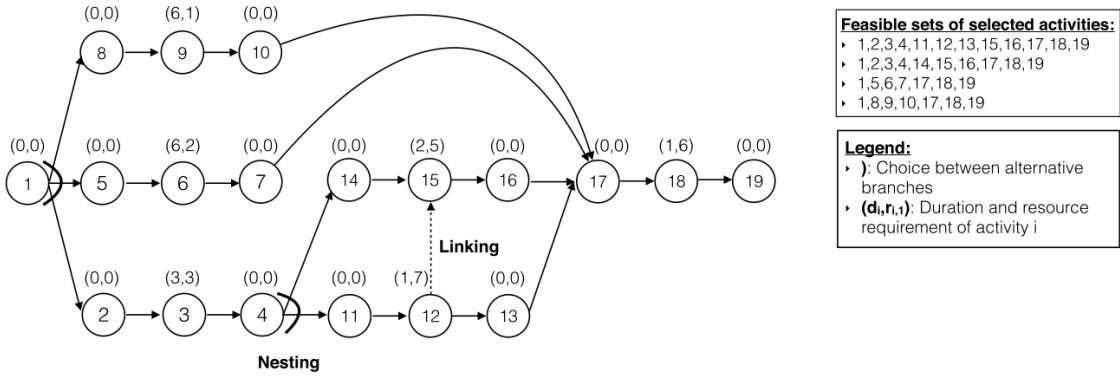


Fig. 1. Illustrative project network with extensions of the RCPSP-AS.

Table 4
Notations explained based on Fig. 1.

Symbol	Values in Fig. 1
N	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}
d_i	{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0}
R	{1}
$r_{i,v}$	$r_{i,1} = \{0, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 7, 0, 0, 5, 0, 0, 6, 0\}$
a_v	$a_1 = \{10\}$
N^a	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}
N^f	{1, 17, 18, 19}
L	{1, 2}
N_{b_k}	$N_2 = \{2, 3, 4\}; N_5 = \{5, 6, 7\}; N_8 = \{8, 9, 10\}; N_{11} = \{11, 12, 13\}; N_{14} = \{14, 15, 16\}$
b_k	$b_1 = 2; b_2 = 5; b_3 = 8; b_4 = 11; b_5 = 14$
p_i	$p_1 = 1; p_2 = 4$
t_l	$t_1 = 17; t_2 = 17$
η_{b_k, p_l}	$\eta_{2,4} = 1$
$\kappa_{i,j}$	$\kappa_{12,15} = 1$

Obrázek 1: Originální ilustrativní příklad z článku Servranckx et al. (2024). Projektová síť obsahuje dva alternativní podgrafy, vnořování a propojení (linking).

Základní množiny

Množina všech aktivit N : Projekt obsahuje $|N| = 19$ aktivit:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Fixní aktivity N^f : Aktivity, které musí být vždy vybrány bez ohledu na volbu alternativ. V tomto příkladu:

$$N^f = \{1, 17, 18, 19\}$$

Aktivita 1 je principální aktivita prvního podgrafa, aktivity 17, 18, 19 jsou koncové/fixní aktivity projektu.

Alternativní aktivity N^a : Aktivity, které mohou, ale nemusí být vybrány v závislosti na zvolených alternativních větvích:

$$N^a = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$

Platí: $N = N^f \cup N^a$ a $N^f \cap N^a = \emptyset$.

Alternativní podgrafy L

Množina alternativních podgrafů: $L = \{1, 2\}$

Každý alternativní podgraf představuje místo v projektu, kde existuje volba mezi několika alternativními cestami (větvemi).

Principální a terminální aktivity (p_l , t_l)

Principální aktivity p_l : Aktivita, která „spouští“ rozhodování mezi alternativami v podgrafu l . Je to aktivita bezprostředně před rozvětvením.

Terminální aktivity t_l : Aktivita, kde se alternativní větve opět spojují.

V našem příkladu:

- Podgraf $l = 1$: $p_1 = 1$ (principální), $t_1 = 17$ (terminální)
- Podgraf $l = 2$: $p_2 = 4$ (principální), $t_2 = 17$ (terminální)

Množiny alternativních větví K_{p_l}

Definice: K_{p_l} je množina alternativních větví v podgrafu s principální aktivitou p_l . Prvky této množiny jsou **větvící aktivity** b_k – první aktivity každé alternativní cesty.

V našem příkladu:

- **Podgraf 1** ($p_1 = 1$): Má tři alternativní větve, $|K_1| = 3$

$$K_1 = \{2, 5, 8\}$$

To znamená volbu mezi větvícími aktivitami $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 8$.

- **Podgraf 2** ($p_2 = 4$): Má dvě alternativní větve, $|K_4| = 2$

$$K_4 = \{11, 14\}$$

To znamená volbu mezi větvícími aktivitami $b_4 = 11$, $b_5 = 14$.

Poznámka k indexování: Index množiny K odpovídá principální aktivitě, tedy K_1 pro podgraf s $p_1 = 1$ a K_4 pro podgraf s $p_2 = 4$.

Množiny aktivit v alternativních větvích N_{b_k}

Definice: N_{b_k} je množina všech aktivit patřících do alternativní větve s větvící aktivitou b_k . Zahrnuje větvící aktivitu a všechny její tranzitivní následníky až po terminální aktivitu.

V našem příkladu:

- $N_2 = \{2, 3, 4\}$ – větev začínající aktivitou 2
- $N_5 = \{5, 6, 7\}$ – větev začínající aktivitou 5
- $N_8 = \{8, 9, 10\}$ – větev začínající aktivitou 8
- $N_{11} = \{11, 12, 13\}$ – větev začínající aktivitou 11
- $N_{14} = \{14, 15, 16\}$ – větev začínající aktivitou 14

Důležité: Index množiny N_{b_k} odpovídá větvící aktivitě, např. N_2 obsahuje aktivity větve, která začíná aktivitou 2.

Vnořování (Nesting) – parametr $\eta_{b_{k'}, p_l}$

Definice: Parametr $\eta_{b_{k'}, p_l} = 1$ indikuje, že alternativní podgraf s principální aktivitou p_l je **vnořen** do alternativní větve s větvící aktivitou $b_{k'}$. To znamená, že podgraf l se aktivuje pouze tehdy, když je vybrána větev k' .

V našem příkladu:

$$\eta_{2,4} = 1$$

Toto znamená: Podgraf 2 (s principální aktivitou $p_2 = 4$) je vnořen do větve s větvící aktivitou $b_1 = 2$. Jinými slovy, volba mezi větvemi 11 a 14 existuje pouze tehdy, pokud jsme v podgrafu 1 vybrali větev 2.

Pokud vybereme větev 5 nebo 8 v podgrafu 1, podgraf 2 se vůbec neaktivuje a žádná z jeho aktivit (11-16) nebude vybrána.

Propojení (Linking) – parametr $\kappa_{i,j}$

Definice: Parametr $\kappa_{i,j} = 1$ indikuje, že aktivita i v jedné větvi je **propojena** s aktivitou j v jiné větvi. Výběr aktivity i pak vynucuje výběr aktivity j , i když patří do různých alternativních větví.

V našem příkladu:

$$\kappa_{12,15} = 1$$

Toto znamená: Aktivita 12 (ve věti N_{11}) je propojena s aktivitou 15 (ve věti N_{14}). Hrana mezi 12 a 15 indikuje, že informace o dokončení aktivity 12 je potřebná pro úspěšné zahájení aktivity 15.

Z praktického hlediska propojení modeluje možný překryv mezi různými alternativními větvemi – část jedné větve může být potřebná i pro druhou větev.

Přípustná řešení

Na základě struktury projektu jsou přípustné následující kombinace vybraných aktivit:

$$1. N_2 \cup N_{11} \cup \{15, 16\} \cup N^f = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Vybrána větev 2 v podgrafu 1, větev 11 v podgrafu 2, plus propojené aktivity 15, 16.

$$2. N_2 \cup N_{14} \cup N^f = \{1, 2, 3, 4, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Vybrána větev 2 v podgrafu 1, větev 14 v podgrafu 2.

$$3. N_5 \cup N^f = \{1, 5, 6, 7, 17, 18, 19\}$$

Vybrána větev 5 v podgrafu 1. Podgraf 2 se neaktivuje (je vnořen ve věti 2).

$$4. N_8 \cup N^f = \{1, 8, 9, 10, 17, 18, 19\}$$

Vybrána větev 8 v podgrafu 1. Podgraf 2 se neaktivuje.

Zdrojové parametry

Pro úplnost uvádíme i zdrojové parametry z příkladu:

- Jeden obnovitelný zdroj: $R = \{1\}$
- Dostupnost zdroje: $a_1 = 10$ jednotek
- Doby trvání aktivit: $d_i = \{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0\}$
- Požadavky na zdroj: $r_{i,1} = \{0, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 7, 0, 0, 5, 0, 0, 6, 0\}$

Nulové doby trvání a požadavky odpovídají dummy aktivitám (rozvětvení a spojení).

3 Matematická formulace

Eq. (1) – Účelová funkce

$$\text{Min} \sum_{t=es_{n+1}}^{ls_{n+1}} t \cdot x_{n+1,t} \quad (1)$$

Cílem je minimalizovat celkovou dobu trvání projektu (makespan). Aktivita $n + 1$ je fiktivní koncová aktivita s nulovou dobou trvání, která nemá žádné následníky. Její čas zahájení tedy odpovídá času dokončení celého projektu. Suma přes všechny možné časy t vynásobené binární proměnnou $x_{n+1,t}$ vrací právě ten čas, kdy koncová aktivita začíná (a tedy kdy projekt končí).

Eq. (2) – Precedenční vztahy

$$\sum_{t=es_i}^{ls_i} (t + d_i)x_{i,t} - M(1 - y_i) \leq \sum_{t=es_j}^{ls_j} t \cdot x_{j,t} + M(1 - y_j) \quad \forall (i, j) \in A \quad (2)$$

Toto omezení zajišťuje dodržení precedenčních vztahů mezi aktivitami. Pokud existuje hrana $(i, j) \in A$, pak aktivita j nesmí začít dříve, než skončí aktivita i . Levá strana představuje čas dokončení aktivity i (začátek plus doba trvání d_i), pravá strana představuje čas začátku aktivity j .

Členy $M(1 - y_i)$ a $M(1 - y_j)$ slouží jako „big-M“ relaxace: pokud některá z aktivit není vybrána ($y_i = 0$ nebo $y_j = 0$), omezení se stává triviálně splněným a precedenční vztah se neuplatňuje. Omezení je tedy aktuální pouze pro vybrané aktivity.

Eq. (3) – Jednoznačný začátek aktivity

$$\sum_{t=es_i}^{ls_i} x_{i,t} = y_i \quad \forall i \in N \quad (3)$$

Toto omezení propojuje rozhodnutí o výběru aktivity s jejím naplánováním. Suma přes všechny možné časy zahájení (od nejdříve možného es_i po nejpozději možný ls_i) musí být rovna y_i . To znamená:

- Pokud je aktivita vybrána ($y_i = 1$), musí začít právě v jednom časovém okamžiku.
- Pokud aktivita není vybrána ($y_i = 0$), nesmí začít v žádném čase.

Eq. (4) – Výběr alternativní větve

$$\sum_{k=1}^{|K_{p_l}|} y_{b_k} = 1 - \eta_{b_{k'}, p_l} \cdot (1 - y_{p_l}) \quad \forall k' \in K_{p_l}; \forall l, l' \in L \quad (4)$$

Toto omezení řídí výběr alternativních větví v každém podgrafu. Suma $\sum y_{b_k}$ sčítá výběrové proměnné větvících aktivit všech větví v podgrafu l . Pravá strana závisí na tom, zda je podgraf vnořený:

- **Nevnořený podgraf** ($\eta_{b_{k'}, p_l} = 0$): Pravá strana je rovna 1, tedy musíme vybrat právě jednu větev z podgrafa.
- **Vnořený podgraf** ($\eta_{b_{k'}, p_l} = 1$): Pravá strana je rovna y_{p_l} , tedy vybereme větev pouze pokud je aktuální principální aktivita nadřazeného podgrafa. Pokud $y_{p_l} = 0$, nevybíráme žádnou větev.

Eq. (5) – Propagace výběru v rámci větve

$$y_j \geq y_i \quad \forall (i, j) \in A; \forall i, j \in N_{b_k}; \forall k \in K_{p_l}; \forall l \in L \quad (5)$$

Toto omezení zajišťuje, že pokud vybereme aktivitu i , musíme vybrat i její následníka j podle precedenčního grafu. Klíčová podmínka je, že **obě aktivity musí patřit do stejné alternativní větve N_{b_k}** .

Účelem je propagovat výběr větvící aktivity b_k na všechny její následníky v rámci dané větve. Pokud vybereme větvící aktivitu, postupně se vyberou všechny aktivity v dané větvi, které jsou s ní spojeny precedenčními hranami.

Eq. (6) – Propojené větve (linking)

$$y_j \geq y_i \cdot \kappa_{i,j} \quad \forall (i, j) \in A; \forall i \in N_{b_k}; \forall j \in N_{b_{k'}}; k \neq k' \quad (6)$$

Toto omezení modeluje propojení (linking) mezi různými alternativními větvemi. Parametr $\kappa_{i,j} = 1$ indikuje, že aktivita i v jedné větvi je propojena s aktivitou j v jiné větvi. V takovém případě výběr aktivity i automaticky vynucuje výběr aktivity j .

Propojení se používá pro modelování situací, kdy informace nebo výstup z jedné alternativní cesty je potřebný pro jinou alternativní cestu, i když tyto cesty patří do různých větví. Pokud $\kappa_{i,j} = 0$, omezení je triviálně splněno a žádné propojení neexistuje.

Eq. (7) – Fixní aktivity

$$y_i = 1 \quad \forall i \in N^f \quad (7)$$

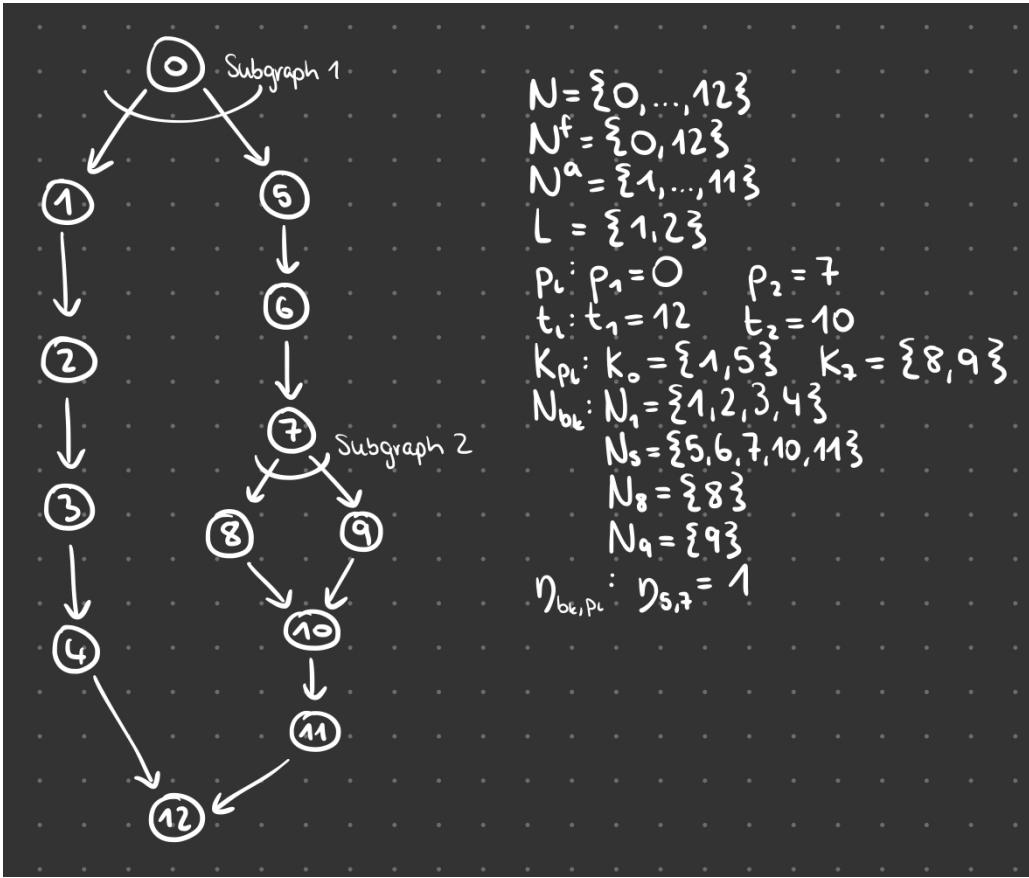
Fixní aktivity musí být vždy vybrány bez ohledu na volbu alternativních větví. Množina N^f typicky obsahuje:

- Fiktivní startovní aktivitu (dummy start)
- Fiktivní koncovou aktivitu (dummy end)
- Případné další aktivity, které jsou povinné pro každou variantu projektu

Toto omezení zajišťuje, že tyto aktivity budou vždy součástí výsledného rozvrhu.

4 Náš ilustrativní příklad pro demonstraci nekonzistencí

Pro demonstraci identifikovaných nekonzistencí používáme jednodušší příklad s vnořeným podgrafem.



Obrázek 2: Zjednodušená projektová síť s dvěma alternativními podgrafy, kde Subgraph 2 je vnořen do větve 5.

Parametry tohoto příkladu:

- $N = \{0, 1, \dots, 12\}$, $N^f = \{0, 12\}$, $N^a = \{1, \dots, 11\}$
- $L = \{1, 2\}$ – dva alternativní podgrafy
- Subgraph 1: $p_1 = 0$, $K_0 = \{1, 5\}$, $N_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $N_5 = \{5, 6, 7, 10, 11\}$
- Subgraph 2: $p_2 = 7$, $K_7 = \{8, 9\}$, $N_8 = \{8\}$, $N_9 = \{9\}$
- Vnořování: $\eta_{5, 7} = 1$, $\eta_{1, 7} = 0$

5 Identifikované nekonzistence

5.1 Nekonzistence 1: Rovnice (4)

Rovnice (4) se generuje pro všechny kombinace indexů k' , l a l' , což vede k vzájemně si odporujícím omezením pro vnořené podgrafy.

Pro Subgraph 2 ($l = 2$, $p_2 = 7$) dostáváme:

Volba k'	$\eta_{b_{k'}, 7}$	Výsledná rovnice
$k' = 1$	$\eta_{1, 7} = 0$	$y_8 + y_9 = 1$
$k' = 5$	$\eta_{5, 7} = 1$	$y_8 + y_9 = y_7$

Pokud vybereme větev 1 (ne větev 5), pak $y_7 = 0$. Z první rovnice dostáváme $y_8 + y_9 = 1$, z druhé $y_8 + y_9 = 0$. Tento systém je neřešitelný – máme logický rozpor.

Jediné řešení je vynutit $y_7 = 1$, což znamená, že větev 5 musí být vždy vybrána. Tím se ztrácí smysl alternativních větví.

5.2 Nekonzistence 2: Rovnice (5) a (6)

Rovnice (5) propaguje výběr pouze mezi aktivitami ve stejné větvi. Rovnice (6) se aplikuje pouze při explicitním propojení ($\kappa_{i,j} = 1$). To vede k situacím, kdy aktivity patřící do vybrané větve nemusí být vybrány.

Analýza pro větev 5:

Hrana (i, j)	i ve větvi	j ve větvi	Eq. (5)?
$(5, 6)$	N_5	N_5	Ano
$(6, 7)$	N_5	N_5	Ano
$(7, 8)$	N_5	N_8	Ne – různé větve
$(7, 9)$	N_5	N_9	Ne – různé větve
$(8, 10)$	N_8	N_5	Ne – různé větve
$(9, 10)$	N_9	N_5	Ne – různé větve
$(10, 11)$	N_5	N_5	Ano

Při výběru větve 5 ($y_5 = 1$):

- Eq. (5) dává: $y_6 \geq y_5 = 1$, $y_7 \geq y_6 = 1$
- Pro hrany $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$ se Eq. (5) neaplikuje (různé větve)
- Eq. (6) se neaplikuje ($\kappa_{8,10} = \kappa_{9,10} = 0$)

Aktivita 10 má jako předchůdce pouze aktivity 8 a 9, které patří do jiných větví. Neexistuje žádné omezení, které by vynutilo $y_{10} = 1$, přestože aktivita 10 patří do větve 5. Stejný problém platí pro aktivitu 11.

6 Shrnutí

Problém	Popis	Důsledek
Eq. (4)	Generuje se pro všechny k'	Konfliktní omezení
Eq. (5)–(6)	Propagace jen v rámci větve	Aktivity nemusí být vybrány

Autoři možná testovali implementaci, která tyto problémy řešila odlišně (např. v SAT klauzulích v sekci 4.3), ale matematická formulace v sekci 3 má tyto nekonzistence.