Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Curvas e Superfícies

André Tavares da Silva

andre.silva@udesc.br

Capítulo 3 de Azevedo e Conci
Capítulo 11 de Foley
Capítulo 2 de Mortenson

Roteiro

- Representação de curvas
  - Analítica / Paramétrica
- Curvas livres
- Características das Curvas
- Comportamento das Famílias de Curvas
- Formulação das Curvas
- Modelagem de Superfícies

Representação das Curvas

- ***Arrays*** de coordenadas
  - grande quantidade de informações e dificuldade computacional
- Equações **Analíticas**
  - possibilita maior controle das curvas, e menos dados
  - formulações implícitas/explícitas
- Equações **Paramétricas**
  - permite a definição de curvas suaves sem a necessidade de conhecer sua formulação analítica

Curva Analítica/Não Paramétrica

- Curvas Implícitas

  $F(x, y, z) = 0$

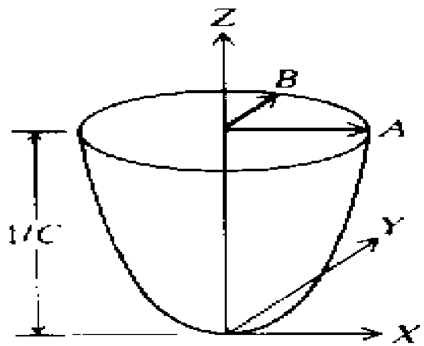
  – Pode ter mais soluções que o desejado
  – o mesmo equacionamento do circulo é usado para semicírculo mas, precisa de condição extra

- Curvas Explícitas

  $x = F(y,z)$

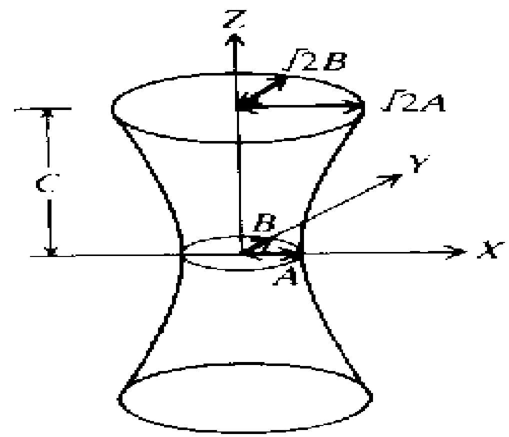
  – Correspondem a sistemas CNC
  – Não apropriada para curvas fechadas
  – Não retornam dois valores para o mesmo (y,z)

Curvas/Superfícies Analíticas



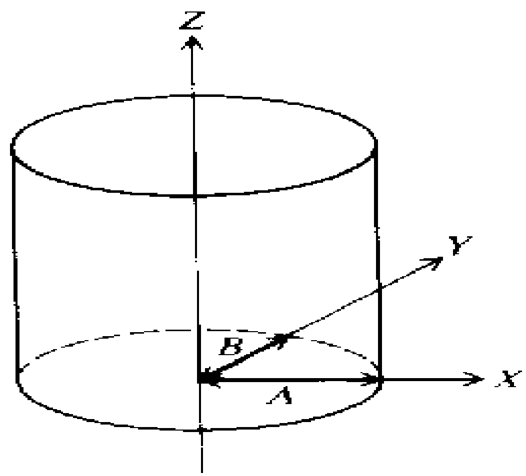
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = Cz$$

Elliptic paraboloid



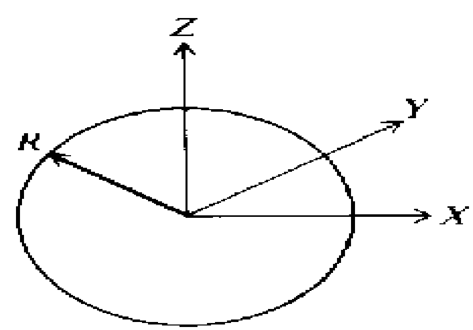
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

Hyperboloid of one sheet



$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ for any } z \text{ value}$$

Elliptic cylinder



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Sphere

Representação das Curvas

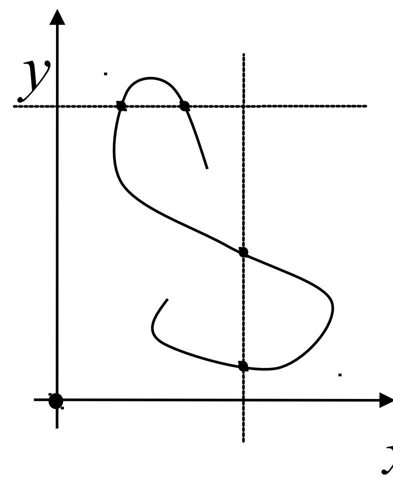
- *Arrays* de coordenadas
  - grande quantidade de informações e dificuldade computacional
- Equações **Analíticas**
  - possibilita maior controle das curvas, e menos dados
  - formulações implícitas/explícitas
- Equações P**aramétricas**
  - permite a definição de curvas suaves sem a necessidade de conhecer sua formulação analítica

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Curvas **Paramétricas**

- Elas aceitam funções fechadas e multi-valoradas

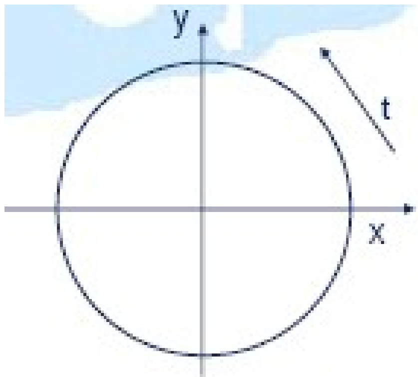


- Na forma paramétrica cada ponto da curva é expresso como função de um parâmetro ***t (ou u)***
- O parâmetro funciona como uma coordenada local da curva

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

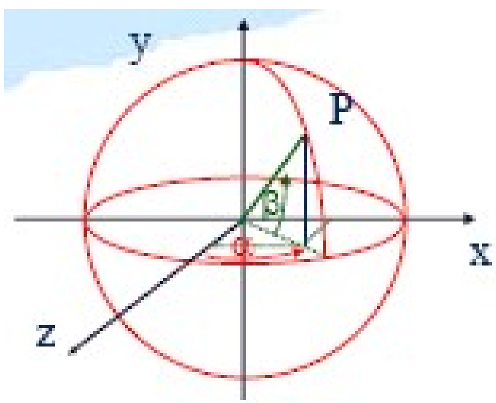
Exemplos



$x(t) = r \,.\, \cos(t)$

$y(t) = r \,.\, \sin(t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$



$x(\alpha,\beta) = r \,.\, \cos(\beta).\mathrm{sen}(\alpha)$

$y(\alpha,\beta) = \ldots$

$z(\alpha,\beta) = \ldots.$

$0 \leq \alpha,\beta \leq 2\pi$

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

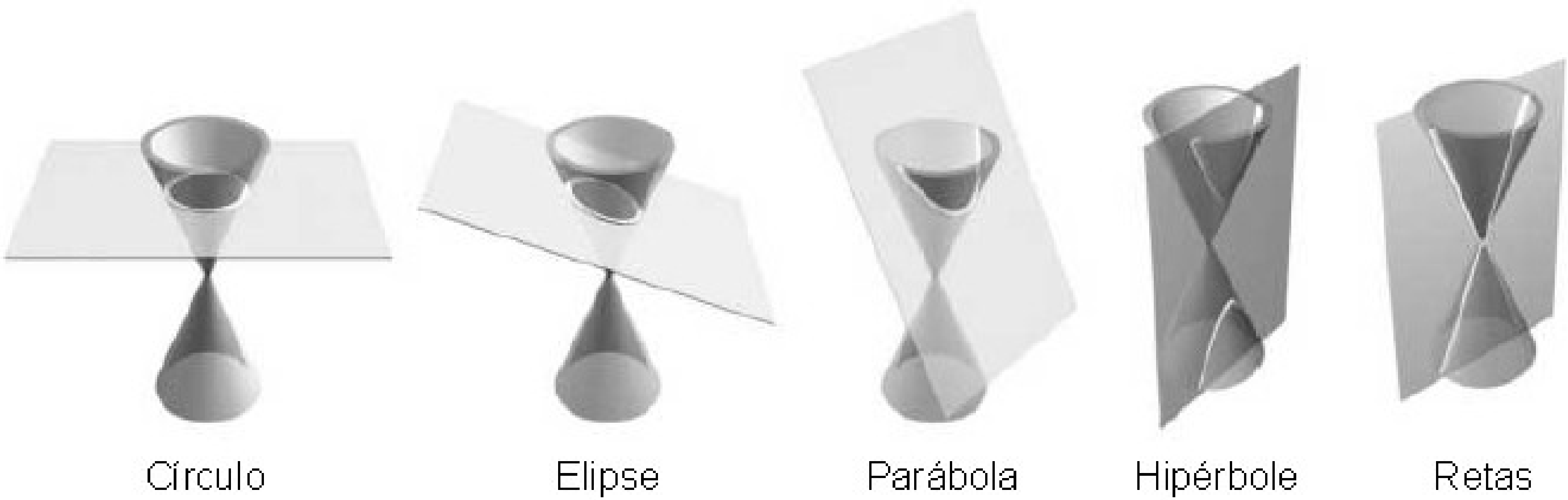
Exemplos: Representações de Cônicas

Cônica	Forma Paramétrica	Forma Implícita
Elipse	$x = a \cos \theta$ $y = b \operatorname{sen} \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola	$x = at^2,\ y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	$x = a \cosh \theta$ $y = b \operatorname{senh} \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

5 Tipos de Seções Cônicas



Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Vantagens Curvas Paramétricas

- Intrinsecamente independente do sistema de coordenadas
- Elementos geométricos são facilmente representados por matrizes onde uma única formulação matemática servirá a todos os tipos de curvas
- Transformações geométricas podem ser aplicadas na própria formulação parametrizada

Definições

- Geometria da Curva
  - Definida por **Pontos de Controle** (conjunto de pontos que definem a forma da curva)
  - Outras informações geométricas
- **Tipo** da Curva
  - Identifica o comportamento de uma família de curvas (ex: Bezier, Hermite, etc...)
- **Pontos do Traçado** da Curva
  - Conjunto de pontos **calculados** com base na geometria e no tipo da curva

Características das Curvas

- Interpoladoras ou Aproximadoras
- Grau da Curva
- Controle Local ou Global
- Aberta / Fechada
- Continuidade

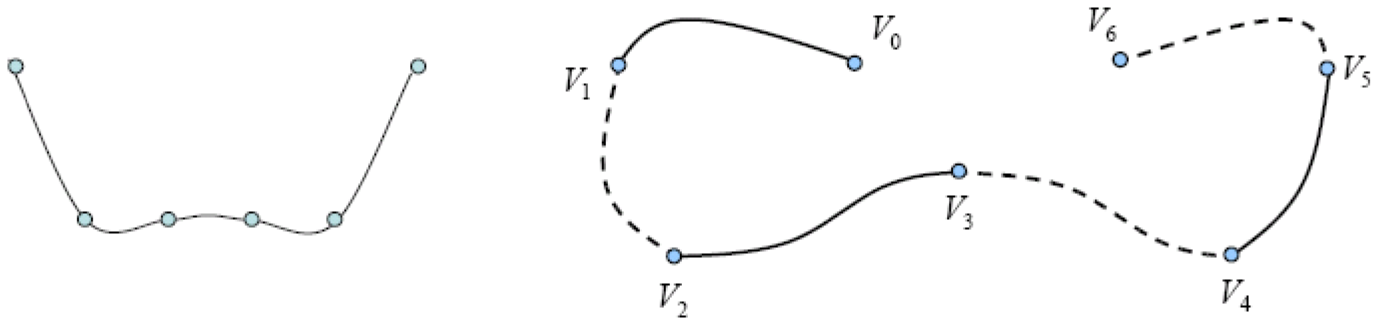
Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

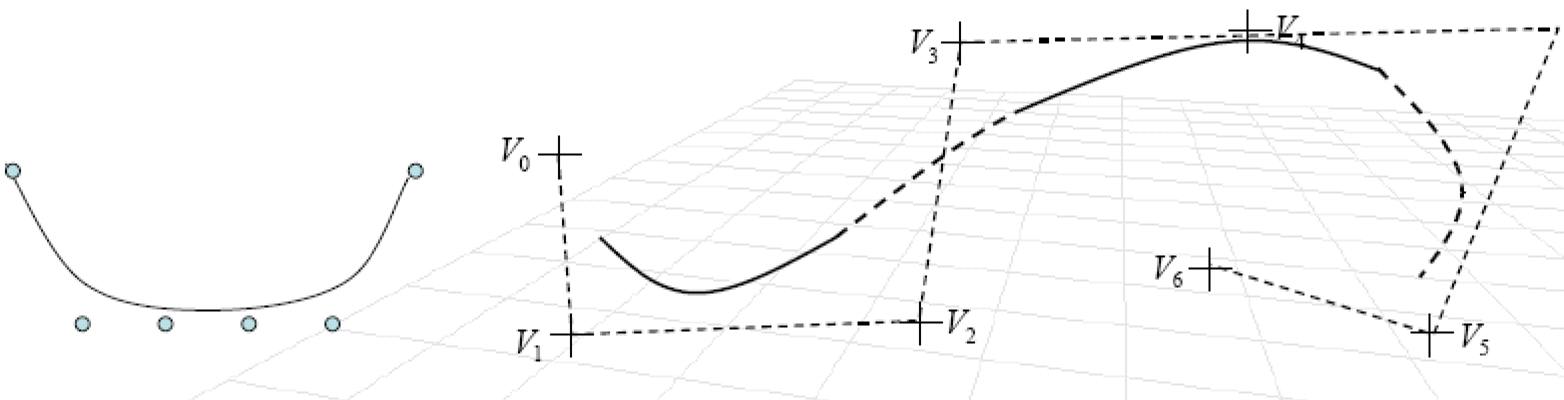
Características das Curvas

- Interpoladoras
  - Gera uma curva com traçado que passa por TODOS os pontos de descrição da curva
- Aproximadoras
  - Gera uma curva que **não** "necessariamente" passa por TODOS os pontos que definem o formato da curva

Somente formulações paramétricas podem ser divididas assim



Interpolação



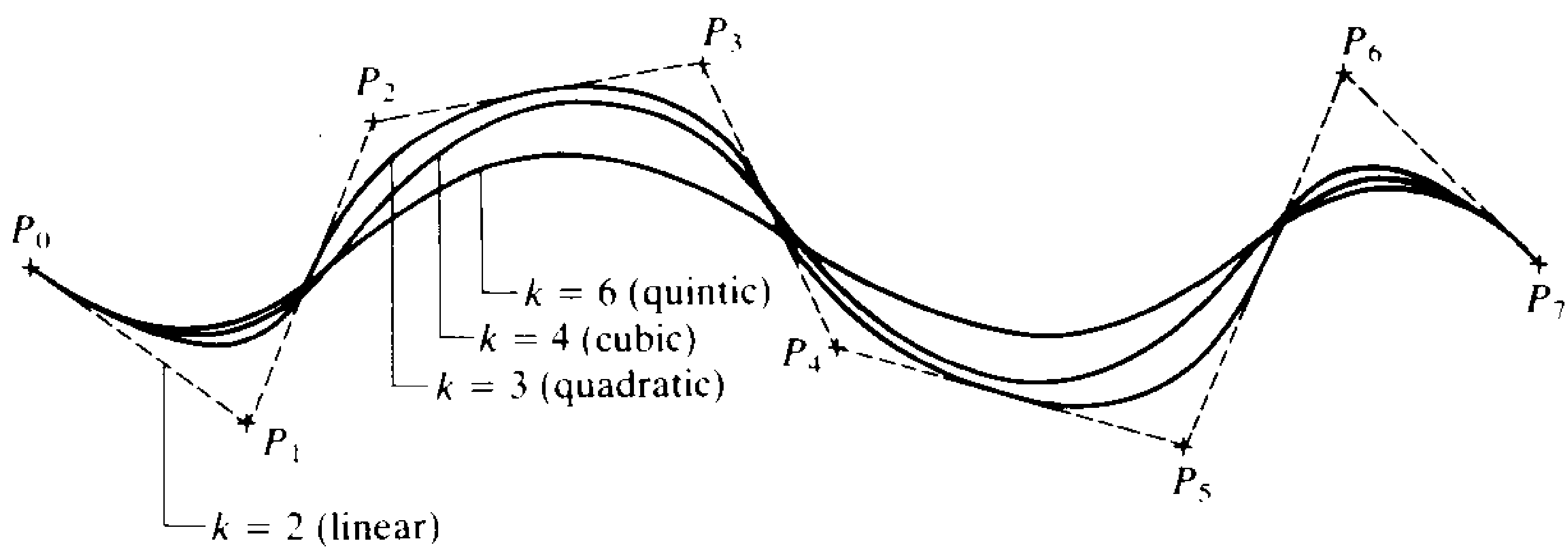
Aproximação

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Grau da Curva

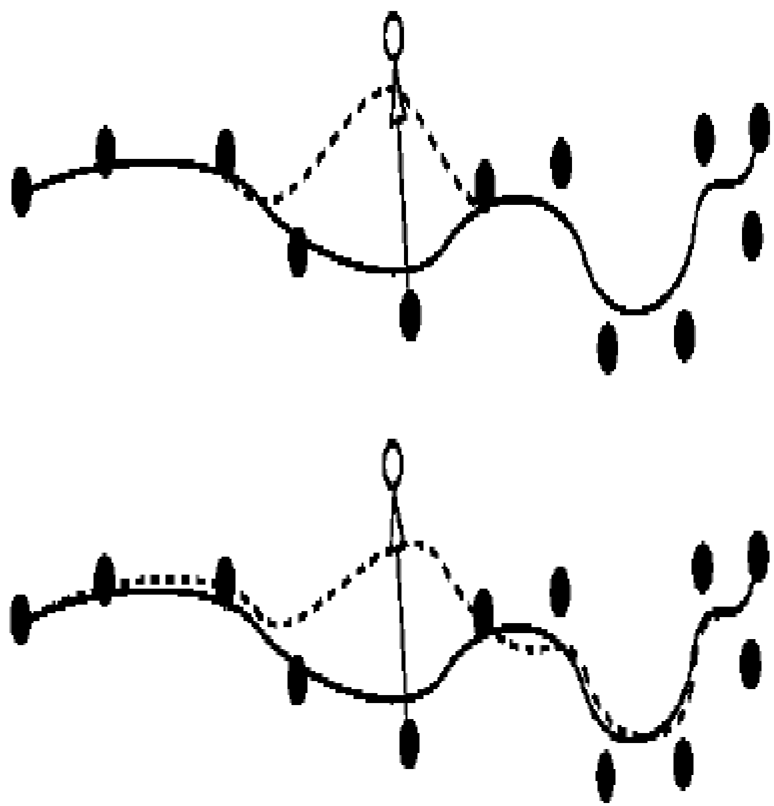
- Em termos práticos, o grau da curva define a distância da curva dos **Pontos de Controle** e também a sua suavidade (Microstation:9-43, Zeid229)



Melhor Grau (Foley96:478)

- Quadrática
  - Uma única concavidade
  - Rápida
- Cúbica
  - Muda de concavidade (ponto de inflexão)
  - Pouco custosa
  - Primeiro grau não planar
- Bi-quadrática
  - Dois pontos de inflexão
  - Custosa (demorada)

Controle Local / Global



Continuidade Paramétrica

C^{-1} C^{0} C^{1}

Famílias de Curvas

- Interpoladoras
  - Spline
  - Hermite
  - Catmull-Rom
- Aproximadoras
  - Bezier
  - B-Spline
  - NURBS

Interpoladoras

Spline

- Interpoladora Spline é uma **régua flexível** usada por arquitetos e engenheiros que pode ser curvada e que se dobra para passar por alguns pontos.
- Uma Spline é uma função polinomial por partes
- Uma Spline Cúbica tem até C^2

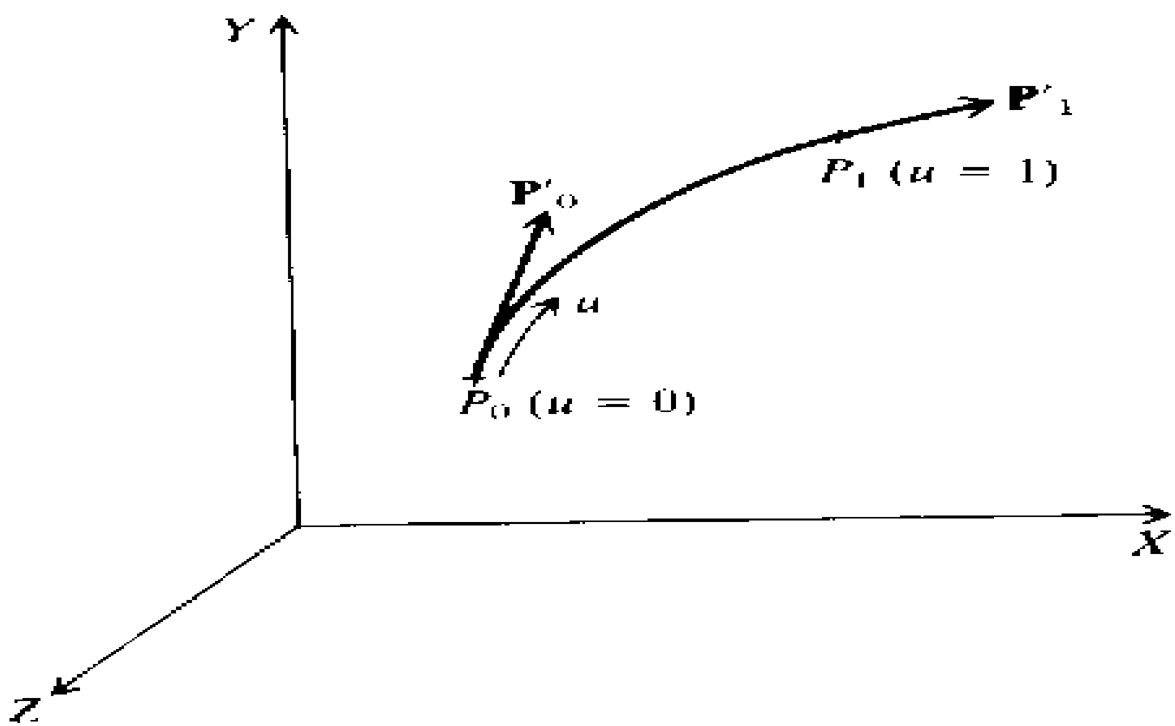
$$s_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i\,.$$

Interpoladora de Hermite

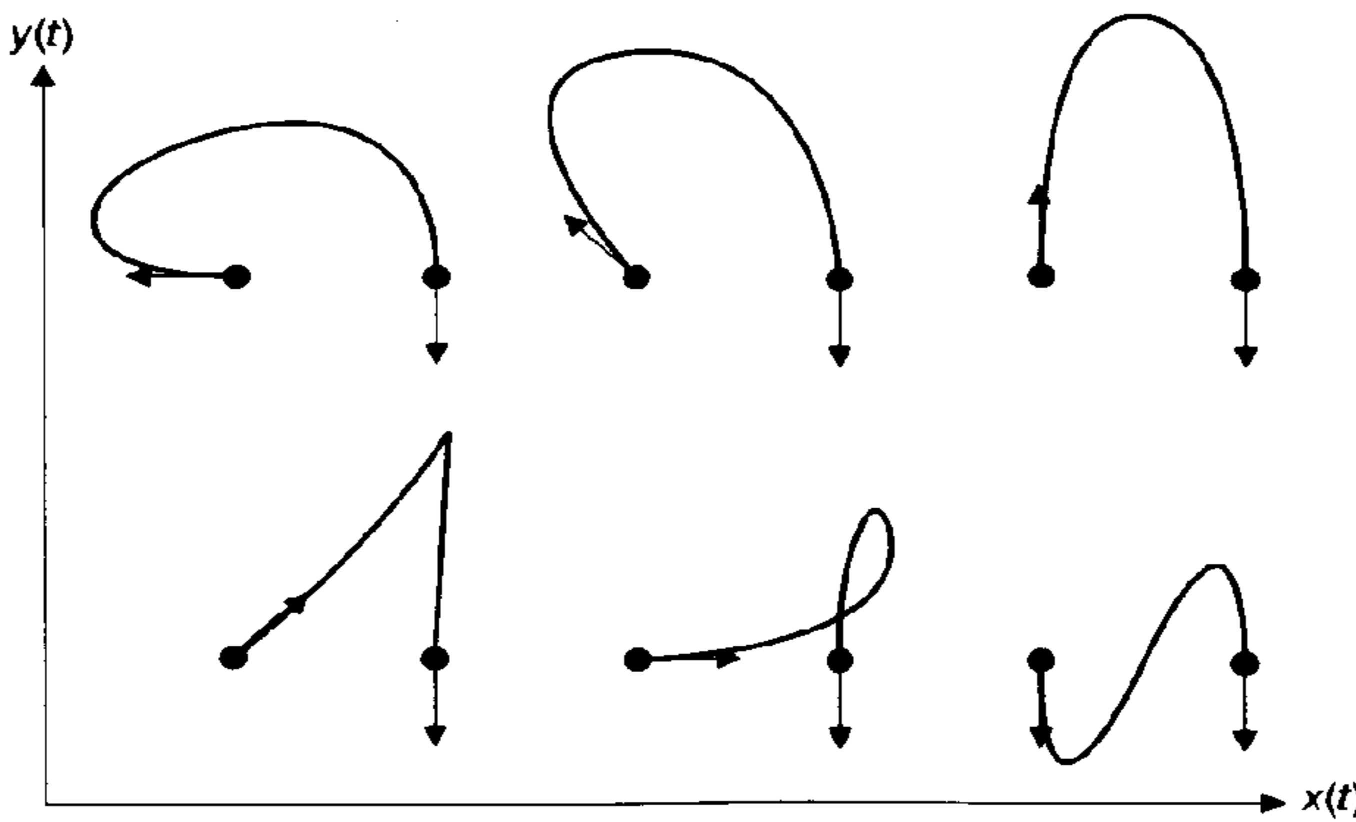
Curvas de Hermite (Zeid 1991:215)

É definida por 2 Pontos de Controle e 2 tangentes

Interpola os pontos P_0 e P_1



Curvas de Hermite Foley:486)



Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Interpoladora Catmull-Rom

Catmull Rom

(Christopher Twigg, 2003)

Família de Curvas Interpoladora <u>Cúbicas</u>

A Tangente de cada Ponto de Controle é dada pelos pontos Anterior e Posterior ao atual $\tau(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1})$

Primeiro e Último Pontos assume-se usar o ponto atual para a Tangente

Exemplos de Catmull-Rom

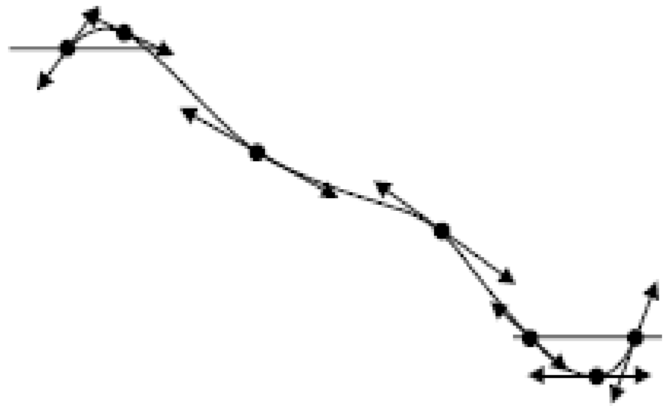
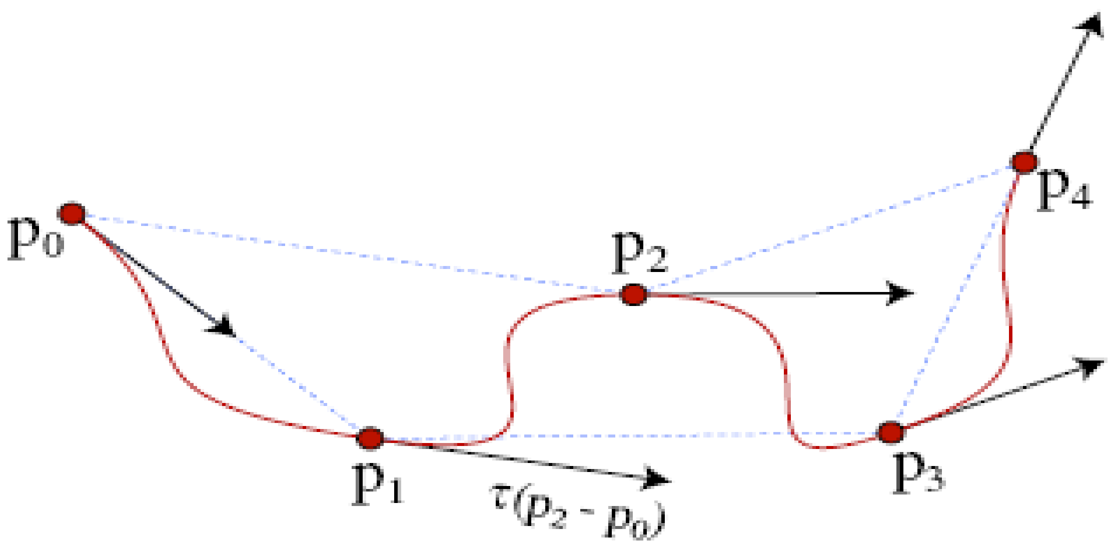


FIGURA 3.18. *A Spline contínua sem descontinuidade na direção da tangente.*



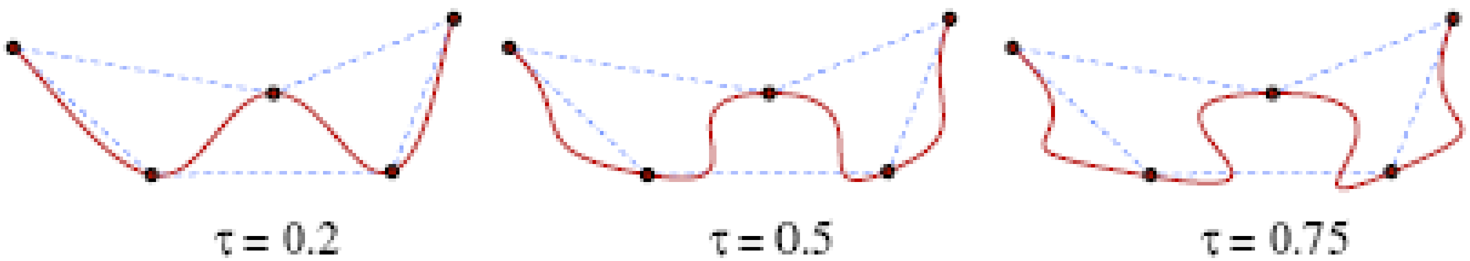
Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Catmull Rom

O parâmetro T é a "**tensão**" da curva

A tensão afeta o quanto a curva dobra nos Pontos de Controle



Garante C^1 e Controle Local

Não garante C^2

Curva extrapola o Polígono dos Pontos de Controle (Convex-Hull)

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Aproximadoras

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Curvas de Bézier

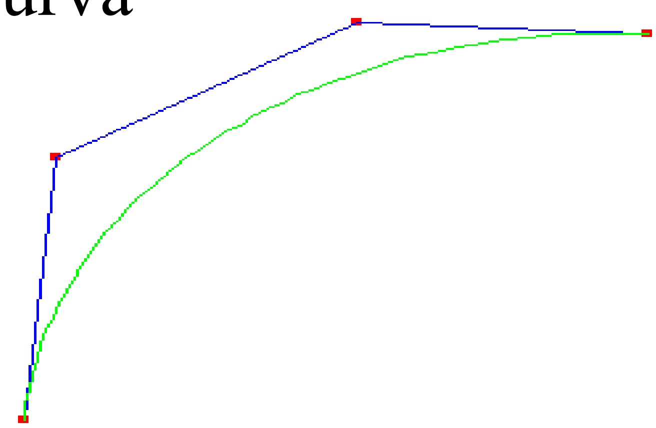
Curvas Bézier

- Criada pelo designer francês Piérre Bézier e usada por ele no projeto de um carro Renault nos anos 70

- Muito utilizada pelo programa Adobe na criação de suas fontes

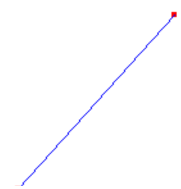
Comportamento das Curvas Bezier

- **Interpola** o primeiro e o último ponto mas não passa pelos demais
- Tem controle **Global**
- Os **PC** direcionam a forma da curva
- A tangente em $\mathbf{P_0}$ é $(P_0\text{-}P_1)$
- A tangente em $\mathbf{P_3}$ é $(P_2\text{-}P_3)$

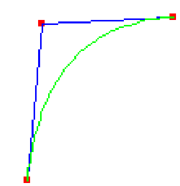


Curvas Bézier

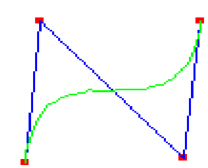
- A Bézier se curva conforme o seu grau
  - Grau 1 (linear) é uma linha reta



  - Grau 2 (quadrática) se curva uma vez



  - Grau 3 (cúbica) se curva duas vezes



- Repare que o número **mínimo** de Pontos de Controle (**i**) é sempre um a mais que o grau (**n**) da curva Bézier (i = n+1)

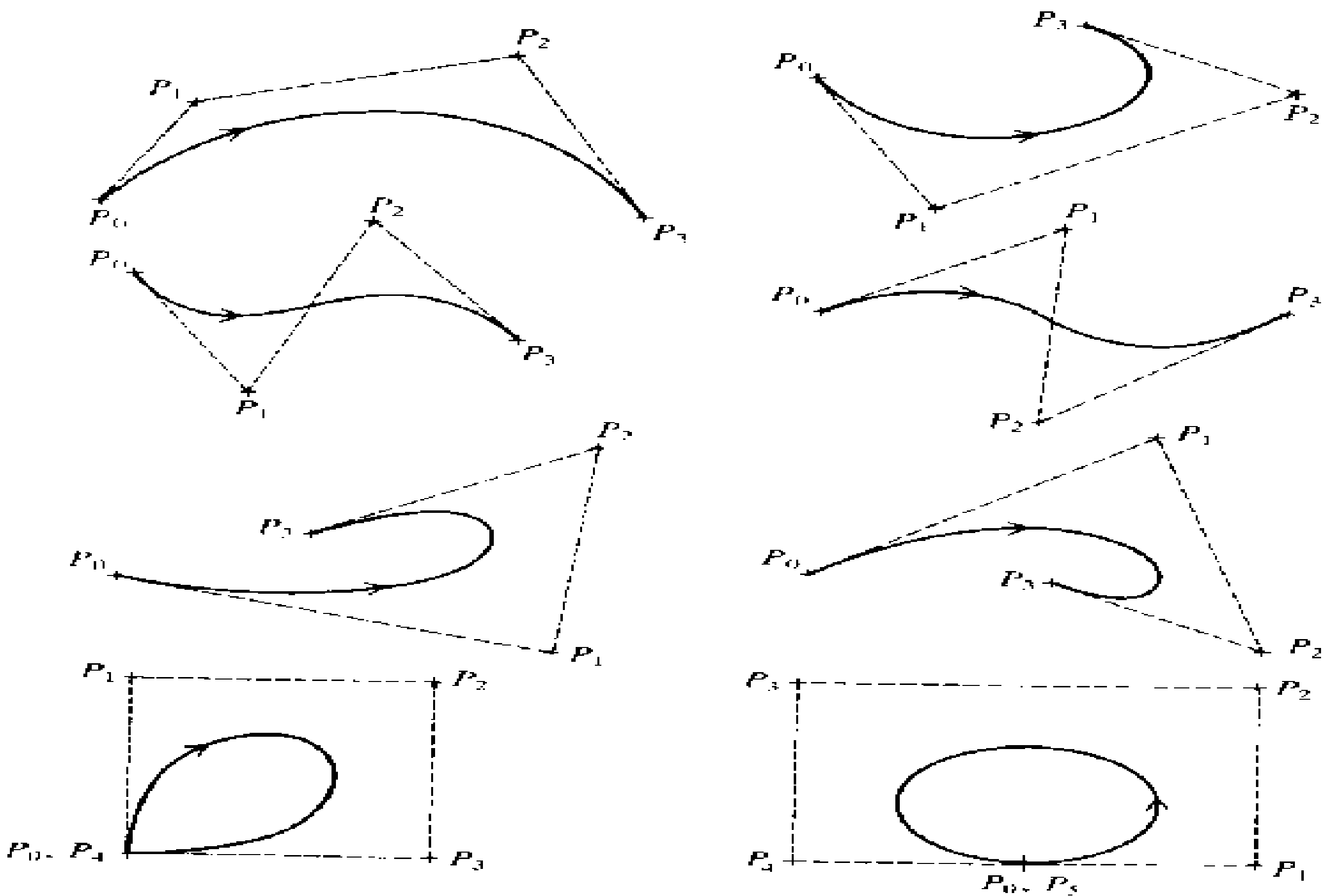
Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

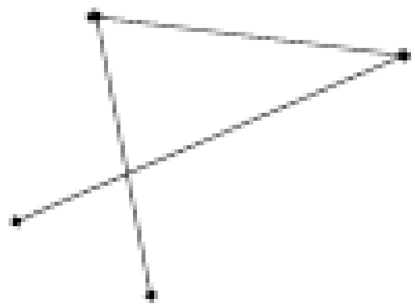
Curvas Bézier

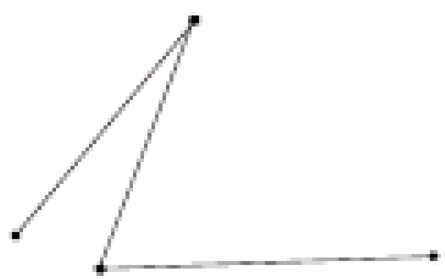
- Permite definir curvas fechadas
- Invariante à rotação, escala e translação
  - garante que para transformar a curva/superfície basta transformar os Pontos de Controle e não os Pontos de Traçado (conjunto de pontos calculados)
  - Economia significativa de tempo

Exemplos de Curvas Bézier (Zeid:220)

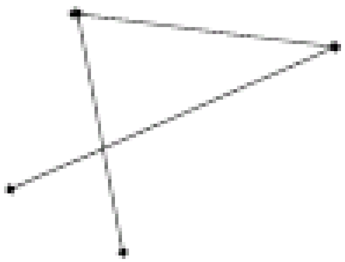


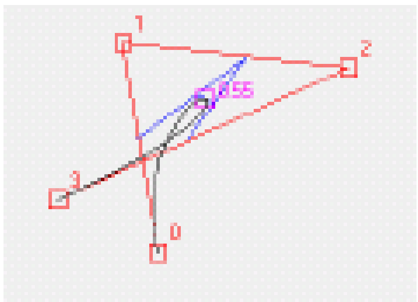
Exercício:
Qual a Bezier Resultante?

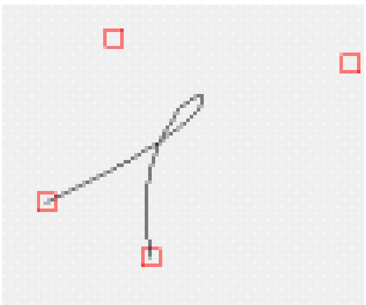


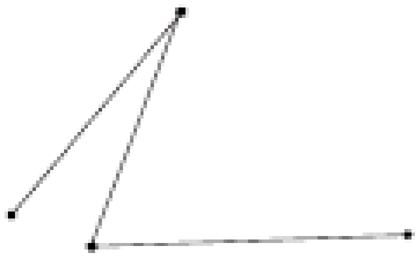


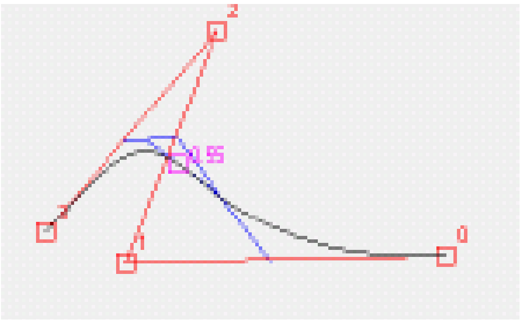
Construindo Curvas Bezier











Curvas B-spline

Curvas B-spline

São curvas **aproximadoras**

São a **generalização** das curvas de Bézier (Zeid91:226).

O **grau** da curva independe dos pontos controle

Com quatro pontos pode-se gerar uma B-spline linear, quadrática ou cúbica (enquanto que estes só gerariam a Bézier cúbica)

Ou seja, tem as seguintes vantagens sobre a Bézier:

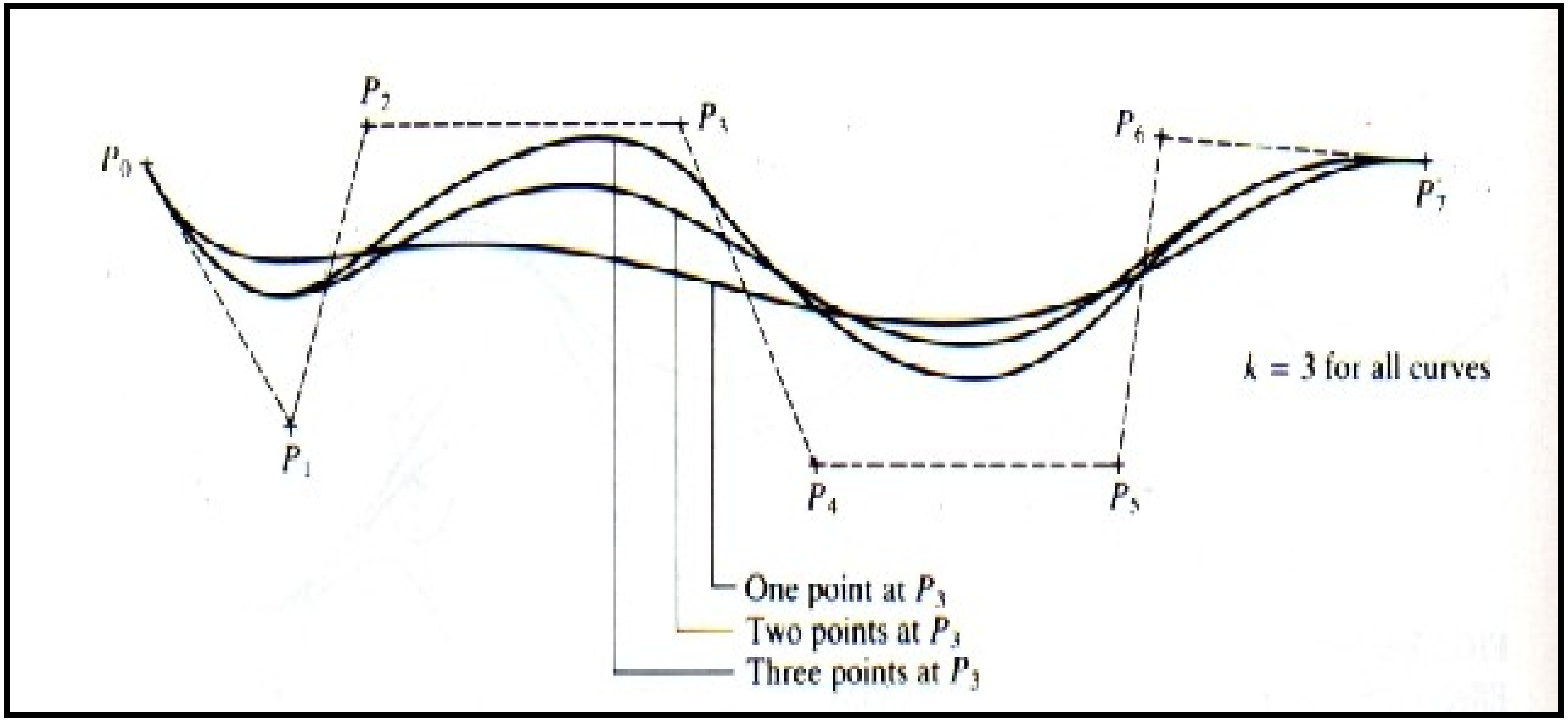
- controle local, ao invés de controle global.
- possibilidade de acrescentar Pontos de Controle sem necessariamente aumentar o grau da curva.

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Múltiplos Pontos de Controle

(Zeid 1991:230)



Curva B-Spline

- Equivale a ter-se **várias curvas Bézier** cúbicas unidas
- B-splines são C^2 e não tem restrições quanto ao número nem localização dos Pontos de Controle (como as Bézier)

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

NURBS

NURBS
(B-*splines* Racionais Não Uniformes)

- **N**on-**U**niform **R**ational **B**-**S**plines
- É uma das curvas mais populares para representação softwares de CAD pois permite:
  - Controle Local (como uma B-spline)
  - Habilidade de ajustar as funções peso variando-se os parâmetros (como nas curvas não uniformes)
  - Habilidade de dar peso aos Pontos de Controle (como nas racionais)

NURBS
(B-*splines* Racionais Não Uniformes)

- Tem vantagem da **invariância** à rotação, escala e translação dos Pontos de Controle, como as não racionais, e também à transformação de <u>perspectiva</u>
- Podem definir precisamente seções **cônicas** (as não racionais podem apenas aproximar) (FOLEY96:504)
- Não estão limitadas pelo Convex-Hull

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Exemplo de NURBS

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i}$$

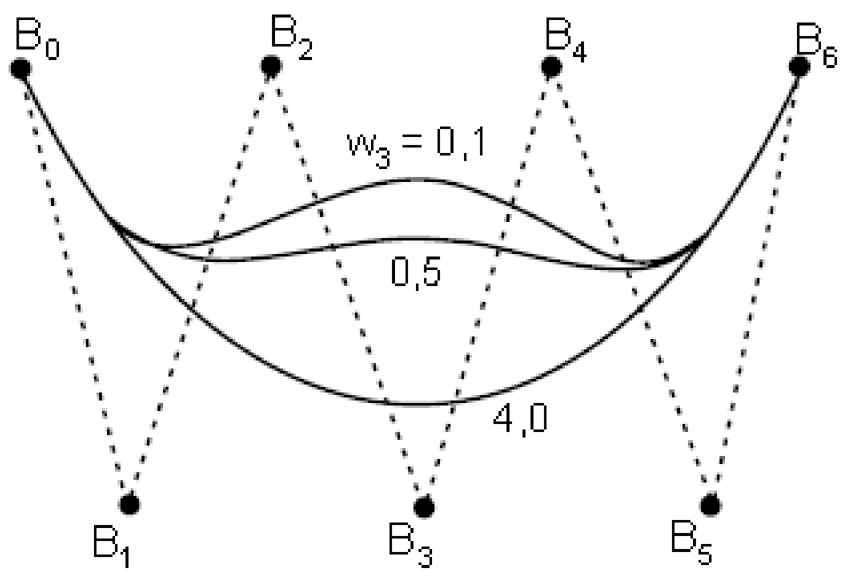


FIGURA 3.19. *Variando um dos pesos de uma curva racional.*

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Formulação das Curvas

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Formulações das Curvas Paramétricas

- ***Blending*** / Peso
  - Enfatiza como as características **geométricas** afetam a curva
  - Os pontos de controle da curva são evidenciados
- **Polinomial**
  - Enfatiza o **grau** da curva e a **variável** paramétrica
  - O parâmetro é evidenciado
- **Matricial**
  - Separa o vetor parâmetro das **características** intrínsecas da curva e das referências geométricas desta

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Formulação *Blending*
Caso Geral

$$C(u) = \sum_{i \in 0..N} P_i B_i(u)$$

P_i = Pontos de Controle (PC) da Curva

$B_i(u)$ = Funções *Blending* da Curva

N = número de Pontos de Controle da curva

C(u) = trajetória da curva

- É organizada em função dos Pontos de Controle

- Enfatiza as funções (**Bi**) que influenciam a contribuição dos PC (Pi) nos PT final

Formulação Não Racional **Polinomial** Paramétrica

$$p(u) = \sum_{k=0}^{n} u^k c_k$$

n = grau do polinômio/curva

Ck = parâmetros da curva

u = variável paramétrica

p(u) = pontos da trajetória da curva

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Formulação Polinomial Paramétrica

$f(t) = at + b$ $\quad$ $f(t) = at^2 + bt + c$ $\quad$ $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

Linear $\qquad$ Quadratic $\qquad$ Cubic

f(t) se desdobrará em *x*(t), *y*(t) e *z*(t)

Os parâmetros se desdobram em *ax, ay, az; bx, by, bz; ….*

Formulação **Matricial** (Foley96:483)

P(t) = **T. M. G = T . C**

- T = [t^{n} t^{n-1} .... t 1]
- M = Matriz Específica da **família** de Curvas
- G = Característica Geométrica = vetor coluna onde cada linha tem um uma restrição geométrica como Ponto de Controle/Tangentes/..
- C = M. G ; Característica **daquela** Curva

- Isola as características geométrica (G) das variáveis de controle (M) e enfatiza o parâmetro (T)

Formulações para a Reta 2D

- **Analítica** Explícita

  $y = ax + b$
- Reta **Polinomial**

  $P(u) = u\,(P_1 - P_0) + P_0$
- **Blending**

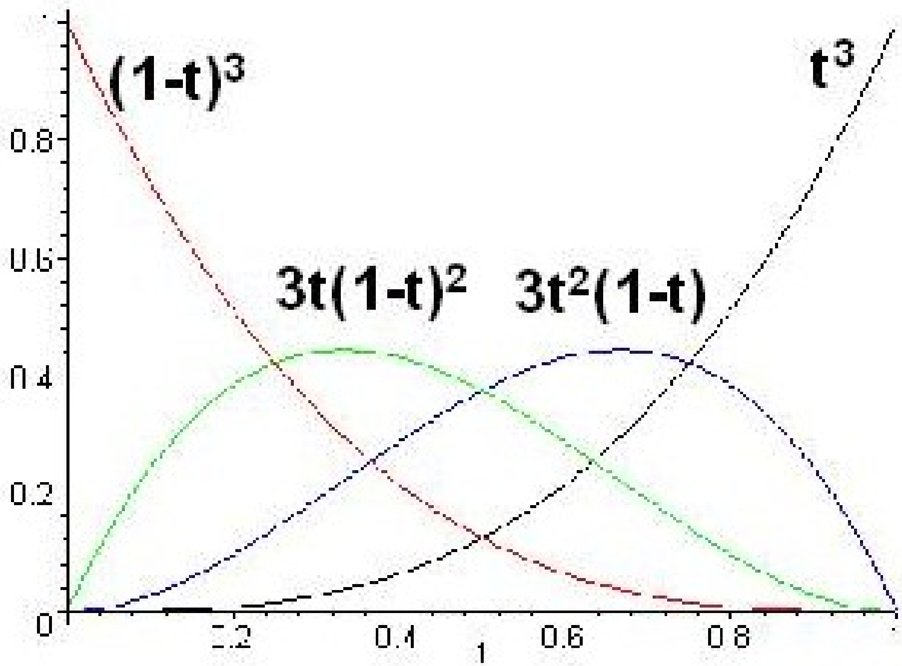
  $$P(u) = (1-u)P_0 + u\,P_1$$
- **Matricial**
  - $P(u) = U.\ M.\ G$
  - $M = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

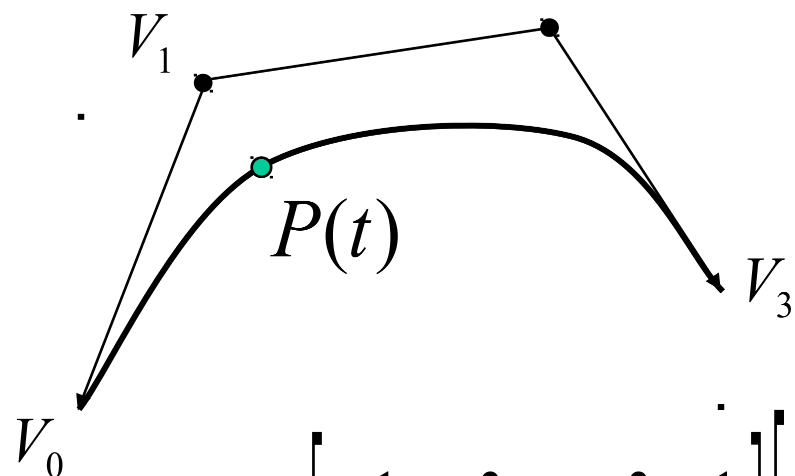
Bézier Cúbica

- Forma das *Blending Functions* da Bézier



Bezier Cúbica (Formulação Matricial)

(Mortenson2006:125; Foley1996:489)



$$\vec{P}(t)=\langle t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\rangle \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

Formulação da Spline

$$\vec{P}(t)=\langle t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\rangle \begin{bmatrix} -c & 2-c & c-2 & c \\ 2c & c-3 & 3-2c & -c \\ -c & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

- Tem-se a *spline* cúbica quando c=0,5

Matriz de Hermite

(Foley96:484, Mortenson2006:66)

$$\vec{P}(t)=\langle t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\rangle \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Matricial da Catmull-Rom

$$p(s) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tau & 0 & \tau & 0 \\ 2\tau & \tau - 3 & 3 - 2\tau & -\tau \\ -\tau & 2 - \tau & \tau - 2 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-2} \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix}$$

Convenção:

U está com colunas invertidas e
M está com as linhas invertidas

B-*Spline* Periódica Cúbica

(Foley96:493)

Para cada par V_i, V_{i+1} , i=0,...,n

Para cada t=0,...,1

$$\vec{P}(t) = \langle t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i-1,x} & V_{i-1,y} & V_{i-1,z} \\ V_{i,x} & V_{i,y} & V_{i,z} \\ V_{i+1,x} & V_{i+2,y} & V_{i+2,z} \\ V_{i+3,x} & V_{i+3,y} & V_{i+3,z} \end{bmatrix}$$

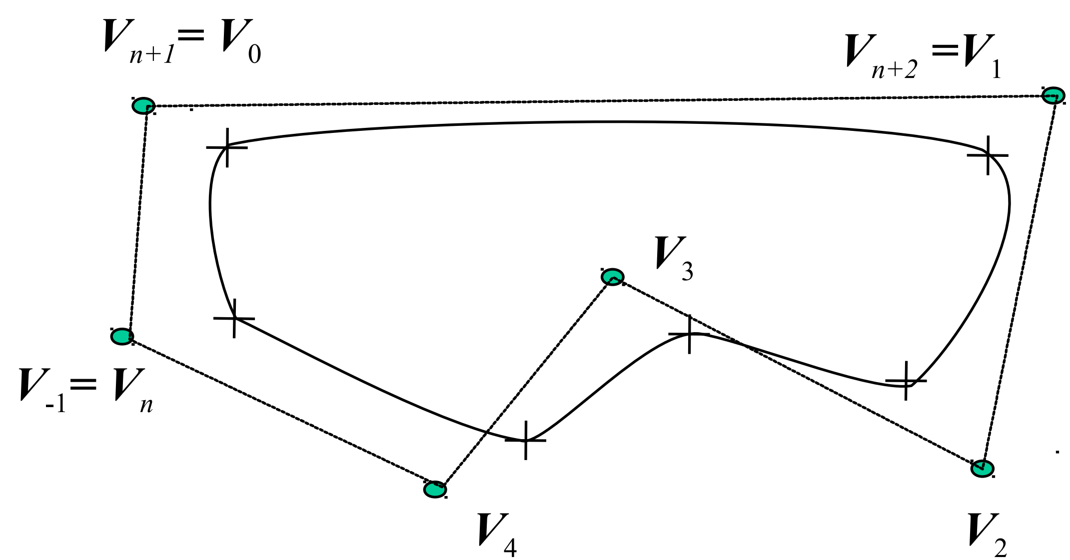
Periódica:

i=0, ... , n

$V_{-1} = V_n$

$V_{n+1} = V_0$

$V_{n+2} = V_1$



Algoritmo de Discretização de Curva na Formulação Matricial

BEGIN

Calcula **C** = M.G // **M qualquer, intrínseca à curva**

Para *t* variando de 0.0 a 1.0 de *Delta_t* (se uniforme)

Begin

Calcula T = $[\ t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\ ]$

Calcula P(t) = T.**C**

Grava/Plota(x,y,z)

End

End

Ver otimização em Foley96:488

Modelagem de Superfícies

Modelagem de Superfícies

- Vantagens
  - Estética/Suavidade
  - Armazena mais informações que Wireframe mas é mais compacta
  - Características (Aerodinâmica / Curvas Orgânicas)
  - Facilidade de Criação/Manipulação

Criação de Superfícies

- A necessidade de superfícies livres advém de três formas básicas:
    - quando se tem uma **equação** analítica (f(x,y))
    - quando a curva é projetada com base numa **nuvem** de pontos (medidos)
    - quando parte-se de uma formulação de curva respectiva (***patches***)

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Representação de Superfícies por Subdivisão Paramétrica

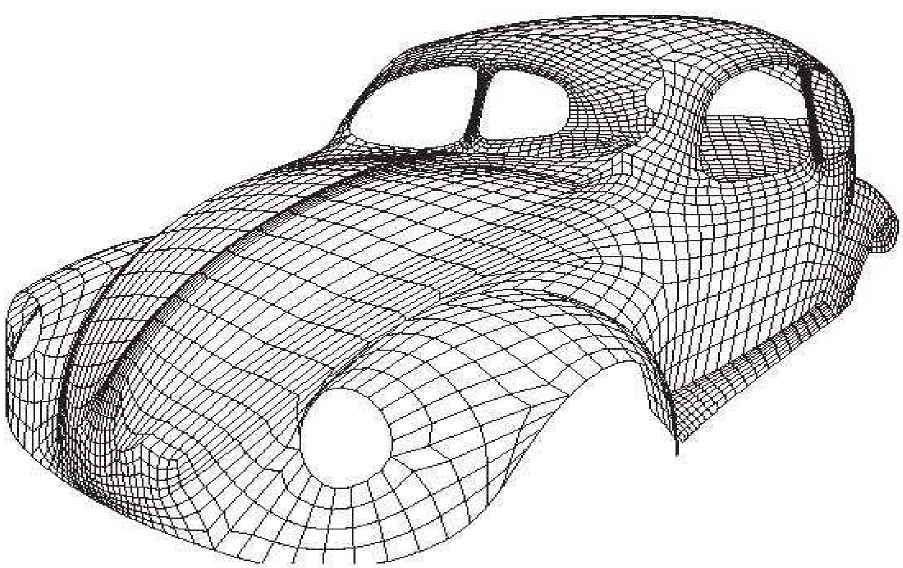


Figura 13. Representação por subdivisão paramétrica.

Parametric Patches

- Um dos primeiros usos de *parametric patches* gerou o "**Utah Teapot**"

Parametric Patches

- Um dos primeiros usos de *parametric patches* gerou o "**Utah Teapot**"
  - O verdadeiro é o da esquerda

Bézier *Patches*

- Baseados na curva de Bezier
- Equacionamento na forma de *blending functions*:

$$C(u, v) = \sum_{i \leftarrow 0..3} \sum_{j \leftarrow 0..3} P_{ij}\, B_i(u)\, B_j(v)$$

- Então precisa-se de uma malha de curvas Bézier
  - Especificamente, 4 curvas na horizontal (direção u) e 4 na vertical (direção v)
- Estas 8 curvas compartilham os pontos de controle que são num total de 16

Parametros U e V

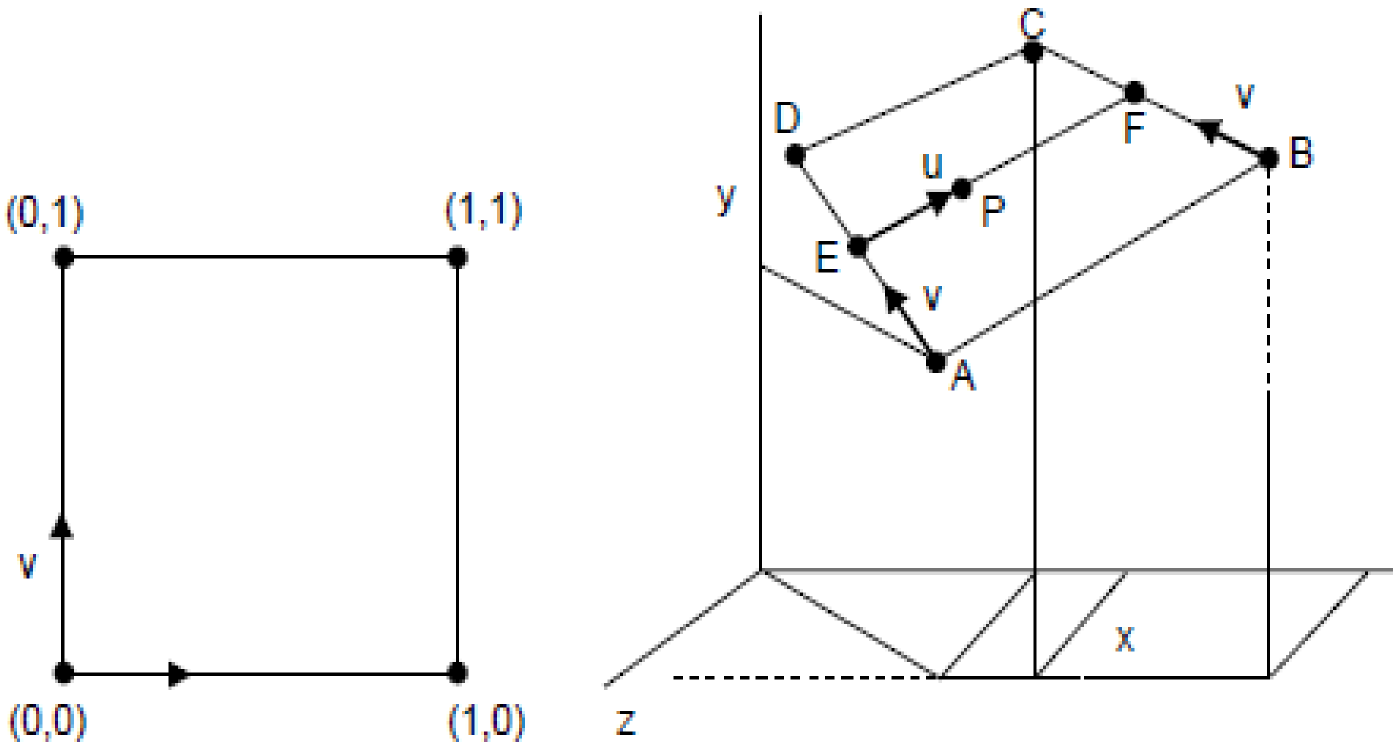


FIGURA 3.23. *Parâmetros u, v e geração de superfícies por quatro pontos limites.*

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Superfície de Bézier

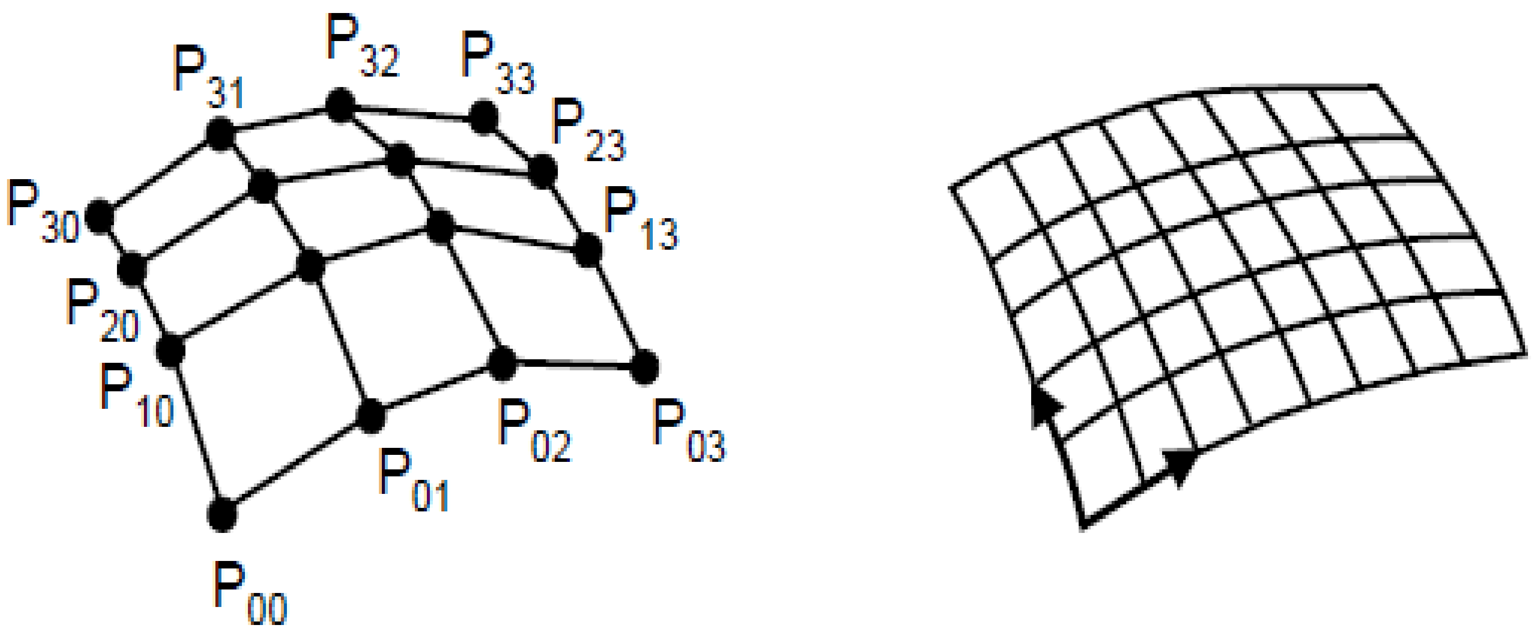
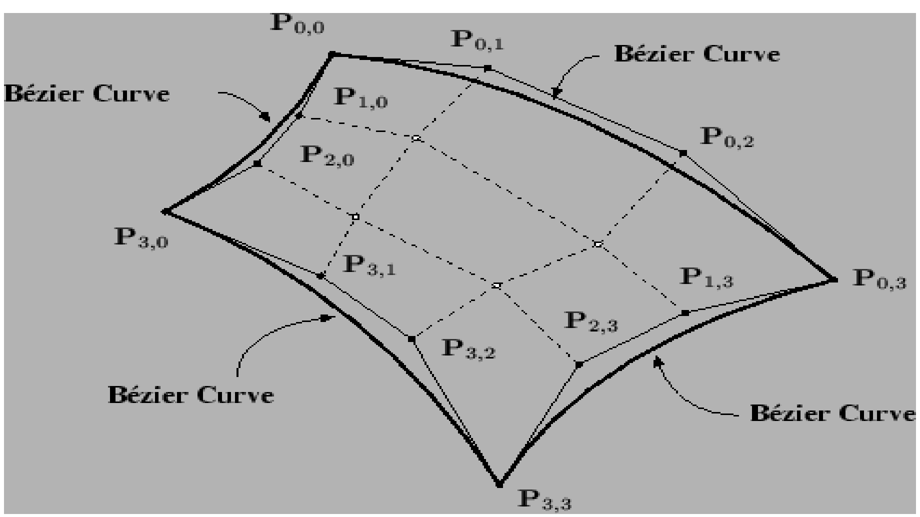
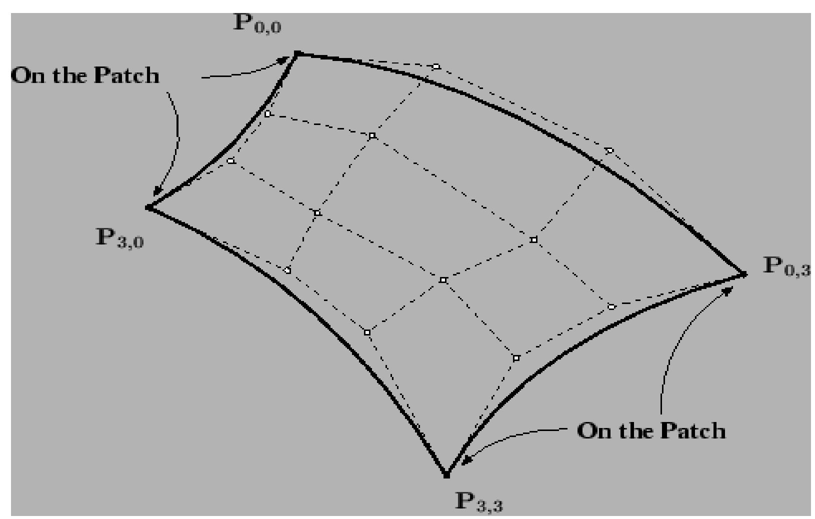


FIGURA 3.28. *Os dezesseis pontos de controle de um patch bicúbico de Bézier.*

Bézier Patches

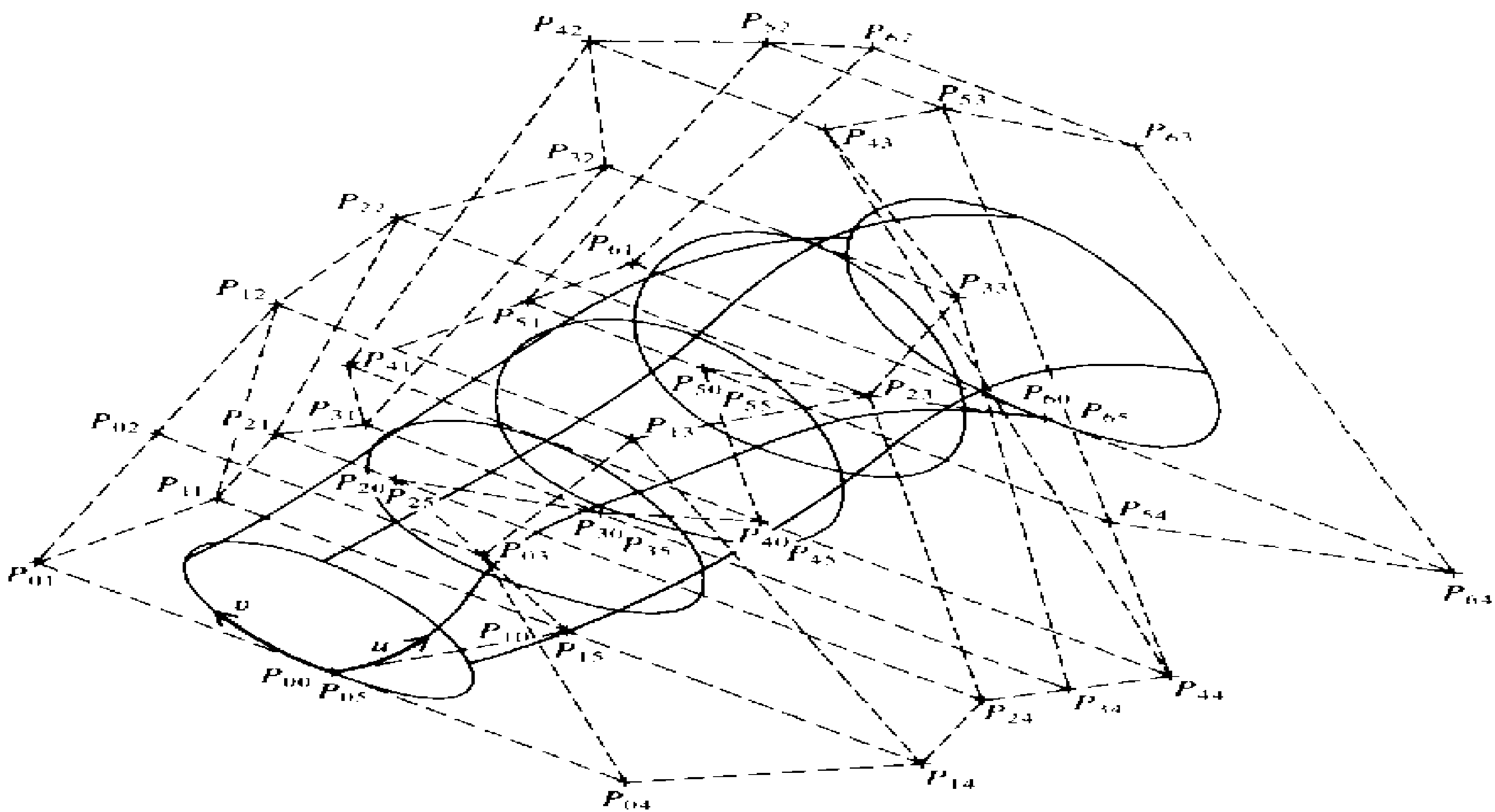
- Como a superfície adquire características da Bézier, ela interpola a Malha de Pontos de Controle nos 4 cantos



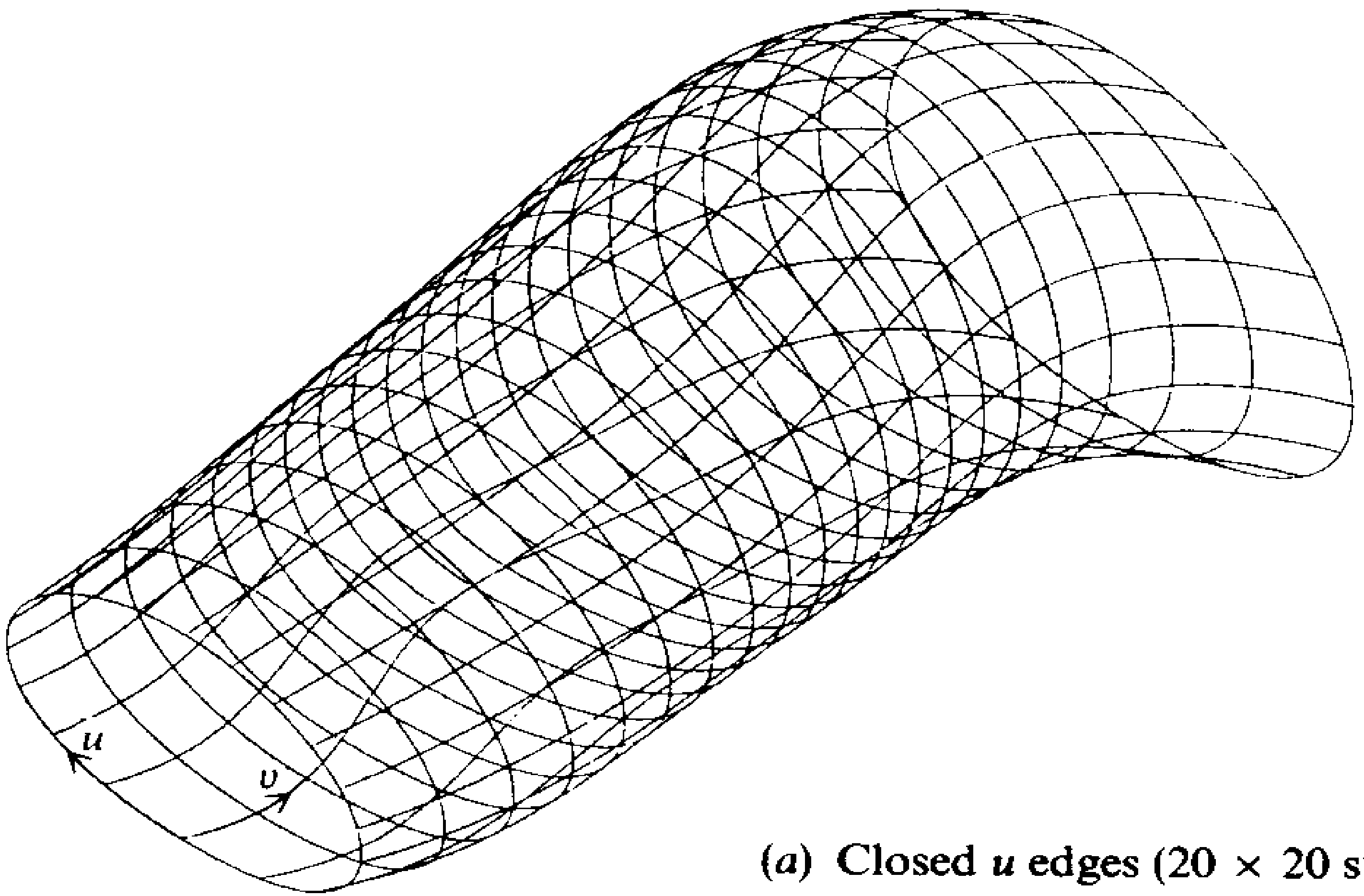


Definindo uma Superfície Bézier

(Foley:521)



Superfície Bézier Fechada (Zeid:297)



(a) Closed u edges (20 × 20 surface mesh)

B-Spline Patches

- B-Spline patches são similares aos patches Bézier exceto que são baseados em curvas B-Spline
- Isto implica que:
  - Pode haver qualquer numero de pontos de controle tanto nas direções u quanto v (4x4, 8x12, etc.) e ainda manter continuidade c^2 das curvas cúbicas
  - Com *patches* uniformes, o *patch* não passa pelo poliedro de controle

Modelagem de Superfícies

- Formas Des-uniformes e Sinuosas.

Modelagem de Superfícies

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Modelagem de Superfícies (CATIA)