Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Coordenadas Homogêneas

André Tavares da Silva

andre.silva@udesc.br

Capítulo 5 de “Foley”
Capítulo 2 de Azevedo e Conci

Coordenadas Homogêneas

Promovem uniformidade no tratamento de qualquer transformação geométrica em CG.

Essa uniformidade é benéfica ao se fazer composição, ou concatenação, de transformações de vários tipos.

Coordenadas Homogêneas

Por definição, Um ponto 2D homogêneo é (x, y, M) tem seu equivalente Euclidiano (x/M, y/M)

Permite representar reais como inteiros (1, 2, 1000) assim como números muito grandes/pequenos (1, 2, 1/100000)

Coordenadas Homogêneas

Com coordenadas homogêneas pode-se definir uma **transformação afim** (linear com translação) :

- 2D com uma matriz $M_{3 \times 3}$
- e
- 3D com uma matriz $M_{4 \times 4}$

Observação : Representações Equivalentes

Ponto pode ser vetor **coluna** ou vetor **linha**

A aplicação da Matriz é diferente:

– Ponto em **linha** a Matriz é **pós**

– Ponto em **coluna**, a Matriz é **pré**

Um é o transposto do outro (linha vira coluna)

Vale lembrar que $(A * B)^t = B^t * A^t$

$$[x_{p'}\ y_{p'}\ z_{p'}\ 1] = [x_{p'}\ y_{p'}\ z_{p'}\ 1]\ T \qquad \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \\ 1 \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Homogêneas 2D

Coordenadas Homogêneas 2D

Esta matriz M (homogênea 2D) pode ser dividida em 4 partes:

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} a & c & m \\ b & d & n \\ \hline p & q & s \end{array}\right)$$

Centro = a b c d

Coluna = m n

Linha = p q

Coordenadas Homogêneas 2D

Quando diagonal a=d=s=1 e b=c=0 então

T é uma translação pura em P´= T * P

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Coordenadas Homogêneas 2D

Quando s=1 e m=n=p=q=0

Obtém-se:

$$M = \left(\begin{array}{cc:c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

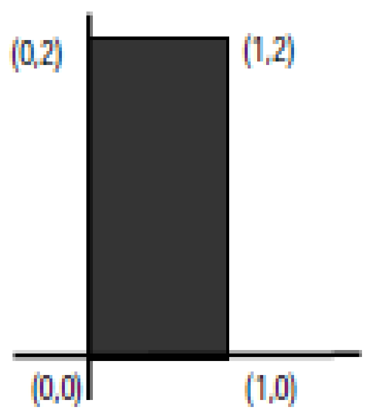
Escalonamento,

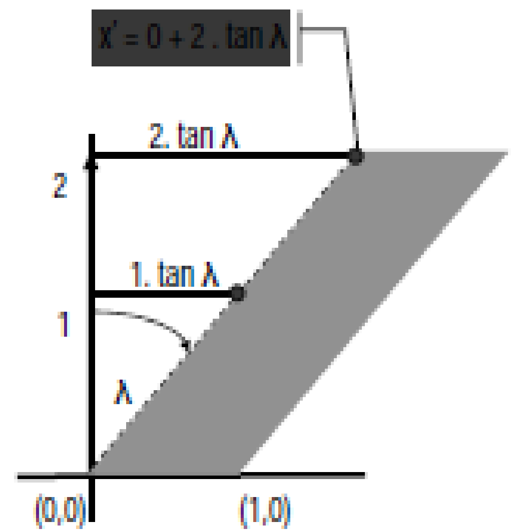
Rotação,

Reflexão,

Cisalhamento

Cisalhamento 2D
(P' = M * P)





$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em X

$$xp' = xp + yp.\tan\lambda$$

$$yp' = yp$$

Transformações Homogêneas 3D

Coordenadas Homogêneas **3D**

As matrizes são agora 4 x 4.

$$\left(\begin{array}{c:c} 3x3 & 3x1 \\ \hdashline 1x3 & 1x1 \end{array}\right)$$

Algebricamente tudo funciona como no plano projetivo, porém o modelo é difícil de ser visualizado por estar num espaço de dimensão 4.

Coordenadas Homogêneas 3D

A submatriz 3x3 produz uma transformação linear que é uma combinação de escalonamento, cisalhamento, reflexão e rotação.

A submatriz 3x1 produz uma translação.

A submatriz 1x3 produz uma transformação perspectiva.

A submatriz 1x1, escalonamento global

Coordenadas Homogêneas 3D

P = [x y z w] em coordenadas homogêneas

Escalas, Rotações

$$[x'\ y'\ z'\ w'] = [x\ y\ z\ 1]\ .\begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{pmatrix}$$

Projeções

Translações

Linha = Pós

P′= P·T

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projeções

Coluna = Pré

P'=T·P

Coordenadas Homogêneas 3D

Translação 2D (coluna=pré)

$$M = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Translação 3D (linha = pós)

$$[x'\ y'\ z'\ 1] = [x\ y\ z\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas 3D

Propriedades da translação:

Identidade: $T(0, 0, 0) = I$

Linearidade:

$T(s_x, s_y, s_z)\,T(t_x, t_y, t_z) = T(s_x+t_x, s_y+t_y, s_z+t_z)$

Comutatividade:

$T(s_x, s_y, s_z)\,T(t_x, t_y, t_z) = T(t_x, t_y, t_z)\,T(s_x, s_y, s_z)$

Inversão: $T^{-1}(t_x, t_y, t_z) = T(-t_x, -t_y, -t_z)$

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Coordenadas Homogêneas 3D

Exemplo : Escala 3D (coluna = pré)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas 3D

Rotação Homogênea 3D

É mais complicado, pois deve-se especificar um eixo de rotação.

Podem existir infinitos eixos de rotação.

Serão vistas as três rotações principais.

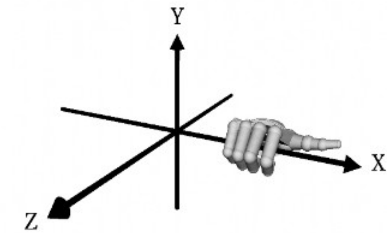
Rotação 3D (coluna/pré)

Rotações

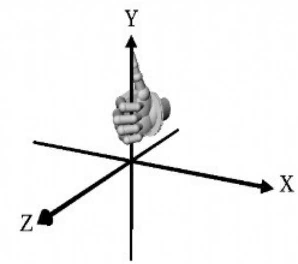
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotação 3D
(vetor coluna / mão direita)

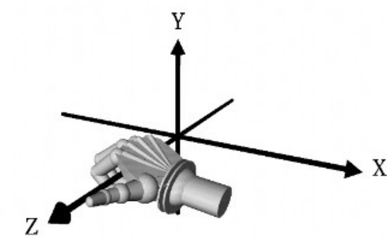
$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Composição de Transformações Homogêneas

Composição de Transformações

Também chamada de concatenação.

Pode-se compor qualquer sequência de transformações lineares em uma única matriz, fazendo somente a multiplicação das matrizes individuais.

$$P' = A * (B * (C * P)))) = T * P$$

onde $T = A * B * C$

Composição de Transformações

Como a multiplicação de matrizes não é comutativa, a ordem é importante.

Através de composição de transformações, pode-se obter a rotação de um objeto em qualquer ponto, por exemplo.

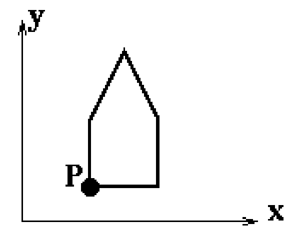
Composição de Transformações

Esta transformação pode ser obtida em 3 passos:

- Translação até a origem T.
- Rotação em torno da origem R_o.
- Translação inversa T^{-1}.

Composição de Transformações

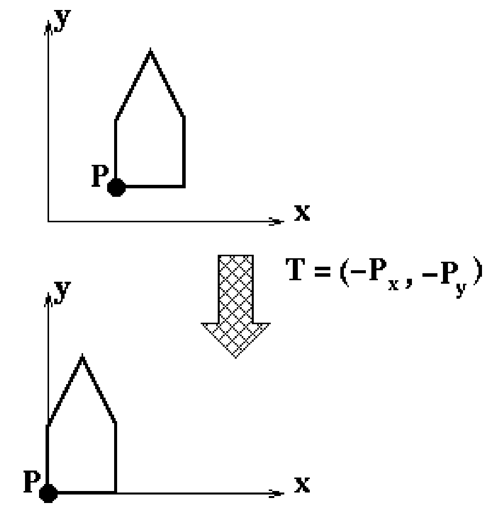
Rotação em torno de um ponto:



Composição de Transformações

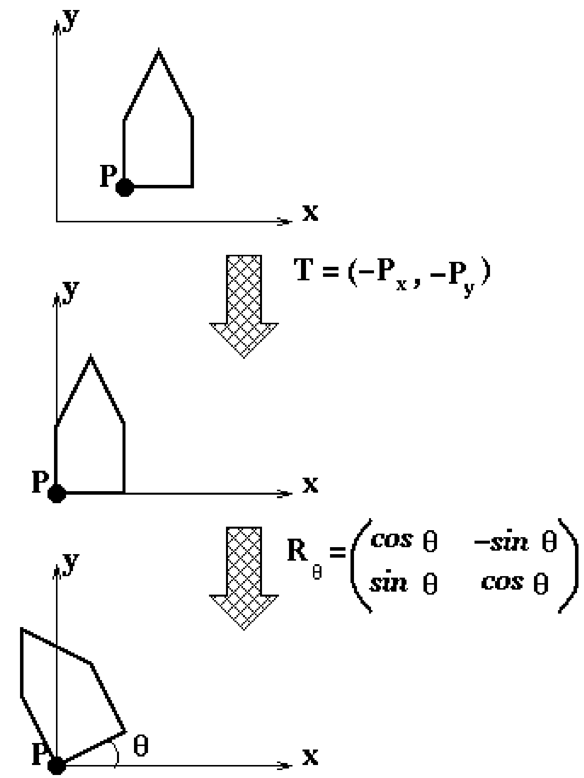
Rotação em torno

de um ponto:



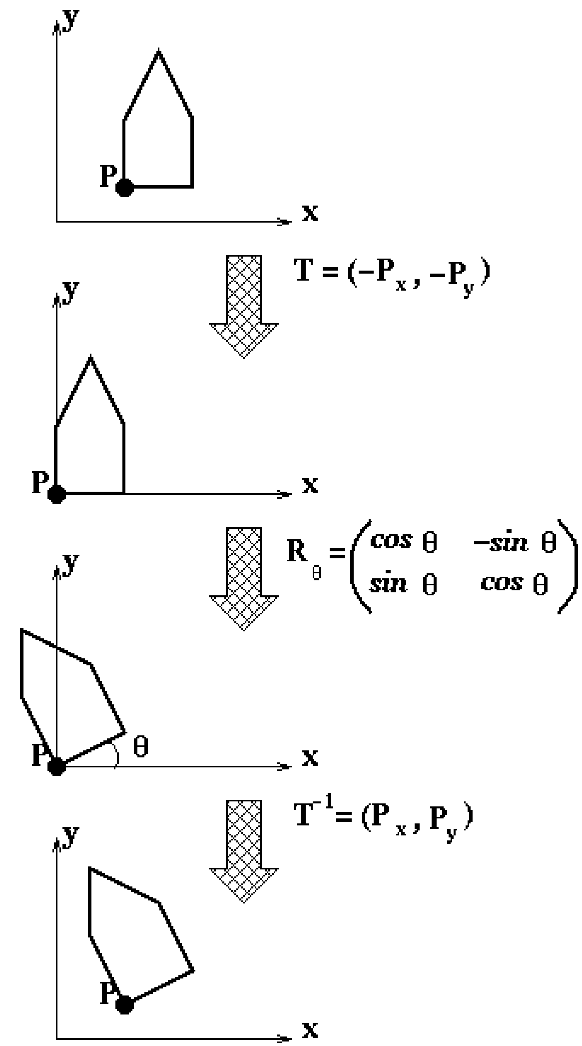
Composição de Transformações

Rotação em torno de um ponto:



Composição de Transformações

Rotação em torno de um ponto:



Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Composição de Transformações

Se não houvesse coordenadas homogêneas:

A aplicação seria uma a uma (coluna/pré)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Composição de Transformações

Com coordenadas homogêneas

(coluna/pré)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composição de Transformações

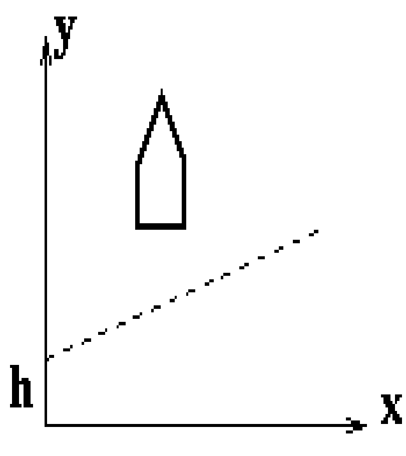
$$[\ R_P\ ] = [\ T^{-1}\ ]\ [\ R_o\ ]\ [\ T(-P)\ ]$$

Repare que esta é pré-multiplicada!

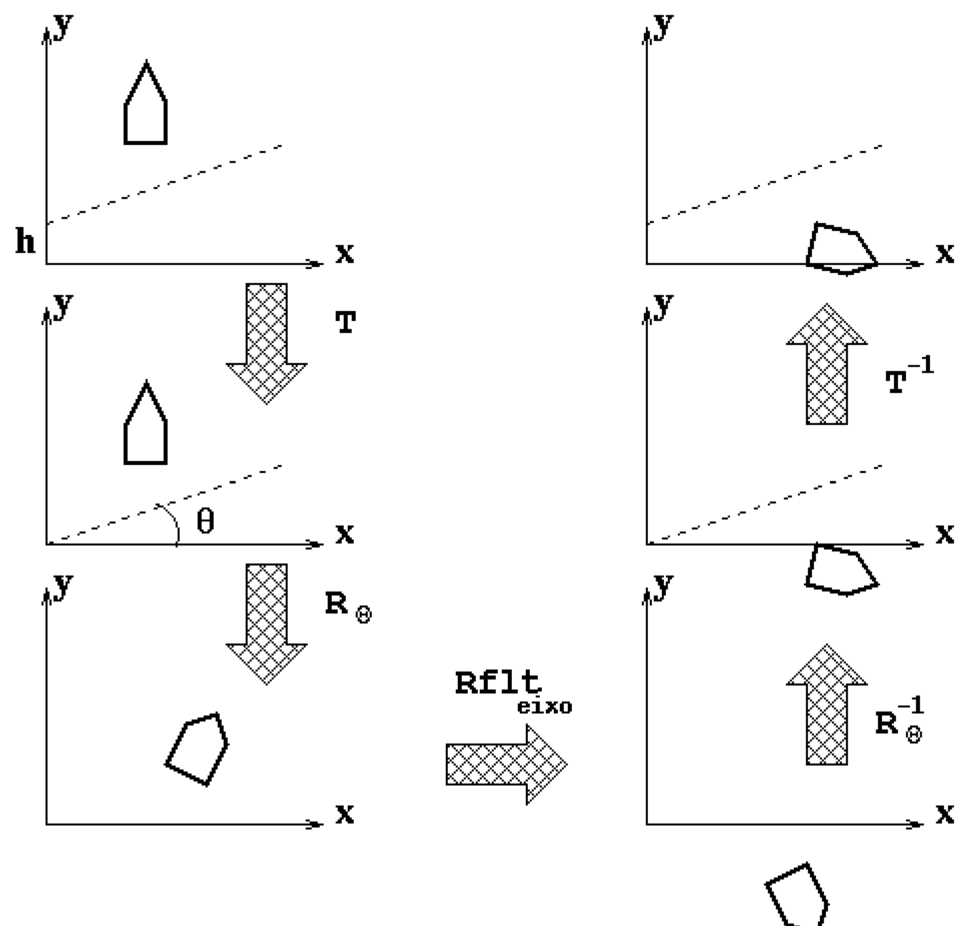
$$R_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & P_x(1-\cos\theta) + P_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -P_x \sin\theta + P_y(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Espelhamento em torno de Eixo Qualquer



Composição de Transformações



Composição de Transformações

Reflexão em relação a uma linha arbitrária:

- Translação da linha e objeto de maneira que a linha passe pela origem.
- Rotacionar o objeto e a linha ao redor da origem até que a linha coincida com um dos eixos.
- Reflexão em relação ao eixo.
- Rotação inversa em relação à origem.
- Translação inversa para a localização inicial.

Composição de Transformações

T2DH(0,-h)

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R2D(TETA)

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) * \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rfx2D=Scala(1,-1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R2D(-TETA)

T2DH(0,+h)

Exercícios

IMAGEM PARA ANALISAR — **IMAGEM FINAL**

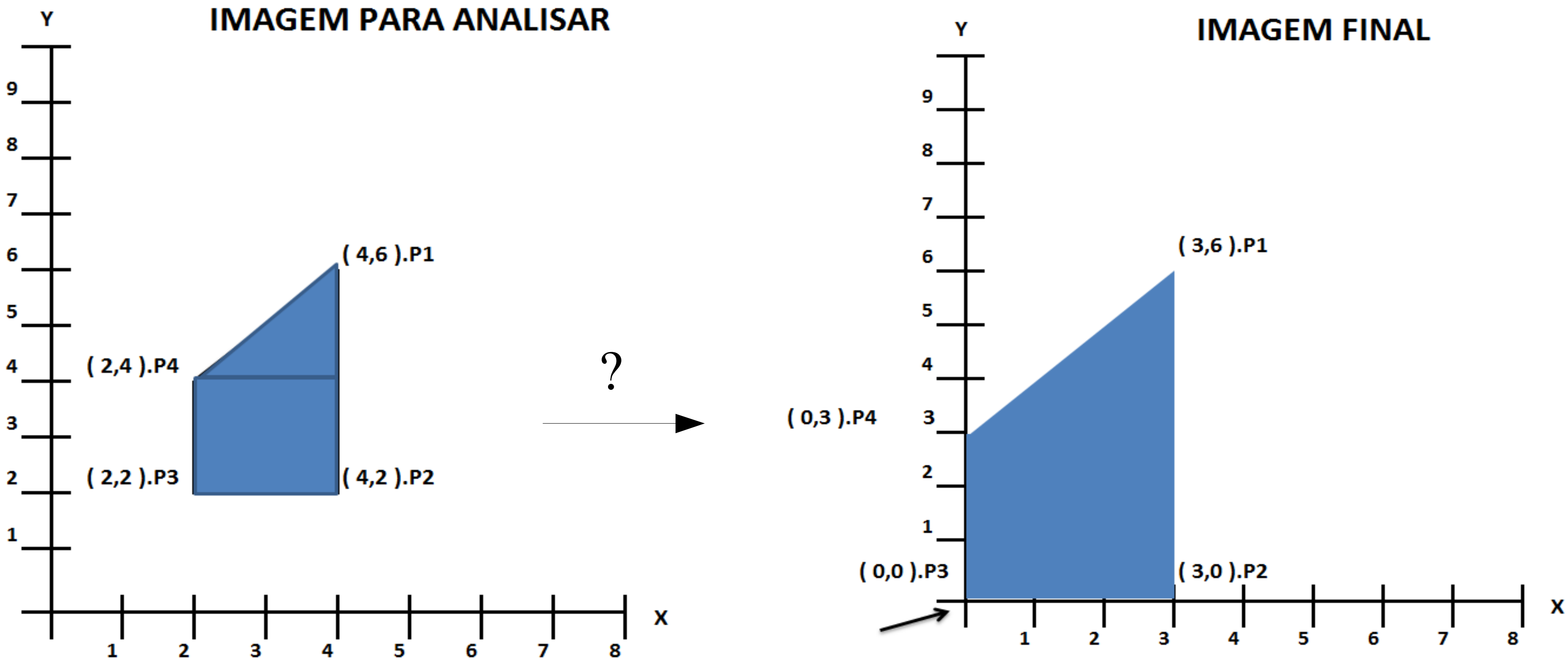
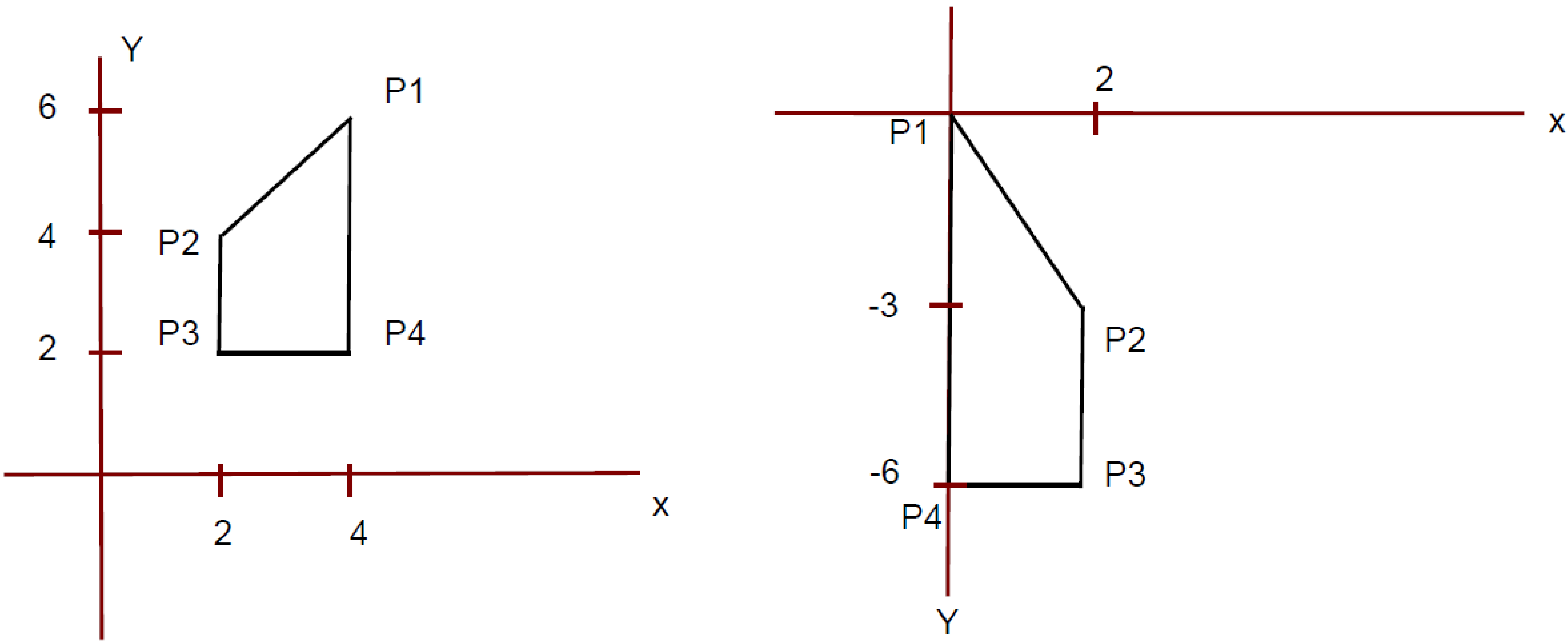


IMAGEM INICIAL

Original x Final



Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC Joinville

Rotação 3D – p/ próxima aula

1) Definir matriz para rotacionar um ponto em relação a um eixo qualquer. OBS: este eixo é definido por dois pontos (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1).

2) Como realizar uma reflexão em torno de um plano qualquer? OBS: este plano é definido por um ponto e uma normal.

PPT com apresentação de 10min

Enviar PPT na véspera. Só UM vai apresentar.