Matematik, KTH **SF1688, Diskret matematik, ht 2022**

Några extra exempel

Övning 6

1. $(U(\mathbb{Z}_8), \times)$ och $(U(\mathbb{Z}_{14}), \times)$ är grupper. $U(\mathbb{Z}_n)$ består av de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_n$. Undersök om någon av grupperna är cyklisk.

2. Gruppen $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \times)$ är cyklisk. Bestäm alla dess generatorer.

3. Minns att den **direkta produkten** av två grupper $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där för $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$:

$$\boldsymbol{(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)}.$$

a. Låt $g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2$ ha ordningar $o(g_i) = m_i$.
Vad är ordningen för $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$?
b. För vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ är $(\mathbb{Z}_m, +) \times (\mathbb{Z}_n, +) \approx (\mathbb{Z}_{mn}, +)$?
c. Gäller för alla grupper G_1 och G_2 att $G_1 \times G_2 \approx G_2 \times G_1$?
d. Om H_1, H_2 är delgrupper till G_1 respektive G_2, måste $H_1 \times H_2$ vara en delgrupp till $G_1 \times G_2$?

4. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Bestäm m, det minsta möjliga värdet för $|G|$.
Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp. 40 element.

5. Visa att vidstående tabell inte kan fyllas i så att den blir en grupptabell.

$*$	a	b	c	d	f	g	h	i	k
a	a	b							
b	b	a							
c									
d									
f									
g									
h									
i									
k									

6. Låt G vara S_4, gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$, och $N \subset G$ ges av (med elementen i cykelform) $N = \{(1), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.
a. Kalla hörnen i en regelbunden tetraeder för 1, 2, 3, 4. Elementen i G svarar då mot stela (dvs avståndsbevarande) avbildningar av rummet, vilka lämnar tetraedern invariant men permuterar hörnen.
Ange för varje konjugatklass i G hurdana avbildningar dess element motsvarar.
b. Vilken typ av avbildning motsvarar jämna respektive udda permutationer i G?
c*. Visa att N är en **normal** delgrupp till G och beskriv kvotgruppen G/N (dvs ange en känd grupp som är isomorf med G/N).