Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 5

1. π och τ ty cykeltyperna är π : [23], σ : [5], τ : [23] och permutationer är konjugerade omm de har samma cykelstruktur.

2. 90, ty de i 2-cykeln kan väljas på $\binom{6}{2} = 15$ sätt och övriga fyra kan bilda 4-cykeln på 3! sätt (k element kan ge $(k-1)!$ olika cykliska permutationer (fixera första, sedan godtycklig permutation av övriga $k-1$)). Multiplikationsprincipen ger 90.
Alternativt $\frac{6!}{2 \cdot 4 \cdot 1! \cdot 1!} = 90$.

3. 11. Svaret är samma som antalet cykeltyper dvs antalet heltalspartitioner av 6. $p(6) = 11$, ty alla möjliga cykelstrukturer är
[6], [15], [24], $[1^2 4]$, [123], $[1^3 3]$, $[3^2]$, $[1^2 2^2]$, $[2^3]$, $[1^4 2]$, $[1^6]$.

4. Udda, ty $\pi = (1\,3)(2\,5\,4)$, med cykelstruktur [23]. Udda antal cykler av jämn längd, så udda permutation (alt. $n - c(\pi) = 5 - 2 = 3$, udda).

5. a) Nej aldrig, ty $\text{sgn}(\pi^n) = (\text{sgn}(\pi))^n$, så π och n udda ger $\text{sgn}(\pi^n) = -1 \neq \text{sgn}(id)$. (Alt. udda permutationer har ett udda antal (så minst en) cykler av jämn längd, så ordningen (mgm av cykellängderna) är jämn.)

b) Ibland, ty de kan ha noll eller fler cykler (ett jämnt antal) av jämn längd.
(Ex. $(1\,2\,3) \in S_3$ är jämn och har udda ordning, 3.
$(1\,2)(3\,4) \in S_4$ är jämn och har jämn ordning, 2.)

6. (1 7)(1 6)(1 5)(1 4)(1 3)(1 2)

7. $\chi = \pi^{-1}\sigma = (1\ 2\ 7)\,(3\ 8\ 9\ 6)\,(4\ 5)\,(1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)\,(2\ 4) = (1\ 4\ 7)\,(2\ 5\ 8)\,(3\ 6\ 9)$,
$\psi = \sigma\pi^{-1} = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)\,(2\ 4)\,(1\ 2\ 7)\,(3\ 8\ 9\ 6)\,(4\ 5) = (1\ 4\ 3)\,(2\ 7\ 5)\,(6\ 9\ 8)$.
Bara χ och ψ har samma cykelstruktur (lika många cykler av varje längd), så bara de är konjugerade (eftersom $\psi = \sigma\pi^{-1} = \pi\chi\pi^{-1}$).
σ innehåller 2 udda cykler (cykler av jämn längd), så den är en jämn permutation. π är jämn, så det är π^{-1} också, liksom $\chi = \pi^{-1}\sigma$ och $\psi = \sigma\pi^{-1}$.

8. $ac = c = 1c$, så a är identitetselementet. Det ger första raden och första kolumnen. Sedan används att tabellen är en latinsk kvadrat (dvs varje element finns precis en gång i varje rad och kolumn) för att bestämma de övriga elementen, t.ex. måste $db = g$ eftersom g är det enda gruppelement som inte finns i rad d eller i kolumn b. Sedan kan tabellen bestämmas i t.ex. följande ordning med samma argument:
$b^2 = a, bd = f, bc = g, dc = f, df = c, gb = d, gc = b, c^2 = a, fd = b, gd = c, g^2 = f, cf = b, cg = d, f^2 = g, fg = a$.

Tabellen blir:

$*$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

a. Nej
b. a
c. $a^{-1}=a,\ b^{-1}=b,\ c^{-1}=c,\ d^{-1}=d,$
$f^{-1}=g,\ g^{-1}=f$
d. a:s ording är $o(a)=1$, a genererar den cykliska delgruppen $\langle a\rangle=\{a\}$,
$o(b)=2, \langle b\rangle=\{a,b\},\ o(c)=2, \langle c\rangle=\{a,c\},\ o(d)=2, \langle d\rangle=\{a,d\},$
$o(f)=o(g)=3, \langle f\rangle=\langle g\rangle=\{a,f,g\}$
e. c

9a. $ax^2=b$ ger $ax^3=bx$, så (med $x^3=1$) $a=bx$ och $x=b^{-1}a$
b. $bx=(xax)^3=xax^2ax^2ax=xa(xa)^{-1}(xa)^{-1}x=(xa)^{-1}x$
(ty $x^2a=(xa)^{-1}$), så $b=(xa)^{-1}$ och $xa=b^{-1}$ och $x=b^{-1}a^{-1}(=(ab)^{-1})$.
c. $bac=a^{-1}$ ger $baca=1$, så $aca=b^{-1},\ acab=1,\ cab=a^{-1}$.
d. $(abc)^{-1}=abc$ ger $abcabc=1$, så $bcabc=a^{-1},\ bcabca=1,\ (bca)^{-1}=bca$.
e. $a^3=1$ ger $a=1a=a^3a=(a^2)^2$.
f. $b^2ab=a^{-1}$ ger $ba=b^{-1}a^{-1}b^{-1}$, så $(ba)^3=b^{-1}a^{-1}b^{-1}baba=1a=a$.
(Alt. $b^2ab=a^{-1}$ ger $b^2aba=1$, så $babab=b^{-1}b^2abab=1$ och $(ba)^3=a$.)