(Diskret matte SF1688, HT22: F9)

Permutationer α, $\beta \in S_n$ kallas **konjugerade** om $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$.
Detta definierar en **ekvivalensrelation** på S_n.

Sats: α och β är konjugerade omm de har **samma cykelstruktur**.
Om α har en cykel $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)$ har $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ en cykel $(\sigma(x_1)\, \sigma(x_2)\, \ldots \sigma(x_k))$

Ekvivalensklasser av konjugerade permutationer motsvarar bijektivt **partitioner av** n, $[1^{c_1}\, 2^{c_2}\, \ldots\, k^{c_k}]$, där $n = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + \cdots + k \cdot c_k$

Sats: Antalet permutationer av typ $[1^{c_1}\, 2^{c_2}\, \ldots\, k^{c_k}]$:

$$\frac{n!}{1^{c_1}\, 2^{c_2}\, \ldots\, k^{c_k}\, c_1! \, \ldots\, c_k!}$$

En **transposition** är en permutation av typ $[1^{n-2}\, 2]$, dvs $\tau = (ab) \in S_n$, $a \neq b$.

För alla $\pi \in S_n : \pi = \tau_r \ldots \tau_2\, \tau_1$, något r och några transpositioner $\tau_1,\, \tau_2,\, \ldots\, \tau_r$.

Sats: Om $\pi = \tau_r \ldots \tau_2\, \tau_1 = \tau'_{r'} \ldots \tau'_2\, \tau'_1$ har r och r' samma paritet, dvs de är båda jämna eller båda udda.
Det minsta möjliga r-värdet är $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i π.

Definition: π är en **jämn(/udda) permutation** omm r är jämnt(/udda).

Tecknet (signum) för π, $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^r = \begin{cases} +1 & \pi \text{ jämn} \\ -1 & \pi \text{ udda} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi\sigma) &= \operatorname{sgn}\pi\, \operatorname{sgn}\sigma \\ \operatorname{sgn}\pi^{-1} &= \operatorname{sgn}\pi \\ \operatorname{sgn}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}\alpha \end{aligned}$$

Om π är av typ $[1^{c_1}\, 2^{c_2}\, \ldots\, k^{c_k}]$ är

$$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{n-c(\pi)},$$

där $c(\pi) = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$, antalet cykler i π.
En **cykel** är en **jämn** permutation omm den har **udda** längd(!).
En **jämn permutation** är en med ett **jämnt antal** cykler av **jämn längd**.

Sats: I S_n $(n \geq 2)$ är hälften av permutationerna jämna, hälften udda.

Om $\boldsymbol{A}$ är en $n \times n$-matris är

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \ldots a_{\pi(n)n}$$

och (därmed) $\operatorname{sgn}\pi = \det \boldsymbol{M_\pi}$.