**Matematik, KTH** **SF1688, Diskret matematik, ht 2022**

# Några extra övningsuppgifter

## Övning 1

**1.** I en graf med åtta noder har sju av noderna valenserna 1,3,3,4,5,6,7. Vilka värden är möjliga för det åttonde nodens valens?

**2.** Visa att om valensen för alla noder i grafen $G = (V, E)$ delas av primtalet $p \neq 2$, dvs $p \mid \delta(v)$, för alla $v \in V$, så gäller att talet $p$ delar antalet kanter $e$, dvs $p \mid |E|$.

**3.** Hur många noder kan en graf med 28 kanter ha som mest, om valensen hos varje nod är minst 3?

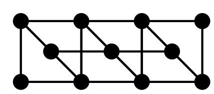
**4.** Rita grafer som är respektive varken hamiltonsk eller eulersk, eulersk men inte hamiltonsk, hamiltonsk men inte eulersk och både hamiltonsk och eulersk.

**5.** Det är i allmänhet svårt att avgöra om en (stor) graf har någon hamiltoncykel (i motsats till att avgöra om den har någon eulerkrets). Detta exempel illustrerar ett sätt (som fungerar ibland) att visa att en graf **inte** har någon hamiltoncykel.

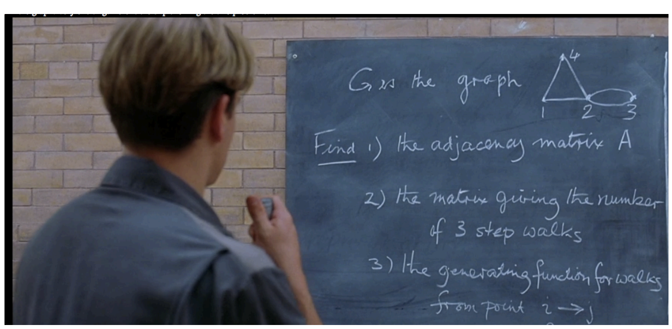
**a.** Visa att om $m$ och $n$ är udda heltal (inte båda = 1) kan en springare inte i en följd drag besöka alla rutor på ett $m \times n$-"schackbräde" precis en gång och återkomma till startpunkten. (En springare går i ett drag två rutor framåt och en åt sidan.)

**b*.** Visa samma sak för ett bräde av format $4 \times n$, $n$ heltal.

**6.** Har grafen till höger någon hamiltoncykel?
Ge exempel eller förklara varför ingen finns.



**7.** I filmen Good Will Hunting skriver läraren (Stellan Skarsgård) upp ett svårt problem på tavlan som en tuff utmaning till studenterna på MIT. Städaren (Matt Damon) löser uppgifterna och visar hur genialisk han är. Lös de två första uppgifterna. (Den tredje ligger utanför kursen, den intresserade kan läsa kapitel 25 i Biggs.)




**8.** Är det sant för alla $n \geq 3$ att $K_n$ är unionen av cykler $C_3, \ldots, C_{n-1}$, en stig av längd 2 och en kant?

Uppgifter märkta med $^*$ är extra svåra och ibland ren överkurs.

**9$^*$.** Generalisera satsen av Dirac som bevisades på föreläsningen (och som finns i extramaterialet) genom att visa följande sats av Ore.

**Sats** (Ore) $G = (V, E)$ *en graf med* $|V| \geq 3$ *där för varje par av noder* $u, v \in V$ *som ej är grannar gäller*

$$\delta(u) + \delta(v) \geq |V|.$$

*Då har $G$ har en hamiltoncykel.*

Tips: Antag att satsen är falsk och låt $G$ vara ett maximalt motexempel, dvs lägger man till en enda kant så finns en hamiltoncykel.

**10$^*$.** Givet en graf $G = (V, E)$ kan man rikta varje kant för att få en riktad grad på många olika sätt. Visa att man för en godtycklig graf $G$ alltid kan göra det så att skillnaden mellan in- och utvalensen i varje nod blir högst ett. (Invalensen $\delta^-(v)$ är antalet kanter som går in till noden $v$ och utvalensen $\delta^+(v)$ antalet som går ut från det.)