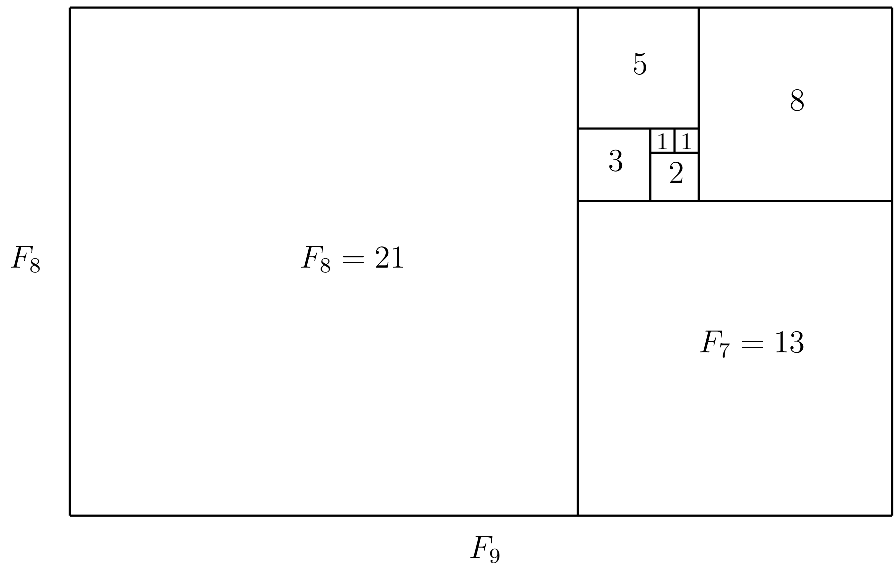
Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 4

1a. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$

b. Vi använder formeln i a) och att $|\frac{1+\sqrt{5}}{2}| > 1$, $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| < 1$. Termen $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ går mot noll och blir därför försumbar. Vi får $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, då $n \to \infty$.

c. Båda sambanden visas med induktion (motsvarande den rekursiva definitionen av F_n). Det första resultatet åskådliggörs av figuren, som illustrerar hur en rektangel med sidor F_n och F_{n+1} kan delas upp i kvadrater med sidorna $F_1, F_2, \ldots, F_n$:



2. Karakteristiska ekvationen $x^2 = -2$ har lösningarna (enkelrötter) $r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$. Allmänna lösningen blir $a_n = A(i\sqrt{2})^n + B(-i\sqrt{2})^n$. Insättning av startvärden ger lösningen $a_n = \frac{1-i\sqrt{2}}{2}(i\sqrt{2})^n + \frac{1+i\sqrt{2}}{2}(-i\sqrt{2})^n$.

Det är en korrekt lösning, men inte särskilt informativ, vi vet ju att det skall vara heltal och inte komplexa tal. Talserien börjar $1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \ldots$ och ett bättre svar skulle vara att dela upp i jämnt och udda. Då förenklas lösningen till $a_{2k} = 2^k$ respektive $a_{2k+1} = 2^{k+1}$.

3a. $\varphi = (1\,6\,4\,5\,2)(3\,8\,7)$, $\quad \psi = (1\,7\,3\,4)(2\,8\,5)(6)$

b. $\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,7\,8)(4\,6)$,

$\psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,6)(2\,7\,4)(3\,5\,8)$

$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,5\,4\,6)(3\,7\,8)$

$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,4\,3\,7)(2\,5\,8)(6)$

4. $\text{mgm}\{5, 2, 6\} = 30$.

5. Svar 8. Skriver man upp permutationen så ser man att den längsta cykeln har längd 8 och alla cykellängder delar 8. Två cykler i permutationen är $(1)(2\,3\,5\,9\,17\,33\,14\,27)$.

6. Ja, ty $M_\pi M_\sigma = I = M_{id} = M_{\pi\pi^{-1}} = M_\pi M_{\pi^{-1}}$, så (multiplicera med $M_{\pi^{-1}}$ från vänster) $M_\sigma = M_{\pi^{-1}}$. Då följer att $\sigma = \pi^{-1}$ (ty $\tau \mapsto M_\tau$ är en injektion).

7. De möjliga heltalspartitionerna av 9 är (i alfabetisk ordning)
$3+3+3$
$4+3+2$
$4+4+1$
$5+2+2$
$5+3+1$
$6+2+1$ och
$7+1+1$
Svar: $p_3(9) = 7$

8. Låt $\pi \in S_6$ ges av att $\pi(x) = y$ omm brodern till kvinnan i hus x bor i hus y. Systern till mannen i hus x bor då i hus $\pi^{-1}(x)$.
Inga syskon bor i samma hus (dvs är gifta med varandra) eller i grannhus, så för alla $x = 1, 2, \ldots, 6$ gäller $\pi(x) \neq x, x \pm 1$. Speciellt saknar π 1-cykler, så dess cykelstruktur är någon av [6], [42], [3^2] och [2^3]. Men $\pi(1) = \pi^{-1}(1)$ och $\pi(2) \neq \pi^{-1}(2)$, så 1, men inte 2, ingår i en 2-cykel. **π:s typ är alltså [42].**
a. 2:s cykel består av fyra av husen 2–6 (inte 1, ty 1 ingår inte i den cykeln). Eftersom x och $\pi(x)$ inte kan vara grannhus, kan tre hus i rad inte ingå i en 4-cykel (det mellersta skall ha olika hus före och efter sig i cykeln, endera vore ett grannhus), så den måste bestå av husen 2, 3, 5 och 6. 2-cykeln är alltså (1 4) och **Anna bor i hus 4**.
b. Vi skall finna $\pi(x)$ för alla $x = 1, 2, \ldots, 6$ och vet redan $\pi(4) = 1$, $\pi(1) = 4$. 2, 3, 5, 6 bildar en 4-cykel och $\pi(6) \neq 2, 5$ (Börje är inte Cecilias bror, Cecilia inte granne med sin bror), så $\pi(6) = 3$ och därmed $\pi(3) = 5$ (inte grannhuset 2) och $\pi(5) = 2$, $\pi(2) = 6$, så $\pi = (1\,4)(2\,6\,3\,5)$ och svaret:

Frun i hus	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
har sin bror i hus	**4**	**6**	**5**	**1**	**2**	**3**

9**. Du skriver en lista med de 100 personernass namn på som ni tänker er som en yttre märkning av lådorna. Lapparna inne i lådorna ger då en permutation (en slumpvis vald permutation). Ni använder er nu av följande strategi. När en person kommer in i rummet öppnar hen först lådan med sitt eget namn, tittar på namnet i lådan och går vidare till lådan som har den namnet som yttre märkning. Hen fortsätter så och följer då cykeln i permutationen med sitt eget namn i. Hen kommer alltså att öppna lådan med sitt eget namn om (och endast om) det egna namnet ligger i en cykel av längd högst 50. Alla 100 personer kommer lyckas om permutationen inte har någon cykel av längd 51 eller mer, vilket är drygt 0,31 (kräver separat uträkning).