Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 2

1. En komponent utan cykel är ett träd och har antalet noder ett mer än antalet kanter. Komponenter med (exakt) en cykel har en kant mer, dvs lika många noder som kanter.
Det finns 2 noder mer än kanter, så 2 komponenter utan cykler. Det finns 6 cykler, så 6 komponenter med cykler. Totalt alltså $2 + 6 =$ **8 komponenter**.
Alternativt snarlikt resonemang: En komponent utan cykel är ett träd och har antalet noder ett mer än antalet kanter. Om vi betecknar antalet komponenter med c så gäller sambandet $|E| = |V| - c$ om alla komponenter är träd. En ensam cykel i en komponent innebär att den komponenten har en kant mer än ett träd. Eftersom det finns 6 cykler, får vi $|E| = |V| - c + 6$. Ur detta kan vi nu räkna fram $c = 8$.

2. Om grafen $G = (V, E)$ är osammanhängande, finns disjunkta $V_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$ med $V = V_1 \cup V_2$ och inga kanter mellan dem. Om $x \in V_1, y \in V_2$, gäller $\delta(x) \leq |V_1| - 1, \delta(y) \leq |V_2| - 1$, så $\delta(x) + \delta(y) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = n - 2$.

3. Om noderna x, y ligger i olika komponenter i G, är xy en väg i $\overline{G}$. Om de ligger i samma komponent och z ligger i en annan, är xzy en väg i $\overline{G}$.

4. $\chi(G) = 3$. Det kan inte vara 2 eftersom grafen innehåller udda cykler. Att det inte är större än 3 visas med någon av de tre metoderna som nämns.
$\chi(G \cup \{ah\}) = 4$. Om man försöker färga med tre färger så måste noderna a, b, h ha olika färg då de utgör en triangel. Noderna a, d, h är också en triangel så d och b måste få samma färg. På samma sätt får man att d och f måste ha samma färg. Men det går inte då bf är en kant. Det ger att $\chi(G \cup ah) \geq 4$. Övre gränsen kan nu fås genom att notera att $G \cup ah$ är en sammanhängande, icke-regulär graf. Enligt sats 15.7.1 är då $\chi(G \cup ah) \leq \Delta(G \cup ah) = 4$.

5. a) De är inte isomorfa. Den andra grafen har en nod med valens 2 vilket den första inte har (finns även andra argument).
b) De har samma kromatiska polynom $k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$, vilket enklast räknas ut med hjälp av rekursionsformeln. Gör man första steget m.a.p. den kant som skiljer så ser man redan då att de har samma kromatiska polynom.
c) Kromatiska polynomet måste (som så många andra egenskaper) inte vara olika för icke-isomorfa grafer, men förstås samma för isomorfa grafer.

6. Induktion över n. För basfallet $n = 3$ har vi räknat ut $\chi_{C_3} = k(k-1)(k-2) = (k-1)^3 - (k-1)$ så ok. Vi antar nu att det är sant för $n = p$ och skall visa att det då följer för $n = p + 1$. Rekursionsformeln ger $\chi_{C_{p+1}}(k) = \chi_{P_p}(k) - \chi_{C_p}(k) = k(k-1)^p - ((k-1)^p + (-1)^p(k-1) = (k-1)^{p+1} + (-1)^{p+1}(k-1)$. Där har vi använt både induktionsantagandet och att stigen med $p+1$ noder, P_p är ett träd. Enligt induktionsaxiomet följer påståendet för alla värden på $n \geq 3$.

7. För var och en av de $\chi_{G_1}(k)$ st färgningarna av G_1 finns det $\frac{\chi_{G_2}(k)}{k(k-1)\ldots(k-m+1)}$ färgningar av G_2 som fortsätter den. $\chi_{G_2}(k)$ är ju nämligen $k(k-1)\ldots(k-m+1)\cdot$(antalet sätt färga G_2 med givna (olika) färger för noderna i $V_1 \cap V_2$).
$\chi_G(k) = \frac{\chi_{C_3}(k)^3}{k \cdot k(k-1)} = k(k-1)^2(k-2)^3$. (Fås också med kombinatoriskt resonemang.)

8. Betrakta alla färgningar av noderna i G med två färger. Bland dem finns en med det minsta antalet "kollisioner" (dvs enfärgade kanter). En sådan färgning löser problemet, ty om en nod hade samma färg som mer än hälften av sina grannar, skulle det bli färre kollisioner om det bytte färg.

9. Enligt Eulers polyederformel är (med gängse beteckningar) $v-e+r=2$ och dessutom gäller $4v=\sum_{x\in V}\delta(x)=2e=2\cdot 16$, så antalet ytor $r=2-v+e=2-8+16=10$.

10. Om man i Petersens graf kontraherar kanterna af, bg, ch, di, ej fås en graf som är isomorf med K_5. Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär.

Om man tar bort nod a och dess kanter och suddar ut b, e, f (och gör deras två kanter till en) är den uppkomna grafen bipartit, med nodmängder $X=\{c,i,j\}$ och $Y=\{d,g,h\}$. Alla noder i X är grannar med alla i Y, så grafen är isomorf med $K_{3,3}$. Kuratowskis sats ger att Petersens graf inte är planär.

Eftersom suddandet av en nod kan uppfattas som en kontraktion av en kant, kan samma konstruktion som för Kuratowskis sats ovan också användas för att visa att Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Däremot kan man inte få K_5 för Kuratowskis sats (eftersom operationerna där inte kan öka valensen för en nod).

I Wikipedias artikel "Planar graph" finns en animation som visar hur $K_{3,3}$ är en minor till Petersens graf.