(Diskret matte SF1688, HT22: F10)

Algebradelen av kursen börjar med begreppet **grupp**, definierat **axiomatiskt**:
$(G, *)$ är en **grupp** om G1–G4 är uppfyllda (G en mängd, $*$ en binär operation),

G1.	$\forall\, x, y \in G$	$x * y \in G$	slutenhet
G2.	$\forall\, x, y, z \in G$	$(x * y) * z = x * (y * z)$	associativitet
G3.	$\exists\, e \in G\ \ \forall\, x \in G$	$e * x = x * e = x$	identitet
G4.	$\forall\, x \in G\ \ \exists\, x^{-1} \in G$	$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$	invers

($\forall x \in G \ldots$ betyder här "för alla x i G gäller ...",
$\exists x \in G \ldots$ betyder "det finns (minst) ett x i G så att ...".)

(Vi skriver ofta $\cdot$, $\times$, $+$ (eller inget) för $*$; och 1, 0 eller id för e i en grupp.)

Exempel: , $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_m, +)$, S_n, $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ (p primtal) , $(U(\mathbb{Z}_m), \times)$, matrisgrupper, $G_\triangle$ **symmetrigrupperna** för en **liksidig triangel** ...

Vi skrev upp **grupptabellerna** ("multiplikationstabellerna") för flera exempel.

Om $ab = ba$ för alla $a, b \in G$ kallas G **abelsk** (eller **kommutativ**)

Sats: Om a, b är element i gruppen G har ekvationerna $\boldsymbol{ax = b}$ **entydig lösning** $x = a^{-1}b$ i G.
Grupptabellen är alltså en **latinsk kvadrat**.

$$\textbf{Ordningen} \begin{cases} \text{för en grupp } G \ : \ |G| \\ \text{för ett element } g \in G \ : \ o(g) \end{cases}$$

$$o(g) = \begin{cases} \text{om } g^n = 1, \text{ något } n > 0: \ \textbf{minsta} \text{ sådana } n \\ \text{annars}: \ \infty \end{cases}$$

Sats : Om $o(g) = m$: $\quad g^s = 1 \Leftrightarrow m \mid s$

En **isomorfi** mellan $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$: en **bijektion** $\beta : G_1 \to G_2$ så att
$$\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g') \qquad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

Vi skriver $(G_1, *) \approx (G_2, \circ)$ (eller oftast bara $G_1 \approx G_2$) då G_1 och G_2 är isomorfa.
Isomorfi är en ekvivalensrelation mellan grupper.