Matematik, KTH **SF1688, Diskret matematik, ht 2022**

Några extra exempel

Övning 4

1. Minns **fibonaccitalen** F_n: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

a. Bestäm en exakt formel för F_n genom att lösa rekursionen.
b. Vad är $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$?
c. Visa att för alla $n = 1, 2, \ldots$ gäller

$$F_1^2 + \ldots + F_n^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1} \text{ och } \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

2. Lös rekursionen $a_n = -2a_{n-2}, n \geq 2$, med startvärden $a_0 = 1, a_1 = 2$.

3. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer (givna på tvåradsform) på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Skriv permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler (dvs på cykelform).
b. Beräkna $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och ψ^{-1}, dels på tvåradsform och dels på cykelform.

4. Vad är $o((1\ 7\ 11\ 4\ 9)(2\ 8)(3\ 12\ 6\ 13\ 10\ 5))$?

5. Definiera en perfekt blandning av en kortlek med 52 kort genom att dela den i två högar som sedan blandas helt perfekt med varandra, dvs varannan från den övre högen och varannan från den undre högen. Börja med den övre högen så att översta kortet hela kortet är kvar överst, kortet på plats 27 hamnar nästöverst, kortet på plats 2 hamnar på plats 3 etc. Efter hur många uppreprningar av denna perfekta blandning är kortleken tillbaka i ursprungsordning?

6. Om $M_\pi M_\sigma = I$ (enhetsmatrisen) är då $\sigma = \pi^{-1}$?

7. Vad är $p_3(9)$? (antalet partitioner av 9 i exakt 3 termer)

8. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus.
Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror.
Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar.
a. I vilket hus bor Anders syster Anna?
b. I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

9.** 100 personer (alla med olika namn) får en konstigt erbjudande (antagligen av något kreativt företag som behöver medial uppmärksamhet). De skall en i taget gå in i ett rum med 100 lådor stående på rad. I varje låda ligger ett namn på en av personerna (och varje persons namn ligger i exakt en låda). Varje person får titta i högst 50 lådor, om hen tittar i lådan med sitt eget namn så har hen lyckats. Om alla 100 personer lyckas hitta sitt namn så får de dela på säckvis med guld. Men om en enda av de 100 misslyckas så får de ingenting. Arrangörerna tänker att det är 50% för en person att lyckas och därmed den försvinnande lilla chansen $(\frac{1}{2})^{100}$ att alla 100 lyckas. Du är en av personerna och inser att du kan använda cykelnotation för permutationer för att öka sannolikheten avsevärt genom att ni alla enas om en strategi. Hur? (Tips: Sannolikheten för att en slumpvis permutation av längd 100 har en cykel som är längre än 50 är mindre än 0,69.)