Matematik, KTH **SF1688, Diskret matematik, ht 2021**

Några extra exempel

Övning 2

1. En graf $G = (V, E)$ är sådan att varje komponent innehåller högst en cykel. Antalet noder $|V|$ är 67, antalet kanter $|E|$ är 65 och antalet cykler är 6. Hur många komponenter har grafen?

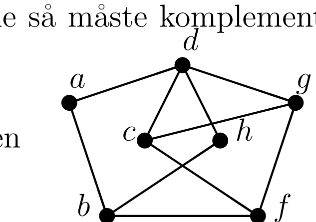
2. Visa att om för varje par av noder x och y i en graf G med n noder gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är grafen sammanhängande.

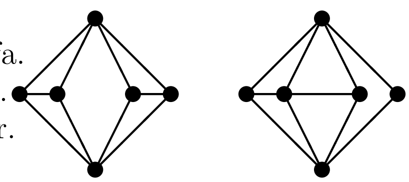
3. Visa att om en graf G är osammanhängande så måste komplementgrafen $\overline{G}$ vara sammanhängande.

4. Vad är det kromatiska talet för grafen G?
För den övre gränsen kan man använda antingen en explicit färgning, eller den giriga algoritmen. Prova båda.
Gör sedan om uppgiften med kanten ah tillagd till G. Kan du använda valensvillkoret nu?



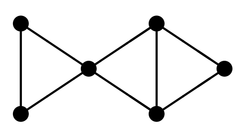
G

5. a) Visa att följande två grafer inte är isomorfa.
b) Räkna ut kromatiska polynomet för båda två.
c) Begrunda vad ditt resultat i a) och b) innebär.



6. Visa att det kromatiska polynomet för n-cykeln är $\chi_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$, for every $n \geq 3$.

7. Låt grafen $G = (V, E)$ vara graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ "hopklistrade längs en K_m", dvs $V = V_1 \cup V_2,\ E = E_1 \cup E_2$ och $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ är en graf som är isomorf med den fullständiga grafen K_m.
Visa att det kromatiska polynomet $\chi_G(\lambda)$ ges av
$\chi_G(\lambda) = \frac{\chi_{G_1}(\lambda) \cdot \chi_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}$.
Illustrera med $\chi_G(\lambda)$ för grafen G här till höger.



8. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. Visa att noderna i V kan färgas med högst två färger, så att varje nod har samma färg som högst hälften av sina grannar (här ställer vi alltså ett annat villkor på färgningen än den vanliga).

9. Antag att G är en sammanhängande 4-reguljär graf som dessutom är planär. Hur många ytor har en plan ritning av G om G har 16 kanter?

10. Den s.k. Petersens graf (se även Biggs 15.2:2 och 15.8:3) har grannlista

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h

(Ett vanligare (än som i fig. 15.14 i Biggs) sätt att rita grafen är som en femhörning med noder i ordningen *abcde* och innanför dem deras respektive grannar *fghij* (som blir spetsar i en inre stjärna).)

Visa med hjälp av Wagners sats (se planaritetsstencilen) att Petersens graf inte är planär. (Som extra uppgift kan du se om du kan visa det med Kuratowskis sats också).