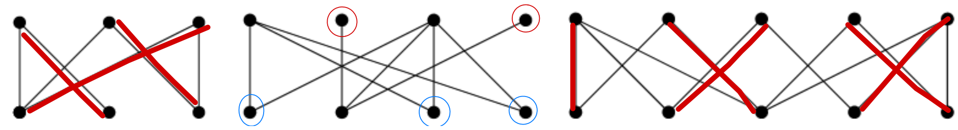
Matematik, KTH SF1688 Diskret matematik, ht 2022

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 3

1. För den första och sista grafen finns kompletta matchningar, se figuren. För den mittersta finns inte det. Man kan antingen använda Halls kriterium på de två noder med röda cirklar runt, eller om man ser det som en bipartit matching från den undre mängden så kan man använda Halls kriterium på de tre noderna med blå cirklar.



2. Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som noder och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \varnothing$ är $|J(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|J(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet (eftersom $|A| \leq 10$).

3. Eftersom G är bipartit vet vi att $|X| = |Y|$ och vi kan enligt en sats kantfärga den med k färger. Var och en av de färgerna ger en matchning från X in i Y. Alternativt kan man använda Halls sats för att hitta en matchning som man sen tar bort och använder induktion för den $k-1$-reguljära grafen som återstår.

4. a) Ty k st högar innehåller $4k$ st kort, så minst k olika valörer.
Halls sats (med X mängden av högar och Y mängden av valörer).

b) Ja, ty k st högar innehåller minst $4k-3$ st kort, så minst k olika valörer (enligt duvslagsprincipen). Följer sen av Halls sats som i a).

c) Nej, ty om det t.ex. bara ligger ess i första och andra högarna går det inte att dra olika kort ur dem.

5*. Induktion över $|V|$, så antag att påståendet är sant för alla grafer med färre noder än $|V|$.
Om $V = \varnothing$ är $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} = 0$ och påståendet sant.
Om $V \neq \varnothing$, låt $v_0 \in V$ ha minimal valens, så $\delta(v_0) \leq \delta(v)$ för alla $v \in V$.
Med $V_0 = \{v_0$ med alla dess grannar$\}$ är $\sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq (\delta(v_0)+1) \cdot \frac{1}{\delta(v_0)+1} = 1$ (ty $|V_0| = \delta(v_0)+1$ och $0 \leq \delta(v_0) \leq \delta(v) \Rightarrow \frac{1}{\delta(v_0)+1} \geq \frac{1}{\delta(v)+1}$).
För alla $v \in V' = V \setminus V_0$ gäller då $\delta(v) \geq \delta'(v)$ (antalet grannar i V' till v), så $\sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1}$. Enligt induktionsantagandet finns minst så många oberoende noder i V'. $M = \{$dessa och $v_0\}$ är en mängd oberoende noder i V och $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} = \sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq 1 + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1} \leq |M|$. **Saken är klar (induktion).**