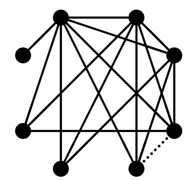
Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 1

1. Låt nodernas valenser vara $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$. Summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal, så x är udda och ≤ 7. $x = 1$ är omöjligt, ty noderna med valenser 6,7 medför att det går minst 3 kanter till varje par av noder. $x = 7$ är också omöjligt, ty två noder med valens 7 skulle innebära att alla noder hade valens minst 2. $x = 3, 5$ går båda, se fig. (utan och med den prickade kanten). Ett sätt att finna dessa är att notera att en graf med valenser $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$ finns omm en med valenser $0, 2, 2, 3, 4, 5, x - 1$ finns omm en med $1, 1, 2, 3, x - 2$ finns omm en med $1, 2, 2, x - 2$ finns etc.

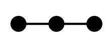


2. Följer av att $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

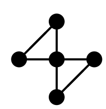
3. Eftersom $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot 28 = 56$ och alla $\delta(v) \geq 3$, måste $|V| \leq 18$. En graf med 18 noder och 28 kanter ges av två kopior av kubgrafen med två disjunkta kanters mittpunkter ”hopsnörda” till en ny nod. Svaret är alltså 18.

4. En möjlighet är dessa grafer.

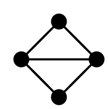
a.



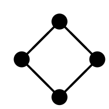
b.



c.



d.

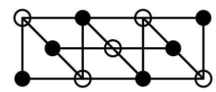


Övning 1, forts.

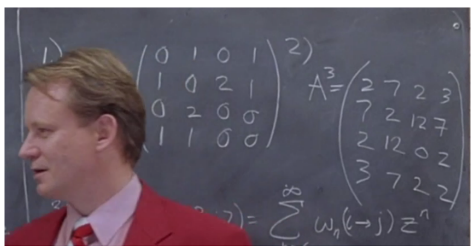
5a. Om rutorna är omväxlande svarta och vita som på ett vanligt schackbräde, leder varje drag från svart till vit eller från vit till svart. Eftersom springaren skall återkomma till startrutan måste det finnas lika många svarta som vita rutor (om den gör minst ett drag), dvs totalt ett jämnt antal.

b*. Antag att det funnes en sådan sluten väg (dvs en hamiltoncykel). Färga nu rutorna i rad 1 och 4 röda och de i rad 2 och 3 blå. Då kan springaren aldrig gå från röd till röd och eftersom brädet har lika många av varje färg, måste varannan ruta den besöker vara blå och varannan röd. Men detsamma gäller för de svarta och vita rutorna i den vanliga färgningen (som i a.). Det betyder att alla röda rutor vore vita eller alla svarta. Motsägelse.

6. Enligt figuren är grafen bipartit. Eftersom den har ett udda antal noder kan den inte ha någon hamiltoncykel (en sådan måste ha varannan svart och vit nod, dvs lika många av vardera), så **svaret är nej**.



7.



8. Nej, det går inte för alla n. Notera att C_k har valenser $2, 2, \ldots, 2$ och stigen med två kanter har valenser $1, 2, 1$ och den ensamma kanten $1, 1$. Det gör att när man lägger ihop dem så kan högst 4 noder få udda valens. Det går alltså inte att få K_n för något jämnt $n \geq 6$. Man kan övertyga sig om att det fungerar för K_3, K_4, K_5. (Verkar inte heller fungera för K_7, men där räcker det inte med att studera valenser för att visa det. Men det kanske går att hitta ett annat bra argument?)

9*. Låt G vara det maximala motexemplet. (Vi kan anta att det finns ett sådant därför att om vi lägger till fler kanter till en graf som är ett motexempel, så kommer den nya grafen fortfarande att uppfylla valensvillkoret. Vi kan då lägga till kanter tills vi inte kan längre utan att skapa en hamiltoncykel.) Låt xy vara en kant som inte finns i G, mellan två noder x och y. Då har grafen där vi lägger till xy en hamiltoncykel. Den består av kanten xy ihop med en hamiltonstig $P : x = v_1, v_2, \ldots, v_n = y$ i G. Härifrån kan man använda samma argument som för stigen P i beviset av Diracs sats.

10*. G har ett jämnt antal udda noder ("handslagslemmat"). Låt G' vara G med en ny nod som är granne med alla G:s udda noder. G':s alla noder är jämna, så enligt Euler har varje komponent i G' en eulerkrets. Varje val av en riktning för var och en av dessa kretsar ger en riktning av G med den sökta egenskapen (varje nod v i G' har $\delta^-(v) = \delta^+(v)$ och till vart och ett av G:s noder har högst en kant lagts).