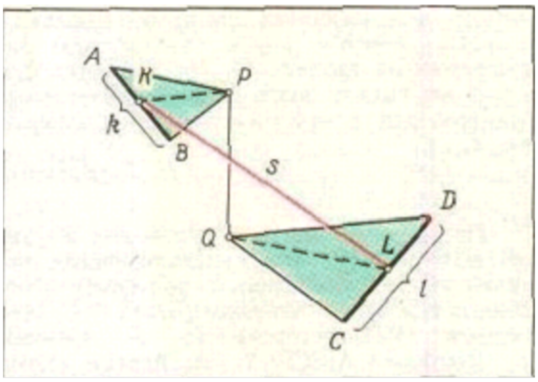


лежат отрезки а и b. (В этой и следующих формулах а, пр$_a b$ и т. п. означают длины соответствующих отрезков.) Наименьший угол между прямыми не превосходит $\pi/2$, поэтому $cos(a) \geq 0$. Из (1) следует равенство

$$\text{пр}b = b\text{пр}_b a, (2)$$

которое пригодится нам при решении задачи.

Обозначим через P центр верхнего, а через Q - центр нижнего оснований пирамиды. Мы докажем следующий факт, несколько более общий, чем нужное нам утверждение задачи **M168**.

Пусть плоскости двух подобных равнобедренных треугольников ABP и CDQ С вершинами P и Q перпендикилярны отрезку PQ (и, тем самым, параллельны между собой). Обозначим отрезок, совдиклющий середины K и L оснований AB и CD, через s. Тогда (рис. 6).

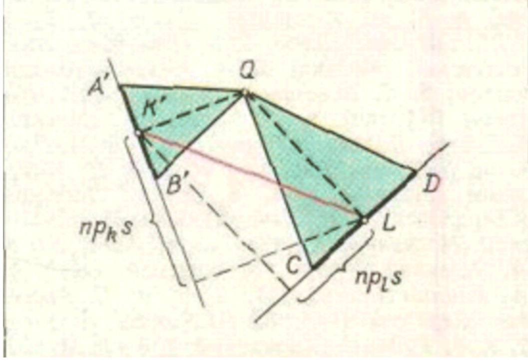
$$\text{пр}_s k == l\text{пр}_s l.(3)$$

Пользуясь (2), мы вместо (3) можем доказывать такое равенство:

$$k \text{ пр } ks = l \text{ пр } ls(4).$$

Теперь воспользуемся тем, что как это следует из (1), длина прb_a не меняется при параллельном переносе отрезков a и b. Поэтому мы можем спроектировать отрезок $k = AB$ на плоскость. треугольника CDQ и получим:

$\text{пр}_{A'B'}K'L = \text{пр}_{A'B'}KL = \text{пр}_{AB}KL = \text{пр}_k s$,



где A', B' и K' - проекции точек А, В и К на плоскость CDQ(рис.7). Таким образом, мы свели задачу к тому случаю, когда оба треугольника лежат в одной плоскости (и имеют общую вершину). Если отрезки AB и CD параллельны, то равенство (4) очевидно, поскольку обе проекции равны нулю. Если эти отрезки не. параллельны, то получаем:

$k/l = A'B'/CD = QK'/QL = sin(QLK')/sin(LK'B')$

откуда следует (4).

M169. *Пусть $k < n$ - натуральные числа. Расставьте числа $1, 2, 3, ..., n^2$ в таблицу $n * n$ так, чтобы в каждой спроке числа в k-м столбце а) наименьшей; б) наибольшей.*

Решим сначала задачу а).

Если расставить числа так, как показано в таблице 1, а - сначала заполнить первые k-столбцов, строку за строкой, числами от PQ (и, тем самым, парали 1 до kn, а затем оставшимися числами заполнить последние $(n - k)$ столбцов (как угодно, лишь бы выполнялось условне возрастания чисел в каждой строке)- то сумма

1	2	...	k-1	k	nk + 1...
k+1	k+2	...	2k-1	2k	
2k+1	545	778	7507	3k	
...	...	...	...		
(n-1)k + 1	88	788	6344	nk	$...n^2$

чисел в $k-$ м столбце будет равна

$k(1 + 2 + ... + n) = \frac{kn(n+1)}{2}$.

Мы докажем, что это значение суммы является наименьшим. Сначала докажем, что если $a_1, a_2, ..., a_n-$ числа $k-$ го столбца, занумерование в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < ... < a_i < ... < a_n$$

то

$$a_i \geq ki.$$

Действительно, рассмотрим числа, стоящие в тех же строках, где стоят ал, ад, ..., ау, н в первых R столбцах. Из условия (2) и условия, что числа в строках стоят в возрастающем порядке, следует, что эти ki чисел не превосходят числа a_i. Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, ..., n^2$ имеется по крайней мере ki чисел, не превосходящих a_i. Отсюда вытекает (3). Сложив неравенства (3) по всем