```
> restart
```

```
> # Основные значения
with(LinearAlgebra) :
solveSystem := (a, b)→LinearSolve(a, b) :

i, j :
n := 10 :
section := 0 ..1 :
border1 := 0 :
border2 := 0 :
eps := 10^(-9) :
```

```
> # Кубические сплайны
CubicSplineInterpolation := proc(n, section, border1, border2, f)

local i;
local h := 1/n ;

local grid := [seq(i, i = section, h)];
local values := [seq(f(i), i = section, h)];

local tridiagonalMatrixInit := (i, j)→
    if i = j and i ≠ 1 and i ≠ n + 1 then 4 h
    elif (i − j = 1 or i − j = −1) and i ≠ 1 and i ≠ n + 1 then h
    elif (i = 1 and j = 1) or (i = n + 1 and j = n + 1) then 1
    else 0; end if;

local tridiagonalMatrix := Matrix(n + 1, tridiagonalMatrixInit);

local rhVectorInit := i→ if i = 1 then border1 elif i = n + 1 then border2
    else 6·(values[i + 1] − 2·values[i] + values[i − 1])/h; end if;
local rhVector := Vector(n + 1, rhVectorInit);

local a := seq(values[i], i = 2 ..n + 1);
local c := solveSystem(tridiagonalMatrix, rhVector);
local b := seq((values[i] − values[i − 1])/h + c[i]·h/3 + c[i − 1]·h/6, i = 2 ..n + 1);
local d := seq((c[i] − c[i − 1])/h, i = 2 ..n + 1);

local S := (i, x) → a[i] + b[i]·(x − grid[i + 1]) + c[i + 1]/2·(x − grid[i + 1])^2 + d[i]/6
```

```
    ·(x − grid[i + 1])^3;

 local P := proc (x)
  for i from 1 to n do
    if (grid[i] ≤ x ≤ grid[i + 1]) then return S(i, x) end if; end do;
 end proc;

return x→ P(x) ;

end proc:
```

> #B-сплайны

```
BSplineInterpolation := proc(n, section, eps, f )

local i;
local h := 1/(n − 2);
    # У нас n передается в функцию с учетом "фиктивных" точек, поэтому чтобы
    вычислить шаг мы от n отнимаем 2.

local grid := [−2 ·eps, −eps, seq(i, i = section, h), eps + 1, 2·eps + 1 ];
local values := [ f(0), f(0), seq( f(i), i = section, h), f(1), f(1) ] ;

local k := j →
   if j = 1 then f(grid[ j])
   elif j = n then f(grid(n + 1))
   else 1/2 · (−f(grid[ j + 1]) + 4·f((grid[ j + 1] + grid[ j + 2])/2) − f(grid[ j + 2]));
    end if; #Coefficient.

local B0 := (i, x) → piecewise(grid[i] ≤ x < grid[i + 1], 1, 0);
local B0 := (i, x)→ (x − grid[i])/(grid[i + 1] − grid[i]) ·B0(i, x) + (grid[i + 2] − x)/(grid[i + 2] − grid[i + 1]) ·B0(i
     + 1, x);
local B2 := (i, x)→ (x − grid[i])/(grid[i + 2] − grid[i]) ·B1(i, x) + (grid[i + 3] − x)/(grid[i + 3] − grid[i + 1]) ·B1(i
     + 1, x);

local S := x → sum(k(i)·B2(i, x), i = 1 ..n);

return x → S(x);

end proc:
```

> # *Отображение результатов*

```
ShowGraphs := proc(f, CubicSplineInterp, BSplineInterp)
 local res := plot( [ f, CubicSplineInterp, BSplineInterp ] , 0 ..1, color = [red, blue, green], legend
     = ["Original", "Cubic Spline Interpolation", "BSpline Interpolation" ]);
 return res;
end proc:
```

> # *Вычисление ошибки*

```
ComputeIterpolationError := proc (func1, func2, n, section)
local h := 1/(10·n);
local maxError := 0;
local grid := [seq(i, i = section, h) ];
local node, i, errors;

for node in grid do
errors := abs(evalf(func1(node) − func2(node)));
if maxError < errors then maxError := errors; end if; end do;
return maxError;
end proc:
```

> # *Проверка корректности построенных сплайнов посредством сравнения их со стандратными средствами Maple.*

$f := x \to x^2 \sin\left(\frac{1}{x - 0.0001}\right)$:

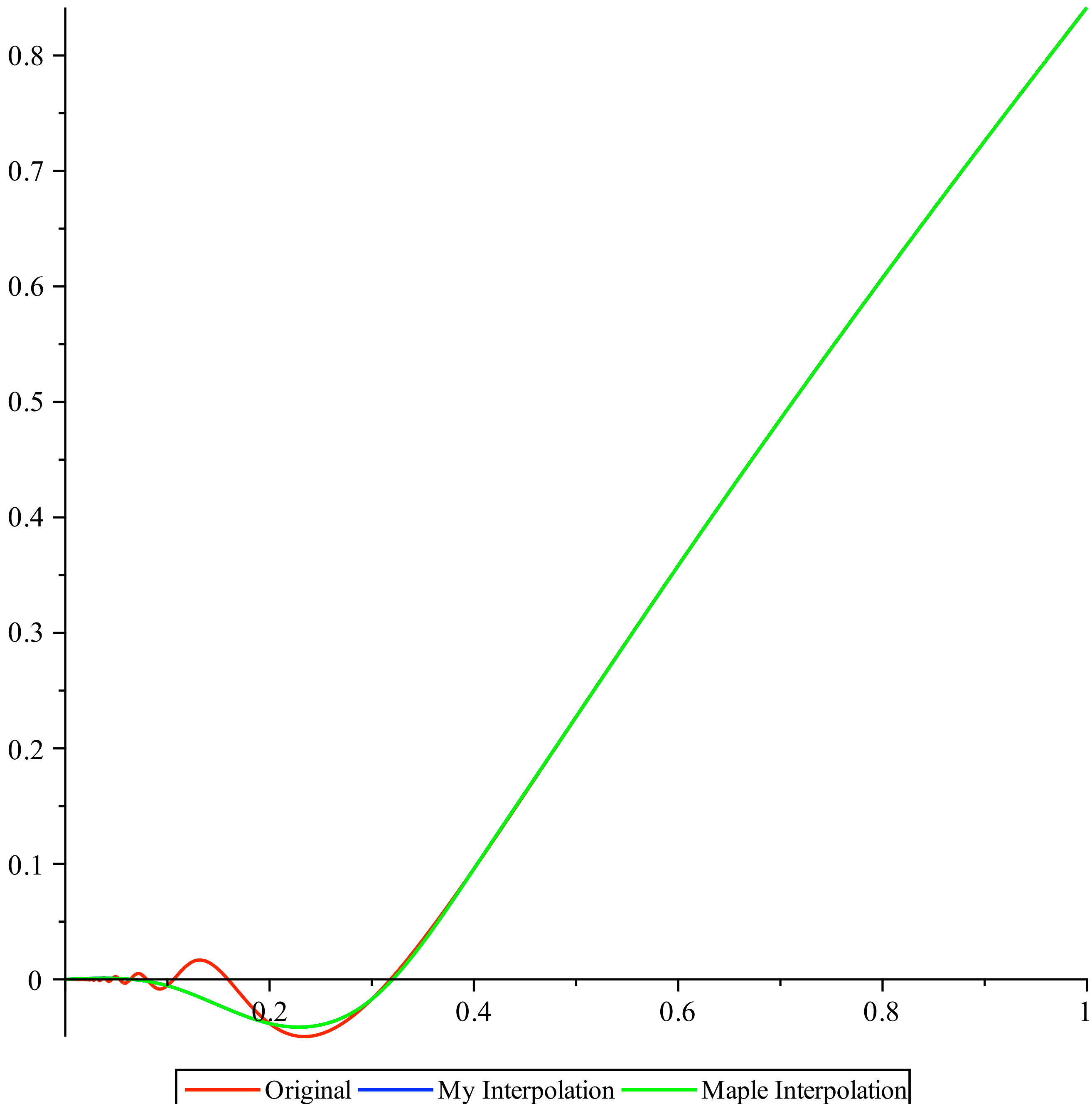
```
myCubicSplineInterp := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f) :
myBSplineInterp := BSplineInterpolation(n, section, eps, f) :
mapleCubicSplineInterp := x → Spline([seq(i, i = section, 1/n)], [seq(f(i), i = section, 1/n)],
     x, degree = 3) :
with(CurveFitting) : mapleBSplineInterp := BSplineCurve([−2·eps, −eps, seq(i, i = section,
     1/n), 1 + eps, 1 + 2·eps], [f(0), f(0), seq(f(i), i = section, 1/n), f(1), f(1)], x, order
     = 3) :

print("Cubic splines") ;
plot([f, myCubicSplineInterp, mapleCubicSplineInterp] , section, color = [red, blue, green],
```

legend = ["Original", "My Interpolation", "Maple Interpolation"]);
ComputeIterpolationError(*myCubicSplineInterp*, *mapleCubicSplineInterp*, *n*, *section*);

print("B splines") ;
plot([f, myBSplineInterp, mapleBSplineInterp], section, color = [red, blue, green], legend = ["Original", "My Interpolation", "Maple Interpolation"]);

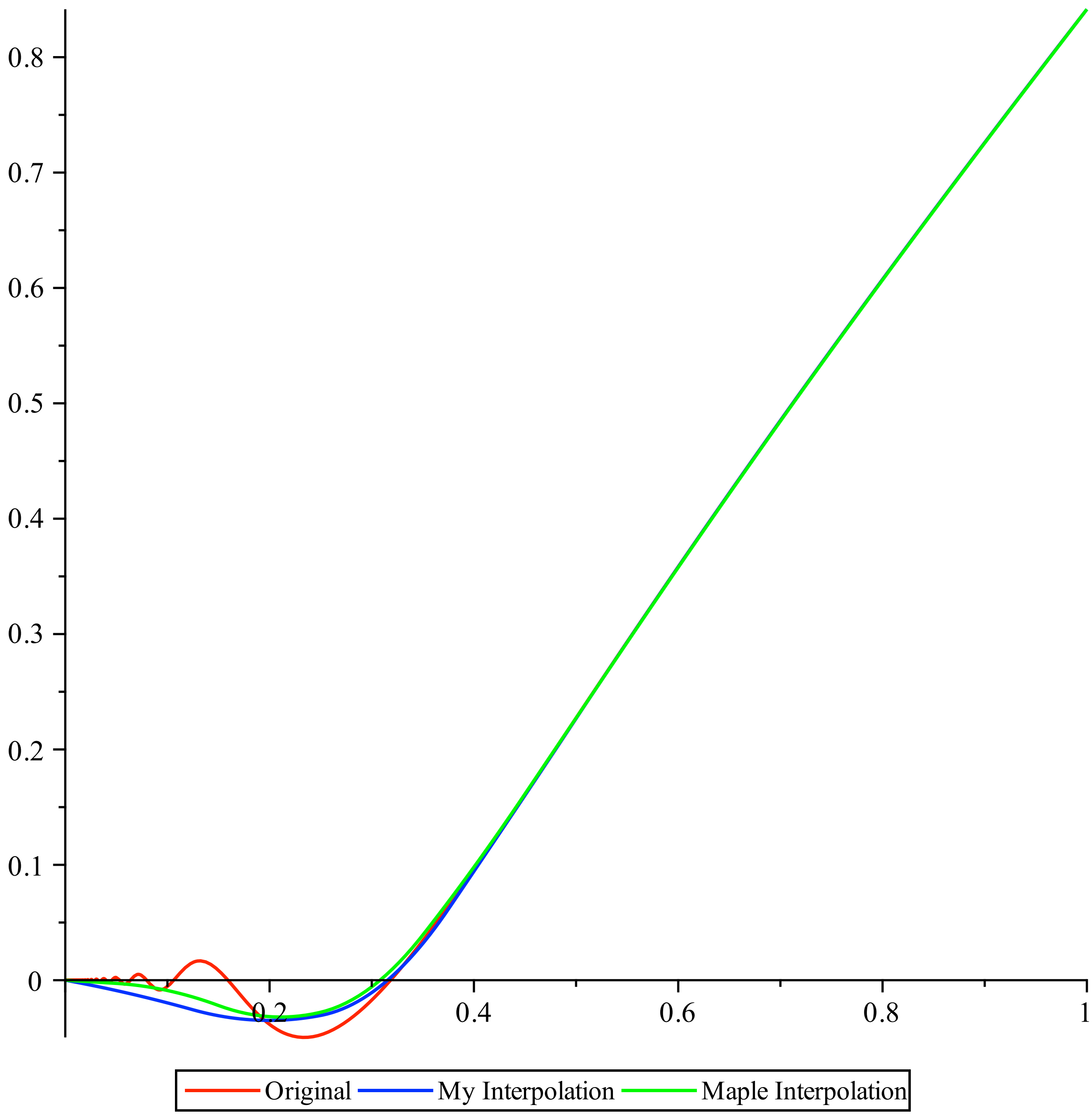
Warning, (in mapleCubicSplineInterp) `i` is implicitly declared local
Warning, (in mapleCubicSplineInterp) `i` is implicitly declared local

"Cubic splines"



$3.33066907387547 \times 10^{-16}$

"B splines"



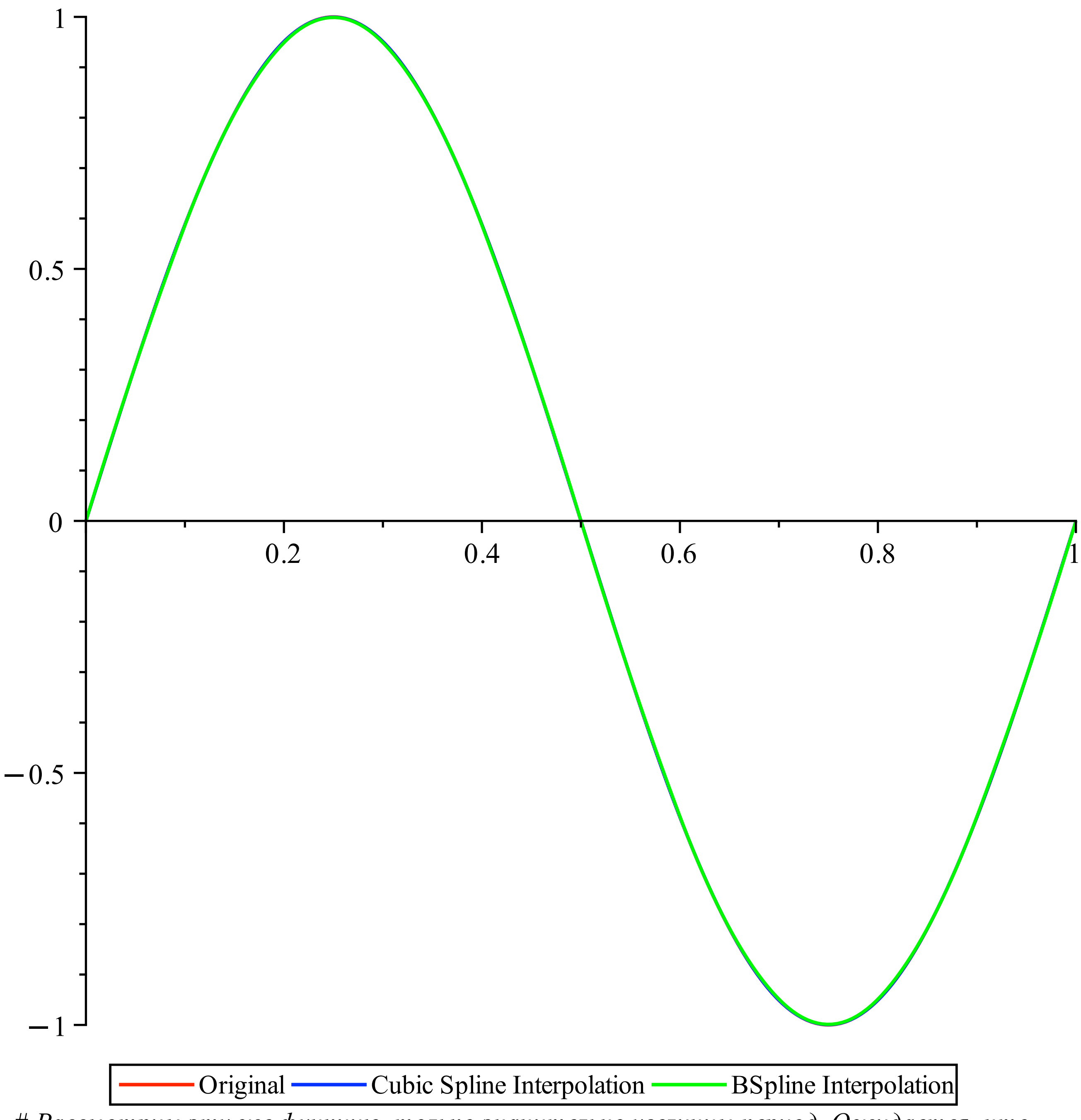
> *# Судя по примеру — сплайны построены корректно. Кубические сплайны практически полностью совпадают с тем, что предоставляет Maple. Построенные B-сплайны отличаются немного от предоставляемых Maple и связано это, скорее всего, с разным выбором коэффициентов k.*

> # *Примеры и эксперименты*

> *# Рассмотрим простую переодическую функцию, которая принадлежит* $C^2[0, 1]$ и *имеет не слишком большой период. Ожидается*, *что как кубические, так* и *квадратичные — сплайны будут хорошо интерполировать эту функцию.*

$f := x \rightarrow \sin(2\ \mathrm{Pi} \cdot x);$
$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f):$
$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(\mathrm{n} + 2, \mathrm{section}, \mathrm{eps}, f):$
$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation);$

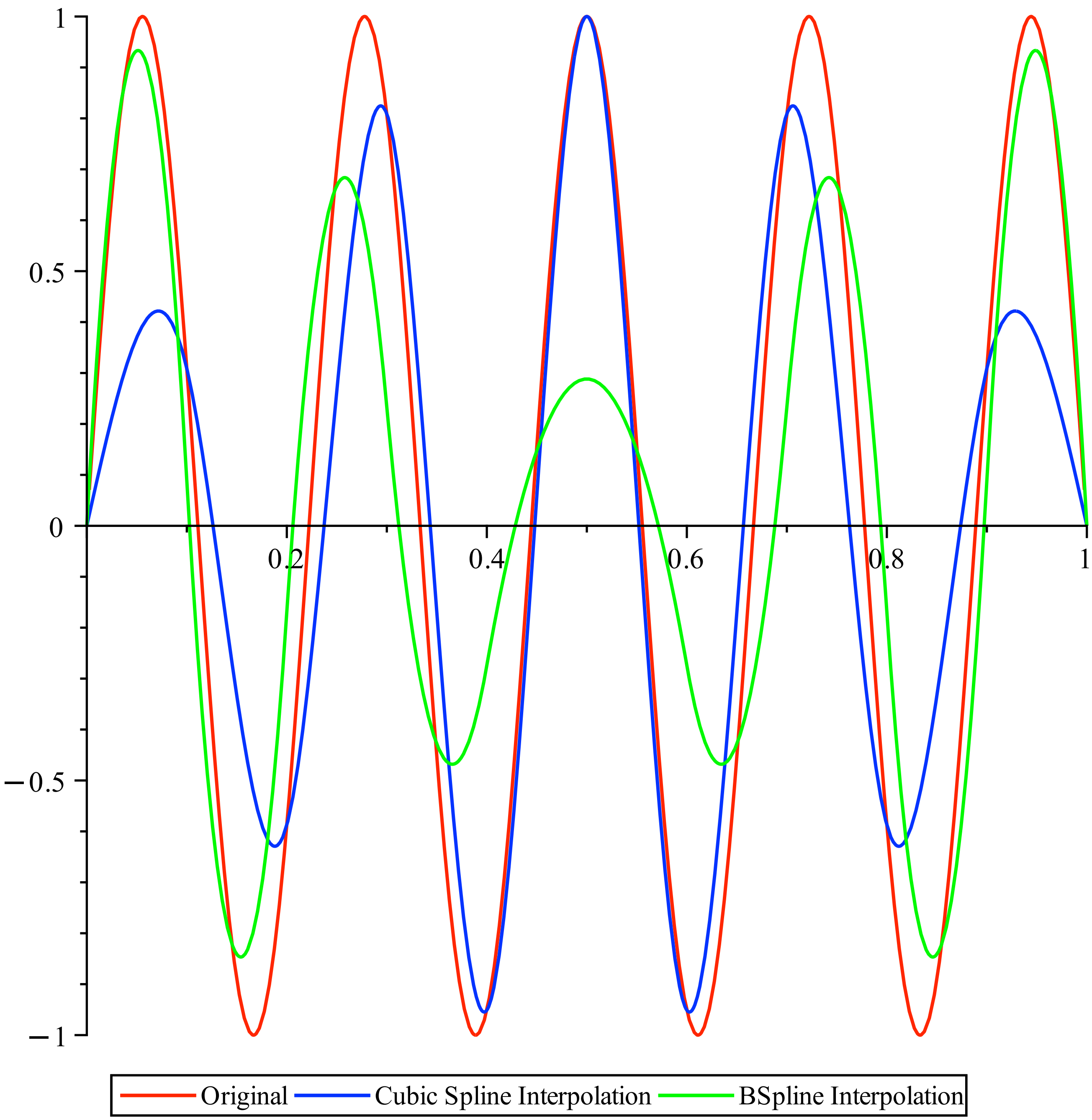
$$f := x \mapsto \sin(2 \cdot x \cdot \pi)$$



> *# Рассмотрим эту же функцию, только значительно увеличим период. Ожидается, что на этот раз, как минимум, кубические сплайны будут плохо интерполировать функцию. Связано это с тем, что сетка слишком крупная и между двумя узлами значения функции слишком сильно несколько раз изменяются. Как можем заметить из графика - квадратичные B-сплайны тоже плохо приблежают "слишком колеблющиеся" функции.*

$f := x \rightarrow \sin(9\,\mathrm{Pi}\cdot x);$
$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f):$
$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(\mathrm{n} + 2, \mathrm{section}, \mathrm{eps}, f):$
$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation);$

$$f := x \mapsto \sin(9 \cdot x \cdot \pi)$$

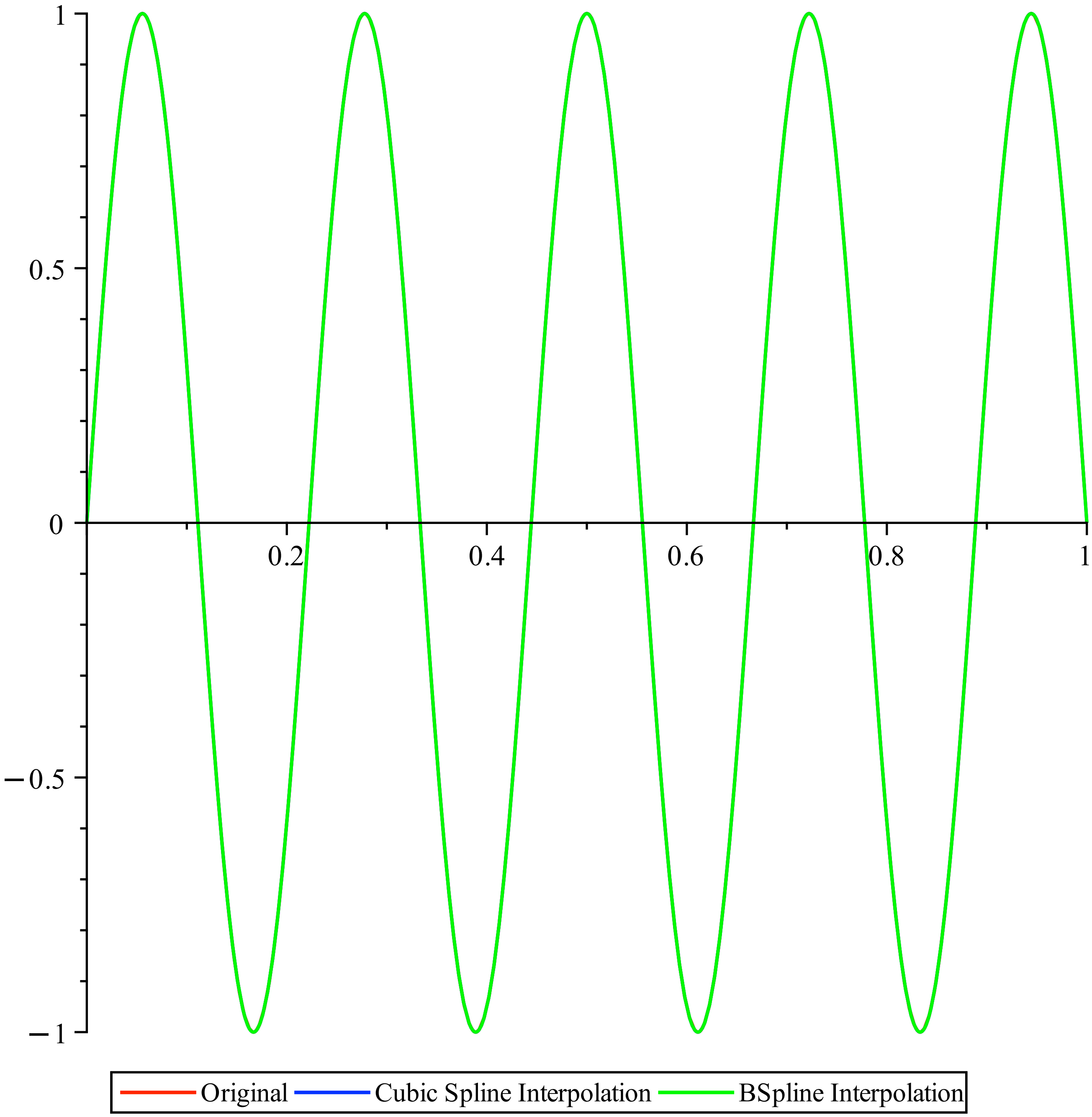


> *#Рассмотрим предыдущий пример и увеличим размер сетки до 100. Ожидается, что теперь кубические сплайны будут интерполировать функцию намного точнее. Из графика видно, что B-сплайны также хорошо справляются с задачей на сетке такого размера.*

$f := x \rightarrow \sin(9\,\mathrm{Pi}\cdot x);$

$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(10 \cdot n, section, border1, border2, f)$:
$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(10 \cdot \mathrm{n} + 2, \mathrm{section}, \mathrm{eps},\ f)$:
$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation)$;

$$f := x \mapsto \sin(9 \cdot x \cdot \pi)$$



> *#Рассмотрим похожий пример. Ожидания такие же, как и в позапрошлом примере. В местах, где в пределах двух узлов функция изменяется слишком быстро и сильно (в нашем случае это где − то между узлами 0 и 0.1; частично между* 0.1 и 0.2) *кубические сплайны будут плохо интерполировать функцию.* В *местах же, где* в *пределах двух узлов функция изменяется плавно − кубические сплайны будут интерполировать функцию точнее*

. *Как видно по графику* $-$ *это справедливо* и *для* $B -$ *сплайнов.*

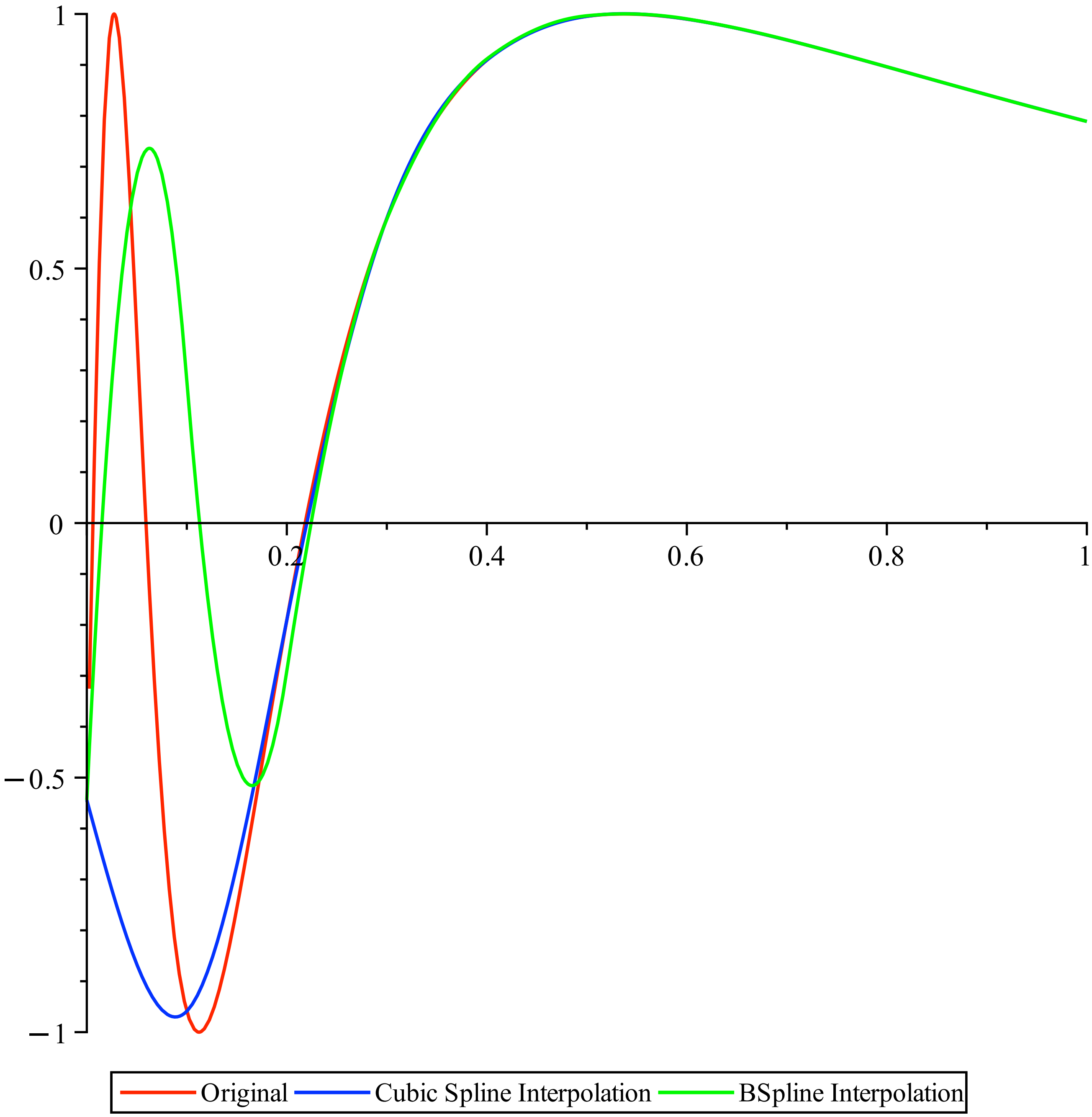
$$f := x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x+\frac{1}{10}}\right);$$

$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f):$

$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(\mathrm{n}+2, \mathrm{section}, \mathrm{eps}, f):$

$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation);$

$$f := x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x+\frac{1}{10}}\right)$$



>

> #*Использование интерполяции сплайнами адекватно только тогда, когда* $f \in C^2[a, b]$ *. Рассмотрим функцию, которая разрывна на отрезке* $[0, 1]$ в *точке* $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ *. Ождиается, что как кубические сплайны, так* и *B* $-$ *сплайны будут очень плохо её интепролировать.*

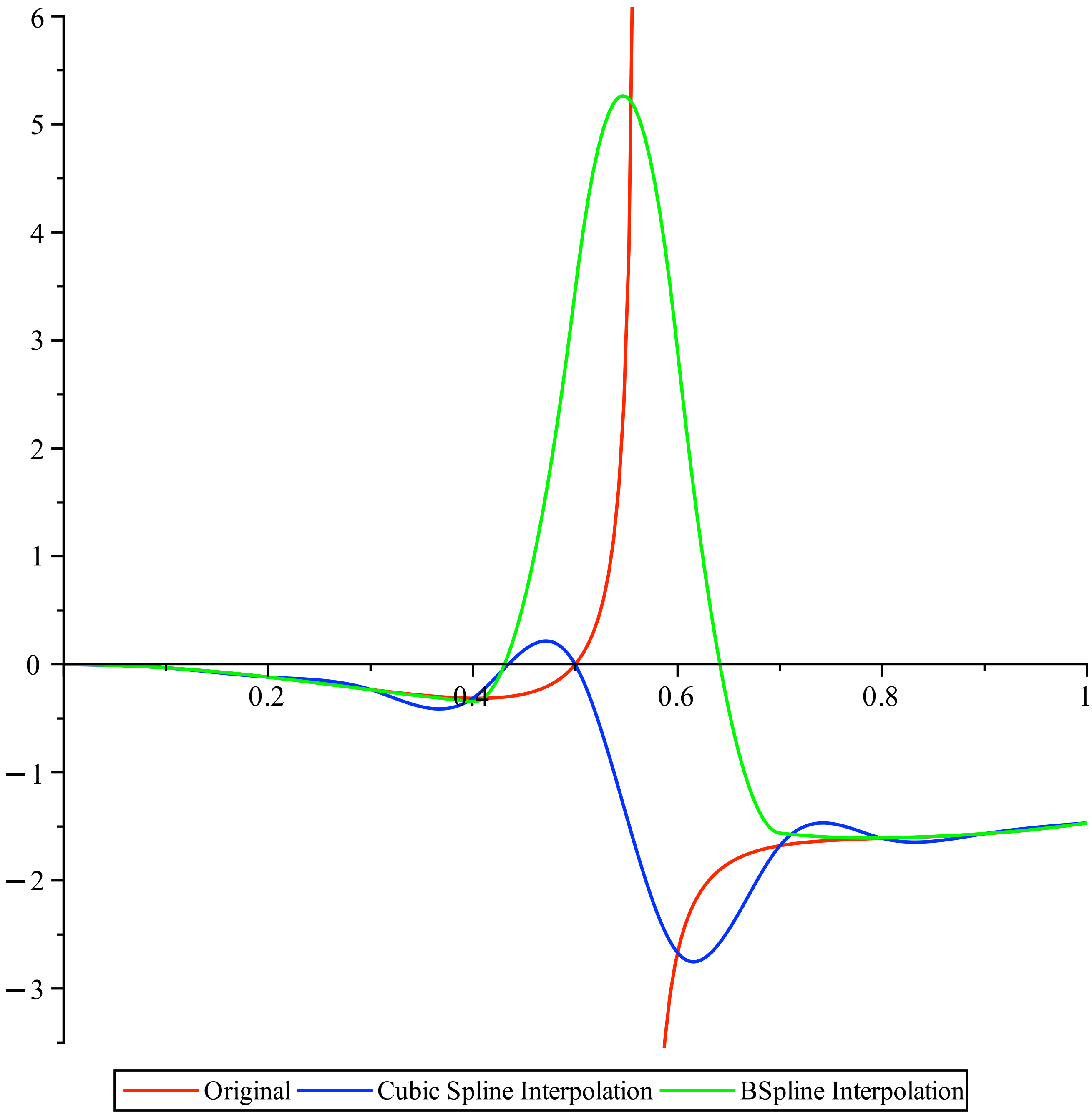
$f := x \rightarrow \frac{x^2 \cos(\mathrm{Pi} \cdot x)}{x^2 - \frac{1}{\mathrm{Pi}}}$;

myCubicSplineInterpolation := *CubicSplineInterpolation*(*n*, *section*, *border1*, *border2*, *f*) :

myBSplineInterpolation := *BSplineInterpolation*(n + 2, section, eps, *f*) :

ShowGraphs(*f*, *myCubicSplineInterpolation*, *myBSplineInterpolation*);

$$f := x \mapsto \frac{x^2 \cdot \cos(x \cdot \pi)}{x^2 - \frac{1}{\pi}}$$

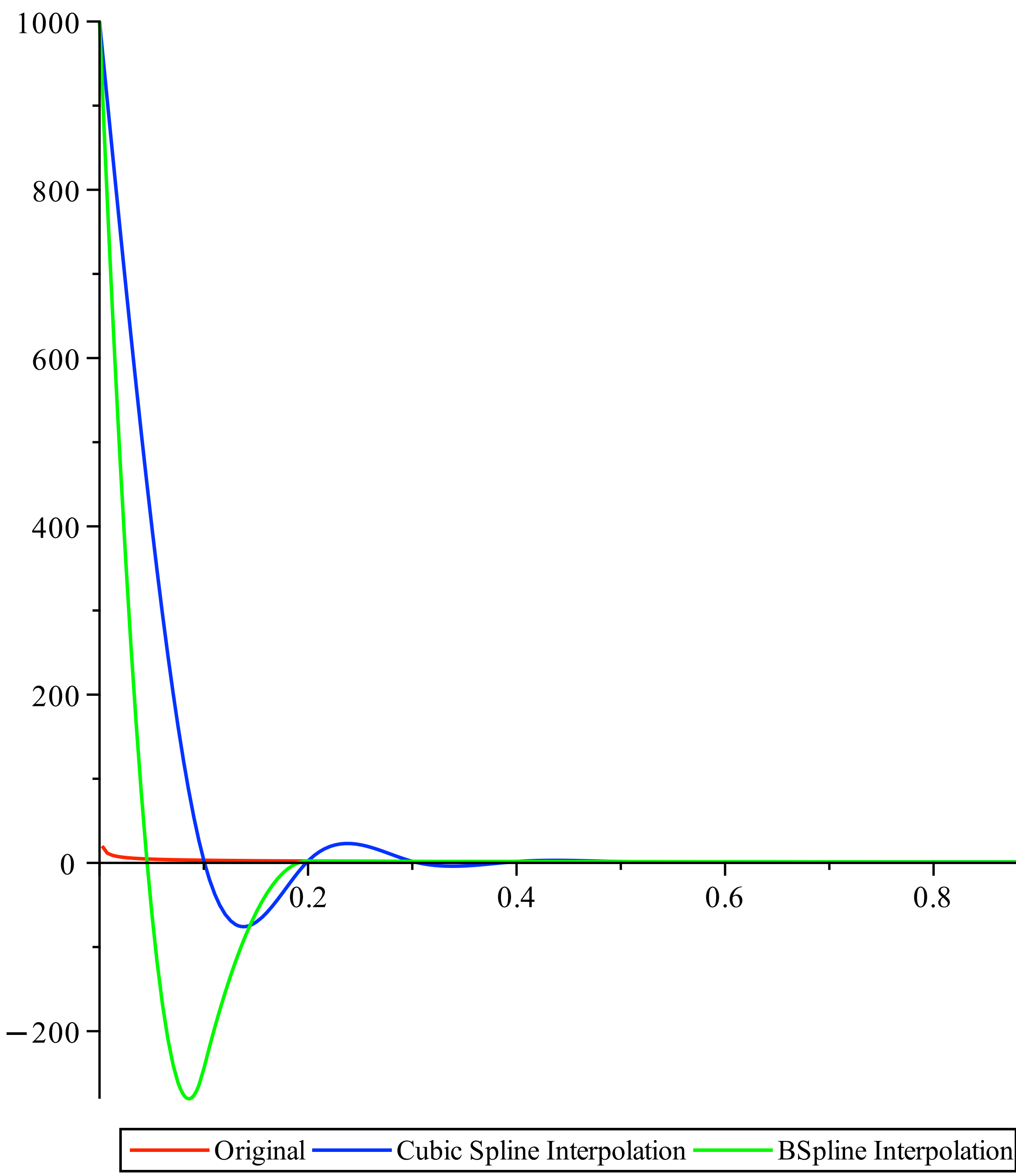


> *#Рассмотрим функцию, у которой разрыв происходит не на отрезке [0,1].*

$f := x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x + 0.000001}};$

myCubicSplineInterpolation := *CubicSplineInterpolation*(*n*, *section*, *border1*, *border2*, *f*) :
myBSplineInterpolation := *BSplineInterpolation*(n + 2, section, eps, *f*) :
ShowGraphs(*f*, *myCubicSplineInterpolation*, *myBSplineInterpolation*);
 # Разрыв происходит очень близко к нулю, поэтому в его окрестности как кубические сплайны, так и квадратичные B−сплайны плохо интерполируют функцию.

$$f := x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x + 1. \times 10^{-6}}}$$



\>

\> #*Рассмотрим функцию, у которой в точке 0.5 первая производная* *<u>не будет существовать</u>*
. Ождитается, *что* в *таком случае*,
в *окрестности точки* 0.5 *сплайны*(*как минимум кубические*) *будут плохо приблежать исходную функцию* (*по тем же соображениями*,
что и в *прошлом примере*).

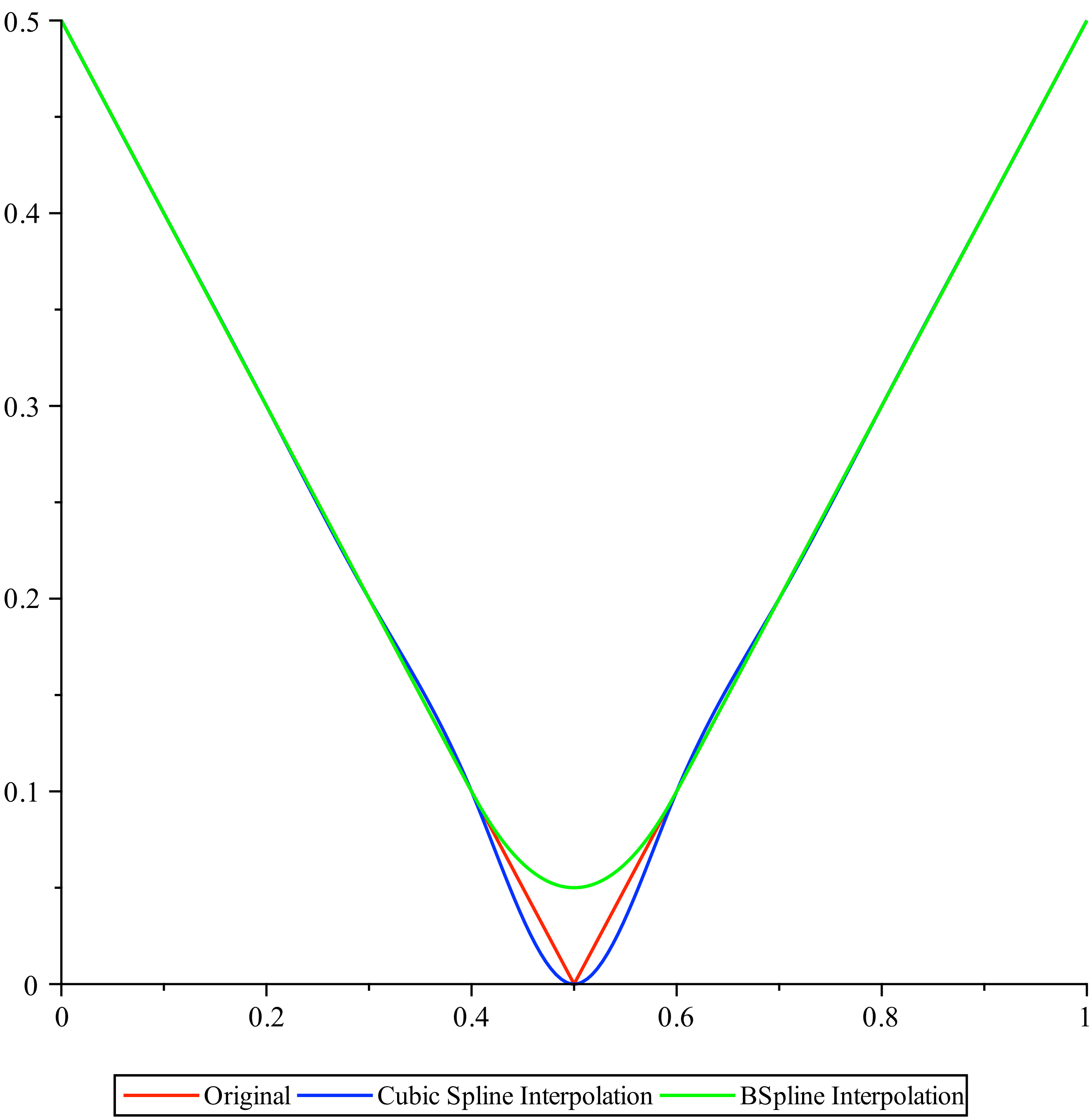
$f := x \rightarrow \mathrm{abs}(x - 0.5);$

myCubicSplineInterpolation := *CubicSplineInterpolation*(*n*, *section*, *border1*, *border2*, *f*) :

myBSplineInterpolation := *BSplineInterpolation*(n + 2, section, eps, *f*) :

ShowGraphs(*f*, *myCubicSplineInterpolation*, *myBSplineInterpolation*);

$$f := x \mapsto |x - 0.5|$$



> *# Рассмотрим непрерывную функцию, у которой первая производная имеет разрыв в точке 0.5. Ожидается, что в окрестности этой точки кубические сплайны будут плохо интерполировать функцию. Из графика видно, что это справедливо и для квадратичных B-сплайнов.*

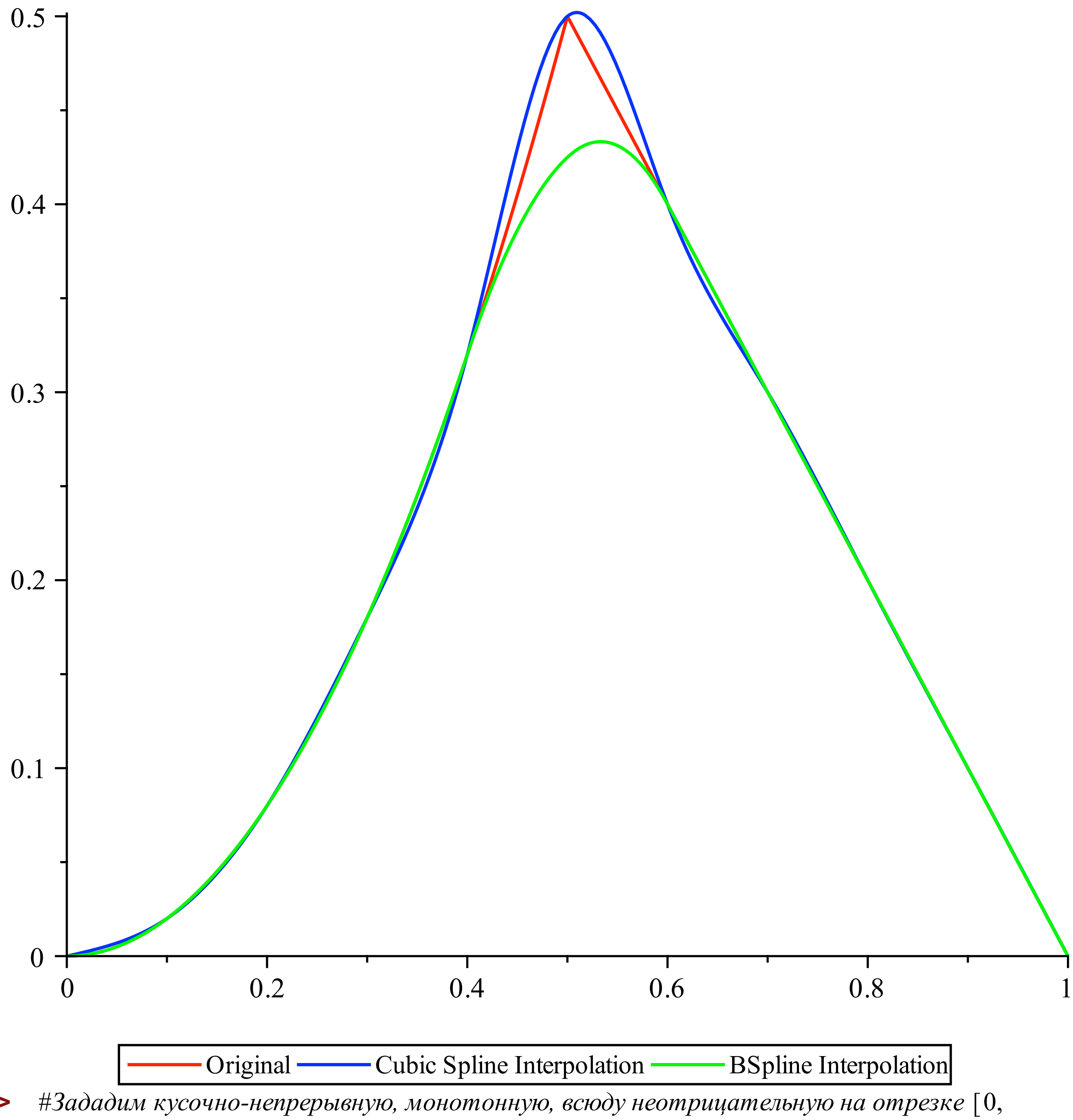
$f := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x < \frac{1}{2}, 2 \cdot x^2, \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 1 - x\right);$

$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f):$

$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(\mathrm{n} + 2, \mathrm{section}, \mathrm{eps}, f):$

$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2\cdot x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$



> *#Зададим кусочно-непрерывную, монотонную, всюду неотрицательную на отрезке* [0, 1] *функцию. Построим интерполяцию кубическими сплайнами.*

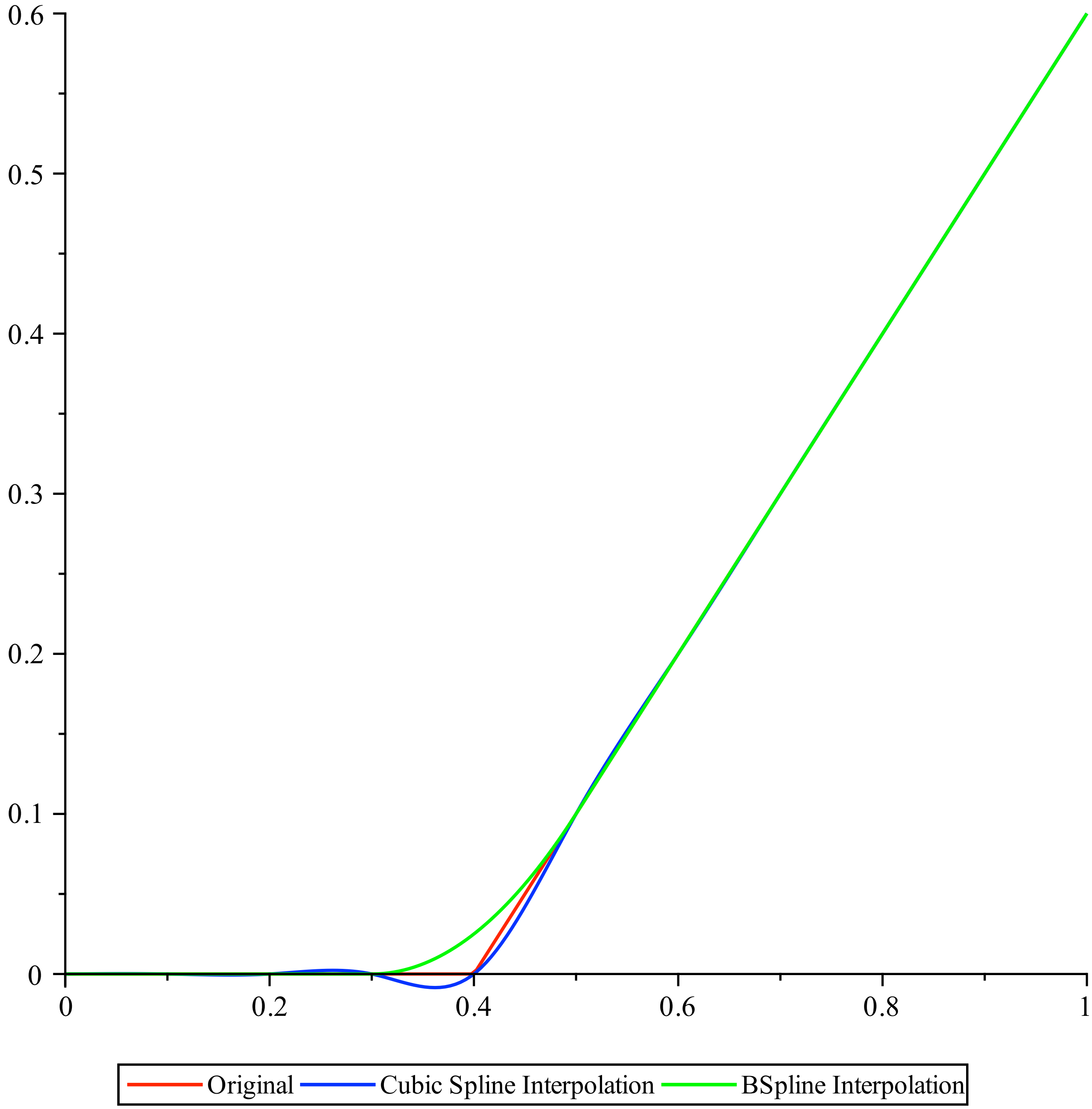
$f := x \rightarrow piecewise(x < 0.4, 0, x - 0.4);$

$myCubicSplineInterpolation := CubicSplineInterpolation(n, section, border1, border2, f) :$

$myBSplineInterpolation := BSplineInterpolation(\mathrm{n} + 2, \mathrm{section}, \mathrm{eps}, f) :$

$ShowGraphs(f, myCubicSplineInterpolation, myBSplineInterpolation);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0.4 \\ x - 0.4 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$



\> *# Как можно заметить, у полученной интерполяции нарушается монотонность и неотрицательность. Оно и ожидаемо — как можно заметить по функции, в узле 0.4 нарушается равенство первых производных. B−сплайны в данном примере не нарушают свойство неотрицательности, но также плохо интерполируют функцию в окрестности узла 0.4.*

\> *# Мини-результат: во всех примерах ожидания оправдались.*