BERISIKAN LEBIH DARI 375 SOAL
BESERTA PEMBAHASAN

# Kumpulan Latihan Soal KSK & KSP Matematika

*"The only source of knowledge is experience." —Albert Einstein*

RAFAEL FENG

# KATA PENGANTAR

# PENDAHULUAN

Olimpiade Sains Nasional adalah ajang berkompetisi dalam bidang sains bagi para siswa pada jenjang SD, SMP, dan SMA di Indonesia. Siswa yang mengikuti Olimpiade Sains Nasional adalah siswa yang telah lolos seleksi tingkat kabupaten dan provinsi dan adalah siswa-siswa terbaik dari provinsinya masing-masing.

Pelaksanaan Olimpiade Sains Nasional ini didasarkan pada kesuksesan Indonesia sebagai tuan rumah Olimpiade Fisika Internasional (IPhO - International Physics Olympiad) yang diselenggarakan di Bali pada tahun 2002.

Olimpiade Sains Nasional diadakan sekali dalam satu tahun di kota yang berbeda-beda. Kegiatan ini merupakan salah satu bagian dari rangkaian seleksi untuk mendapatkan siswa-siswi terbaik dari seluruh Indonesia yang akan dibimbing lebih lanjut oleh tim bidang kompetisi masing-masing dan akan diikutsertakan pada olimpiade-olimpiade tingkat internasional.

Setelah hampir selalu dilaksanakan selama 20 tahun sekarang pada tahun 2020 secara resmi OSN (Olimpiade Sains Nasional) berganti nama menjadi KSN (Kompetisi Sains Nasional) dengan PPN (Pusat Prestasi Nasional) menjadi penyelenggara resmi KSN.

Setiap jenjang pendidikan memiliki beberapa bidang ilmu yang diperlombakan dalam OSN yaitu :

- Jenjang SD: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
- Jenjang SMP: Matematika, Fisika, Biologi, dan pada tahun 2008 ditambahkan bidang baru yaitu Astronomi, tetapi pada tahun 2009, bidang Astronomi ditiadakan kembali. Tahun 2010 ditambahkan bidang baru yaitu Ilmu Pengetahuan Sosial. Pada tahun 2015, bidang Fisika dan Biologi digabung pada bidang Ilmu Pengetahuan Alam sehingga sekarang terdapat 3 bidang untuk jenjang SMP, yaitu Matematika, IPA dan IPS.
- Jenjang SMA: Matematika, Fisika, Biologi, Kimia, Astronomi, Komputer, Ekonomi dan pada tahun 2008 ditambahkan bidang baru yaitu Kebumian. Lalu pada tahun 2013 ditambahkan bidang baru yaitu Geografi.

Proses atau metode seleksi Olimpiade Sains Nasional tergantung dari jumlah (kuota) peserta setiap tahunnya. Setiap tingkat memiliki jumlah peserta yang berbeda-beda tiap tahunnya. Pada umumnya seleksi dilakukan dari kabupaten, provinsi dan terakhir nasional akan tetapi khusus untuk para siswa SD seleksi dilakukan dari tingkat kecamatan.

# DAFTAR ISI

**KATA PENGANTAR** **i**

**PENDAHULUAN** **iii**

**DAFTAR ISI** **iii**

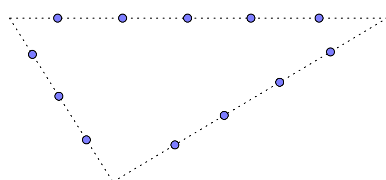
**PAKET 1. AWAL DARI SEGALANYA** **1**
- I. LEVEL BAWAH . . . . . . 1
  - I.A. SOAL . . . . . . 1
  - I.B. SOLUSI . . . . . . 2
- II. LEVEL TENGAH . . . . . . 2
  - II.A. SOAL . . . . . . 2
  - II.B. SOLUSI . . . . . . 5
- III. LEVEL ATAS . . . . . . 12
  - III.A. SOAL . . . . . . 12
  - III.B. SOLUSI . . . . . . 14

# PAKET 1. AWAL DARI SEGALANYA

## I. LEVEL BAWAH

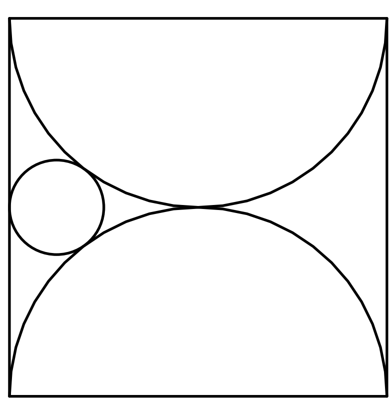
### I.A. SOAL

1. Terdapat 12 titik pada keliling segitiga dibawah ini. Ada berapa banyak segitiga yang bisa dibentuk dengan menghubungkan titik-titik tersebut ?

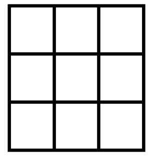


2. Misalkan $a$ dan $b$ real yang memenuhi $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$. Tentukanlah nilai dari $2(a^2+b^2)$.

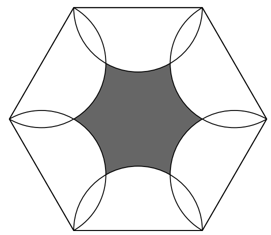
3. Dua buah setengah lingkaran terletak didalam sebuah persegi dengan masing-masing jari-jari setengah lingkaran tersebut adalah 8 satuan. Diberikan pula lingkaran kecil yang menyinggung kedua setengah lingkaran dan salah satu sisi persegi. Tentukan luas lingkaran kecil.



4. Tentukan banyak cara mewarnai 9 persegi di bawah ini dengan 3 warna merah, 3 warna kuning dan 3 warna biru. (rotasi dianggap sama)

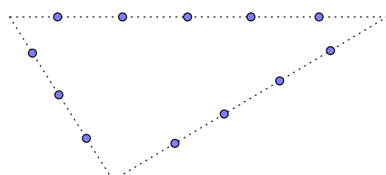


5. Diberikan suatu gambar dengan panjang sisi segienam adalah 2 cm seperti pada gambar dibawah ini. Misalkan ukuran setiap 1/2 lingkaran sama maka carilah luas daerah diarsir.



## I.B. SOLUSI

1. Terdapat 12 titik pada keliling segitiga dibawah ini. Ada berapa banyak segitiga yang bisa dibentuk dengan menghubungkan titik-titik tersebut ?



<u>JAWABAN</u> : 205

Tinjau banyak cara memilih 3 titik dari 12 titik yang ada yaitu $\binom{12}{3} = 220$. Kemudian ingat 3 titik yang dipilih tidak boleh berada pada sisi segitiga yang sama yaitu ada sebanyak $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 1 + 4 + 10 = 15$. Jadi banyak segitiga yang mungkin dibentuk adalah 205.

2. Misalkan $a$ dan $b$ real yang memenuhi $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$. Tentukanlah nilai dari $2(a^2+b^2)$.

<u>JAWABAN</u> : 2

(Cara 1)

(Cara 2) Mengingat $\sqrt{1-b^2}$ dan $\sqrt{1-a^2}$ harus bernilai real, bisa dimisalkan $a = \sin x$ dan $b = \sin y$. Maka didapat,

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} &= \sin x\sqrt{1-\sin^2 y} + \sin y\sqrt{1-\sin^2 x} \\ &= \sin x\sqrt{\cos^2 y} + \sin y\sqrt{\cos^2 x} \\ &= \sin x\cos y + \sin y\cos x \\ &= \sin(x+y) \end{aligned}$$

Darisini disimpulkan $\sin(x+y) = 1 = \sin 90^\circ \implies x + y = 90^\circ \implies y = 90^\circ - x$. Maka substitusikan lagi ke persamaan awal sehingga,

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} &= \sin x\sqrt{1-\sin^2 y} + \sin y\sqrt{1-\sin^2 x} \\ &= \sin^2 x + \cos^2 y \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi disimpulkan $2(a^2 + b^2) = 2 \times 1 = 2$.

# II. LEVEL TENGAH

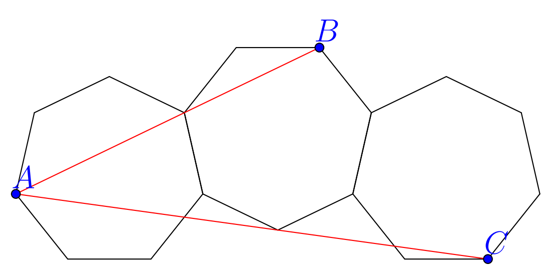
## II.A. SOAL

1. Bilangan prima yang berada pada rentang $100! + 2$ sampai $100! + 99$ dikatakan `amazing`, tentukanlah banyaknya bilangan `amazing`.

2. Tentukan banyaknya solusi bulat positif dari $10(m + n) = mn$.

3. Masing-masing umur Alpha dan Beta pada tahun ini diwakili oleh suatu bilangan prima dua digit yang berbeda. Hasil penjumlahan umur mereka berdua menghasilkan suatu bilangan dua digit dengan angka yang sama. Jika hasil perkalian umur Alpha dan Beta adalah suatu bilangan yang kurang dari 450. Jumlah umur mereka 3 tahun yang akan datang adalah ... tahun

4. Alpha akan melakukan perjalanan dari toko $A$ ke toko $B$ sedangkan Beta akan melakukan perjalanan dari toko $A$ ke toko $C$. Jika toko $A, B, C$ berada pada kota dengan bentuk segi 7 beraturan yang berbeda seperti gambar dibawah ini.




Bila jarak yang ditempuh Alpha dan Beta berturut-turut $\alpha$ dan $\beta$ jika melalui jalan bewarna merah. Tentukanlah nilai dari $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

5. Jika $x$ dan $y$ merupakan bilangan real positif yang memenuhi $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x+y} = 0$ maka nilai dari $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ adalah ...

6. Bila $n!$ bernilai samadengan $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ maka dua digit terakhir dari $1! + 2! + 3! + \ldots + 2021!$ adalah ...

7. Diberikan trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $BC \parallel AD$ dan $AB = BC = CD$. Jika jarak titik pusat lingkaran dalam $\triangle ABD$ dan $\triangle ACD$ adalah 10!, banyaknya nilai panjang $AD$ yang mungkin adalah...

8. Jumlah dari $a$ bilangan ganjil positif pertama adalah 465 lebihnya dari jumlah $b$ bilangan genap positif pertama. Tentukan jumlah semua $a$ yang memenuhi.

9. Bila banyak pasangan asli $(a, b, c)$ yang memenuhi $a + 2b + 3c = 2021$ adalah $n$. Tentukan 3 digit terakhir dari $n$.

10. Diberikan segitiga $ABC$ dengan $AB = 40, AC = 60$ dan $BC = 50$. Garis bagi $\angle BAC$ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di titik $P$. Tentukan nilai dari $BP^2$ adalah ...

11. Diberikan $a, b, c, d$ bilangan real positif yang memenuhi,

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c + 4d &= 20 \\ 4a + b + 2c + 3d &= 20 \\ 3a + 4b + c + 2d &= 20 \\ 2a + 3b + 4c + d &= 20 \end{aligned}$$

    Misalkan $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ dengan $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $1 \leq n$ menyatakan pasangan $(a, b, c, d)$. Tentukan nilai dari $\max\{n\}$.

12. Tentukan banyaknya solusi bulat positif $(a, b, c, d, e, f)$ sehingga $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{f} = 4$.

13. Terdapat suatu persegi panjang $ABCD$ dengan $AC$ memiliki panjang 17 cm. Bila perpotongan diagonal persegi panjang berada di titik $P$ sehingga garis sumbu yang ditarik dari $AP$ berpotongan dengan titik $D$. Tentukanlah nilai dari $AD + BC$.

14. Ada sebuah fungsi $f$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 1 \\ f\left(\dfrac{n}{2}\right) \times 2 + n, & n > 1 \end{cases}$$

    Tentukan nilai dari $f(1048576)$.

15. Tentukan banyak solusi real $(a, b, c)$ sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4$.

16. Alpha memiliki suatu kotak berisi $x$ bola merah dan $y$ hitam. Alpha hanya ingat banyaknya bola di kotak itu tidak lebih dari 20. Alpha mencoba untuk mengambil 2 bola sekaligus dari kotak itu. Apabila peluang Alpha mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\dfrac{1}{2}$. Jika $x + y$ nilainya sudah maksimum, tentukanlah nilai dari $\max\{x, y\}$ !

17. Diberikan 2 buah lingkaran yang masing-masing pusatnya adalah $O_1$ dan $O_2$ dimana kedua lingkaran tersebut berpotongan di 2 titik berbeda. Misalkan $S$ merupakan salah satu titik postong dari kedua lingkaran tersebut. Misalkan pula $AB$ dan $CD$ terletak pada garis $O_1O_2$ sehinga $AB$ dan $CD$ masing-masing merupakan diameter dari lingkaran dengan pusat $O_1$ dan $O_2$, serta $B, C$ terletak pada segmen $O_1O_2$. Jika diketahui bahwa $\angle ASD$ dibagi menjadi 3 sudut sama besar oleh garis $SB$ dan garis $SC$, tentukan nilai dari $\angle O_1SO_2$ adalah...

18. Jika $ABCD$ adalah segiempat siklis sehingga $AB = AD$ dan $AB + BC = CD$. Tentukanlah nilai dari $\angle CDA$.

19. Bilangan `pengulangan` adalah bilangan yang dituliskan sebanyak 2 kali dari bilangan semula (bilangan semulanya harus merupakan bilangan asli). Contohnya, bilangan `pengulangan` dari 102 adalah 102102. Tentukan semua bilangan `pengulangan` yang juga merupakan bilangan kuadrat sempurna.

20. Terdapat 9 peserta dalam lomba lari yaitu Anton, Budi, Caesa, Daffa, Emil, Farhan, Gusti, Hanum, dan Ihsan. Jika diketahui:

    i. Anton selalu lebih cepat dari Budi.
    ii. Caesa selalu lebih cepat dari Daffa
    iii. Emil selalu lebih cepat dari Farhan

    Jika banyaknya urutan mereka finish adalah $a$, tentukan 3 digit terakhir dari $a$?

## II.B. SOLUSI

1. Bilangan prima yang berada pada rentang $100! + 2$ sampai $100! + 99$ dikatakan `amazing`, tentukanlah banyaknya bilangan `amazing`.

   JAWABAN : 0
   Tinjau bahwa $n \mid 100! + n$ untuk setiap $2 \leq n \leq 99$. Jadi jelas tidak ada bilangan prima pada rentang tersebut. □

   **Perlu Diingat !!!**
   Untuk setiap $2 \leq n$ asli dipastikan bilangan dari $n! + 2$ sampai $n! + n$ adalah bilangan komposit.

2. Tentukan banyaknya solusi bulat positif dari $10(m + n) = mn$.
   JAWABAN : 9
   Dengan Simon's Favorite Factoring Trick (SFFT) bisa didapat,

$$mn - 10m - 10n = 0 \Longrightarrow m(n-10) - 10n + 100 = 100 \Longrightarrow (m-10)(n-10) = 100$$

   Maka solusi bulat positif dari $(m - 10, n - 10)$ adalah faktor positif dari 100 (secara berpasangan). Jadi banyak solusi $(m, n)$ adalah 9.

   **Perlu Diingat !!!**
   Jika terdapat persamaan dengan bentuk $xy + Ax + By$ maka dengan Simon's Favorite Factoring Trick (SFFT) diperoleh,

$$\begin{aligned} xy + Ax + By &= x(y + A) + By \\ &= x(y + A) + B(y + A) - AB \\ &= (x + B)(y + A) - AB \end{aligned}$$

3. Masing-masing umur Alpha dan Beta pada tahun ini diwakili oleh suatu bilangan prima dua digit yang berbeda. Hasil penjumlahan umur mereka berdua menghasilkan suatu bilangan

dua digit dengan angka yang sama. Jika hasil perkalian umur Alpha dan Beta adalah suatu bilangan yang kurang dari 450. Jumlah umur mereka 3 tahun yang akan datang adalah ... tahun

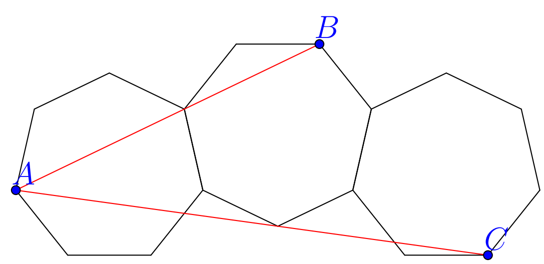
<u>Jawaban</u> : 50

Misalkan umur Alpha adalah $a$ dan Beta adalah $b$ kemudian karena jumlah kedua umur mereka ada dua digit yang sama pasti umur mereka saling berkebalikan. Selanjutnya karena kedua umur mereka prima pasti jumlah umur mereka adalah bilangan genap. Tinjau beberapa kasus :

- $a+b=22$ jelas tidak mungkin.
- $a+b=44$ diperoleh $a,b \in \{13,31\}$.
- $a+b=66$ mudah dicek tidak ada solusi.
- $a+b=88$ jelas $450 < a \times b$.

Jadi jumlah umur mereka 3 tahun yang akan datang adalah $(31+3)+(13+3)=50$ tahun.

4. Alpha akan melakukan perjalanan dari toko $A$ ke toko $B$ sedangkan Beta akan melakukan perjalanan dari toko $A$ ke toko $C$. Jika toko $A, B, C$ berada pada kota dengan bentuk segi 7 beraturan yang berbeda seperti gambar dibawah ini.




Bila jarak yang ditempuh Alpha dan Beta berturut-turut $\alpha$ dan $\beta$ jika melalui jalan bewarna merah. Tentukanlah nilai dari $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

<u>Jawaban</u> : 2

5. Jika $x$ dan $y$ merupakan bilangan real positif yang memenuhi $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y}=0$ maka nilai dari $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ adalah ...

<u>Jawaban</u> : 6

Perhatikan bahwa $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ yang artinya $\dfrac{y-x}{xy}=\dfrac{1}{x+y} \implies y^2-x^2=xy \implies y^2-xy-x^2=0 \implies (y^2-x^2)^2=(xy)^2 \implies y^4-2x^2y^2+x^4=x^2y^2 \implies y^4+x^4=3x^2y^2$.

Jadi nilai dari $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{x^4+y^4}{x^4y^4}=\dfrac{3x^4y^4}{x^4y^4}=3$.

6. Bila $n!$ bernilai samadengan $n\times(n-1)\times ... \times 2\times 1$ maka dua digit terakhir dari $1!+2!+3!+...+2021!$ adalah ...

<u>Jawaban</u> : 13

Ingat bahwa $10! = 3628800$ yang artinya untuk mendapatkan 2 digit terakhir dari $1!+2!+3!+...+2021!$, kita hanya perlu menghitung 2 digit terakhir dari $1!+2!+3!+...+9!$ :

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & 2 & \\
 & & 6 & \\
 & 2 & 4 & \\
... & 2 & 0 & \\
... & 2 & 0 & \\
... & 4 & 0 & \\
... & 2 & 0 & \\
... & 8 & 0 & + \\
\hline
... & 1 & 3 &
\end{array}$$

Jadi dua digit terakhir dari $1! + 2! + 3! + ... + 2021!$ adalah 13.

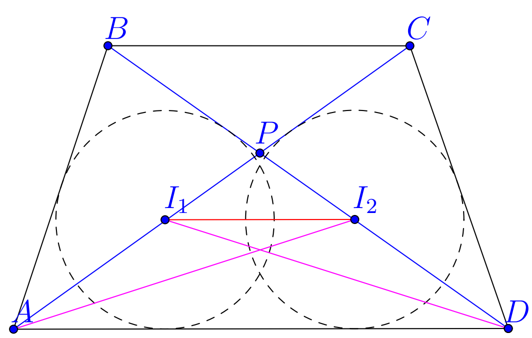
**Perlu Diingat !!!**

Untuk setiap $9 \leq n$ asli berlaku dua digit terakhir dari $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ adalah 13.

7. Diberikan trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $BC \parallel AD$ dan $AB = BC = CD$. Jika jarak titik pusat lingkaran dalam $\triangle ABD$ dan $\triangle ACD$ adalah $10!$, banyaknya nilai panjang $AD$ yang mungkin adalah...

<u>Jawaban</u> : 270

Karena $ABCD$ trapezium sama kaki jelas $ABCD$ siklis, misalkan $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha \implies \angle BDC = \angle ADB = 2\alpha$. Artinya $\angle ADC = 4\alpha \implies \angle DAC = 2\alpha$ dan $\angle DBC = 2\alpha$. Selanjutnya asumsikan titik $I_1$ dan $I_2$ adalah pusat lingkaran dalam $\triangle ABD$ dan $\triangle ACD$.




Lalu tinjau $\angle I_1AD = 2\alpha = \angle DAC$ maka $I_1$ di $AC$, analog untuk $I_2$ yang artinya $I_1$ dan $I_2$ berturut-turut di $AC$ dan $BD$. Kemudian misalkan $AB = BC = CD = x$ dan $AD = y$, ingat bahwa $\triangle BPC \sim ADP$ sehingga dapat diasumsikan $BP = xk$ dan $DP = yk$. Karena $\triangle APD$ sama kaki, $AP = PD = yk$. Maka didapat,

$$\frac{PI_2}{I_2D} = \frac{AP}{AD} = \frac{yk}{y} = k$$

Jika dimisalkan $PI_2 = nk$ jelas $I_2D = n$, analog $PI_1 = nk$ dan $I_1A = n$. Darisini dipeorleh $\dfrac{PI_2}{PD} = \dfrac{PI_1}{PA}$ dan $\angle I_1PI_2 = \angle APD \implies \triangle PI_1I_2 \sim \triangle PAD$. Terakhir disimpulkan,

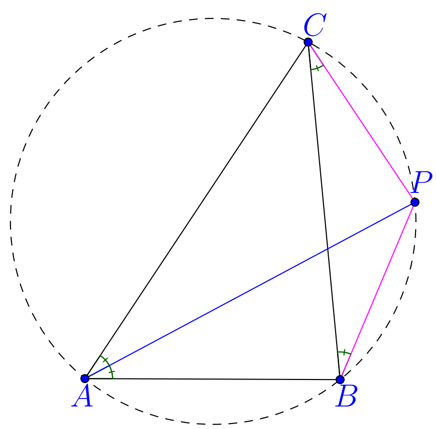
$$\frac{I_1I_2}{AD} = \frac{PI_2}{PD} = \frac{k}{k+1} \implies AD = \frac{10!(k+1)}{k} = 10! + \frac{10!}{k}$$

Jadi jelas banyak nilai panjang $AD$ yang mungkin ekuivalen dengan banyak nilai $k$ (banyak faktor dari 10!) yaitu 270.

8. Jumlah dari $a$ bilangan ganjil positif pertama adalah 465 lebihnya dari jumlah $b$ bilangan genap positif pertama. Tentukan jumlah semua $a$ yang memenuhi.
   JAWABAN : 549
   Ingat bahwa jumlah dari $a$ bilangan ganjil positif pertama adalah $a^2$ sedangkan jumlah dari $b$ bilangan genap positif pertama adalah $b^2+b$. Maka bisa didapatkan $a^2 = 465 + b^2 + b \Longrightarrow b^2 + b + (465 - a^2) = 0 \Longrightarrow b_{1.2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(465 - a^2)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a^2 - 1859}}{2}$ agar $b$ bulat positif jelas $4a^2 - 1859 = x^2$ dimana $x$ bulat positif. Selanjutnya bisa diperoleh $(2a - x)(2a + x) = 1859$ sehingga nanti didapat beberapa solusi untuk $a$ yaitu 39, 45 dan 465. Jadi jumlah semua $a$ yang memenuhi adalah 549.

9. Bila banyak pasangan asli $(a, b, c)$ yang memenuhi $a + 2b + 3c = 2021$ adalah $n$. Tentukan 3 digit terakhir dari $n$.
   JAWABAN :

10. Diberikan segitiga $ABC$ dengan $AB = 40, AC = 60$ dan $BC = 50$. Garis bagi $\angle BAC$ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di titik $P$. Tentukan nilai dari $BP^2$ adalah ...
    JAWABAN : 800




Ingat bahwa $\angle CAP = \angle CBP$ dan $\angle BAP = \angle BCP$, kemudian karena $AP$ adalah garis bagi dapat dimisalkan $\angle CAP = \angle CBP = \angle BAP = \angle BCP = \alpha$ artinya $BP = CP = a$ karena $\triangle CBP$ adalah segitiga sama kaki. Selanjutnya berdasarkan Teorema Ptolemy didapat,

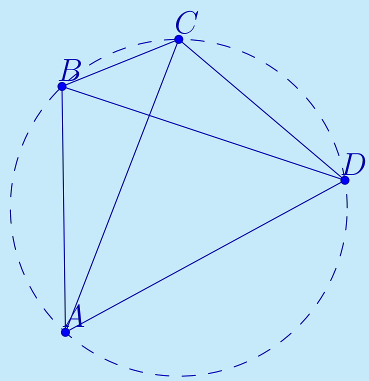
$$AP \times BC = AB \times CP + AC \times BP \Longrightarrow AP = \frac{40a + 60a}{50} = 2a$$

Dengan Teorema Ptolemy untuk perbandingan diagonal bisa diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{AP}{BC} &= \frac{(AB \times AC) + (BP \times CP)}{(AB \times BP) + (AC \times CP)} \\ \frac{2a}{50} &= \frac{2400 + a^2}{40a + 60a} \\ &= \frac{2400 + a^2}{100a} \\ a^2 &= \frac{120000}{150} = 800 \end{aligned}$$

Jadi disimpulkan $BP^2 = a^2 = 800$.

**Perlu Diingat !!!**




Jika terdapat segi 4 siklis $ABCD$ seperti pada gambar diatas, menurut Teorema Ptolemy berlaku,

(a) Perkalian antar diagonal :

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

(b) Perbandingan diagonal :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{(AB \times AD) + (BC \times CD)}{(AB \times BC) + (AD \times CD)}$$

11. Diberikan $a, b, c, d$ bilangan real positif yang memenuhi,

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c + 4d &= 20 \\ 4a + b + 2c + 3d &= 20 \\ 3a + 4b + c + 2d &= 20 \\ 2a + 3b + 4c + d &= 20 \end{aligned}$$

Misalkan $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ dengan $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $1 \leq n$ menyatakan pasangan $(a, b, c, d)$. Tentukan nilai dari $\max\{n\}$.
<u>Jawaban</u> : 1
Jumlahkan seluruh persamaan yang diberikan sehingga didapat,

$$10a + 10b + 10c + 10d = 80 \Longrightarrow a + b + c + d = 8$$

Selanjutnya tinjau $(a + 2b + 3c + 4d) - (a + b + c + d) = 20 - 8 \Longrightarrow b + 2c + 3d = 12$. Yang artinya $4a + b + 2c + 3d = 4a + 12 = 20 \Longrightarrow a = 2$, analog untuk $b, c$ dan $d$. Jadi bisa disimpulkan pasangan yang memenuhi $(a, b, c, d)$ hanyalah $(2, 2, 2, 2)$ sehingga nilai dari $\max\{n\} = 1$.

12. Tentukan banyaknya solusi bulat positif $(a, b, c, d, e, f)$ sehingga $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 4$.
<u>Jawaban</u> : 215
WLOG. $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$, kemudian tinjau bahwa dari bilangan-bilangan tersebut pasti

mengandung angka 1 setidaknya pada 2 bilangan dan maksimal ada 3 bilangan. Selanjutnya tinggal bagi kasus :

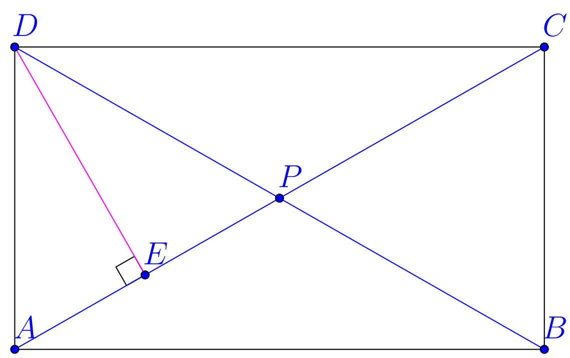
- Jika $a = b = 1$ jelas $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 4 - 2 = 2$ yang artinya $c = d = e = f = 2$.
- Jika $a = b = c = 1$ jelas $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 4 - 3 = 1$ yang artinya,
  - $d = e = f = 3$ memenuhi.
  - $d = 2$ dan $e = f = 4$ memenuhi.
  - $d = 2$, $e = 3$ dan $f = 6$ memenuhi.

Maka diperoleh,

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | Banyak permutasi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | $\frac{6!}{2!4!}$ |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | $\frac{6!}{3!3!}$ |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | $\frac{6!}{3!1!2!}$ |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | $\frac{6!}{3!1!1!1!}$ |

Jadi disimpulkan banyak solusi bulatnya adalah 215.

13. Terdapat suatu persegi panjang $ABCD$ dengan $AC$ memiliki panjang 17 cm. Bila perpotongan diagonal persegi panjang berada di titik $P$ sehingga garis sumbu yang ditarik dari $AP$ berpotongan dengan titik $D$. Tentukanlah nilai dari $AD + BC$.
    <u>Jawaban</u> : 17




Mengingat garis sumbu $AP$ memotong titik $D$ jelas $DE \perp AP$ dan $AE = EP$ yang artinya $\triangle ADE$ kongruen $\triangle PDE$, darisini disimpulkan bahwa $AD = DP = \frac{17}{2}$. Selanjutnya karena $ABCD$ persegi panjang dipastikan $AD = BC = \frac{17}{2}$. Jadi $AD + BC = 17$.

14. Ada sebuah fungsi $f$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 1 \\ f\left(\frac{n}{2}\right) \times 2 + n, & n > 1 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $f(1048576)$.
JAWABAN : 22020096

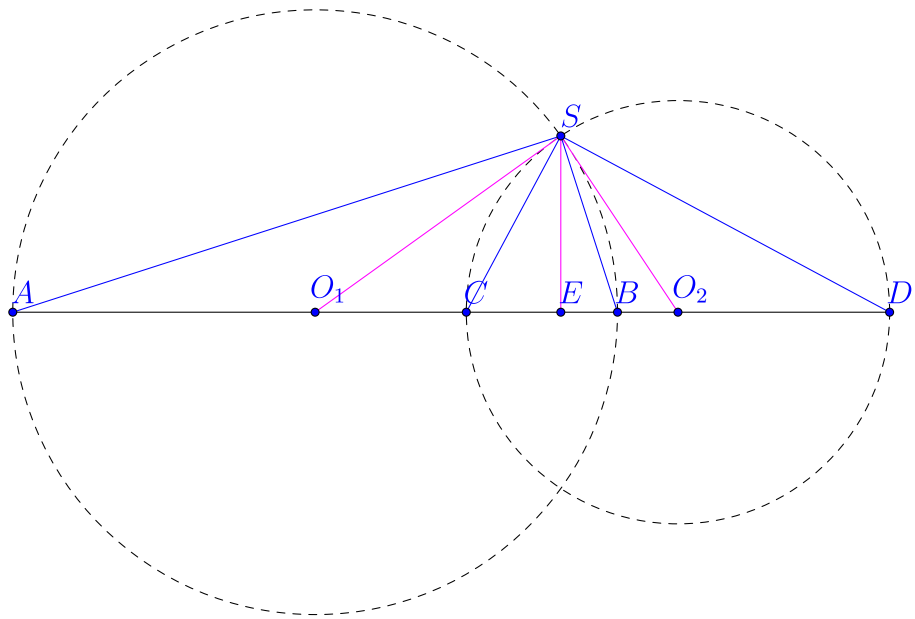
```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int f(int n){
    if(n<=1){
        return 1;
    }
else{
        return f(n/2)*2+n;
    }
}
int main (){
    cout<<f(1048576)<<endl;
}
```

Jadi akan diperoleh nilai dari $f(1048576)$ adalah 22020096.

15. Tentukan banyak solusi real $(a, b, c)$ sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4$.
JAWABAN : 8
Mengingat $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4$ yang artinya kita bisa tuliskan,
$$(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$
Padahal di lain sisi,
$$(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 + (z^2 - z)^2 \geq 0$$
Yang artinya harus terjadi kesamaan, yaitu ketika $x^2 - x = y^2 - y = z^2 - z = 0 \implies x(x-1) = y(y-1) = z(z-1) = 0$ sehingga jelas $\{x, y, z\} \in \{0, 1\}$. Maka seluruh solusi dari $\{x, y, z\}$ adalah $\{0, 0, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}$ dan $\{1, 1, 1\}$. Jadi hanya ada sebanyak 8 solusi.

16. Alpha memiliki suatu kotak berisi $x$ bola merah dan $y$ hitam. Alpha hanya ingat banyaknya bola di kotak itu tidak lebih dari 20. Alpha mencoba untuk mengambil 2 bola sekaligus dari kotak itu. Apabila peluang Alpha mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{1}{2}$. Jika $x + y$ nilainya sudah maksimum, tentukanlah nilai dari $\max\{x, y\}$ !
JAWABAN : 10

17. Diberikan 2 buah lingkaran yang masing-masing pusatnya adalah $O_1$ dan $O_2$ dimana kedua lingkaran tersebut berpotongan di 2 titik berbeda. Misalkan $S$ merupakan salah satu titik postong dari kedua lingkaran tersebut. Misalkan pula $AB$ dan $CD$ terletak pada garis $O_1O_2$ sehinga $AB$ dan $CD$ masing-masing merupakan diameter dari lingkaran dengan pusat $O_1$ dan $O_2$, serta $B, C$ terletak pada segmen $O_1O_2$. Jika diketahui bahwa $\angle ASD$ dibagi menjadi 3 sudut sama besar oleh garis $SB$ dan garis $SC$, tentukan nilai dari $\angle O_1SO_2$ adalah...
JAWABAN : $90^\circ$




Misalkan saja $\angle SAB = \alpha$ dan $\angle SDC = \beta$ lalu ingat bahwa $\angle ASB = \angle DSC = 90^\circ$ jelas $\angle SBA = 90^\circ - \alpha$ dan $\angle SCD = 90^\circ - \beta$. Darisini didapat $\angle BSE = \alpha$ dan $\angle CSE = \beta$. Lalu ingat juga $\angle ASC = \angle ASE - \angle CSE = 90^\circ - \alpha - \beta$ dan $\angle DSB = \angle DSE - \angle BSE = 90^\circ - \beta - \alpha$. Akibatnya karena $SC$ dan $SB$ membagi $\angle ASD$ menjadi 3 sudut sama besar dipastikan,

$$\angle BSC = \angle ASC = \angle BSD \Longrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha - \beta \Longrightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

Maka $\angle O_1SO_2 = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 90^\circ$. Jadi nilai dari $\angle O_1SO_2$ adalah $90^\circ$.

18. Jika $ABCD$ adalah segiempat siklis sehingga $AB = AD$ dan $AB + BC = CD$. Tentukanlah nilai dari $\angle CDA$.

19. Bilangan `pengulangan` adalah bilangan yang dituliskan sebanyak 2 kali dari bilangan semula (bilangan semulanya harus merupakan bilangan asli). Contohnya, bilangan `pengulangan` dari 102 adalah 102102. Tentukan semua bilangan `pengulangan` yang juga merupakan bilangan kuadrat sempurna.

20. Terdapat 9 peserta dalam lomba lari yaitu Anton, Budi, Caesa, Daffa, Emil, Farhan, Gusti, Hanum, dan Ihsan. Jika diketahui:

    i. Anton selalu lebih cepat dari Budi.
    ii. Caesa selalu lebih cepat dari Daffa
    iii. Emil selalu lebih cepat dari Farhan

    Jika banyaknya urutan mereka finish adalah $a$, tentukan 3 digit terakhir dari $a$?

# III. LEVEL ATAS

## III.A. SOAL

Tipe Soal : Uraian !!!

**Soal 1. (NT)** Tentukan bilangan bulat positif terbesar $N$ sehingga banyak bilangan asli anggota himpunan $\{1, 2, \ldots, N\}$ yang habis dibagi 3 sama banyaknya dengan bilangan yang habis dibagi 5 atau 7.

**Soal 2. (A)** Bila $a$, $b$, $c$ adalah bilangan real positif. Tunjukkan bahwa,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Tentukan juga kapan kesamaan diatas terjadi.

**Soal 3. (C)** Buktikan bahwa diantara sebarang 7 bilangan kuadrat sempurna terdapat dua diantaranya yang selisihnya habis dibagi 20.

**Soal 4. (NT) [Bilangan Urut]**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

*100 bilangan urut pertama*

Didefinisikan bilangan `urut` adalah bilangan asli berurutan dengan bilangan terkecil tidak harus 1, sebagai contoh ilustrasi diatas adalah 100 bilangan `urut` pertama. Selanjutnya didefinisikan $Urut[a, b]$ dengan $a \leq b$ asli adalah bilangan `urut` dengan bilangan terkecil $a$ dan bilangan terbesar $b$.

(a) Bila diberikan $Urut[a_1, a_{100}]$ dengan $k \mid a_k$ dimana $1 \leq k \leq 100$.Tentukan nilai terkecil dari $a_1$ yang memenuhi.

(b) 
   i. Bila diberikan $Urut[a_1, a_{99}]$ dengan $101 - k \mid a_k$ dimana $1 \leq k < 100$. Apakah ada bilangan $a_1$ yang memenuhi ? Tunjukkan !

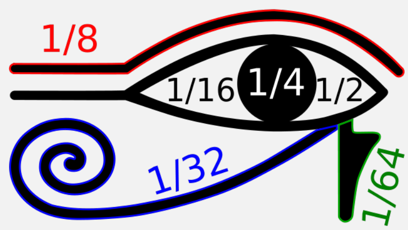
   ii. Bila diberikan $Urut[a_1, a_{n-1}]$ dengan $n + 1 - k \mid a_k$ dimana $1 \leq k < n$. Apakah ada bilangan $a_1$ yang memenuhi ? Tunjukkan !

(c)

**Soal 5. (NT)** Diberikan $a_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ dan $a_i \neq a_j$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq 9$ sehingga berlaku $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_7 + a_8 + a_9 + a_1$ dan $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 + a_1^2$. Tentukan semuam pasangan $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$.

**Soal 6. (G)** Buktikan bahwa selalu dapat dimasukkan suatu persegi kedalam segi $n$ beraturan dengan $3 \leq n$ dan titik sudutnya berada di sisi segi $n$ beraturan tersebut.

**Soal 7. (NT) [Pecahan Mesir]**




Pecahan Mesir adalah jumlah dari banyak bilangan rasional, yang masing-masing dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{n}$ dimana $n$ adalah bilangan asli. Sebagai contoh $\frac{31}{32}$ adalah Pecahan Mesir karena dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

(a) Apakah penjumlahan sejumlah Pecahan Mesir yang pertama dapat menghasilkan bilangan bulat ? Tunjukkan !

(b) Misalkan $\frac{p}{q}$ bilangan rasional dengan $\frac{1}{s} \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{s-1}$ untuk suatu bilangan asli $s$. Tunjukkan $\frac{p}{q}$ merupakan pecahan Mesir.

(c) Apakah setiap bilangan rasional positif merupakan Pecahan Mesir ? Tunjukkan !

**Soal 8. (N)** *Pecahan berbentuk* $\frac{1}{n}$ *dengan* $n$ *bilangan asli kita sebut sebagai pecahan satuan.*

Apakah penjumlahan sejumlah pecahan satuan yang pertama dapat menghasilkan bilangan bulat ? Dengan kata lain, adakah bilangan asli $N$ sehingga

$$H_N := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}$$

merupakan bilangan bulat ?

## III.B. SOLUSI

Tipe Soal : URAIAN !!!

**Soal 1. (NT)** Tentukan bilangan bulat positif terbesar $N$ sehingga banyak bilangan asli anggota himpunan $\{1, 2, \ldots, N\}$ yang habis dibagi 3 sama banyaknya dengan bilangan yang habis dibagi 5 atau 7.

Solusi. Dari himpunan $1, 2, ..., n$ bisa didapat banyaknya bilangan yang habis dibagi $3, 5, 7$ dan 35 berturut-turut adalah $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ dan $\left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor$. Kemudian asumsikan saja $n = 35a + b$ dimana $0 \leq b < 35$ yang artinya,

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 11a + \left\lfloor \frac{b}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{35} \right\rfloor$$

Lalu darisini tinjau bahwa $\frac{n-2}{3} \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ dan $\lfloor a \rfloor \leq a$ untuk setiap $a$ real, maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{35a+b-2}{3} &\leq \left\lfloor \frac{35a+b}{3} \right\rfloor \leq 11a + \frac{b}{5} + \frac{b}{7} = 11a + \frac{12b}{35} \\ \implies \quad & 35a + b - 2 \leq 33a + \frac{36b}{35} \\ \implies \quad & 2a \leq \frac{b}{35} + 2 < 3 \end{aligned}$$

Karena $0 \leq b < 35$ jelas $b \leq 1$ sehingga $n \leq 69$. Selanjutnya tinggal cek dari $n$ yang terbesar :

- Ketika $n = 69$ didapat $23 \neq 13 + 9 - 1 = 21$
- Ketika $n = 68$ sampai 66 didapat $22 \neq 13 + 9 - 1 = 21$
- Ketika $n = 65$ didapat $21 = 13 + 9 - 1 = 21$.

Jadi disimpulkan $n$ terbesar yang memenuhi adalah 65.

**Soal 2. (A)** Bila $a$, $b$, $c$ adalah bilangan real positif. Tunjukkan bahwa,

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Tentukan juga kapan kesamaan diatas terjadi.

Solusi. (Cara 1) Tinjau ruas kiri,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) &= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 2 \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 1 \end{aligned} \qquad (\star)$$

Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + 1 = 3 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$(a+b+c)\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc} + 2(a+b+c)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Kemudian misalkan saja $A = \frac{a+b+c}{3}$, $G = \sqrt[3]{abc}$ dan $H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ sehingga didapat,

$$3A \times G \geq \frac{3G + 2 \times 3A}{\frac{3}{H}}$$

$$9AG \geq 3GH + 6AH$$

Jadi berdasarkan AM-GM-HM berlaku $A \geq G \geq H$ sehingga jelas $9AG \geq 3GH + 6AH$, dengan kesamaan ketika $A = G = H \Longrightarrow a = b = c$. $\square$

(Cara 2) Berdasarkan persamaan ($\star$) dan dengan meninjau ruas kanan perlu dibuktikan bahwa,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Kemudian dari AM-GM, kita punya $\frac{\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + 1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\left(\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1$ dan $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 3\left(\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1$. Selanjutnya jumlahkan semua ketaksamaan tersebut sehingga,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 3$$

Terakhir dengan AM-GM akan didapat $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Longrightarrow \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$. Maka,

$$3\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 3 \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Jadi disimpulkan bahwa,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Kesamaan terjadi ketika $a = b = c$. $\square$

**Soal 3. (C)** Buktikan bahwa diantara sebarang 7 bilangan kuadrat sempurna terdapat dua diantaranya yang selisihnya habis dibagi 20.

SOLUSI. Tinjau bahwa untuk setiap $a$ asli berlaku $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ dan $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$. Artinya setidaknya ada 3 bilangan dengan nilai modulo 4 yang sama dan setidaknya ada 2 bilangan dengan nilai modulo 5 yang sama. Bedasarkan PHP

**Soal 4. (NT) [Bilangan Urut]**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

*100 bilangan urut pertama*

Didefinisikan bilangan `urut` adalah bilangan asli berurutan dengan bilangan terkecil tidak harus 1, sebagai contoh ilustrasi diatas adalah 100 bilangan `urut` pertama. Selanjutnya didefinisikan $Urut[a, b]$ dengan $a \leq b$ asli adalah bilangan `urut` dengan bilangan terkecil $a$ dan bilangan terbesar $b$.

(a) Bila diberikan $Urut[a_1, a_{100}]$ dengan $k \mid a_k$ dimana $1 \leq k \leq 100$.Tentukan nilai terkecil dari $a_1$ yang memenuhi.

(b) i. Bila diberikan $Urut[a_1, a_{99}]$ dengan $101 - k \mid a_k$ dimana $2 \leq k < 100$. Apakah ada bilangan $a_1$ yang memenuhi ? Tunjukkan !

ii. Bila diberikan $Urut[a_1, a_{n-1}]$ dengan $n + 1 - k \mid a_k$ dimana $1 \leq k < n$. Apakah ada bilangan $a_1$ yang memenuhi ? Tunjukkan !

(c)

Solusi. Kita hanya perlu melakukan kontruksi untuk penyelesaian soal ini.

(a) Jelas kontruksinya,

$$1, 2, 3, ..., 100$$

Maka disimpulkan $a_1 = 1$.

(b) i. Ingat bahwa $n \mid n! - n$ untuk setiap $2 \leq n$ sehingga kontruksinya didapat,

$$100! - 100, 100! - 99, 100! - 98, ..., 100! - 2$$

Maka jelas $a_1 = 100! - 100$.

ii. Sama seperti sebelumnya didapat,

$$n! - n, n! - (n - 1), n! - (n - 2), ..., n! - 2$$

Maka jelas $a_1 = n! - n$

Kontruksi diatas hanya salah satu alternatif, mungkin saja ada beberapa kontruksi lainnya (tidak perlu dibuktikan ada kontruksi lainnya). Jika ditemukan kontruksi lainnya, juga bisa dibenarkan asal syarat terpenuhi.

**Soal 5. (NT)** Diberikan $a_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ dan $a_i \neq a_j$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq 9$ sehingga berlaku $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_7 + a_8 + a_9 + a_1$ dan $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 + a_1^2$. Tentukan semuam pasangan $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$.

Solusi. Jumlahkan semua persamaan yang ada,

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_7 + a_8 + a_9 + a_1) &= 2a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6 \\ &\quad +2a_7 + a_8 + a_9 \\ &= 45 + a_1 + a_4 + a_7\end{aligned}$$

Jelas $3 \mid a_1 + a_4 + a_7$ dengan cara yang sama bisa didapat,

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + (a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) + (a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 + a_1^2) &= 2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 \\ &\quad +2a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 \\ &= 285 + a_1^2 + a_4^2 + a_7^2\end{aligned}$$

Jelas $3 \mid a_1^2 + a_4^2 + a_7^2$ maka disimpulkan solusinya diperoleh ketika $a_1 \equiv a_4 \equiv a_7 \pmod 3$. WLOG. $a_1 < a_4 < a_7$, selanjutnya bagi menjadi 3 kasus :

- $a_1 \equiv a_4 \equiv a_7 \equiv 1 \pmod 3$ jelas $a_1 = 1, a_4 = 4$ dan $a_7 = 7$. Tinjau bahwa $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \dfrac{285 + a_1^2 + a_4^2 + a_7^2}{3} = 117 \implies a_2^2 + a_3^2 = 117 - 17 = 100$ yang artinya $(a_2, a_3) = (6, 8)$ beserta permutasinya. Analog, $a_5^2 + a_6^2 = 52$ dan $a_8^2 + a_9^2 = 67$. Maka jelas ini tidak mungkin mengingat salah satu dari $a_5, a_6, a_8$ dan $a_9$ harus ada yang bernilai 9.

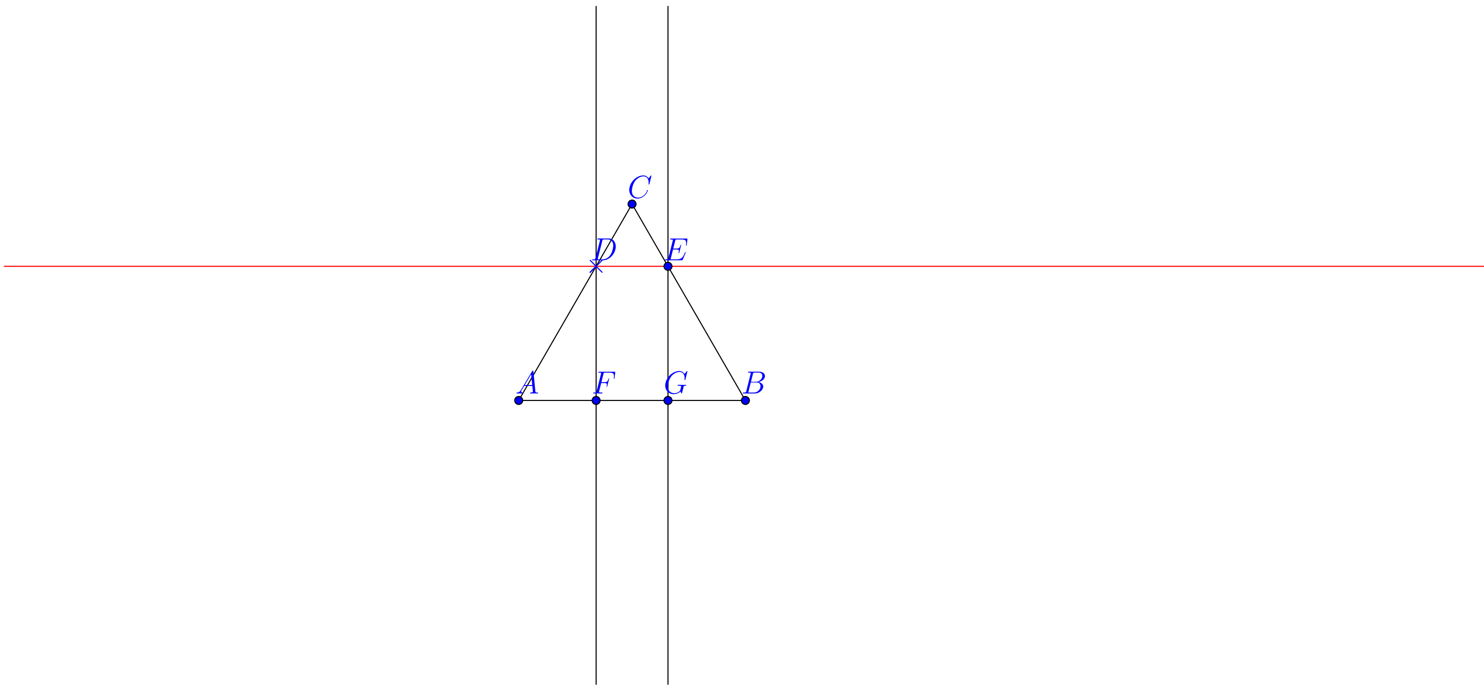
- $a_1 \equiv a_4 \equiv a_7 \equiv 2 \pmod 3$ jelas $a_1 = 2, a_4 = 5$ dan $a_7 = 8$. Tinjau bahwa $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \dfrac{285 + a_1^2 + a_4^2 + a_7^2}{3} = 126 \implies a_2^2 + a_3^2 = 126 - 29 = 97$ yang artinya $(a_2, a_3) = (4, 9)$ beserta permutasinya. Analog, $a_5^2 + a_6^2 = 37$ dan $a_8^2 + a_9^2 = 58$ maka $(a_5, a_6) = (1, 6)$ dan $(a_8, a_9) = (3, 7)$ beserta permutasinya.

- $a_1 \equiv a_4 \equiv a_7 \equiv 0 \pmod 3$ jelas $a_1 = 3, a_4 = 6$ dan $a_7 = 9$. Tinjau bahwa $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \dfrac{285 + a_1^2 + a_4^2 + a_7^2}{3} = 137 \implies a_2^2 + a_3^2 = 137 - 45 = 92$ jelas ini tidak ada solusi.

Jadi disimpulkan pasangan $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ adalah $(2, 4, 9, 5, 1, 6, 8, 3, 7)$ beserta permutasinya.

**Soal 6. (G)** Buktikan bahwa selalu dapat dimasukkan suatu persegi kedalam segi $n$ beraturan dengan $3 \leq n$ dan titik sudutnya berada di sisi segi $n$ beraturan tersebut.

Solusi. Untuk menyelesaikan soal ini kita hanya perlu kontruksi seperti ilustrasi dibawah ini.




⋆ ⋆ ⋆ Akhir dari halaman ⋆ ⋆ ⋆