Latihan Soal Teori Bilangan #AsalComot

Rafael Feng

November 2021

- Jumlah soal yang ada adalah 50 butir, akan dibahas dalam waktu 2 jam.
- Soal yang akan dibahas ditargetkan mencapai 1/2 dari total soal yang ada.
- Untuk konfirmasi jawaban maupun cara pengerjaan dapat melalui *privat chat* ZOOM.
- Soal-soal ini akan dibahas sesuai urutan nomor (nomor 1-6 mungkin tidak akan dikerjakan bila tidak ada yang konfirmasi).
- Beberapa soal hanya akan diberikan komentar ataupun ide penyelesaian.
- Bagi yang tidak bisa mengerjakan soal nomor 1-6, silahkan mengkonfirmasi melalui *privat chat* ZOOM.
- Bagi yang dapat mengerjakan nomor 41-50 dengan lancar, silahkan mengkonfirmasi melalui *privat chat* ZOOM.
- Latihan soal ini dapat diakses melalui link : `https://github.com/rafa1712/file/raw/main/Latihan%20Soal%20%Teori%20Bilangan%20November%202021.pdf`.

1. Carilah hasil dari operasi berikut ini, tanpa menggunakan alat bantu hitung.

(a) $4 \times 156 \times 25$.

(b) $211 \times 45 + 45 \times 476 + 313 \times 45$.

(c) 333×666.

(d) $204 + 576 - 125 + 196 - 176 - 75$.

(e) $1 + 2 + 3 + ... + 2021$.

(f) $108 + 109 + 110 + ... + 1802$.

(g) $2 + 8 + 14 + ... + 2018$.

(h) $1 + 3 + 5 + ... + 99$.

2. Tentukan banyak faktor dari,

(a) 2008.

(b) 333666.

(c) 720.

(d) 2026.

(e) 15132.

(f) 8827.

3. Jika pada bilangan 2^{29} terdapat 9 digit angka berbeda. Tentukan 1 angka yang tidak terdapat pada bilangan tersebut.

4. Tentukan angka terakhir dan dua angka terakhir dari,

(a) 2^{2026}.

(b) 3^{2000}.

(c) 7^{5000}.

(d) 17^{100}.

(e) $2^{2000} \times 7^{1050}$.

(f) 19^{150}.

(g) 23^{12}.

(h) 37^{1000}.

5. (a) Jika $\overline{A6A41}$ habis dibagi 9, tentukan nilai dari angka A.
   (b) Jika $\overline{333333A888888}$ habis dibagi 7, tentukan nilai dari A.
   (c) Jika $6^A \mid 4 \times 96 \times 27$, tentukan nilai terbesar dari A.
   (d) Jika $2^A \mid 10^{1002} - 4^{501}$, tentukan nilai terbesar dari A.

6. (a) Tentukan bilangan 4 digit yang memenuhi $4 \times \overline{abcd} = \overline{dcba}$.
   (b) Tentukan bilangan 6 digit yang memenuhi $6 \times \overline{abcdef} = \overline{bcdefa}$.
   (c) Tentukan jumlah nilai $a + b + c$ jika $\overline{5a} \times b = \overline{1c4}$.

7. (KTOM Maret 2020) Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a, b, c), dimana ketiganya tidak habis dibagi 3, sedemikian sehingga $a + b + c = 60$.

8. (2014 AMC 12A) A five-digit palindrome is a positive integer with respective digits $abcba$, where a is non-zero. Let S be the sum of all five-digit palindromes. What is the sum of the digits of S ?

9. (KTOM Mei 2021) Tentukan banyak bilangan bulat x sehingga $x^4 + 4$ adalah bilangan prima.

10. (2020 AMC 12B) For all integers $n \geq 9$, the value of $\dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{n!}$ is always which of the following.

11. Buktikan bahwa $\text{FPB}(a, b) \times \text{KPK}(a, b) = ab$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$.

12. Tentukan nilai dari jumlahan tak hingga dibawah ini,

$$S = \frac{2}{3} + \frac{6}{3 \times 7} + \frac{10}{3 \times 7 \times 11} + \frac{14}{3 \times 7 \times 11 \times 15} + \cdots$$

13. (2021 AMC 10A) Which of the following is equivalent to $(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})(2^{32}+3^{32})(2^{64}+3^{64})$?

14. (2014 AMC 12B) In the addition shown below A, B, C, and D are distinct digits. How many different values are possible for D ?

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & B & C & B \\ + & B & C & A & D & A \\ \hline & D & B & D & D & D \end{array}$$

15. (2014 AMC 12B) The number 2017 is prime. Let $S = \sum_{k=0}^{62} \binom{2014}{k}$. What is the remainder when S is divided by 2017 ?

16. (2014 AMC 12A) The fraction

$$\frac{1}{99^2} = 0.\overline{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2b_1b_0},$$

where n is the length of the period of the repeating decimal expansion. What is the sum $b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$?

17. (2012 AMC 12A) Let $\{a_k\}_{k=1}^{2011}$ be the sequence of real numbers defined by $a_1 = 0.201$, $a_2 = (0.2011)^{a_1}$, $a_3 = (0.20101)^{a_2}$, $a_4 = (0.201011)^{a_3}$, and in general,

$$a_k = \begin{cases} (0.\underbrace{20101\cdots0101}_{k+2 \text{ digits}})^{a_{k-1}} & \text{if } k \text{ is odd,} \\ (0.\underbrace{20101\cdots01011}_{k+2 \text{ digits}})^{a_{k-1}} & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$$

Rearranging the numbers in the sequence $\{a_k\}_{k=1}^{2011}$ in decreasing order produces a new sequence $\{b_k\}_{k=1}^{2011}$. What is the sum of all integers k, $1 \leq k \leq 2011$, such that $a_k = b_k$?

18. (2020 AIME I) Let m and n be positive integers satisfying the conditions,

    - $\text{GCD}(m+n, 210) = 1$,
    - m^m is a multiple of n^n and
    - m is not a multiple of n.

    Find the least possible value of $m+n$.

19. (OSP SMA 2013) Bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi $\text{FPB}(a, b) = 1$ dan $\dfrac{a}{b} + \dfrac{25b}{21a}$ bilangan bulat ada sebanyak...

20. (2020 AMC 12A) There exists a unique strictly increasing sequence of non-negative integers $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ such that,

$$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdot + 2^{a_k}$$

What is k ?

21. (KTOM Oktober 2021) Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga,

$$\sqrt{1! + 2! + \cdots + n!}$$

merupakan bilangan asli.

22. (KSN SMP 2020/IWYMIC ????) Dalam ekspresi,

$$a = \left\lceil \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \ldots}}} \right\rceil$$

dan

$$b = \left\lfloor \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \ldots}}} \right\rfloor$$

bilangan 2020 muncul sebanyak 1442 kali dan bilangan 1442 muncul sebanyak 2020 kali, serta $\lceil x \rceil$ dan $\lfloor y \rfloor$ berturut-turut menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar daripada x dan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada y. Tentukan nilai dari $c = a - b$.

23. (2021 AIME I) Find the number of positive integers less than 1000 that can be expressed as the difference of two integral powers of 2.

24. (KTOM Oktober 2021) Misalkan a, b bilangan riil yang memenuhi,

$$\lfloor a \rfloor \cdot \lceil b \rceil = 36$$
$$\lceil a \rceil \cdot \lfloor b \rfloor = 40$$

Tentukan banyaknya nilai berbeda yang mungkin dari $\lfloor a + b \rfloor$.

25. Tentukan nilai n sehingga $2^8 + 2^{11} + 2^n = x^2$ dimana $x \in \mathbb{N}$.

26. (1959 IMO) Prove that the fraction,

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

is irreducible for every positive integer n.

27. (1995 AIME) Let $n = 2^{31}3^{19}$, how many positive integer divisors of n^2 are less than n but do not divide n ?

28. (OSN SMA 2008) Misalkan $m, n > 1$ bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga n membagi $4^m - 1$ dan 2^m membagi $n - 1$. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jelaskan.

29. (KTOM Oktober 2021) Tentukan banyak bilangan asli $n \leq 2021$ sedemikian sehingga

$$n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n)$$

bersisa 1 jika dibagi 4.

30. (2021 AIME II) Find the least positive integer n for which $2^n + 5^n - n$ is a multiple of 1000.

31. (KTOM Juli 2021) Diberikan $\mathcal{S}$ sebuah himpunan yang berisi 55 buah bilangan asli yang berbeda.

    (a) Apabila $\mathcal{S}'$ merupakan himpunan yang beranggotakan KPK(a, b) untuk sembarang $a, b \in \mathcal{S}$ tidak harus berbeda). Tentukan banyak elemen minimum yang mungkin dari $\mathcal{S}'$.

    (b) Apabila $\mathcal{S}''$ merupakan himpunan yang beranggotakan KPK(a, b) untuk sembarang $a, b \in \mathcal{S}$ yang berbeda. Tentukan banyak elemen minimum yang mungkin dari $\mathcal{S}''$.

32. (2021 Francophone Mathematical Olympiad) Let R and S be the numbers defined by

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{223}{224} \text{ and } S = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{224}{225}.$$

Prove that $R < \dfrac{1}{15} < S$.

33. (KSP SMA 2021 Informatika) Sebuah barisan dibuat dengan aturan berikut:

- Angka 1 masuk ke dalam barisan tersebut.
- Jika X masuk maka $5X$ juga masuk.
- Jika X masuk maka $X + 100$ juga masuk.
- Tidak ada bilangan lain selain yang diperoleh dengan aturan diatas.

Apabila diurutkan dari bilangan terkecil, berapakah bilangan yang ke 2021 ?

34. (KSN SMA 2021) Pada papan tertulis secara berurutan angka-angka sebagai berikut :

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Andi harus menempatkan tanda + atau − di antara setiap dua angka yang berurutan dan menghitung nilai dari ekspresi yang dihasilkan. Sebagai contoh, Andi bisa menempatkan tanda + dan − sebagai :

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 5$$

Tentukan bilangan ganjil terkecil yang tidak mungkin bisa diperoleh Andi.

35. (2017 JBMO Shortlist) Find all pairs of positive integers (x, y) such that $2^x + 3^y$ is a perfect square.

36. (2015 JBMO Shorlist) Check if there exists positive integers a, b and prime number p such that $a^3 - b^3 = 4p^2$

37. (2011 JBMO Shorlist) Solve in positive integers the equation $1005^x + 2011^y = 1006^z$.

38. (KTOM Maret 2021) Suatu bilangan bulat k dikatakan *nyeh* apabila terdapat bilangan riil x yang memenuhi persamaan,

$$k = \left\lfloor \frac{x+20}{21} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+21}{20} \right\rfloor$$

Tentukan banyak bilangan *nyeh*.

39. Diketahui,

$$S = \sum_{n=1}^{2021} \cfrac{1}{\sqrt{n} + \cfrac{1}{\sqrt{n} + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

Tentukanlah nilai dari,

$$\left| \frac{2S - \sqrt{2022} - \sqrt{2023} - \sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3} \right|$$

40. (OSN SMA 2010) Diketahui bahwa m dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan sifat,

$$mn \mid m^{2010} + n^{2010} + n$$

Buktikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.

41. (2000 APMO) Compute the sum: $\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$ for $x_i = \frac{i}{101}$.

42. (2017 Harvard-MIT Mathematics Tournament) Find the value of,

$$\sum_{1 \le a < b < c} \frac{1}{2^a 3^b 5^c}$$

(i.e. the sum of $\frac{1}{2^a 3^b 5^c}$ over all triples of positive integers (a, b, c) satisfying $a < b < c$)

43. Diketahui $N = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{q_n}$ dengan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adalah faktor prima N dan $q_1, q_2, \ldots, q_n$ adalah bilangan bulat positif. Kemudian misalkan banyak faktor positif dari N adalah x. Buktikan bahwa hasil kali seluruh faktor positif N adalah $N^{\frac{x}{2}}$.

44. (1992 APMO) Find a sequence of maximal length consisting of non-zero integers in which the sum of any seven consecutive terms is positive and that of any eleven consecutive terms is negative.

45. (Shorlist OSN SMA 2017) Tentukan banyak triplet (p, q, r) prima sehingga $8p - q - r, 8q - r - p, 8r - p - q$ juga merupakan bilangan prima.

46. (Shorlist OSN SMA 2018) Tunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan prima p sehingga $8p^2 + 1$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat.

47. (Shorlist OSN SMA 2018) Suatu bilangan disebut pedas jika bisa dituliskan sebagai penjumlahan dari pangkat 3 dan pangkat 5 yang berbeda. Sebagai contoh $3^2 = 9, 5^3 = 125$ dan $3^0 + 3^1 + 3^2 + 5^0 + 5^2 = 38$ adalah bilangan

pedas. Buktikan bahwa pada himpunan $1, 2, \ldots, 2018$ terdapat lebih dari 140 bilangan berurutan yang tidak pedas.

48. (2014 APMO) Find all positive integers n such that for any integer k there exists an integer a for which $a^3 + a - k$ is divisible by n.

49. (2017 APMO) We call a 5-tuple of integers arrangeable if its elements can be labeled a, b, c, d, e in some order so that $a - b + c - d + e = 29$. Determine all 2017-tuples of integers n_1, n_2, ..., n_{2017} such that if we place them in a circle in clockwise order, then any 5-tuple of numbers in consecutive positions on the circle is arrangeable.

50. (2012 APMO) Determine all the pairs (p, n) of a prime number p and a positive integer n for which $\dfrac{n^p + 1}{p^n + 1}$ is an integer.