Juegos Combinatorios Imparciales

Bach. Rodolfo Mercado Gonzales
Universidad Nacional de Ingeniería

Juego

Actividad realizada por un conjunto de “decisión makers” o jugadores que interactúan entre sí, siguiendo determinadas reglas, buscando obtener algún beneficio.

Ejm: ajedrez, damas, solitario, póker, nim, ….

Juegos Combinatorios

- Juegos entre 2 personas que alternan movimientos.
- Se tiene información perfecta (los jugadores conocen todo sobre los movimientos pasados).
- No existe el azar (no hay lanzamiento de dados, monedas, etc..).

Juegos Combinatorios

Juegos Combinatorios Imparciales

Los posibles movimientos desde una posición o estado son los mismos para ambos jugadores. Ejm: juego de Nim

Juegos Combinatorios Partisanos

Cada jugador tiene un distinto conjunto de movimientos posibles desde una posición o estado. Ejm: ajedrez, damas, tres en línea.

Juegos Combinatorios Imparciales

Nos centraremos en los juegos combinatorios imparciales, extendiendo su definición:

El juego siempre termina y el único resultado es que un jugador gane y el otro pierda.

Juegos Combinatorios Imparciales

Regla de Juego Normal

Pierde el jugador que ya no puede hacer movimientos.

Regla de Juego Misere

Gana el jugador que ya no puede hacer movimientos.

Juegos Combinatorios Imparciales

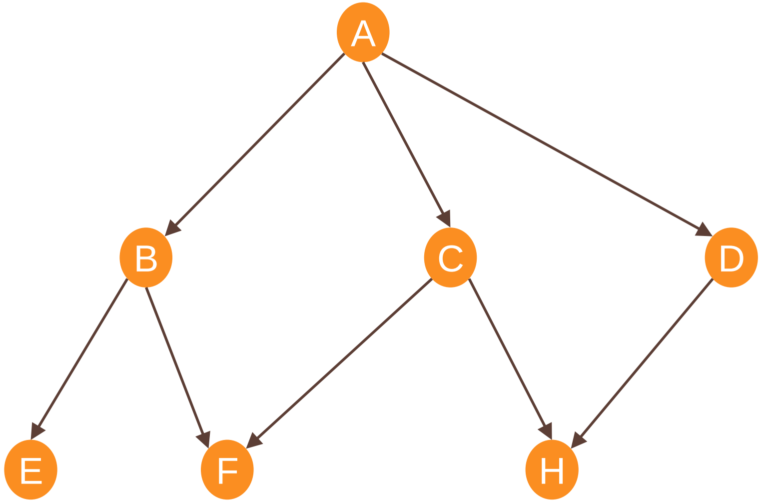
Podemos modelar estos juegos como un grafo:

Nodos: posiciones o estados del juego.

Aristas (dirigidas): posible movimiento de una posición a otra.

Juegos Combinatorios Imparciales

Notamos que el grafo formado es un DAG, ya que no pueden existir jugadas infinitas.

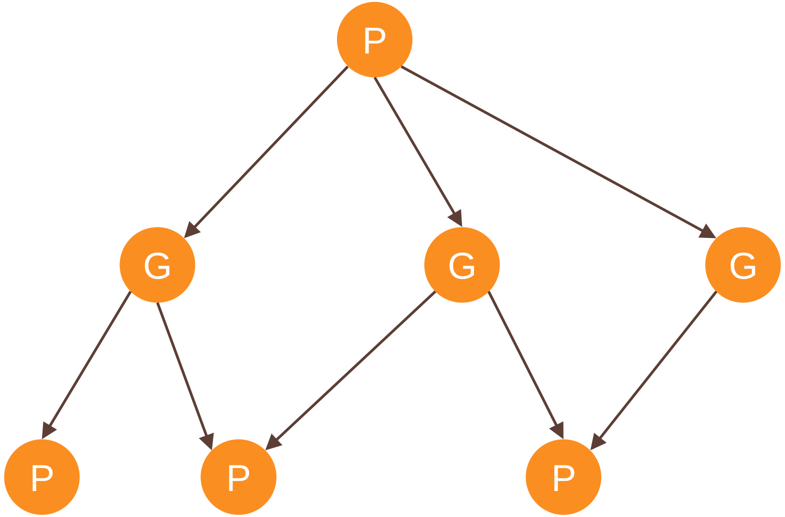


Posiciones Ganadoras y Perdedoras

En todo juego combinatorio imparcial:

1. Las posiciones terminales son perdedoras (o ganadoras según las reglas del juego)
2. Si un jugador puede moverse a una posición perdedora, entonces está en una **posición ganadora**.
3. Si un jugador sólo se puede mover a posiciones ganadoras, entonces está en una **posición perdedora**.

Posiciones Ganadoras y Perdedoras

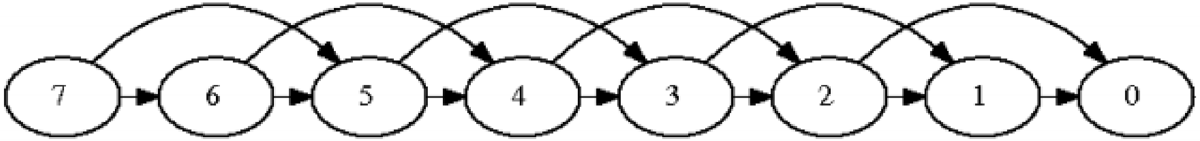


Juego de la Resta

Dado una canasta con n frutas, se enfrentan dos jugadores con turnos alternados. En cada turno un jugador debe retirar 1 o 2 frutas de la canasta. Pierde quien ya no pueda retirar frutas.

Juego de la Resta

Las posiciones o estados del juego estarían determinados por x, que indica la cantidad de frutas que hay en la canasta.



G P G G P G G P

A veces podemos encontrar un **PATRÓN** (PGGPGG…), en este caso todas las posiciones que tienen una cantidad de frutas múltiplo de 3 son perdedoras.

Algoritmo WL

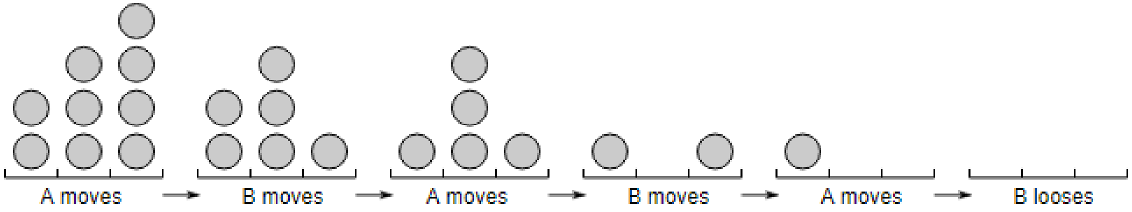
```
bool isWinning( pos ){
    // moves = possible positions to which I can move from pos
    for( all x in moves ){
        if( !isWinning( x ) ) return true;
    }
    return false;
}
```

Problemas

TIMUS 1087 – The Time to Take Stones

Juego de Nim

Dado n pilas de monedas, dos personas juegan alternadamente. En cada turno uno de ellos debe escoger un pila y retirar al menos una moneda de esta. El jugador que no pueda realizar un movimiento pierde.



Juego de Nim

Solución

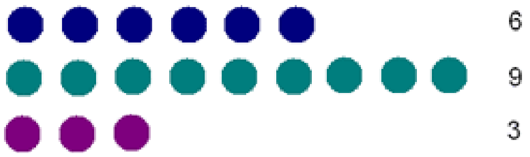
Los estados del juego se podría representar por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde x_i indica la cantidad de monedas en la pila i.

- Para una pila ? Easy
- Para dos pilas ? Imitación !!!
- Para más de dos pilas ? Cuando son muchas pilas y muchas monedas el Algoritmo WL no es eficiente.

Juego de Nim

Teorema

En el juego de Nim una posición $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es perdedora si y solo si $x_1 \ xor \ x_2 \ xor \ \dots \ xor \ x_n = 0$




```
6 = (110)2          1 1 0
9 = (1001)2       1 0 0 1
3 = (11)2             1 1
                  --------
                  1 1 0 0
```

Juego de Nim

Demostración

- **La única posición terminal es** $(0, 0, \ldots, 0)$ y tiene xor igual a 0.
- **De una posición perdedora solo se puede ir a ganadoras.**

Si estamos en una posición perdedora entonces el xor es igual a 0 , es decir en cada columna hay una cantidad par de 1s.

En la siguiente jugada tenemos que disminuir el tamaño de una pila, lo que implica al menos cambiar en una columna un 1 por un 0.

Juego de Nim

Demostración

- **De una posición ganadora siempre se puede llegar a una perdedora**

Buscar la columna más significativa donde la cantidad de 1s sea impar, escoger un número q tenga un 1 en esta columna, cambiarlo por cero y luego cambiamos a 0s o 1s las posiciones de la derecha de este número de tal forma que todas las columnas tengan cantidad par de 1s.

Misere Nim

- El jugador que no puede hacer movimiento gana.
- La teoría de juegos es mucho más complicada cuando la regla de juego es misere.

Este problema en especial, tiene la misma solución que con la regla de juego normal, excepto cuando todas las pilas tienen tamaño 1.

Problemas

UVA 10165 – Stone Game

Mínimo Excluyente

Dado un conjunto de enteros no negativos, el mínimo excluyente (**mex**) es el menor entero no negativo que no está en el conjunto.

mex ([ ]) = 0

mex ([1, 2, 3]) = 0

mex ([0, 2, 4, 6]) = 1

mex ([0, 1, 2, 3, … x]) = x+1

Grundy Number

Es un número entero no negativo que permite definir el estado de un juego combinatorio **imparcial** con **regla** de juego **normal**.

$$g(x) = mex(g(y) \mid y \text{ } es \text{ } un \text{ } posible \text{ } movimiento \text{ } desde \text{ } x)$$

Grundy Numbers

Teorema

Si el grundy de una posición es igual a 0 entonces es posición perdedora, caso contrario es ganadora.

Grundy Numbers

Demostración

- Las **posiciones terminales** tienen grundy 0.
- De una **posición perdedora** (grundy 0) solo se puede ir a posiciones ganadoras (grundy > 0).
- De una **posición ganadora** (grundy > 0) siempre se puede ir a una posición perdedora (grundy 0).

Grundy Numbers

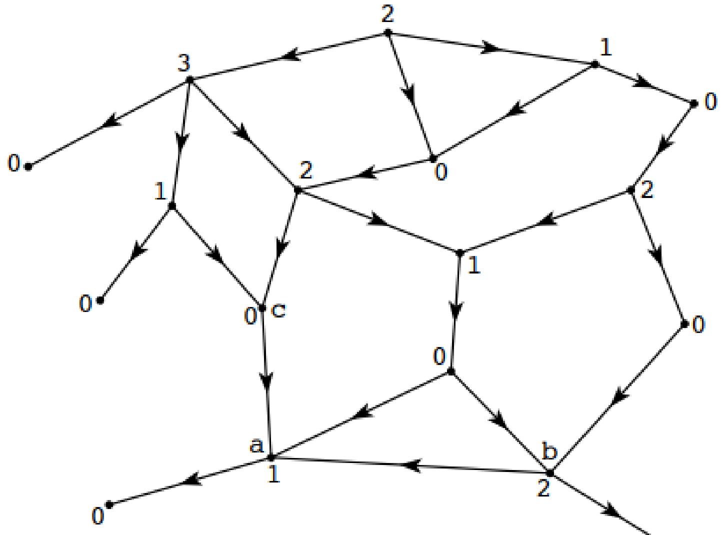


Fig. 3.2

Grundy Numbers

```
int grundy( pos ){
    //moves = possible positions to which I can move from pos
    //set s
    for (all x in moves){
        insert in s grundy(x)
    }
    int ret = 0;
    while( s.count(ret) != 0 ) ret++;
    return ret;
}
```

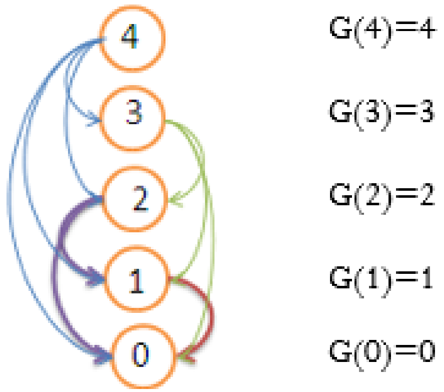
Grundy Numbers

Hallar los grundy numbers es muy parecido al algorimo WL, en qué me beneficia?

Juego de Nim con grundy numbers

Para un pila **grundy (x) = x**, entonces el grundy nos sigue representando la cantidad de monedas en la pila.

Para un nim con muchas pilas, si el xor de los grundys de todas las pilas es 0, es posición perdedora, caso contrario ganadora.



Suma de Juegos

Se da cuando un juego consiste en jugar varios “subjuegos” en paralelo. En cada turno un jugador escoge uno de los subjuegos y se realiza un movimiento sobre este. El jugador que no pueda realizar movimiento en su turno pierde.

Equivalencia de Juegos

Dados dos juegos combinatorios imparciales G1 y G2 decimos que son equivalente si para todo juego G3 vale:

Resultado (G1 + G3) = Resultado (G2 + G3)

Teorema Sprague-Grundy

- Si G es un juego combinatorio imparcial, entonces es equivalente a jugar Nim con una pila de tamaño grundy(G).

- Si un juego está formado por la suma de subjuegos con grundy numbers { g1, g2, g3, .. gn}, entonces el juego tiene grundy number:

g = g1 xor g2 xor g3 xor ….. xor gn

Problemas

PKU 2960 – S-Nim

Referencias

- Topcoder, Algorithm Games
- www.math.ucla.edu , Game Theory

¡ Good luck and have fun !