1. (Epigraph Problem)　　　　(Standard Problem)

$$\boxed{\begin{aligned}&\underset{x,t}{\text{minimize}} && t\\ &\text{subject to} && f_0(x)\le t\end{aligned}} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{\underset{x}{\text{minimize}} \ f_0(x)}$$

$$L(t,\lambda) = \underline{t + \lambda^T(f_0(x)-t)} = \underline{\lambda^T f_0(x) + (1-\lambda)^T t}$$

$$\nabla_t L(t^*,\lambda^*) = 1-\lambda^* = 0 \quad \boxed{\therefore \lambda^*=1} \cdots \boxed{\text{KKT condition (4)}}$$

KKT condition (3), complementary slackness에 의해,

$\boxed{\lambda^*>0,\ (f_0(x)-t^*)=0} \Rightarrow \lambda^*=1$ 이므로 이 조건으로 성립됨.

$(f_0(x)-t^*)<0,\ \lambda^*=0$

$$\therefore f_0(x)-t^*=0 \rightarrow \boxed{t^*=f_0(x)}$$

$$g(\lambda) = \inf_t L(t,\lambda) = \begin{cases}\boxed{f_0(x)} \cdots \lambda=1 \ (\lambda=\lambda^*)\\ -\infty \cdots \text{otherwise}\end{cases}$$

$\therefore p^* \ge f_0(x)$ 이 된다.

이를 standard form 으로 표현하면

$\boxed{\underset{x}{\text{minimize}} \ f_0(x)}$ 로 표현할 수 있다.

2. (a)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{x,t}{\text{minimize}} & t \\ \text{subject to} & -t\mathbf{1} \le Ax-b \le t\mathbf{1} \end{array}} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \boxed{\underset{x}{\text{maximize}} \ \|Ax-b\|_\infty}$$

$$L(x,t,\lambda) = t + \lambda^T(Ax-b-|t|) = \underline{\lambda^T A x - b^T\lambda + t - \lambda^T|t|}$$

$$\nabla_t L(x^*,t^*,\lambda^*) = \left\{\begin{array}{ll} 1-\lambda^* & \cdots\ t>0 \\ 1+\lambda^* & \cdots\ t<0 \end{array}\right] = 0 \ (\text{KKT condition (4)})$$

$\therefore \ \lambda^* = 1 \ (t>0)$ → KKT condition (2)에 의해,
$\lambda^* = -1 \ (t<0)$ $\boxed{\lambda^*=1}$

KKT condition (3)에 의해,

$Ax^*-b-|t^*| = 0 \quad \rightarrow |t^*| = \underline{Ax^*-b}$

$$g(\lambda) = \inf_t L(x,t,\lambda) = \begin{cases} Ax-b & \cdots (\lambda=\lambda^*=1) \\ -\infty & \cdots (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\therefore p^* \ge Ax-b$ 이 된다.

$Ax-b$의 최댓값(= l-∞ norm)을 maximize 해야하므로,

$\boxed{\underset{x}{\text{maximize}} \ \|Ax-b\|_\infty}$ 와 동치이다.

2. (b)

$$\boxed{\begin{aligned}&\underset{x,y}{\text{minimize}} \quad 1^T y \\ &\text{subject to} \quad -y \le Ax-b \le y\end{aligned}} \overset{?}{\rightleftarrows} \boxed{\underset{x}{\text{maximize}} \quad \|Ax-b\|_1}$$

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = 1^T y - \lambda_1^T(Ax-b+y) + \lambda_2^T(Ax-b-y)$$

KKT condition (4)

$$= ((\lambda_2-\lambda_1)^T A)x + (1-\lambda_1-\lambda_2)^T y - b^T(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\lambda_1^T A + \lambda_2^T A = 0 \Rightarrow (\lambda_2-\lambda_1)^T A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\therefore \lambda_1^* = 1/2 \qquad \lambda_2^* = 1/2$$

$$g(\lambda) = \inf_{x,y} L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} -b^T(\lambda_1^*+\lambda_2^*) & \cdots \begin{pmatrix}\lambda_1=\lambda_1^* \\ \lambda_2=\lambda_2^*\end{pmatrix} \\ -\infty & \cdots \text{(otherwise)}\end{cases}$$

$$\therefore p^* \ge -b^T(\lambda_1^*+\lambda_2^*)$$

3.

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{maximize}} & f(x) \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{K} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \nu & \cdots x_i > 0 \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \leq \nu & \cdots x_i = 0 \end{array}$$

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^T \cdot x_i + \nu_i^T \cdot 1$$

$$\nabla_x L(x, \lambda, \nu) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* = 0 \quad \therefore \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^*$$

$$g(\lambda, \nu) = \sup_x L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} f(x) - \nu \cdots (x_i = 0) \\ \infty \cdots (x_i > 0) \end{cases}$$

4. $Ax=b$: underdetermined equation $A \in R^{p\times n}$ $(p<n)$

$$\boxed{\{x \mid Ax=b\} = \{\underline{Fz+\hat{x}} \mid \underline{z \in R^{n-p}}\}} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} F = \begin{bmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ I \end{bmatrix} \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} A_1^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}}$$

$A = [A_1\ A_2]$, $A_1 \in R^{p\times p}$

$$A = p\,\overbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\quad A_1 \quad}^{p} & \underbrace{A_2}_{n-p} \end{bmatrix}}^{n}$$

$$\underset{(n\times 1)}{x} \Rightarrow \underset{(n\times n-p)}{F} \cdot \underset{(n-p\times 1)}{z} + \underset{(n\times 1)}{\hat{x}}$$ 꼴이다.

underdetermined linear equation의 해는

$$x = \underset{(n\times p)}{A^T} \cdot \underset{(p\times p)}{(AA^T)^{-1}} \cdot \underset{(p\times 1)}{b}$$ 이므로

$$\underset{(n\times p)}{A^T} \cdot \underset{(p\times p)}{(AA^T)^{-1}} \cdot \underset{(p\times 1)}{b} = \underset{(n\times n-p)}{F} \cdot \underset{(n-p\times 1)}{z} + \underset{(n\times 1)}{\hat{x}}$$

왼쪽에 ×A

$$\Rightarrow \cancel{AA^T \cdot (AA^T)^{-1}} \cdot \underset{(p\times 1)}{b} = \underset{(p\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times n-p)}{F} \cdot \underset{(n-p\times 1)}{z} + \underset{(p\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times 1)}{\hat{x}}$$

$$\Rightarrow \underset{(p\times 1)}{b} = [A_1\ A_2] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} (z) + [A_1\ A_2] (\hat{x})$$

5\. KKT matrix : $\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ where $P \in S_+^n$, $A \in R^{p \times n}$, $\operatorname{rank} A = p < n$

Show that each of the following statements is equivalent to nonsingularity of the KKT matrix.

(1) $N(P) \cap N(A) = \{0\}$.

(2) $Ax = 0,\ x \neq 0 \Rightarrow x^T P x > 0$.

(3) $F^T P F \succ 0$, where $F \in R^{n \times (n-p)}$ is a matrix for which $R(F) = N(A)$.

(4) $P + A^T Q A \succ 0$ for some $Q \succeq 0$.

$K = \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하면, $K \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$ 가 성립한다.

nonsingularity of the KKT matrix는 K의 역행렬이 존재한다는 것이다.

(2)에서 $Ax = 0$, $x \neq 0$ 면 $x = Fz$ where $z \neq 0$ 이 되고,
$x^T P x = z^T F^T P F z$ 가 되어 (2)와 (3)은 동치가 된다.

(1)에서 $x \in N(A) \cap N(P)$, $x \neq 0$ 이면 $Ax = 0, x \neq 0$ 이지만 $x^T P x = 0$이 된다.
$P \succeq 0$ 이므로 $Px = 0$이 되고, $x \in N(P)$ 가 된다. ∴ (2)는 (1)을 포함시키게 된다.

(2)가 성립할 때, (4)는 $Q = I$ 가 된다.
(4)가 some $Q \succeq 0$을 성립시키기 때문에, 모든 $Q \succ 0$가 성립한다.
∴ (4)는 (2)를 성립시키게 된다.

$\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ 이면 K가 singular 이므로

$\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0$ 라 하자. → $Px + A^T z = 0 \cdots ①$
$Ax = 0 \cdots ②$

①의 왼쪽에 x^T를 곱하면 $x^T P x + x^T A^T z = 0$

② ↓

$x^T P x = 0$ ∴ $Px = 0$ 이다.

이것은 $x = 0$ 이어야만 성립하고 $x \neq 0$ 이면 모순된다.

∴ $z \neq 0$ 이고 $A^T z = 0$ 은 rank A와 모순된다.

따라서 각 조건은 K의 역행렬이 존재함과 동치가 된다.