Convex Optimization HW #1 202123008 김신민

(a) A의 eigenvector를 x, eigenvalues를 λ라 할 때,

$Ax = \lambda x$가 성립한다 양변 좌측에 x^T를 곱하면

$x^TAx = \lambda x^Tx$ 이고 $\lambda x^Tx > 0$ 이다. (positive definite matrix 정의)

여기서 x^Tx는 $\|x\|_2^2 > 0$ 이므로, $\underline{\lambda > 0}$ 이다.

(b) $\det(A-\lambda I) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$= (-1)(\lambda-\lambda_1)\times(-1)(\lambda-\lambda_2)\times\cdots\times(-1)(\lambda-\lambda_n)$

$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$

여기서 $\lambda=0$ 이라고 하면, $\underline{\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$

(c) 위의 (a)에서, A의 eigenvalues $\lambda > 0$ 이다.

∴ (b)에서, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0$ 이므로 A는 invertible

2. $xz \ge y^2$에서, $xz - y^2 \ge 0$ 이고 다른말로 $\det(X) \ge 0$ 이다.

∴ $\prod_{i=0}^{n} \lambda_i \ge 0$

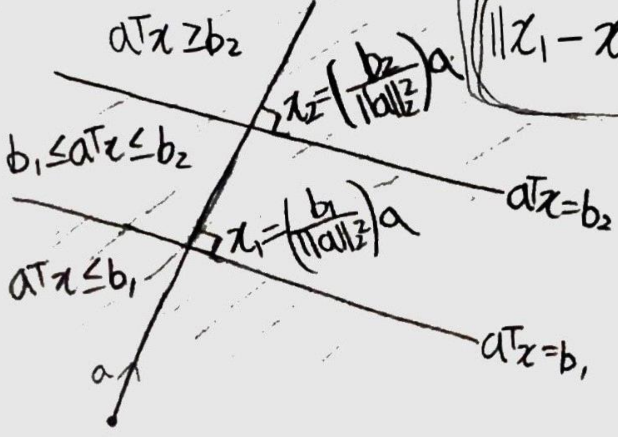
X의 eigenvector를 v, eigenvalue를 λ라 하면,

$Xv = \lambda v$ 이다. 양변 좌측에 v^T를 곱하면

$v^TXv = \underbrace{\lambda}_{\ge 0}\ \underbrace{v^Tv}_{\ge 0} \ge 0$ 이므로 X는 positive semi definite matrix 이다

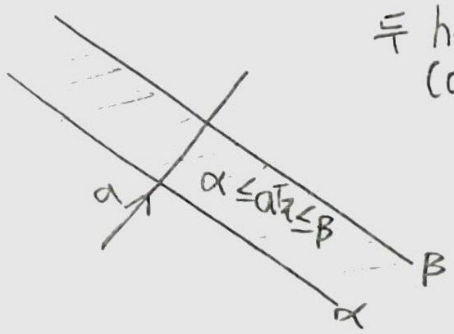
($\because \|v\|_2^2 \ge 0$)

3.



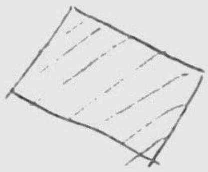
$$\|x_1 - x_2\|_2 = \left(\frac{b_1}{\|a\|_2^2}\right)a - \left(\frac{b_2}{\|a\|_2^2}\right)a = \frac{|b_1-b_2|}{\|a\|_2}$$

(a) A slab



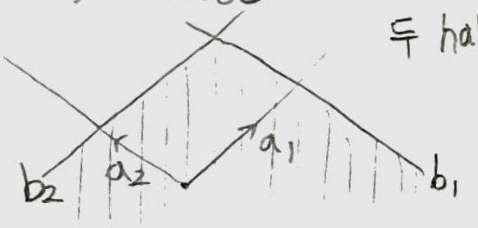
두 halfspace의 intersection ⇒ convex set
(convex set)

(b) A rectangle



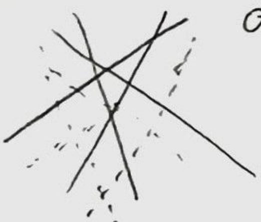
두 halfspace 의 intersection ⇒ convex set
(convex set)

(c) A wedge



두 halfspace의 intersection ⇒ $\boxed{\text{convex set}}$

(d)



어떤 고정된 y에 대해서,

$\{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$는 halfspace이다

∴ $\boxed{\text{convex set}}$

5. For $0 \le \theta \le 1$,

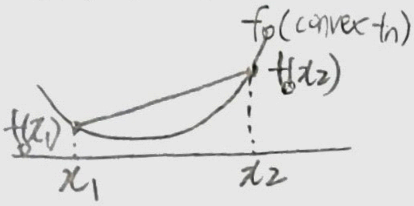
두 점 $(x', y_1'+y_2'), (x'', y_1''+y_2'') \in S \Rightarrow$
$(x', y_1') \in S_1$,
$(x'', y_1'') \in S_1$,
$(x', y_2') \in S_2$
$(x'', y_2'') \in S_2$

$(\theta x' + (1-\theta)x'', \theta y_1' + (1-\theta)y_1'') \in S_1$
$(\theta x' + (1-\theta)x'', \theta y_2' + (1-\theta)y_2'') \in S_2$ 에 의해

$\theta(x', y_1'+y_2') + (1-\theta)(x'', y_1''+y_2'') = (\theta x' + (1-\theta)x'', (\theta y_1' + (1-\theta)y_1'') + (\theta y_2' + (1-\theta)y_2''))$

$\in S$ 가 성립 ⇒ ∴ S_1, S_2 : convex set

. $f_0(x)$와 $f_1(x)$가 convex fn

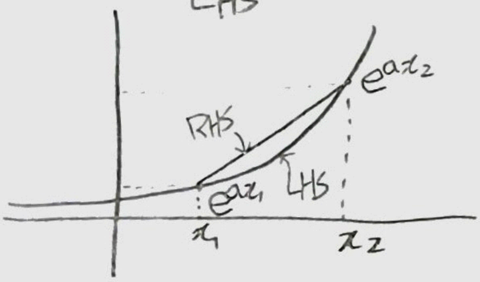


$f_0(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta f_0(x_1) + (1-\theta) f_0(x_2)$ 이다.

X_{opt}는 arg min $f_0(x)$ 이므로 convex set이다

(a) e^{ax}

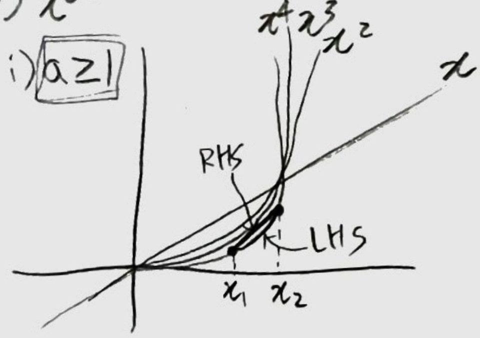
$\Rightarrow \underbrace{e^{a(\theta x_1 + (1-\theta)x_2)}}_{LHS} \le \underbrace{\theta e^{ax_1} + (1-\theta) e^{ax_2}}_{RHS}$



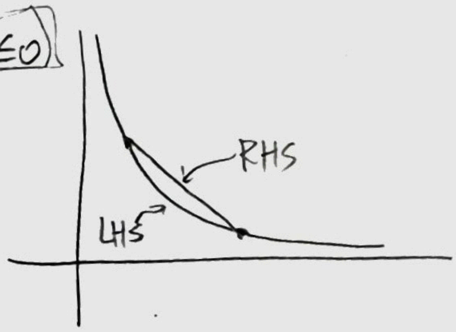
LHS≤RHS $\Rightarrow$ $\boxed{e^{ax}: \text{convex fn}}$

(b) x^a

i) $\boxed{a \ge 1}$

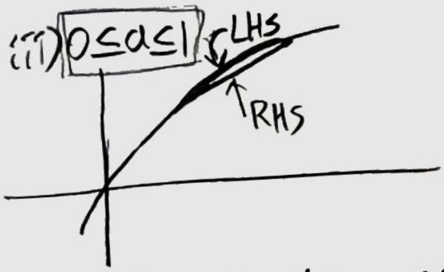


ii) $\boxed{a \le 0}$



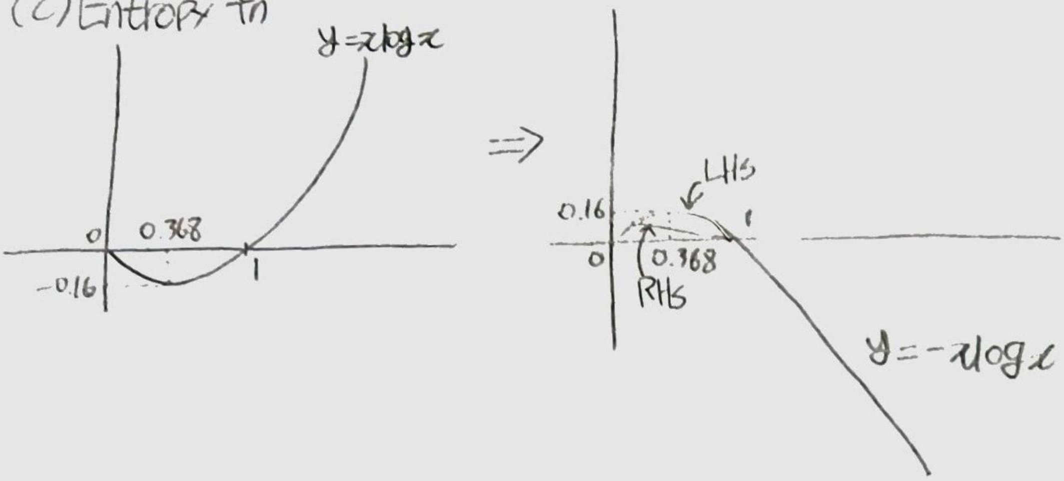
i)ii) $\Rightarrow$ R_{++} (양의 실수)에 대해서 LHS≤RHS가 성립하므로 convex fn

iii) $\boxed{0 \le a \le 1}$



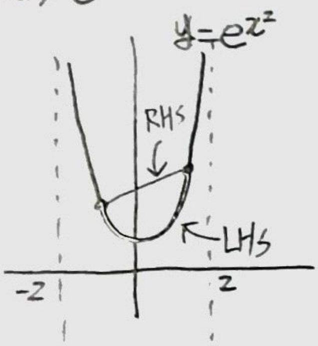
iii) $\Rightarrow$ LHS ≥ RHS 가 성립하므로 $\boxed{\text{concave fn}}$

(c) Entropy fn



$\Rightarrow$ LHS $\geq$ RHS 이므로 concave fn

(d) e^{x^2}



$\Rightarrow$ LHS < RHS
$\therefore$ convex

8. $\Rightarrow$ P, q가 distribution이기 때문에 양의 값을 가진다.

$\therefore D_{KL}(P,q) \geq 0$ 이다.

9. (a) $f^*(y) = \sup\limits_{x \in R} (\langle x, y\rangle - f(x))$

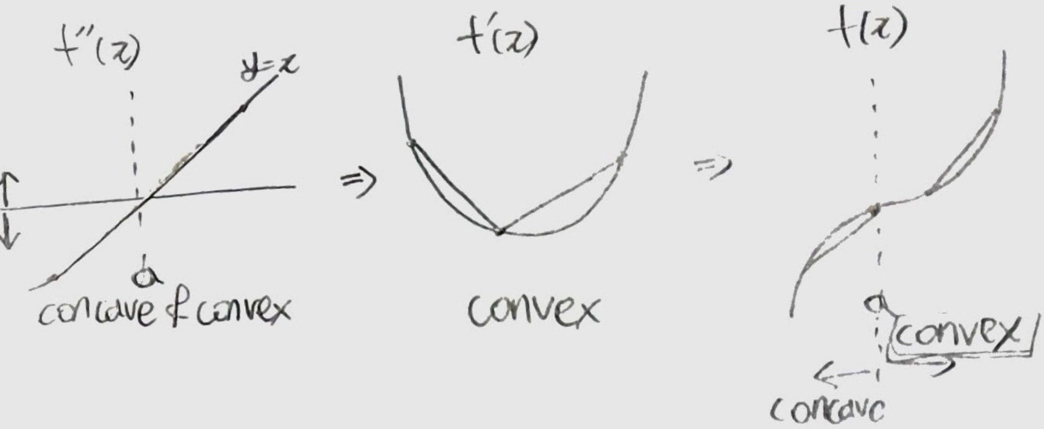
$= \sup (xy - |x|)$

$= \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

(b) $f^*(y) = \sup\limits_{x \in R} (\langle x, y\rangle - f(x))$

$= \sup (xy - e^x)$

$= \begin{cases} 1 - e^y, & y>0 \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$



$f''(x) \geq 0$ 인 $x \geq a$에서
$f(x)$가 convex fn이 된다.
($x \leq a$ 일때는 concave fn일 가능성이 있다)

11. (a)

$$f(x) = \alpha_r x_{[r]} + \alpha_{r-1} x_{[r-1]} + \cdots + \alpha_1 x_{[1]}$$

$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]}$: concave 이므로 nonnegative weighted sum인 $f(x)$도 convex fn이다

(b) $g(x) = -\log T(x,w)$라 하면 $g(x)$는 convex fn의 α, sum, log로 이루어져 있으므로 convex fn이다.

∴ $f(x)$도 convex fn이다.

12. (a) f는 pointwise maximum of k function이고 affine transformation과 norm 이기 때문에 각각의 함수는 convex 이다.

(b) $f(x) = \max\{|x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_r}| \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$이다.

Pointwise maximum이 operated 되었기 때문에

∴ $f(x)$는 convex fn 이다.