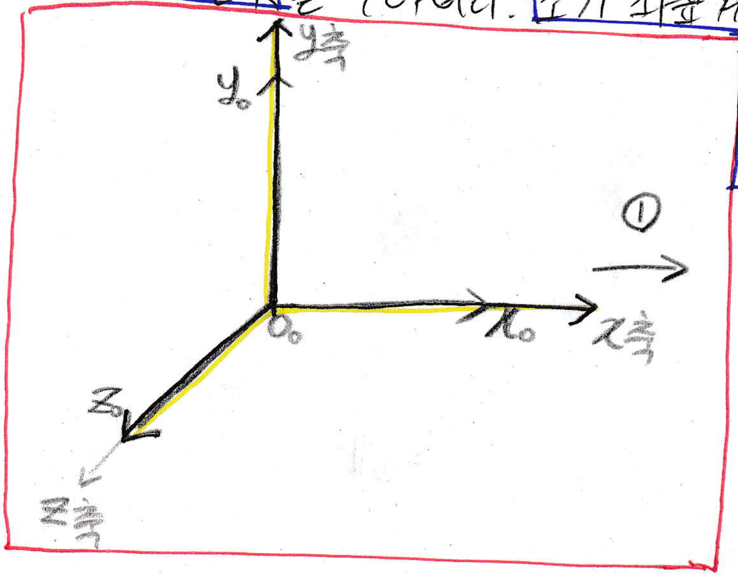
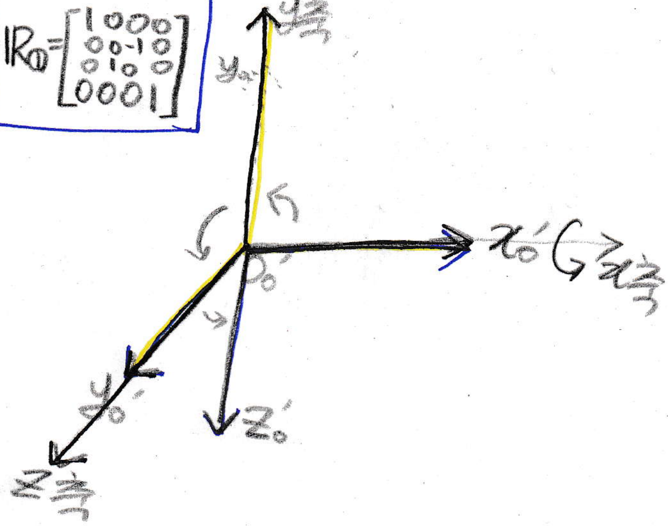
로봇공학 2장 연습문제 과제

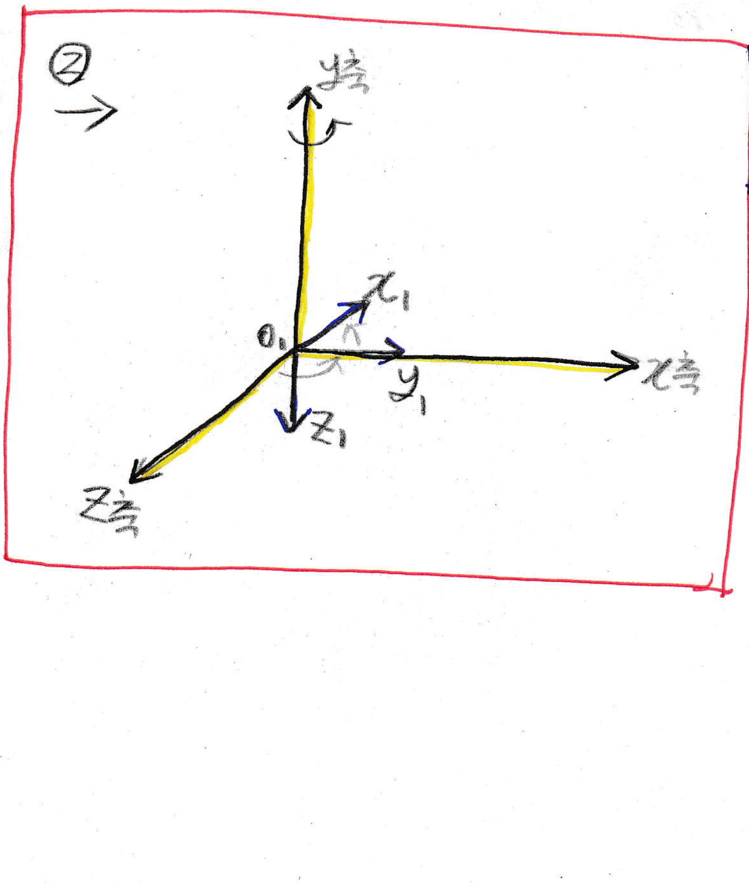
20150339 김진민

2-8. $O_1x_1y_1z_1$ 좌표계는 $O_0x_0y_0z_0$ 좌표계를 x축을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전하여, 다음에 고정 y축을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전하여 얻었다. 이 복합 변환을 나타내는 회전행렬 R을 구하여라. 초기 좌표계와 최종 좌표계를 그려라.



$$R_{①} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





$$R_{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-9 세 좌표계 $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$, $O_3x_3y_3z_3$가 주어지지 있다. 그리고

$$① \; R_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ; \quad ② \; R_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

라고 하자. 이 때 ③ $\boxed{\text{행렬 } R_2^3}$를 구하여라

① $\mathbb{R}_1^2$: 1좌표계에서 2좌표계로의 변환행렬이므로 $\mathbb{r}_2 = \mathbb{R}_1^2 \cdot \mathbb{r}_1$

$$\mathbb{R}_1^2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_2 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_2 & \hat{z}_1 \cdot \hat{y}_2 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{z}_2 & \hat{y}_1 \cdot \hat{z}_2 & \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

x축 회전 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 이므로 x축회전꼴이다.

$\therefore \theta_x = 30°$ 이다 $\Rightarrow$ $O_2x_2y_2z_2$는 $O_1x_1y_1z_1$을 x축을 기준으로 30° 회전한좌표계

② $\mathbb{R}_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: 1좌표계에서 3좌표계로의 변환행렬

y축회전 : $\begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 y축회전꼴이다.

$\therefore \theta_y = -90°$ 이다. $\Rightarrow$ $O_3x_3y_3z_3$은 $O_1x_1y_1z_1$을 y축을 기준으로 $-90°$ 회전한좌표계

③ $\mathbb{R}_2^3$: 2좌표계에서 3좌표계로의 변환행렬

$$\begin{tikzcd} O_1x_1y_1z_1 \arrow[r, "①: x축 30° 회전"] \arrow[rr, bend right, "②: y축 -90° 회전"'] & O_2x_2y_2z_2 \arrow[r, "③"] & O_3x_3y_3z_3 \end{tikzcd}$$

$\therefore$ ③ : x축 $-30°$회전, y축 $-90°$ 회전

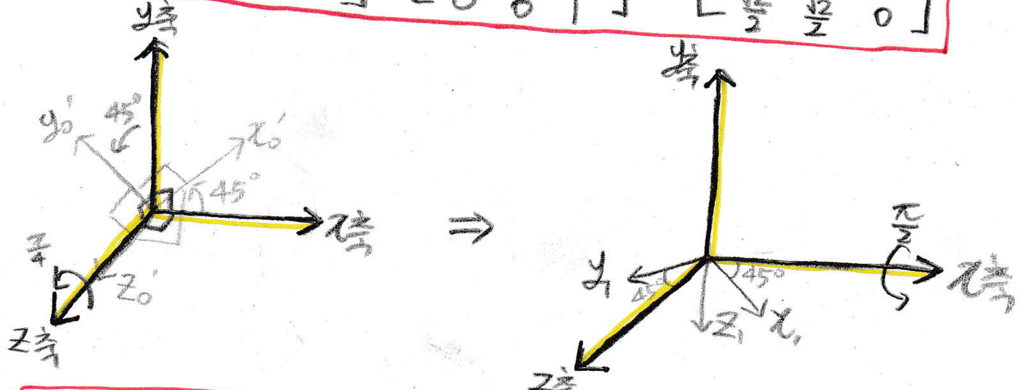
$$\boxed{\mathbb{R}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

2-15. Euler 각도 $\{\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\}$에 해당하는 회전행렬을 구하여라. 기준 좌표계에 대한 x_1축의 방향을 구하여라.

x축 회전행렬 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

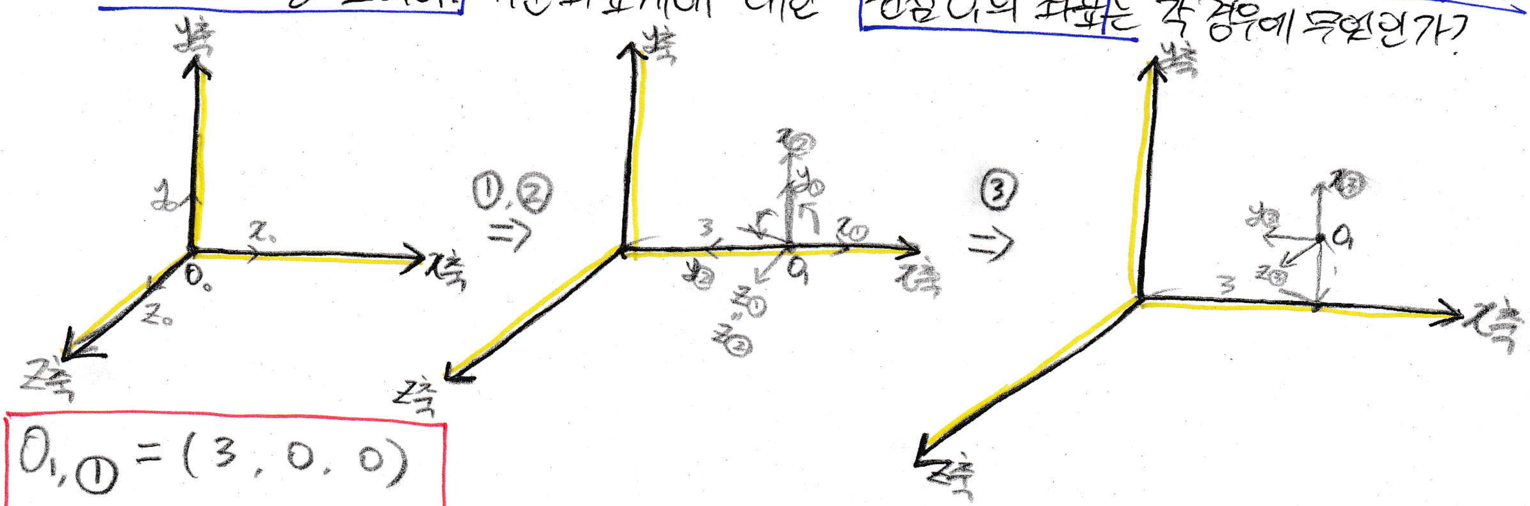
z축 회전행렬 : $\begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



$$\therefore \hat{x}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2-16. x축을 따라서 3단위만큼의 병진, 다음에 현 z축을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼의 회전, 다음에 고정 y축을 따라서 1단위 만큼의 병진을 나타내는 동차변환을 계산하고, 그 좌표계를 그려라. 기준 좌표계에 대한 원점 O_1의 좌표는 각 경우에 무엇인가?

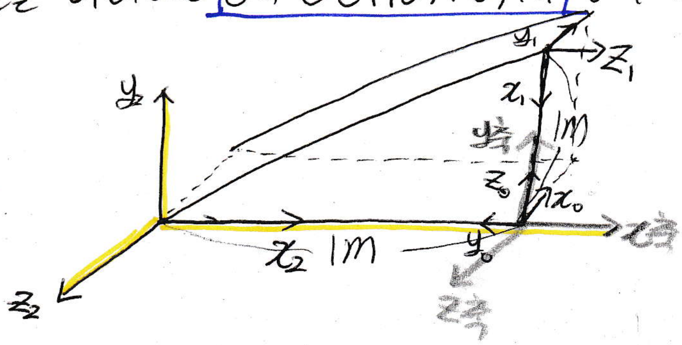


$O_{1,①} = (3, 0, 0)$

$O_{1,②} = (3, 0, 0)$

$O_{1,③} = (3, 1, 0)$

2-17. 그림에서 세 좌표계 사이의 변환을 나타내는 동차변환 H_0^1, H_0^2, H_1^2을 구하여라. $H_0^2 = H_0^1 \cdot H_1^2$임을 보여라.



기준좌표계 : xyz축이라 가정

(1) H_0^1 : [z축으로 -90°회전]① → [x축으로 -90°회전]② → [y축으로 +1 이동]③

$H_0^1 = ③ \times ② \times ①$ 이므로

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}} \cdots \boxed{1}$$

(2) H_1^2 : [y축으로 -1 이동]① → [y축으로 -90°회전]② → [z축으로 90°회전]③ → [x축으로 -1 이동]④

$H_1^2 = ④ \times ③ \times ② \times ①$ 이므로

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}} \cdots \boxed{2}$$

(3) H_0^2 : [y축으로 -90°회전]① → [x축으로 90°회전]② → [x축으로 -1 이동]③

$H_0^2 = ③ \times ② \times ①$ 이므로

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}} \cdots \boxed{3}$$

(4) H_0^2 : [y축으로 -90°회전] → [x축으로 90°회전] → [x축으로 -1 이동]

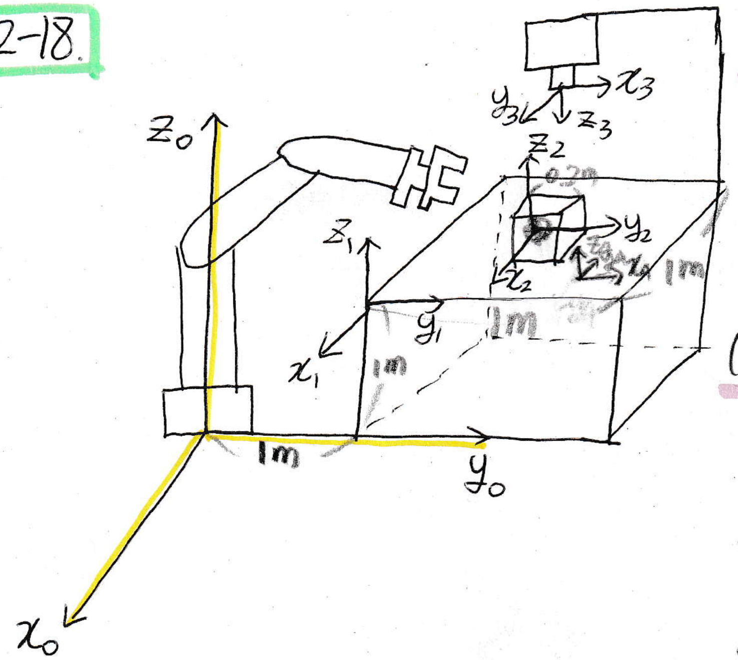
H_0^1 : [z축으로 -90°회전] → [x축으로 -90°회전] → [y축으로 +1 이동]

H_1^2 : [y축으로 -1 이동] → [y축으로 -90°회전] → [z축으로 90°회전] → [x축으로 -1 이동]

→ 공간적으로 봤을 때 H_1^2와 H_0^1의 움직임을 소거하는 방향으로 H_0^2가 움직이므로

$H_0^2 = H_0^1 \cdot H_1^2$ 이다.

2-18.



(1) ${}^0\mathbf{r}_1 = H_0^1 \cdot {}^0\mathbf{r}_0$

$H_0^1 = [y_0로\ \overset{①}{1m}\ 이동] \rightarrow [z_0로\ \overset{②}{1m}\ 이동]$

$= ② \times ① = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

(2) ${}^1\mathbf{r}_2 = H_1^2 \cdot {}^1\mathbf{r}_1$

$H_1^2 = [y_1로\ 0.5m이동] \rightarrow [x_1로\ -0.5m이동]$

$= \begin{bmatrix} 1&0&0&-0.5 \\ 0&1&0&0.5 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

${}^0\mathbf{r}_2 = H_0^2 \cdot {}^0\mathbf{r}_1 = (H_0^1 \cdot H_1^2) \cdot {}^0\mathbf{r}_0$

$\therefore H_0^2 = H_0^1 \cdot H_1^2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1&0&0&-0.5 \\ 0&1&0&0.5 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&-0.5 \\ 0&1&0&1.5 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

(3) ${}^2\mathbf{r}_3 = H_2^3 \cdot {}^2\mathbf{r}_2$

$H_2^3 = [y_2로\ 180°회전] \rightarrow [z_2로\ 90°회전] \rightarrow [z_2로\ +2m\ 이동]$

$= \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0&-1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&-1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&+1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&+1&0&0 \\ +1&0&0&0 \\ 0&0&-1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

${}^0\mathbf{r}_3 = H_0^3 \cdot {}^0\mathbf{r}_1 = (H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot H_2^3) \cdot {}^0\mathbf{r}_0$

$\therefore H_0^3 = (H_0^1 \cdot H_1^2) \cdot H_2^3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&-0.5 \\ 0&1&0&1.5 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0&+1&0&0 \\ +1&0&0&0 \\ 0&0&-1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&+1&0&-0.5 \\ +1&0&0&1.5 \\ 0&0&-1&+3 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

2-20.

$H_2^4 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1&0&0&-0.3 \\ 0&1&0&0.4 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&+0.4 \\ -1&0&0&+0.3 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$H_0^4 = H_0^2 \cdot H_2^4 = \begin{bmatrix} 1&0&0&-0.5 \\ 0&1&0&1.5 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0&1&0&+0.4 \\ -1&0&0&+0.3 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&0&-0.1 \\ -1&0&0&1.8 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

$H_3^4 = \underset{\substack{이동량 \\ (3\rightarrow4)}}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0.3 \\ 0&1&0&+0.4 \\ 0&0&1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}} \times \underset{\substack{축변경 \\ (3\rightarrow4)}}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0.3 \\ 0&-1&0&+0.4 \\ 0&0&-1&+2 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

축정보   이동량 (3기준)