

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias

Grado de Física

Trabajo Fin de Grado

Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias

Código del TFG: **FS20-29-FSC**

Tipo de TFG: **Trabajo teórico-práctico general**

Autor: Rafael Jurado Ariza



8 de noviembre de 2022

Índice general

Índice general	II
Índice de figuras	IV
Índice de tablas	V
Índice de algoritmos	VI
Resumen. Palabras clave	VII
Abstract. Keywords	VIII
1. Introducción	1
1.1. El universo homogéneo e isótropo	3
1.1.1. Principio cosmológico	3
1.1.2. <i>El Hot Big Bang</i>	3
1.2. Inflación	8
1.2.1. Dinámica del campo escalar	8
1.2.2. Inflación <i>Slow-roll</i>	9
1.3. Perturbaciones cosmológicas	11
1.3.1. Fluctuaciones con origen en inflación	12
1.3.2. El campo de fluctuaciones de densidad de energía	13
1.4. Estadística del campo de fluctuaciones	14
1.4.1. Campos aleatorios	14
1.4.2. Funciones de correlación	15
1.4.3. Campos aleatorios gaussianos	16
1.4.4. Espectro de potencias en recombinação y condiciones iniciales	17

2. Objetivos	20
3. Materiales y métodos	21
3.1. Método	22
3.2. Materiales	23
3.2.1. Transformada rápida de Fourier	23
3.2.2. Números aleatorios	24
3.2.3. Entorno de trabajo	25
3.2.4. Gráficos	25
4. Resultados y discusión	26
4.1. Campos gaussianos con espectro de potencias primordial	28
4.1.1. Ruido blanco ($n_s = 0$)	28
4.1.2. Espectro <i>blue-biased</i> (Harrison-Zel'dovich $n_s = 1$)	29
4.1.3. Espectro <i>red-biased</i> ($n_s = -3$)	31
4.2. Campos gaussianos con espectro de potencias en época de recombinación	32
4.2.1. Grandes escalas ($n_s = 5$)	32
4.2.2. Valores del CMB ($n_s = 0.965$)	34
4.3. Campo gaussiano tridimensional con los valores del CMB	35
5. Conclusiones	36
Bibliografía	38
A. Algoritmos	42

Índice de figuras

1.1.	Cuaderno con la idea original de Guth	2
1.2.	Representación de la recombina&on de protones y electrones	5
1.3.	Ilustracińn del problema del horizonte	6
1.4.	Solucińn inflacionaria al problema del horizonte	7
1.5.	Ejemplo de un potencial <i>slow-roll</i>	10
1.6.	Fluctuaciones cu&nticas a clásicas	12
1.7.	Mapa del fondo cósmico de microondas	18
1.8.	Espectro de potencias para el modelo de concordancia	19
3.1.	Entorno de trabajo en VSCode	25
4.1.	Ejemplo de un campo gaussiano aleatorio	27
4.2.	Ruido blanco $N = 32$ píxeles	28
4.3.	Ruido blanco $N = 256$ píxeles	29
4.4.	Harrison-Zel'dovich $N = 256$ píxeles	30
4.5.	Espectro primordial <i>red-biased</i> $N = 512$ píxeles	31
4.6.	Espectro en época de recombina&on $N = 256$ píxeles	33
4.7.	Valores del CMB $N = 512$ píxeles	34
4.8.	Mapa del fondo cósmico de microondas suavizado	35
4.9.	Código QR de la animación tridimensional	35

Índice de tablas

1.1. Eventos clave en la historia del universo	4
--	---

Índice de algoritmos

A.1. <i>Script Python usado para generar y representar campos gaussianos dado un $P(k)$</i>	42
--	----

Resumen

Para poder explicar ciertas peculiaridades que aparecen en la teoría del *Big Bang* se recurre al concepto de inflación. Al tratar esta idea de manera cuántica, aparece un mecanismo productor de las fluctuaciones de densidad primordiales que dieron lugar a las complejas estructuras del universo como galaxias, estrellas y la vida misma.

En este trabajo se da una introducción del marco teórico del *Big Bang* y sus problemas e inflación, así como de las fluctuaciones que hubo en el universo primordial y la estadística necesaria para ser comprendidas. Se va a estudiar que la distribución inicial de dichas fluctuaciones puede ser modelada mediante un campo de densidad aleatorio con estadística gaussiana (el cual está caracterizado completamente por su espectro de potencias primordial $P_0(k) \propto k^{n_s}$), tal y como predicen las teorías inflacionarias. Para poder profundizar, más allá de la intuición, en el significado de dicha estadística gaussiana se ha programado un algoritmo en el lenguaje Python que es capaz de simular numéricamente estas fluctuaciones en el universo primordial y, mediante la incorporación de la función de transferencia $T(k)$ al espectro de potencias $P(k) \propto k^{n_s} T^2(k)$, en la época de recombinação. Esto se hace mediante el uso de herramientas como la transformada rápida de Fourier o los números aleatorios, de las cuales también se aporta una introducción teórica.

Finalmente, se han representado las simulaciones numéricas para diferentes valores de n_s mediante mapas de calor, los cuales son los resultados cenitales del trabajo.

Palabras clave: cosmología; computacional; inflación; estructura a gran escala

Abstract

In order to explain certain peculiarities that appear in the Big Bang theory, we resort to the concept of inflation. By treating this idea in a quantum way, a mechanism that produced the primordial density fluctuations that gave rise to the complex structures of the universe such as galaxies, stars and life itself appears.

This paper gives an introduction to the theoretical framework of the Big Bang and its problems and inflation, as well as the fluctuations that occurred in the primordial universe and the statistics needed to understand them. The initial distribution of these fluctuations can be shaped by means of a random density field with Gaussian statistics (which is fully characterized by its primordial power spectrum $P_0(k) \propto k^{n_s}$), as predicted by inflationary theories. For the purpose to delve, beyond intuition, into the meaning of such a Gaussian statistics, an algorithm has been programmed in the Python language that is able to numerically simulate these fluctuations in the primordial universe and in the recombination epoch by incorporating the transfer function $T(k)$ into the power spectrum $P(k) \propto k^{n_s} T^2(k)$. This is done by using tools such as the fast Fourier transform or random numbers, of which a theoretical introduction is also provided.

Finally, the numerical simulations for different n_s values are represented by means of heat maps, which are the peak results of the work.

Keywords: cosmology; computational; inflation; large scale structure

CAPÍTULO 1

Introducción

Si el universo tuvo un principio, como el *Big Bang*, procedente de esa “explosión” la distribución de materia y energía habría sido muy irregular. Enormemente difusa. El tiempo y el espacio habrían estado curvados, retorcidos, deformados.

Pero cuando se mira al universo hoy, no se observa nada de eso. La distribución de materia y energía es casi uniforme en el universo, y el propio espacio es extremadamente plano, obedeciendo a las leyes de la geometría más sencilla. Así que, ¿cómo se llegó desde ese salvaje estado inicial hasta el presente? Ahí es donde nació la idea de inflación.

El concepto que introdujo la inflación es que, después del *Big Bang*, quizás hubo un periodo de expansión muy rápida y acelerada, expandiendo el universo tan rápido que lo convertiría en algo aplanado y uniforme, y la distribución de materia y energía habría sido también uniformada de esta manera.

La teoría inflacionaria [1–3], uno de los ejes centrales de la Cosmología moderna, fue introducida por Alan Guth —entre otros— en 1981 para resolver una serie de problemas [4] que estaban presentes en el marco teórico de la Cosmología de la época: el *Hot Big Bang*. En la [figura 1.1](#) se muestra una parte de sus notas originales.

Una de las asombrosas características de la inflación es que encierra un mecanismo para producir las fluctuaciones de densidad primordiales. Estas pequeñas fluctuaciones cuánticas son estiradas por la expansión inflacionaria y se convierten en las semillas para la formación de la estructura a gran escala del universo [5–9]. Dichas fluctuaciones se describen mediante campos aleatorios, que son la generalización de las variables aleatorias a cantidades que toman valores diferentes en distintos puntos del espacio y/o del tiempo. La estadística de los campos aleatorios está codificada en el espectro de potencias $P(k)$, donde k es el módulo del vector de onda comóvil.

EV ⑤
Dec 7, 1979

SPECTACULAR REALIZATION:

This kind of supercooling can explain why the universe today is so incredibly flat — and therefore ~~why~~ resolve the fine-tuning paradox pointed out by Bob Dicke in his Einstein day lectures.

Let me first rederive the Dicke paradox. He relies on the empirical fact that the deacceleration parameter today q_0 is of order 1.

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}}{\dot{R}} \frac{R}{\dot{R}^2}$$

Use the eqs of motion

$$\begin{aligned} 3\ddot{R} &= -4\pi G (\rho + 3p) R \\ \dot{R}^2 + K &\approx \frac{8\pi G}{3}\rho R^2, \end{aligned}$$

so

$$q_0 = \frac{\frac{1}{2}(1+3p/\rho)}{1 - \frac{3K M_p^2}{8\pi G \rho R^2}}$$

$$\frac{K}{R^2} = \frac{8\pi G}{3M_p^2} - H^2 \quad G = \frac{1}{M_p^2}, \quad H = \frac{\dot{R}}{R}$$

$$q_0 = \frac{H^2}{3M_p^2} (\rho + 3p) \frac{1}{H^2}$$

$$\frac{K}{R^2} = \frac{H^2}{(1 + \frac{3p}{\rho})} [2q_0 - 1 - \frac{3p}{\rho}]$$

Using the above eq, the fact that $\frac{3p}{\rho} \approx 0$ for today's universe, and the fact that $q_0 \approx 1$, one has

Figura 1.1. Página correspondiente al 7 de diciembre de 1979 del famoso cuaderno de Alan Guth, donde escribió su "realización espectacular". Foto: Alan Guth y Adler Planetarium and Astronomy Museum de Chicago (uso justo).

Sin embargo, si se proporciona un $P(k)$, no es muy sencillo visualizar cómo sería el correspondiente mapa espacial de fluctuaciones, lo que dificulta la intuición de lo que significa un espectro de potencias concreto. En este trabajo, mediante el uso del lenguaje de programación Python, se generarán y representarán realizaciones de distintos campos aleatorios gaussianos de densidad.

1.1. EL UNIVERSO HOMOGÉNEO E ISÓTROPO

La cosmología física necesita un marco teórico que permita explicar los datos observacionales. En ausencia de dicho marco, ni siquiera las propiedades observables más básicas de las galaxias, como el desplazamiento al rojo, el brillo o tamaño aparentes, podrían interpretarse correctamente. El actual marco teórico aceptado por la mayoría de los astrónomos es el “modelo de concordancia” —dentro de la teoría del *Big Bang*— que es un modelo basado en la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Estos modelos están basados en la suposición de que el universo se rige por la relatividad general y es esencialmente homogéneo e isótropo, si se suaviza en escalas suficientemente grandes.

1.1.1. PRINCIPIO COSMOLOGICO

La cosmología moderna se apoya en dos principios fundamentales: en primer lugar, la interacción dominante en escalas cosmológicas es la gravedad, y segundo, el principio cosmológico es una buena aproximación del universo. El principio cosmológico afirma que el universo, suavizado en escalas suficientemente grandes, es esencialmente homogéneo e isótropo. La homogeneidad tiene el significado intuitivo de que en un momento dado, el universo se ve igual en todas partes, e isotropía se refiere al hecho de que para cualquier observador que se mueve con la materia local, el universo se ve (localmente) igual en todas las direcciones.

1.1.2. EL HOT BIG BANG

La teoría estándar del *Hot Big Bang* es considerablemente exitosa, superando algunas pruebas clave de observación: expansión del universo, la existencia y espectro del *Cosmic Microwave Background* (CMB), las abundancias de elementos ligeros en el universo (nucleosíntesis) [10–12], entre otras [13].

El universo se está expandiendo [14]. Era entonces más denso y caliente en el pasado. Las partículas colisionaban frecuentemente y el universo estaba en un estado de equilibrio térmico con una temperatura T . Ajustando la constante de Boltzmann a la unidad $k_B = 1$, se mide la temperatura en unidades de energía. De este modo, midiendo las energías en electronvoltios:

$$1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 1.160 \times 10^4 \text{ K}. \quad (1.1)$$

La relación entre la temperatura del universo temprano y su edad es [15]

$$\frac{T}{1 \text{ MeV}} \simeq \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Un segundo después del *Big Bang* la temperatura del universo era de unos 10^{10} K (o 1 MeV). Como aún había pasado poco tiempo en el universo temprano, la cadencia de

Tabla 1.1. Eventos clave en la historia del universo (tomada de [15])

Evento	temperatura	energía	tiempo
Inflación	$< 10^{28}$ K	$< 10^{16}$ GeV	$> 10^{-34}$ s
Producción de materia oscura	?	?	?
Bariogénesis	?	?	?
Rotura simetría electrodébil	10^{15} K	100 GeV	10^{-11} s
Formación de hadrones	10^{12} K	150 MeV	10^{-5} s
Desacoplamiento de neutrinos	10^{10} K	1 MeV	1 s
Formación de núcleos	10^9 K	100 KeV	200 s
Formación de átomos	3400 K	0.30 eV	250 000 a
Desacoplamiento de fotones	2900 K	0.25 eV	380 000 a
Primeras estrellas	50 K	4 meV	100 Ma
Primeras galaxias	20 K	1.7 meV	1 Ga
Formación del Sistema solar	3.8 K	0.33 meV	9 Ga
Nacimiento de Einstein	2.7 K	0.23 meV	13.8 Ga

las reacciones era extremadamente alta, así que pasaron muchas cosas en un corto periodo de tiempo (véase [tabla 1.1](#)).

Un acontecimiento importante en la historia del universo primitivo es la formación de los primeros átomos y el consecuente desacoplamiento de los fotones (véase [figura 1.2](#)). Ocurrió 380 000 años después del *Big Bang* y se le conoce por **recombinación**. En este punto, la temperatura era lo suficientemente baja —debajo de 0.3 eV— para que se formaran átomos de hidrógeno mediante la reacción $e^- + p^+ \rightarrow H + \gamma$. Alrededor de 0.25 eV, los fotones se desacoplaron de la materia y el universo se torna transparente. Estos fotones todavía se ven hoy en día como un resplandor del *Big Bang*. Estirada por 13 800 millones de años de expansión cósmica, la primera luz del universo se observa hoy como una débil radiación de microondas, el CMB [16].

Una característica destacable de las correlaciones observadas en el CMB es que abarcan escalas mayores que la distancia recorrida por la luz entre el inicio del *Hot Big Bang* y el momento en que se creó el CMB. Esto entra en conflicto con la causalidad, a menos que las correlaciones se generaran antes del *Hot Big Bang*. De hecho, cada vez hay más pruebas de que el *Big Bang* no fue el comienzo del tiempo, sino que las fluctuaciones de densidad primordiales se produjeron durante un periodo anterior de expansión acelerada llamado inflación.

Aun así, surgen dilemas en esta teoría ya que se limita a aquellas épocas en las que el universo es lo suficientemente frío para que los procesos físicos fundamentales

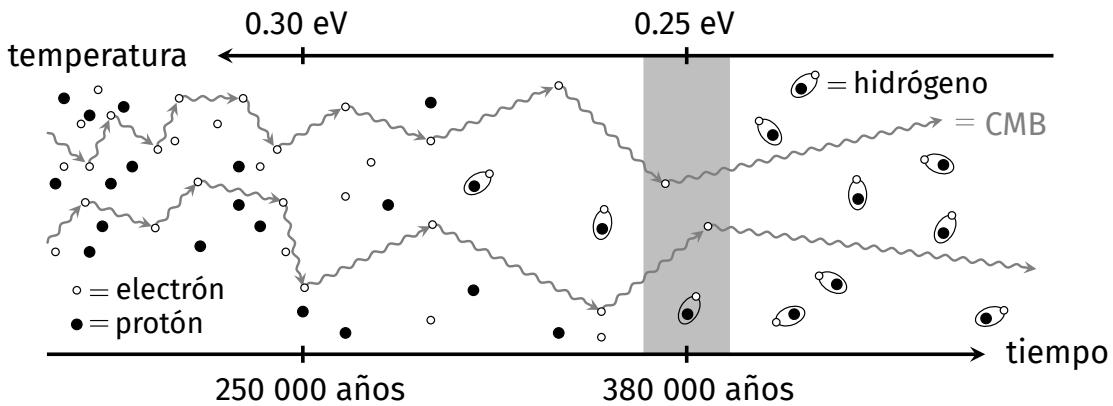


Figura 1.2. Representación de la recombinación de protones y electrones en átomos de hidrógeno neutros y el correspondiente desacoplamiento de los fotones

que subyacen estén bien consolidados y comprendidos a través de la experiencia en la Tierra; no aborda el estado del universo en momentos anteriores, más calientes. Estas cuestiones cruciales sin respuesta en el *Hot Big Bang* —precursoras en la introducción de la inflación— son el problema de la **planitud**, el problema del **horizonte** y la existencia de **monopolos magnéticos**. Tanto la primera como la segunda son el objeto de estudio de este texto al estar relacionadas con las condiciones iniciales del universo, que tuvieron que ser muy especiales y finamente ajustadas para dar lugar a lo que se observa hoy día. La última, la existencia de monopolos magnéticos y otras partículas que hoy no se observan pero deberían estar ahí [13], también queda resuelta con inflación pero no se dirá más sobre ella en este escrito.

Para especificar las condiciones iniciales del *Hot Big Bang*, se definen las posiciones y velocidades de todas las partículas en un intervalo de tiempo inicial, o aproximando al universo como un fluido la presión y densidad. Las leyes de la gravedad se utilizan entonces para hacer evolucionar el sistema en el tiempo. En la teoría estándar del *Big Bang* se supone la distribución de materia como homogénea e isotrópica [15]. Pero, ¿cómo se explica esta uniformidad del universo temprano? Incluso es algo que contrasta con la imagen proyectada por la teoría del *Big Bang* donde la mayor parte del universo parece no haber estado en contacto causal y no hay motivo dinámico para que estas regiones causalmente no conectadas tengan tales propiedades físicas similares que se suponen. Este problema de la homogeneidad se conoce como el problema del **horizonte**.

Para visualizar el primer problema, considérense dos direcciones opuestas en el cielo. Los fotones del CMB que son recibidos de dichas direcciones fueron emitidos en los puntos etiquetados como q y p en la figura 1.3. Se observa que los fotones fueron liberados lo suficientemente cerca de la singularidad del *Big Bang* para que los conos de luz del pasado de q y p no se superpongan. Como ningún punto se encuentra dentro de los horizontes de q y p , se tiene el siguiente enigma: ¿Cómo “saben” los fotones procedentes de estos dos puntos que deben estar a la misma

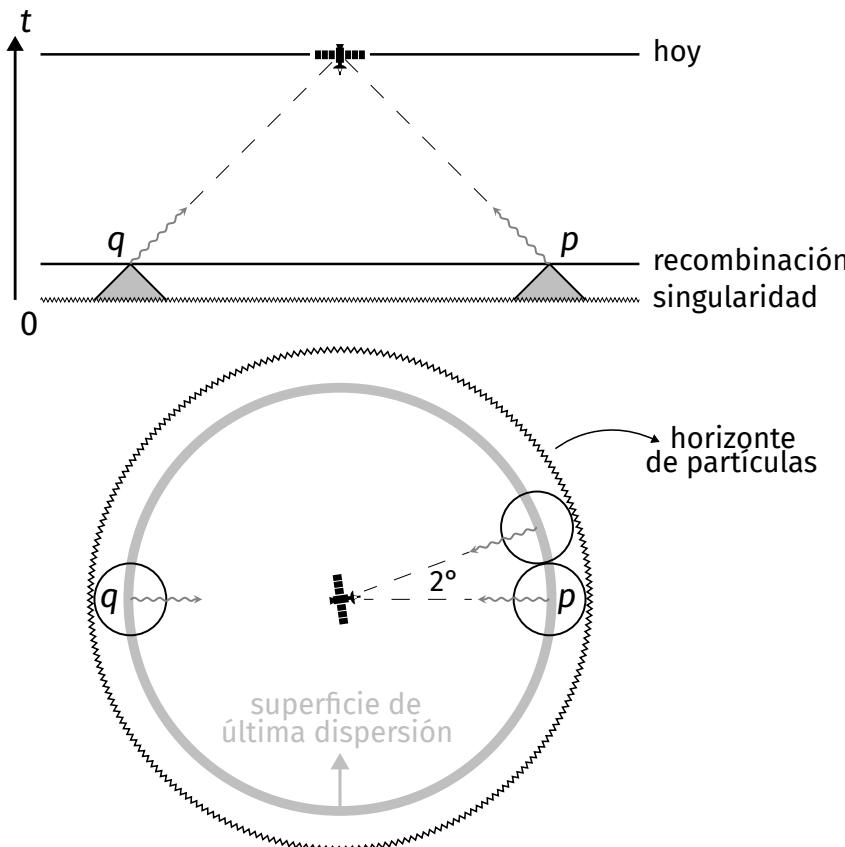


Figura 1.3. Ilustración del problema del horizonte en el modelo convencional del *Big Bang*. Todos los eventos que son observados actualmente están en nuestro cono de luz pasado. La intersección de nuestro cono de luz del pasado con la franja espacial en el momento de la recombina-ción es la superficie de última dispersión. Los puntos que están separados por más de 2° en el cielo parecen no haber estado nunca en contacto causal, ya que sus conos de luz pasados no se solapan. Notar que la singularidad del *Big Bang* es un momento en el tiempo y no un punto en el espacio.

temperatura? Simplemente no hubo tiempo suficiente para que las diferencias en las temperaturas iniciales se eliminaran mediante transferencia de calor. Lo mismo se aplica para cualesquiera dos puntos en el CMB que estén separados por más de 2° [15].

En teorías inflacionarias la singularidad de la figura 1.3 es la época de recalentamiento, la transición entre inflación y el *Hot Big Bang*. Notar que el tiempo $t = 0$ ahora se traslada a un momento previo. La física sigue manteniendo el tiempo entre recalentamiento y recombina-ción en 380 000 años, pero los conos de luz se estiran drásticamente por la expansión inflacionaria permitiendo que estos se superpongan antes del fin de inflación. Esto es representado esquemáticamente en la figura 1.4.

Según las ecuaciones de la relatividad general de Einstein, la estructura espacio-temporal se ve afectada por la presencia de materia y energía. A pequeña escala, el espacio parece plano, como la superficie de la Tierra si se observa en un área pequeña. Sin embargo, a gran escala, el espacio se curva por el efecto gravitatorio de la materia. Dado que la relatividad indica que la materia y la energía son equivalentes, este efecto también se produce por la presencia de energía (como la luz y

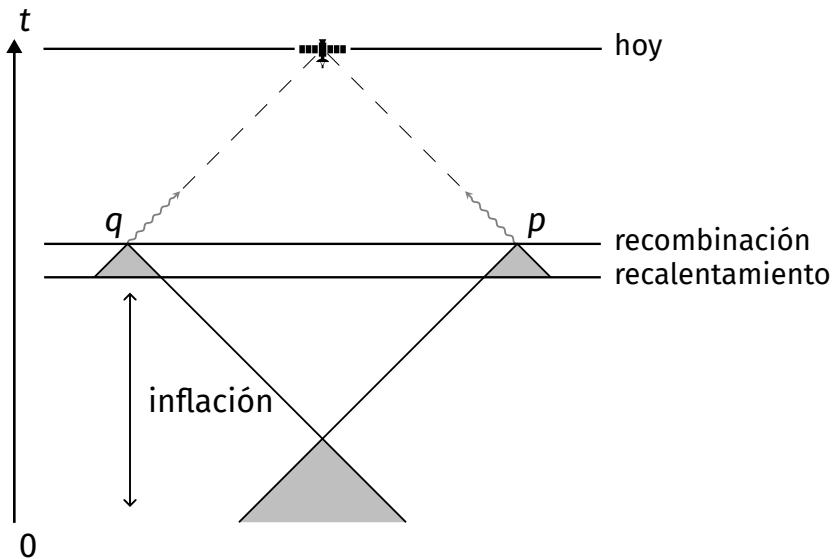


Figura 1.4. Solución inflacionaria al problema del horizonte. La singularidad del *Big Bang* estándar se sustituye por la superficie de recalentamiento. En lugar de marcar el comienzo del tiempo, ahora corresponde a la transición de la inflación a la evolución clásica del *Big Bang*. Todos los puntos del CMB tienen conos de luz pasados que se superponen y, por tanto, se originan en una región del espacio conectada causalmente.

otras radiaciones electromagnéticas) además de la materia. El grado de curvatura del universo depende de la densidad total de materia/energía presente ρ . Dicha relación viene dada por la primera ecuación de Friedmann [17] en un universo sin constante cosmológica

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.3)$$

donde

$$H = H(t) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (1.4)$$

es el parámetro de Hubble, donde $a(t)$ es el factor de escala (cantidad adimensional) del universo, el cual cuantiza el tamaño físico de este. La forma de $a(t)$ depende de las propiedades del material dentro del universo [13]. Las constantes G y c son la constante gravitacional de Newton y la velocidad de la luz, respectivamente. El parámetro de curvatura es k —es decir, una medida del grado de curvatura del espacio-tiempo. Un valor positivo, cero o negativo de k corresponde a un universo cerrado, plano o abierto, respectivamente. Lo que se conoce como problema de la planitud es por qué el universo tenía (y tiene) un valor tan finamente ajustado para ρ tal que $k = 0$,

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho. \quad (1.5)$$

Los problemas descritos arriba sugieren que hubo una fase antes del *Hot Big Bang*, durante la cual la homogeneidad del universo y sus correspondientes fluctuaciones fueron generadas. Un periodo de expansión acelerada es suficiente para resolverlos. Pero es necesario un escenario viable para dirigir tal expansión. Los campos escalares son la receta a seguir.

1.2. INFLACIÓN

De lo que se sabe de teoría de campos escalares, para obtener una expansión acelerada, la presión efectiva debe ser negativa [18]. Inflación, aparentemente, fue dirigida por una forma de energía cuya presión $\mathcal{P} < 0$. La presión negativa no es algo familiar para los físicos. Así, sea lo que sea que conduce inflación, no es materia ordinaria o radiación. Tampoco puede ser una constante cosmológica: en este caso, el universo estaría en un estado de rápida inflación perpetua, mientras que es necesario que el periodo inflacionario termine y exista una transición de la fase dominada por radiación a la fase dominada por materia, ambas conocidas.

La forma más simple de generar tal época transitoria de expansión acelerada es mediante la energía potencial de un campo escalar. En física de partículas, se utilizan los campos escalares para representar partículas de espín cero. Se transforman como un escalar (es decir, no cambian) bajo transformaciones de coordenadas. En un universo homogéneo, un campo escalar será función del tiempo únicamente. Notar que no hay campo escalar conocido que pueda regir inflación. Aunque se conoce un campo escalar en la naturaleza, el campo de Higgs, usarlo para dirigir inflación resulta complicado. Sus propiedades e interacciones están lo suficientemente restringidas, por ahora, para que se sepa que no puede servir como fuente de la inflación. No obstante, hay que tener en cuenta que puede ser cierto que la idea de la inflación sea correcta, pero esté impulsada por algo distinto a un campo escalar.

1.2.1. DINÁMICA DEL CAMPO ESCALAR

Se toman como punto de partida las expresiones de la densidad de energía y presión efectivas de un campo escalar $\phi(t, \mathbf{x})$ que se denominará **inflatón**. Como se indica en la notación, el valor del campo depende del tiempo t y de la posición \mathbf{x} . Asociado a cada valor del campo hay una densidad de energía potencial $V(\phi)$. Cuando el campo es dinámico (cambia con el tiempo) entonces también incluye una densidad de energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Si la energía asociada al campo escalar domina el universo, entonces sirve como fuente de la evolución de este en el modelo FLRW [15], donde se tiene al mismo ocupado por un fluido perfecto. Dichas expresiones de la densidad de energía y presión, se obtienen por comparación del tensor energía-momento (ecuaciones relatividad general de Einstein) del campo escalar con el de un fluido perfecto, y son

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.6a)$$

$$\mathcal{P}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (1.6b)$$

respectivamente, donde $\dot{\phi}$ indica derivada temporal.

En lo sucesivo son utilizadas las unidades naturales, esto es, $c = \hbar = 1$. Sea definida la ecuación de estado de un fluido perfecto con el número adimensional w :

$$w \equiv \frac{\mathcal{P}_\phi}{\rho_\phi}. \quad (1.7)$$

El universo está acelerando solo si es gobernado por uno o varios componentes energéticos con ecuaciones de estado $w_i < -1/3$ [19]. Así que durante inflación se ha de cumplir esta condición.

En el marco FLRW, el campo escalar es homogéneo y por tanto, solo depende del tiempo, esto es, $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t)$. Este obedece la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.8)$$

donde $V'(\phi) = dV/d\phi$. El término $\dot{\phi}^2/2$ en (1.6) es como la “energía cinética” del campo y $3H\dot{\phi}$ en (1.8) viene de la expansión del universo y actúa como una fricción. Con las expresiones en (1.6), la ecuación de estado del campo escalar es

$$w(t) = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (1.9)$$

con los límites $-1 \leq w(t) \leq 1$. La ecuación de arriba es generalmente dependiente del tiempo. No obstante, si $\dot{\phi}^2 < 4V(\phi)$ entonces $w < -1/3$ y la condición para inflación es satisfecha. Más aún, si $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, entonces la ecuación de estado se torna $w \simeq -1$ y es constante. La expansión asociada del universo es, en este último caso, exponencial con H y ϕ siendo prácticamente constantes [19].

1.2.2. INFLACIÓN SLOW-ROLL

Hasta ahora, la forma del potencial $V(\phi)$ está indeterminada y hay bastantes escenarios de inflación posibles en la literatura, véase [20]. Sin embargo, las predicciones de los modelos más simples de inflación son bastante robustas y de este modo no es necesario especificar todos los detalles siempre y cuando se cumplan ciertas características. El escenario más popular y simple de inflación supone un campo escalar “rodando lentamente” (de aquí en adelante se usará el anglicismo *slow-roll* para referirnos a este tipo de escenarios) hacia su estado fundamental [1,3]. La energía potencial de un campo escalar *slow-roll* es muy cercana a constante (si el potencial no es muy pronunciado) por lo que rápidamente llega a dominar sobre la energía cinética (y la energía de todas las demás partículas). Un ejemplo es mostrado en la figura 1.5; inflación acaba una vez el campo haya llegado al mínimo del potencial, donde oscilará y decaerá a partículas más ligeras —eventualmente a aquellas del modelo estándar de partículas— en un proceso llamado **recalentamiento** (del que no se conocen los detalles, pero se tienen varios mecanismos físicos para conseguirlo), siguiendo a este la escena del *Big Bang* que fue discutida en la sección anterior. En

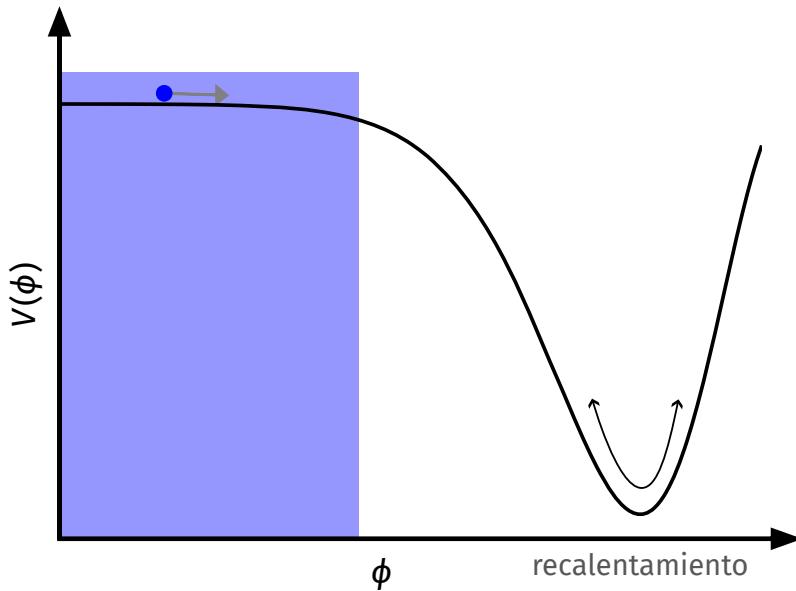


Figura 1.5. Ejemplo de un potencial *slow-roll*. Inflación ocurre en la parte sombreada.

ese momento, el campo ya no rueda lentamente, sino que tiene una energía cinética importante, por lo que oscila en torno al mínimo. Entonces, la ecuación de estado (1.9) ya no está cerca de -1, sino cerca de cero, por lo que el universo ha pasado a una época de expansión desacelerada. Entonces, al final, ϕ decae en partículas más ligeras. Con el tiempo, quizá tras una larga cadena de desintegraciones, el resultado es un universo casi completamente homogéneo, dominado por la radiación.

Estos modelos contienen un solo campo escalar ϕ (inflatón) y resolver la ecuación de movimiento (1.8) se vuelve accesible haciendo la aproximación *slow-roll* donde el término $\ddot{\phi}$ es despreciable. La motivación física aquí es que interesa más un comportamiento de expansión, así el potencial domina en la densidad de energía [21]. La condición es

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi); \quad (1.10)$$

diferenciando se obtiene

$$\ddot{\phi} \ll V'(\phi), \quad (1.11)$$

tal y como se buscaba. De este modo, se tiene una simple ecuación *slow-roll* para campos homogéneos:

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (1.12)$$

Combinando la ecuación anterior con la ecuación de Friedmann (1.3) en un universo plano y usando las unidades naturales,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi), \quad (1.13)$$

se obtiene un potente y simple aparato para deducir la historia de la expansión de cualquier modelo inflacionario.

La inflación *slow-roll* es, por lo general, cuantificada por los **parámetros adimensionales de slow-roll**^{*} [13]

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (1.14a)$$

$$|\eta| \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} \ll 1, \quad (1.14b)$$

donde el primero mide la pendiente del potencial y el segundo, su curvatura. Estos criterios dan la intuición exacta: el potencial debe ser plano en el sentido de tener pequeñas derivadas si el campo ha de rodar lo suficientemente lento para que inflación sea posible. Ya que $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$ son equivalentes a $V'/V \ll 1$ y $V''/V \ll 1$, respectivamente, la aproximación *slow-roll* es automáticamente satisfecha si $V(\phi)$ es lo **suficientemente** plano.

1.3. PERTURBACIONES COSMOLOGICAS

El universo es homogéneo e isótropo a escalas mayores de 100 Mpc [15], pero a escalas más pequeñas se observan grandes desviaciones de la densidad media en forma de galaxias, cúmulos de galaxias y la red cósmica formada por hojas y filamentos de galaxias. ¿Cómo crecen las estructuras en el universo y cómo se describen?

En el modelo estándar cosmológico que es mencionado en la [sección 1.1](#) se supone que el universo es altamente homogéneo en sus tiempos más tempranos. Estas enormes estructuras galácticas observadas hoy en día han crecido a partir de pequeñas perturbaciones iniciales de la densidad debido a la acción de la gravedad. En este escenario, la formación de estructuras en el universo implica dos temas a tratar: (i) las propiedades de las perturbaciones de densidad iniciales, y (ii) la evolución temporal de las perturbaciones cosmológicas en un universo en expansión. Para entender la estructura a gran escala del universo, se han de introducir perturbaciones y, mientras sean lo suficientemente pequeñas (régimen lineal), estudiar las propiedades estadísticas dadas por sus correspondientes funciones de distribución.

Si se descomponen las perturbaciones cosmológicas en “modos” de Fourier, se hallará que algunos de ellos se amplifican durante la evolución lineal mientras que otros se amortiguan. Los resultados de la evolución temporal están representados por una **función de transferencia** lineal que describe el cambio en la amplitud de la perturbación como una función del modo de Fourier. La importancia de esta función de transferencia radica en que, una vez que el espectro de la perturbación (es decir, la amplitud de la perturbación en función del modo de Fourier) se establece en algún momento durante inflación, nos permite calcular el espectro de potencias de la perturbación en cualquier momento posterior. Como se verá, si las perturbaciones

*Notar que ϵ es positivo por definición y η puede ser positivo o negativo

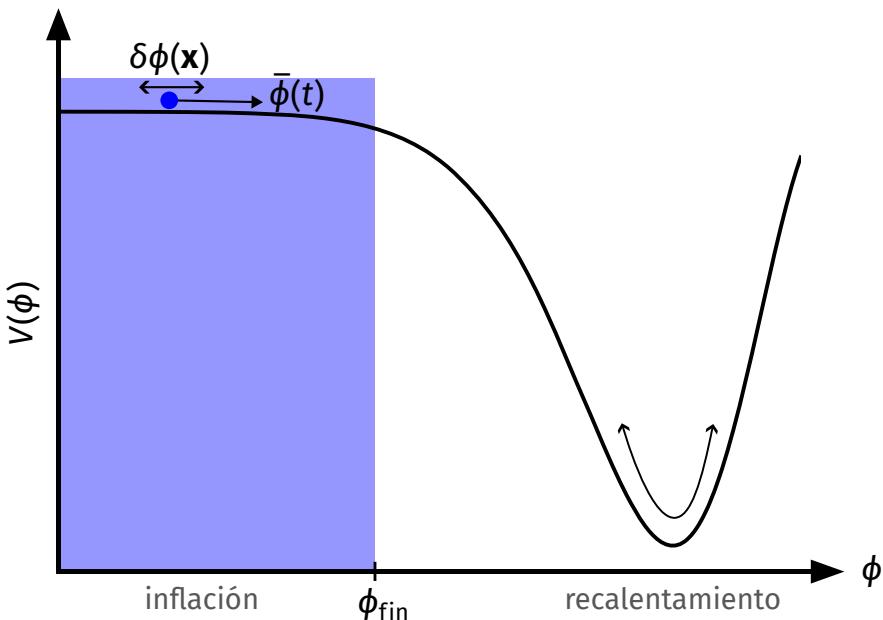


Figura 1.6. Las fluctuaciones cuánticas $\delta\phi(\mathbf{x})$ en torno a la evolución del fondo del inflatón clásico $\bar{\phi}(t)$ afectan a la duración del período inflacionario. Las regiones que adquieren fluctuaciones negativas $\delta\phi$ permanecen dominadas por el potencial durante más tiempo, y por lo tanto se inflan más tiempo, que las regiones con $\delta\phi$ positivas. Por lo tanto, las distintas partes del universo experimentan evoluciones ligeramente diferentes, lo que induce variaciones en la densidad después de la inflación, $\delta\rho(t, \mathbf{x})$.

de densidad tienen una distribución gaussiana, entonces el campo de densidad está completamente especificado por el espectro de potencias.

1.3.1. FLUCTUACIONES CON ORIGEN EN INFLACIÓN

Ahora se ha de considerar el mayor logro de la inflación, que no se previó cuando se propuso la teoría: proporciona un mecanismo concreto para generar las semillas de la estructura en el universo. Hay que tener presente que la evolución del campo inflatón $\phi(t)$ gobierna la densidad de energía $\rho(t)$ (1.6a). En esencia, la idea es que las inevitables pequeñas fluctuaciones espaciales del campo inflatón $\delta\phi(\mathbf{x})$ producidas por el principio de incertidumbre se transforman en fluctuaciones clásicas de la densidad de energía, $\delta\rho(t, \mathbf{x})$, cuando inflación ha terminado. Los detalles de este proceso son muy técnicos y se salen de la mira de este texto. Esto se ilustra en la figura 1.6. Las regiones del espacio que terminen inflación primero comenzarán a diluirse y, por tanto, acabarán teniendo densidades más pequeñas. Las regiones que sienten inflación durante más tiempo tendrán densidades más altas. Vale la pena destacar que la teoría no fue diseñada para producir estas fluctuaciones, sino que su origen es una consecuencia natural de tratar inflación cuánticamente. Además, se verá que las propiedades estadísticas de las perturbaciones espaciales creadas por la inflación coinciden muy bien con las observaciones.

1.3.2. EL CAMPO DE FLUCTUACIONES DE DENSIDAD DE ENERGÍA

A la hora de describir la evolución del campo de densidad $\rho(t, \mathbf{x})$ para explicar la estructura a gran escala que se observa hoy, se toma que esta empezó con pequeñas desviaciones iniciales del modelo FLRW homogéneo y creció por inestabilidad gravitatoria. En épocas donde estas desviaciones son muy pequeñas, pueden ser tratadas como perturbaciones alrededor del fondo homogéneo (indicado por una barra superior), tomando solamente términos a primer orden en las cantidades perturbadas (indicadas por δ). Esto se conoce como **teoría lineal** y el régimen donde es válida, **régimen lineal**. La teoría newtoniana fue inicialmente formulada por Bonnor [22].

En concreto, el objetivo principal de este texto es el tratamiento de la densidad de energía ρ . Para este campo se define el correspondiente campo de fluctuaciones

$$\delta(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\delta\rho(t, \mathbf{x})}{\bar{\rho}(t)} = \frac{\rho(t, \mathbf{x}) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}. \quad (1.15)$$

En el régimen lineal, la ecuación en derivadas parciales (EDP) que gobierna la evolución del campo de fluctuaciones de densidad (1.15) es lineal en las cantidades perturbadas [23]. De hecho, la única dependencia espacial es debida a las perturbaciones y se trabaja a primer orden en ellas. Si la curvatura del universo, como es el caso del nuestro, es muy pequeña (puede ser despreciada), este tipo de EDPs son particularmente adecuadas para ser tratadas en el espacio de Fourier. Sea definida la transformada (inversa) espacial de Fourier como

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\delta(\mathbf{k})], \quad (1.16)$$

donde, al ser \mathbf{x} las coordenadas comoviles, \mathbf{k} son los vectores de onda comoviles. De la ecuación anterior se tiene la transformada (directa) de Fourier:

$$\delta(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}[\delta(\mathbf{x})]. \quad (1.17)$$

De este modo, el campo de fluctuaciones es expresado como una superposición de un espectro de “modos” ondulantes. Un modo cualquiera es $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ y su amplitud es $\delta(\mathbf{k})$, el valor correspondiente del campo de fluctuaciones en el espacio de Fourier. La longitud de onda λ de dicho modo se relaciona con el vector de onda \mathbf{k} por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} = \frac{2\pi}{k}, \quad (1.18)$$

donde k representa frecuencia angular espacial. De ahí que las perturbaciones de longitud de onda larga correspondan a números de onda pequeños, y las perturbaciones de longitud de onda corta corresponden a números de onda grandes. Un modo será caracterizado por el módulo de su vector de onda, su número de onda k .

Las derivadas respecto de \mathbf{x} se vuelven relaciones algebraicas en el espacio de Fourier haciendo que la EDP se convierta en un conjunto de ecuaciones diferenciales

ordinarias (ODE), las cuales están desacopladas: es posible resolver la ecuación para un \mathbf{k} , sin saber la solución para otros valores \mathbf{k}' . Esto quiere decir que cada modo de Fourier evoluciona independientemente.

1.4. ESTADÍSTICA DEL CAMPO DE FLUCTUACIONES

En cosmología, usualmente, no se predice el comportamiento y evolución de sistemas simples, sino más bien las propiedades estadísticas de un gran conjunto de ellos. Por ejemplo, no hay forma de predecir qué punto en el universo debería tener exceso de densidad y cuál defecto, pero es posible predecir la probabilidad de estos sucesos. Además, particularmente en este caso, al ser fluctuaciones cuánticas todo lo que se puede hacer son predicciones estadísticas. Por lo tanto, el universo observable será tomado como una realización concreta de un conjunto estadístico de posibilidades. Dicha descripción estadística es necesaria para poder relacionar teoría con observaciones.

Fundamentalmente, el campo de fluctuaciones $\delta(t, \mathbf{x})$ contiene toda la información sobre la estructura a gran escala del universo en cualquier instante de tiempo. Para caracterizar esta estructura y comparar observaciones de δ con teoría, tiene todo el sentido pensar en δ como una realización de un proceso estocástico. Ya que dicho proceso no está limitado a un solo punto, sino a todo el espacio, la maquinaria matemática necesaria es la teoría de campos aleatorios [24].

1.4.1. CAMPOS ALEATORIOS

Los campos aleatorios son la generalización natural de una variable aleatoria. Sea r una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad (FDP) $\mathbb{P}(r)$, donde está toda la información de r codificada. Sabiendo todos los momentos (media, segundo momento, varianza, etc.) de $\mathbb{P}(r)$ es posible reconstruir la FDP. Estos momentos son los que se miden experimentalmente.

Un campo aleatorio $\delta(t, \mathbf{x})$ es una variable aleatoria en cada punto del espacio \mathbf{x} . Así, se tiene un número infinito de variables aleatorias, una por cada punto en el espacio. Por definición, δ tiene media nula

$$\langle \delta \rangle = \left\langle \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\rho}} \langle \rho - \bar{\rho} \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\rho} - \bar{\rho}) = 0, \quad (1.19)$$

donde $\langle \dots \rangle$ indica media del conjunto o valor esperado del proceso estocástico sobre el que está el campo aleatorio δ .

Antes de continuar, hay que discutir un punto clave. Primero, en cosmología solo se tiene disponible un universo observable, entonces al contrario que en otras ciencias experimentales no es posible volver a “ejecutar el universo” desde un conjunto diferente de condiciones iniciales (consistente con las propiedades estadísticas), llegar a observar diferentes realizaciones del conjunto estadístico y promediar estos

resultados para construir los valores esperados. De algún modo, es necesario definir cómo se van a medir los valores esperados cuando solo se dispone de una realización del universo observable.

Para poder hacer alguna inferencia sobre el proceso estocástico subyacente, hay que postular algún tipo de “ergodicidad” o “hipótesis de muestra razonable”. La ergodicidad se refiere a la propiedad matemática de los campos aleatorios de que promediar en volumen (espacialmente) converge a los valores esperados a medida que el volumen va llegando al infinito. En general, es difícil demostrar que un campo aleatorio tiene esta propiedad. Sin embargo, se puede demostrar que un campo aleatorio gaussiano, homogéneo y con media cero cumple ergodicidad [25]. Por otro lado, la hipótesis de la muestra razonable [26] afirma que zonas bien separadas del universo pueden considerarse realizaciones independientes del proceso estocástico subyacente y que el universo observable contiene muchas de esas realizaciones.

Mientras que la ergodicidad tiene un preciso enunciado matemático que puede aplicarse o no a un determinado campo aleatorio, la hipótesis de la muestra razonable es más ambigua. Sin embargo, la hipótesis de la muestra razonable es más fuerte que la ergodicidad y probablemente más útil para estudiar la estructura a gran escala [27], porque para obtener una muestra razonable no es necesario promediar sobre un volumen infinito, lo que es prácticamente imposible.

1.4.2. FUNCIONES DE CORRELACIÓN

Por definición, el valor medio del campo de fluctuaciones (1.19) es cero. La primera medida estadística no trivial de este campo (fijado un tiempo t) es la función de correlación de dos puntos

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}, t), \delta(\mathbf{x}', t) \rangle = \int \mathcal{D}\delta \mathbb{P}[\delta] \delta(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x}', t). \quad (1.20)$$

Para evitar exceso de notación, como el tiempo está fijado, se suprimirá la dependencia temporal. La integral es una integral funcional sobre el espacio de realizaciones del campo $\mathcal{D}\delta$ y $\mathbb{P}[\delta]$ es la FDP de las dos variables aleatorias $\{\delta(\mathbf{x}), \delta(\mathbf{x}')\}$. Así, la ecuación (1.20) es un valor esperado que representa el promedio del proceso estocástico (fluctuaciones cuánticas en inflación) que creó el campo aleatorio δ . Ya que el principio cosmológico requiere que todas las direcciones y posiciones en el universo sean equivalentes, el campo de fluctuaciones debe ser estadísticamente homogéneo e isótropo. Estas dos características implican que la función de dos puntos ha de ser invariante ante traslaciones y rotaciones de forma que $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \xi(r)$, donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. La ecuación (1.20) es generalizable a funciones de N -puntos.

En la sección anterior se ve que los modos de Fourier de las pequeñas fluctuaciones evolucionan independientemente. De este modo, es útil definir la función de dos puntos en el espacio de Fourier

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k), \quad (1.21)$$

donde $\delta(\mathbf{k})$ es un campo aleatorio, en principio, complejo

$$\delta(\mathbf{k}) = A_{\mathbf{k}} + iB_{\mathbf{k}}. \quad (1.22)$$

Por ser el campo de fluctuaciones $\delta(\mathbf{x})$ real, se ha de cumplir

$$\delta(-\mathbf{k}) = \delta^*(\mathbf{k}) \iff A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}} \wedge B_{\mathbf{k}} = -B_{-\mathbf{k}}. \quad (1.23)$$

La función $P(k)$ es conocida como espectro de potencias y es la transformada de Fourier tridimensional de la función de correlación

$$P(k) = \int \xi(x) e^{-ik \cdot x} d^3x. \quad (1.24)$$

Por la realidad de $\delta(\mathbf{x})$, la función de correlación también es real, así que $P(k)$ es una función real de igual manera, por lo que el espectro de potencias no es más que la norma al cuadrado de los coeficientes de Fourier en (1.17). A grandes rasgos, esto indica cómo de grandes son las fluctuaciones en el campo $\delta(\mathbf{x})$ en diferentes escalas. Por ejemplo, un campo aleatorio con un espectro de potencias constante no tiene predilección por ninguna escala (ruido blanco). Mientras que la función de correlación $\xi(r)$ es el objeto a considerar en las observaciones, el espectro de potencias $P(k)$ es más fácil de predecir teóricamente y será usado en las simulaciones de este trabajo. Ambos están relacionados por (1.24) y son, por lo tanto, descripciones completamente equivalentes de la estadística.

1.4.3. CAMPOS ALEATORIOS GAUSSIANOS

De lo discutido en los dos apartados anteriores, reuce que es bastante costoso especificar un campo aleatorio genérico porque es necesaria la función de correlación que a su vez necesita de la FDP, la cual es deducida si se conocen una cantidad infinita de momentos estadísticos. Afortunadamente, el campo de densidad y sus fluctuaciones en el inicio del universo quedan bien descritos por un campo aleatorio gaussiano, homogéneo e isótropo [15, 18, 23].

Para un campo aleatorio gaussiano, la FDP $\mathbb{P}[\delta(\mathbf{x})]$ es un función gaussiano de $\delta(\mathbf{x})$. La FDP para N puntos en el espacio, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, es una multivariable gaussiana

$$\mathbb{P}(\delta(\mathbf{x}_1), \dots, \delta(\mathbf{x}_N)) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det(\mathcal{M})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \delta(\mathbf{x}_i) (\mathcal{M}^{-1})_{ij} \delta(\mathbf{x}_j)\right), \quad (1.25)$$

donde $\mathcal{M}_{ij} \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}_j) \rangle = \xi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ es matriz de covarianza. Todas las funciones de N -puntos están determinadas por una integral funcional sobre \mathbb{P} y por tanto fijadas completamente en términos de la función de correlación de dos puntos $\xi(r)$.

Cualquier combinación lineal de variables gaussianas tiene también distribución gaussiana. Esto permite obtener las FDP de las transformadas de Fourier (1.22), que son combinaciones lineales de $\delta(\mathbf{x})$. Se han de cumplir las condiciones de realidad (1.23). Por esto, se prueba que las FDP de $A_{\mathbf{k}}$ y $B_{\mathbf{k}}$ son gaussianas con media cero

y desviación típica $P(k)$ [23] que, de manera computacional serán simuladas usando números aleatorios gaussianos. Así, para un campo aleatorio gaussiano, los diferentes modos de Fourier son mutuamente independientes, al igual que sus partes reales e imaginarias. Esto, a su vez, implica que las fases $\phi_{\mathbf{k}}$ de los diferentes modos se distribuyen independiente y uniformemente en el intervalo entre 0 y 2π .

$$\delta(\mathbf{k}) = A_{\mathbf{k}} + iB_{\mathbf{k}} = |\delta(\mathbf{k})| e^{i2\pi\phi_{\mathbf{k}}}, \quad |\delta(\mathbf{k})| \sim \mathcal{N}(0, P^2(k)) \wedge \phi_{\mathbf{k}} \sim U(0, 1). \quad (1.26)$$

Cada punto del espacio tendrá una pareja $(|\delta(\mathbf{k})|, \phi_{\mathbf{k}})$ asignada en la simulación. Destacar que el espectro de potencias $P(k)$, relacionado con la función de dos puntos $\xi(r)$ por (1.24), es la única función necesaria para definir completamente un campo aleatorio gaussiano.

Los campos aleatorios gaussianos son especialmente fáciles de manejar. La cuestión importante, por supuesto, es si el campo de densidad primordial es gaussiano o no. Por el momento, hay al menos tres razones para preferir un campo gaussiano a uno no gaussiano. En primer lugar, un campo de perturbación gaussiano surge naturalmente de las fluctuaciones cuánticas durante inflación. Dado que un campo gaussiano sigue siendo gaussiano durante la evolución lineal, la predicción genérica de los modelos inflacionarios es, pues, que $\delta(\mathbf{x})$ en el régimen lineal sigue la estadística gaussiana. En segundo lugar, según el teorema del límite central, la distribución de la suma de un gran número de variables independientes se aproxima a una distribución gaussiana sin tener en cuenta las funciones de distribución de las variables individuales. El campo de perturbación de la densidad primordial $\delta(\mathbf{x})$ es una suma de un gran número de modos de Fourier, por lo que el teorema del límite central garantiza una distribución gaussiana. Y en tercer lugar, actualmente no hay evidencia observacional convincente que sugiera que el campo de densidad lineal es no gaussiano.

1.4.4. ESPECTRO DE POTENCIAS EN RECOMBINACIÓN Y CONDICIONES INICIALES

Incluso en ausencia de un mecanismo que produzca las perturbaciones en el universo primitivo y mucho antes de la idea de la inflación, existía un *ansatz* para el espectro de potencias primordial de la forma [29–31]

$$P_0(k) \propto k^{n_s}, \quad (1.27)$$

con n_s conocido por **índice espectral**. El valor $n_s = 1$, donde el espectro resultante es conocido como espectro de Harrison-Zel'dovich y es invariante de escala porque el espectro de potencias adimensional del potencial gravitatorio $\Delta(k) \propto k^3 P(k)_{\text{potencial}} \propto k^{-1} P(k)$ es independiente de k para $n_s = 1$ [15]. El caso $n_s = 1$ da lugar a un campo de fluctuaciones muy uniforme en grandes escalas (> 100 Mpc) pero con fluctuaciones notables en escalas más pequeñas.

De cualquier manera, hay razones justas para limitar los valores del índice espectral $-3 < n_s < 4$ [21]. Observaciones del fondo cósmico de microondas (CMB),

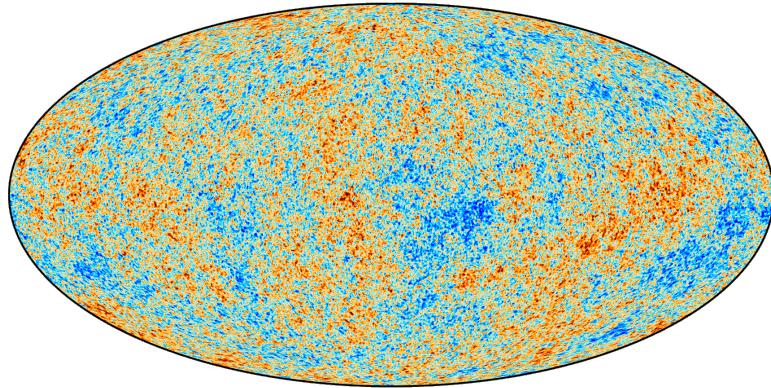


Figura 1.7. Mapa del fondo cósmico de microondas a todas las escalas (tomada de [28])

mostrado en la [figura 1.7](#), han encontrado que el índice spectral vale [32]

$$n_s = 0.965 \pm 0.004. \quad (1.28)$$

Esta pequeña desviación del espectro de Harrison-Zel'dovich es precisamente predicha por inflación

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, \quad (1.29)$$

donde ϵ y η son los parámetros slow-roll definidos en [\(1.14\)](#).

El espectro de potencias en época de recombinação es descrito por

$$P(k) = P_0(k)T^2(k) = A_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s} T^2(k), \quad (1.30)$$

donde $T(k)$ se llama función de transferencia y describe el efecto de la presión y otros procesos astrofísicos en la evolución gravitatoria de las perturbaciones, cambiando la forma del espectro primordial P_0 . La constante A_0 es introducida para darle un sentido a la cantidad k^{n_s} ya que k tiene dimensiones**. Así, se introduce un modo de Fourier de referencia k_0 para escalar las unidades de k tal que $(k/k_0)^{n_s}$. De esta manera, la constante A_0 lleva las dimensiones del espectro de potencias y depende del modo de referencia usado, por lo que un valor de A_0 ha de ser declarado para el correspondiente k_0 . La constante A_0 servirá como parámetro del modelo para asegurar que se trabaja en el régimen lineal ($\delta(\mathbf{x}) \ll 1$) con k_0 fijado a 1 Mpc^{-1} para cualquier valor de A_0 .

La función de transferencia que se usará para describir con más exactitud el campo de fluctuaciones, de acuerdo a [\(1.30\)](#), será [33]

$$T(q) = \frac{L}{L + Cq^2}, \quad (1.31)$$

**La expresión $k^{n_s} = e^{n_s \ln(k)}$ no está bien definida en general, ya que no es posible tomar el logaritmo de una cantidad con dimensiones.

donde $L(q) = \ln(2e + 1.8q)$, $C(q) = 14.2 + 731(1 + 62.5q)^{-1}$ y $q \equiv k / (0.142 \text{ Mpc}^{-1})$.

El espectro de potencias en época de recombión para el modelo de concordancia se muestra en la figura 1.8. En escalas grandes el espectro de potencias está dado básicamente por el espectro primordial y en escalas pequeñas queda afectado por diferentes procesos físicos —que dieron lugar a una variación en el espectro de potencias primordial dejando suficiente tiempo a las fluctuaciones para llegar a ser las galaxias y cúmulos que se tienen hoy— de modo que $P(k) \propto k^{-3}$ como se esperaba por la función de transferencia $T(k)$. El solapamiento de las diferentes mediciones mostradas en la figura 1.8 demuestra de forma impresionante el éxito y la consistencia del paradigma de la formación de estructuras en el régimen lineal.

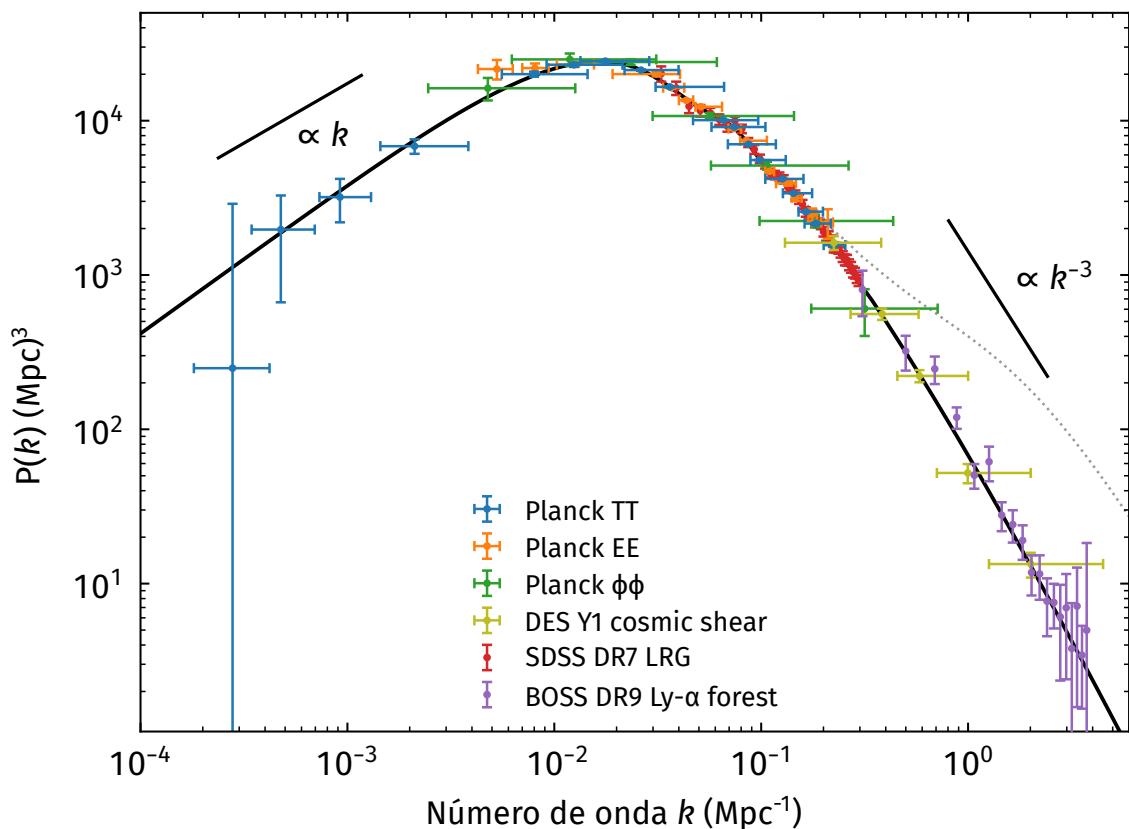


Figura 1.8. Espectro de potencias para el modelo de concordancia. La línea sólida negra es el modelo del espectro de potencias para el modelo de concordancia y los puntos con barras de error muestran las diferentes mediciones como se indica en la leyenda. Se aprecia que en escalas grandes (miles de Mpc) $P(k) \propto k$ y en escalas pequeñas (galaxias, cúmulos, etc.) $P(k) \propto k^{-3}$. (Tomada de [34])

CAPÍTULO 2

Objetivos

En este TFG se han planteado los siguiente objetivos:

- Desarrollar un algoritmo en el lenguaje Python que sea capaz de simular un campo aleatorio gaussiano de densidad de energía.
- Utilizar la transformada rápida de Fourier y los números aleatorios como herramientas principales en el modelizado por ordenador de estos campos aleatorios.
- Conformar un modelo computacional para el espectro de potencias primordial.
- Conformar un modelo computacional para el espectro de potencias en época de recombinação.
- Visualizar las realizaciones de los campos aleatorios de densidad tridimensionales como cortes bidimensionales y como una animación que incluya la tercera dimensión para analizar la correlación espacial de estos campos.

CAPÍTULO 3

Materiales y métodos

En este capítulo se describe cómo fueron realizadas las simulaciones de los campos gaussianos aleatorios para poder ser replicadas. También se especifican los materiales que fueron usados durante todo el proceso.

Se generaron realizaciones tridimensionales (de las que se tomaron cortes bidimensionales), así como una visualización animada de la tercera dimensión en formato GIF o MP4, del campo de fluctuaciones gaussiano para ambos espectros de potencias y diferentes valores de n_s .

Como no es posible simular campos infinitos, se generaron muestras del verdadero campo subyacente, es decir, “cajas” que son representaciones periódicas del susodicho campo. Cada lado de dichas cajas se divide en celdas (elementos finitos). En este aspecto las transformadas de Fourier (1.16) y (1.17) se tornan discretas:^{*}

$$\delta_m(k) \equiv \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n(x) e^{-i n m / N} = \frac{\mathcal{F}[\delta(x)]}{L} \quad m = 0, \dots, n - 1, \quad (3.1)$$

donde L es el lado de la caja y N es la cantidad de números de onda k a utilizar (número de celdas en un lado de la caja), tal que para cada dimensión ($d = 1, 2, 3$) se usaron las condiciones de contorno periódicas habituales:

$$k_d = \frac{2\pi}{L} j, \quad j \in \left(-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\right). \quad (3.2)$$

Para obtener un espectro de potencias cuya magnitud fuese independiente del volumen de la propia caja se normalizó por volumen en la transformada discreta tridimensional extendida de (3.1), por lo que se tuvo que normalizar el espectro de potencias:

$$\tilde{P}(k) = \frac{P(k)}{L^3}, \quad (3.3)$$

*Para ahorrar notación se escribe la transformada discreta en una dimensión, la cual se extiende a mayores dimensiones de manera directa.

donde $P(k)$ tiene unidades $[x]^3 \equiv [k]^{-3}$. El valor L indica cuánta distancia física representa 1 píxel:

$$[L] = \frac{[x]}{[\text{píxel}]}.$$
 (3.4)

Usando diferentes valores de L se pudieron simular zonas del universo de distintos tamaños y, observar cómo variaba el campo de fluctuaciones de la densidad $\delta(\mathbf{x})$.

3.1. MÉTODO

El algoritmo (véase [apéndice A](#)) se implementó con el lenguaje de programación Python con gran soporte de la librería Numpy [35] y Powerbox [36]. Los pasos lógicos son los siguientes:

1. Dada una caja de longitud L (parámetro `boxlength`) y número de celdas a lo largo de un lado, N (parámetro `self._size`), se determinan los números de onda k a lo largo de este lado de acuerdo a [\(3.2\)](#).
2. A partir de estos números de onda a lo largo de cada lado se determinan sus magnitudes en todos los puntos de la caja tridimensional, lo que da lugar al array de los números de onda $k_j = \sqrt{\sum_d k_{d,j}^2}$ de dimensiones $N \times N \times N$.
3. Se crea el array del campo aleatorio gaussiano de media nula y desviación típica unitaria, G , cuyas dimensiones han de ser $N \times N \times N$, el cual asigna de forma aleatoria un número complejo a cada punto del mallado tridimensional. El número complejo tendrá módulo tomado de $\mathcal{N}(0, 1)$ y la fase de $U(0, 2\pi)$.
4. Se calcula el array del espectro de potencias $P(k_j)$ pasando k_j por una función que represente a [\(1.27\)](#) o [\(1.30\)](#).
5. Se computa el array del campo de fluctuaciones en el espacio de Fourier $\delta(\mathbf{k}) = G \sqrt{P(k_j)}$. Se multiplica por la raíz de $P(k_j)$ para pasar a desviación típica $P(k)$.
6. Se determina el campo de fluctuaciones en el espacio real mediante la transformada inversa de Fourier $\delta(\mathbf{x}) = L^3 \mathcal{F}^{-1} [\delta(\mathbf{k})]$.

El índice espectral n_s es el parámetro `power` y la amplitud A_0 , del espectro de potencias primordial $P_0(k)$ y en época de recombión $P(k)$, es `amplitude` para $k_0 = 1 \text{ Mpc}^{-1}$. Al fijar k_0 en estas unidades, la unidad de distancia física obtenida fue el megapársec, $[x] = \text{Mpc}$.

Para poder replicar los resultados que se obtuvieron, la semilla inicial que da lugar a los números aleatorios se fijó con el parámetro `seed` del módulo `numpy.random` de Python.

3.2. MATERIALES

3.2.1. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Para computar la transformada discreta de Fourier (3.1) con N puntos, se escribe

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nm} \delta_n(x), \quad (3.5)$$

donde $W \equiv e^{-i/N}$. En otras palabras, el vector de los $\delta_n(x)$ se multiplica por una matriz cuyo elemento (n, m) es la constante W elevada a $n \times m$. Esta multiplicación matricial requiere evidentemente N^2 multiplicaciones de números complejos, además de un número menor de operaciones para generar las potencias necesarias de W . Así, la transformada discreta de Fourier parece ser $O(N^2)$. Dichas apariencias son engañosas. La transformada discreta de Fourier puede, de hecho, calcularse en $O(N \log_2 N)$ operaciones con un algoritmo llamado **transformada rápida de Fourier**, o por sus siglas en inglés FFT (*Fast Fourier Transform*). La diferencia entre $N \log_2 N$ y N^2 es inmensa. Con $N = 10^8$, por ejemplo, hay un factor de varios millones, comparable a la relación entre un segundo y un mes. La existencia de un algoritmo FFT no se conoció hasta mediados de los años 60, a partir de los trabajos de J.W. Cooley y J.W. Tukey [37].

Danielson y Lanczos dieron, en 1942, una de las derivaciones más claras del algoritmo [38]. Demostraron que una transformada discreta de Fourier de longitud N puede reescribirse como la suma de dos transformadas discretas de Fourier discretas, cada una de ellas de longitud $N/2$. Una de ellas está formada por los puntos pares de la N original, la otra por los impares:

$$\begin{aligned} L\delta_m(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-inm/N} \delta_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-i(2n)m/N} \delta_{2n}(x) + \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-i(2n+1)m/N} \delta_{2n+1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-inm/(N/2)} \delta_{2n}(x) + W^m \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-inm/(N/2)} \delta_{2n}(x) \\ &= \delta_m^{\text{par}}(k) + W^m \delta_m^{\text{impar}}(k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es conocida como lema Danielson-Lanczos. Lo maravilloso de este lema es que se puede utilizar de forma recursiva. Habiendo reducido el problema de calcular $L\delta_m(k)$ al de calcular $\delta_m^{\text{par}}(k)$ y $\delta_m^{\text{impar}}(k)$, se puede reducir estas dos últimas DFT (*Discrete Fourier Transform*) al problema de calcular la transformada de sus $N/4$ datos de entrada pares y $N/4$ datos impares y así sucesivamente.

El caso más fácil es aquel en el que el N original es una potencia entera de 2. Es recomendable que solo se utilice la FFT con N^z con z un entero [39]. Con esta

restricción de N , es evidente que es posible seguir aplicando el lema de Danielson-Lanczos hasta que se hayan dividido los datos en transformaciones de longitud uno. La transformada de Fourier de longitud unitaria es simplemente la identidad que copia su única entrada en su única salida. En otras palabras, para cada patrón de $\log_2 N$ de pares e impares, hay una transformada unitaria que es solo uno de los números de entrada $\delta_n(x)$. Se necesitan del orden de N operaciones para pasar de un patrón de pares e impares hasta el valor de la transformada final y como hay $\log_2 N$ combinaciones, el algoritmo al completo es del orden $N \log_2 N$.

Este algoritmo, tanto para la transformada directa como inversa y otras funcionalidades necesarias para su desempeño, está implementado en Python bajo el módulo `numpy.fft` y fue el que se utilizó en las simulaciones. En concreto se utilizaron los métodos `numpy.fft.ifftn` para la transformada discreta inversa tridimensional y `numpy.fft.fftfreq` para obtener las frecuencias espaciales del muestreo (3.2).

3.2.2. NÚMEROS ALEATORIOS

Puede parecer insólito utilizar un ordenador, la más precisa y determinista de todas las máquinas concebidas por la mente humana, para producir números “aleatorios”. Más que insólito, puede parecer una imposibilidad conceptual. Después de todo, cualquier programa produce un resultado totalmente predecible, por lo que no es verdaderamente “aleatorio”. Sin embargo, generadores de números aleatorios con un ordenador son de uso común. A veces se habla de secuencias generadas por ordenador como pseudoaleatorias, mientras que la palabra aleatorio se reserva para el resultado de un proceso físico intrínsecamente aleatorio, como el tiempo transcurrido entre los clics de un contador Geiger colocado junto a una muestra de algún elemento radiactivo. En este texto no se hace esta distinción y se les consideran números aleatorios.

Una definición práctica de aleatoriedad en el contexto de las secuencias generadas por ordenador es decir que el programa determinista que produce una secuencia aleatoria debe ser diferente y, en todos los aspectos medibles, no estar relacionado estadísticamente con el programa informático que utiliza su resultado. En otras palabras, dos generadores de números aleatorios diferentes deberían producir estadísticamente los mismos resultados cuando se acoplan a nuestro [algoritmo A.1](#).

El generador de números aleatorios que se utilizó se encuentra bajo el módulo `numpy.random` que produce números aleatorios usando combinaciones de un *Bit-Generator* para crear secuencias y un *Generator* para usar esas secuencias en el muestreo de diferentes distribuciones estadísticas:

- *BitGenerators*: Objetos que generan números aleatorios. Suelen ser enteros sin signo llenados de palabras con secuencias aleatorias de 32 o 64 bits.

- **Generators:** Objetos que transforman secuencias aleatorias de bits del *BitGenerator* en secuencias de números que siguen una determinada distribución de probabilidad. Se utilizaron la uniforme (`numpy.random.Generator.uniform`) y la gaussiana (`numpy.random.Generator.normal`).

El *BitGenerator* utilizado fue PCG64 [40]. La semilla que inicializa el *BitGenerator* se fijó con la función `numpy.random.default_rng(seed=42)` y sirvió para que las diferentes realizaciones estuvieran basadas en los mismos números aleatorios, lo que permitió compararlas entre ellas.

3.2.3. ENTORNO DE TRABAJO

Todo el trabajo de programación y posterior simulación se realizó en el software Visual Studio Code de Microsoft. Como se muestra en la figura 3.1, se dispuso el entorno tal que la redacción del texto y las simulaciones estaban en la misma ventana, permitiendo un trabajo focalizado sin cambios de programas y una inserción de los campos generados de manera semiautomática en el texto.

```

1  # Módulo Python del TFG Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias
2
3  import numpy as np
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  plt.rcParams.update({
6      'axes.autolimit_mode': 'data',
7      'axes.xmargin': 0,
8      'axes.ymargin': 0,
9      'xtick.direction': 'in',
10     'xtick.top': True,
11     'ytick.direction': 'in',
12     'ytick.right': True})
13
14  # https://matplotlib.org/tutorials/introductory/usage.html#sphx-glr-usage-py
15  from matplotlib.colors import ListedColormap
16  from powerbox.tools import _magnitude_grid as _mgrid
17  from powerbox.powerbox import make_hermitian as _hermitian
18  from powerbox.dft import fftfreq as _fftfreq, ifft as _ifft
19
20  timestr = "DEF"
21  k0 = 0.05
22
23  class FS2029FSC():
24
25      """
26
27      def __init__(self, amplitude, power, size, dimensions, show, method):
28          self._amplitude = amplitude
29          self._boxlength = boxlength=1.0, normalise=True, a=1., b=1.):
30              self._amplitude = amplitude
31              self._boxlength = boxlength
32              self._normalise = normalise
33              self._cofa = a
34              self._cofb = b
35              self._power = int(power)
36              self._size = int(np.power(2, size))
37              self._dimensions = dimensions
38              self._show = show
39              self._method = method
40              self._volume = self._boxlength ** self._dimensions
41              self._dx = float(boxlength) / self._size
42              self._n = self._size + 1
43
44
45      def generator(self):
46
47          """
48          rng = np.random.default_rng(seed=42)
49          seed_gaussiano_mag = rng.normal(0.0, 1.0, size=[self._n] * self._size)
50          seed_gaussiano_phase = 2 * np.pi * rng.uniform(size=[self._n] * self._size)
51
52
53
54
55
56
57
58
59
5

```

Figura 3.1. Entorno de trabajo en VSCode

3.2.4. GRÁFICOS

El último material utilizado, no menos importante, fue la librería Matplotlib [41] de Python para generar las representaciones visuales de las realizaciones del campo aleatorio gaussiano de las fluctuaciones. El archivo GIF se generó con el software online EZGIF [42].

CAPÍTULO 4

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos tras las simulaciones en forma de cortes bidimensionales de una simulación tridimensional que se presenta como una animación GIF. En un primer apartado se muestran las imágenes correspondientes al espectro de potencias primordial $P_0(k)$ —puramente proporcional a k^{n_s} . En el segundo punto del capítulo, se observan las simulaciones con la función de transferencia (1.31) que son más acordes a las fluctuaciones del fondo cósmico de microondas, ya que se tiene en cuenta cierta evolución gravitatoria en las perturbaciones. En la última sección se añade un código QR para visualizar el campo tridimensional. Todos los resultados tienen como entrada los mismos números aleatorios, haciendo posible la comparación entre ellos.

En primer lugar para el espectro de potencias primordial $P_0(k)$:

- $n_s = 0$. Ruido blanco, el fondo sobre el que se perturba. Sirvió para comprobar el funcionamiento.
- $n_s = 1$. Harrison-Zel'dovich. Grandes escalas, se utilizó para comprobar un espectro *blue-biased* ($n_s > 0$) que se refiere a un espectro dominado por los números de onda grandes, esto son longitudes de onda pequeñas (azul). Fluctuaciones de menor tamaño físico.
- $n_s = -3$. Pequeñas escalas del universo, sirvió para comprobar un espectro *red-biased* ($n_s < 0$) que es la contraparte del anterior, donde las longitudes de onda largas (rojo) contribuyen más, es decir, fluctuaciones de mayor tamaño físico.

Y al final, para la simulación más realista se utilizó (1.30) y (1.31):

- $n_s = 5$. En este caso, $P(k) \propto k$ que corresponde a grandes escalas y ha de ser homogéneo con pequeñas fluctuaciones.

- $n_s = 0.965$. Es el que se observa experimentalmente, apunta a escalas más pequeñas donde las fluctuaciones son más grandes y ha de ser visualmente similar al CMB.

En las figuras se están representando, tanto en el eje horizontal como en el vertical, distancias medidas en Mpc. La barra de color indica los valores que toma el campo de fluctuaciones de densidad de energía para un tiempo fijo, $\delta(\mathbf{x})$. Se utiliza el código de colores del CMB en orden a interpretar mejor las imágenes:

- El color blanco —siempre centrado— representa $\delta(\mathbf{x}) = 0$ que, de acuerdo a (1.15), significa que la densidad de energía en ese punto $\rho(\mathbf{x})$ es igual a la densidad del fondo homogéneo $\bar{\rho}$. No hay fluctuación.
- El color rojo es para fluctuaciones positivas $\rho(\mathbf{x}) > \bar{\rho}$.
- El color azul es para fluctuaciones negativas $\rho(\mathbf{x}) < \bar{\rho}$.

Mediante la función `numpy.clip`, el campo final que se genera es para todo \mathbf{x} (por requisito físico $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$) mayor o igual que -1 ($\delta(\mathbf{x}) \geq -1$). El parámetro del modelo A_0 se adecúa en cada caso para dar lugar a $\delta(\mathbf{x}) \sim 10^{-5}$, valor que aparece en las anisotropías del CMB.

A continuación, se muestra en la figura 4.1 un ejemplo de las imágenes que se obtienen. Cada píxel es un cuadrado de lado L megapársecs, cuyo color representa el valor de $\delta(\mathbf{x})$ y donde el número de píxeles de la imagen está parametrizado con la variable N (véase capítulo 3).

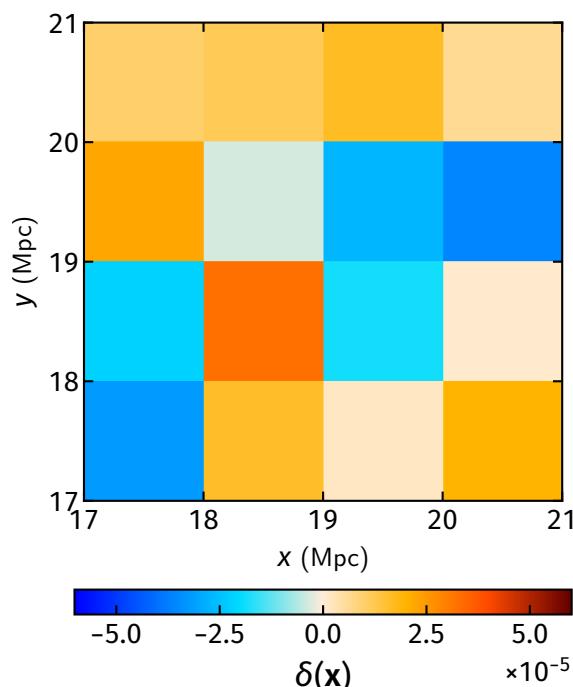


Figura 4.1. Ejemplo de un campo gaussiano aleatorio con $L = 1 \text{ Mpc/píxel}$ y $A_0 = 1\text{E}-14 \text{ Mpc}^3$. Ampliado a escala de 1 píxel.

4.1. CAMPOS GAUSSIANOS CON ESPECTRO DE POTENCIAS PRIMORDIAL

4.1.1. RUIDO BLANCO ($n_s = 0$)

En este escenario, el espectro de potencias es constante. Esto significa que para cualquier valor de k , según (1.24), no existe correlación entre las fluctuaciones de densidad de diferentes puntos del espacio real, es decir, ningún tamaño es privilegiado en las fluctuaciones que aparecen. El correspondiente $\delta(\mathbf{x})$ tiene un aspecto de “ruido” donde todas las frecuencias espaciales aportan (igual que la luz blanca contiene todas las frecuencias) y es mostrado en la [figura 4.2](#) para $N = 32$ y en la [figura 4.3](#) para $N = 256$ píxeles. En definitiva, se ajusta a una distribución de materia constituida por la localización aleatoria de partículas.

Con esta simulación se comprueba que el [algoritmo A.1](#) funciona y se prosigue con el resto de las simulaciones.

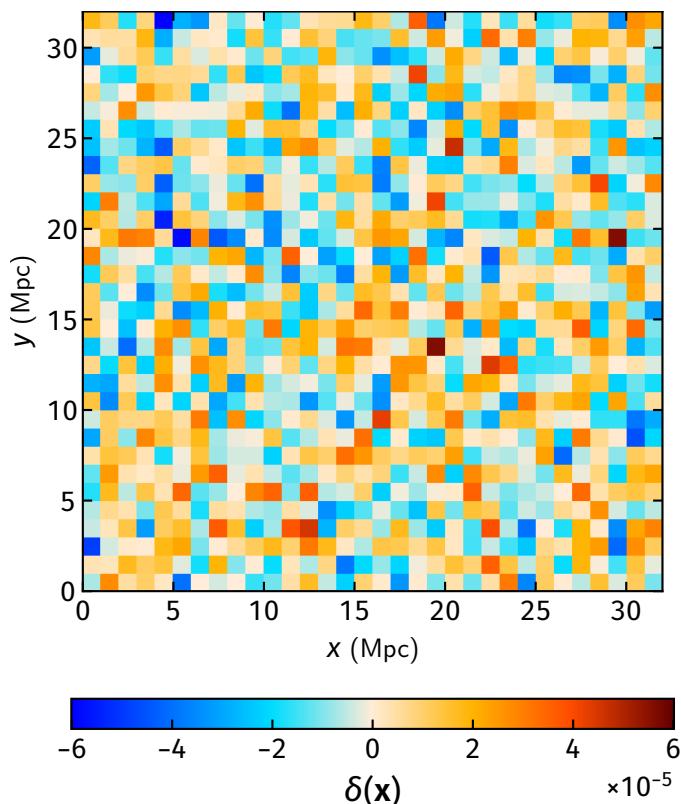


Figura 4.2. Campo gaussiano aleatorio de ruido blanco ($n_s = 0$) con $L = 1 \text{ Mpc/píxel}$ y $A_0 = 1\text{E}-14 \text{ Mpc}^3$. Las fluctuaciones no guardan correlación entre sí haciendo que no aparezcan fluctuaciones sino píxeles sueltos con valores de $\delta(\mathbf{x})$ aleatorios.

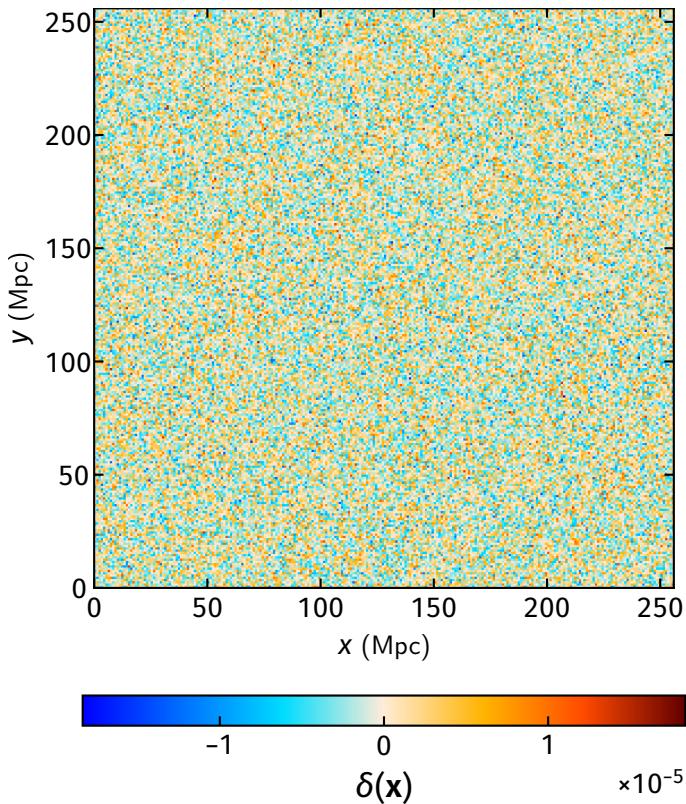


Figura 4.3. Campo gaussiano aleatorio de ruido blanco ($n_s = 0$) con $L = 1 \text{ Mpc/píxel}$ y $A_0 = 1\text{E}-18 \text{ Mpc}^3$. Con mayor número de píxeles se aprecia mejor el carácter de ruido blanco.

4.1.2. ESPECTRO BLUE-BIASED (HARRISON-ZEL'DOVICH $n_s = 1$)

En los casos *blue-biased*, el espectro de potencias es monótono creciente —para el de Harrison-Zel'dovich $P_0(k) = k$. El significado de la afirmación anterior es que mientras mayor sea k (equiv. menor sea λ), mayor será la correlación entre las fluctuaciones de densidad en diferentes puntos espaciales, es decir, las fluctuaciones de pequeño tamaño predominan. El asociado $\delta(\mathbf{x})$ tiene un aspecto homogéneo pero con fluctuaciones de pequeño tamaño. El resultado es mostrado en la [figura 4.4](#) para $N = 256$ píxeles. Si se amplía cualquier zona en la figura anterior, es posible apreciar como esas fluctuaciones son pequeñas pero notables (colores del mismo tono aparecen juntos) tal y como se vió en la [subsección 1.4.4](#), en contraste al ruido blanco donde básicamente no se llegan a formar agrupaciones. Dicha amplificación se muestra en la misma figura.

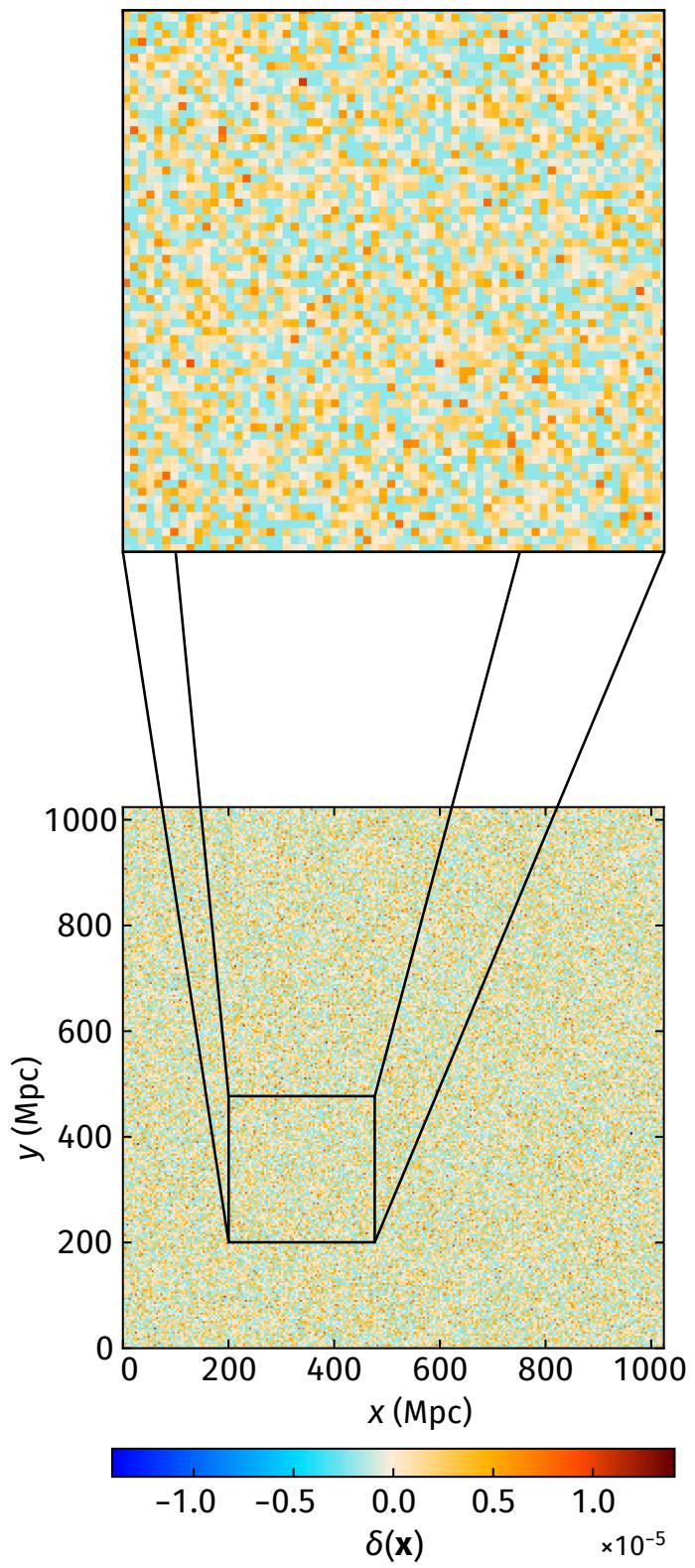


Figura 4.4. Campo gaussiano aleatorio Harrison-Zel'dovich ($n_s = 1$) con $L = 4$ Mpc/píxel y $A_0 = 1\text{E}-19$ Mpc³. Se aprecia el carácter homogéneo de las fluctuaciones.

4.1.3. ESPECTRO RED-BIASED ($n_s = -3$)

Esta categoría de espectros son la contraparte a los *blue-biased* porque el espectro de potencias es monótono decreciente. Se obtiene que predominan las fluctuaciones de gran tamaño. El campo de fluctuaciones de la densidad que se obtiene es de baja homogeneidad. Dicho campo se muestra en la figura 4.5 para $N = 512$ píxeles. Notar que no solo varían el tamaño de las fluctuaciones, sino la amplitud de estas. Al estar en un volumen del universo altamente heterogéneo, la amplitud de las fluctuaciones ha de ser mayor que en el caso homogéneo del espectro *blue-biased* (por definición de homogeneidad). Para amplitudes $\delta(\mathbf{x}) \sim 10^{-5}$, en el caso *red-biased* son cinco veces mayores que en el espectro Harrison-Zel'dovich.

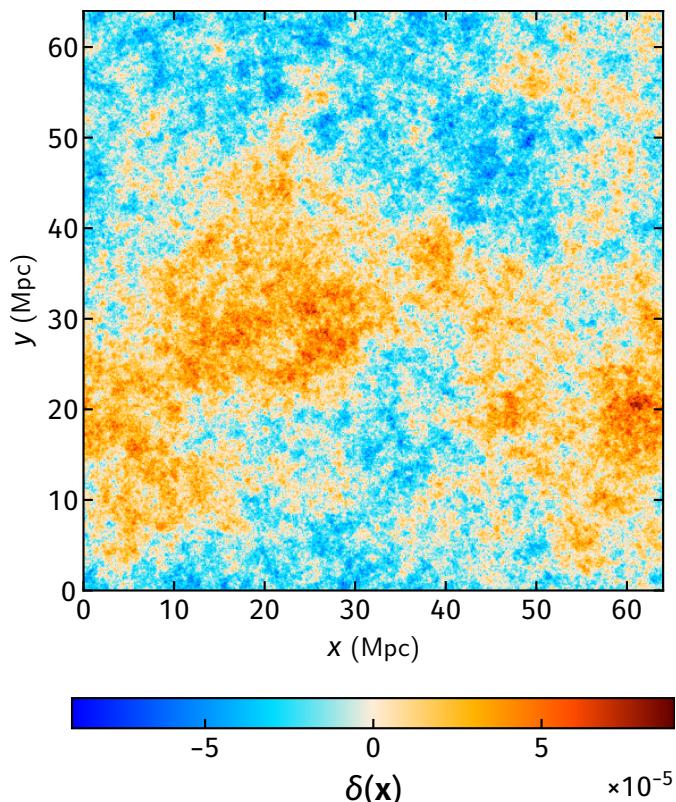


Figura 4.5. Campo gaussiano aleatorio del espectro primordial *red-biased* ($n_s = -3$) con $L = 0.125$ Mpc/píxel y $A_0 = 1\text{E}-9$ Mpc³. Comienzan a aparecer fluctuaciones con forma de las estructuras que se observan en el universo.

4.2. CAMPOS GAUSSIANOS CON ESPECTRO DE POTENCIAS EN ÉPOCA DE RECOMBINACIÓN

Ahora se añade al algoritmo, a través de la función de transferencia, el procesamiento que sufre el espectro de potencias primordial por la evolución gravitatoria de las fluctuaciones.

4.2.1. GRANDES ESCALAS ($n_s = 5$)

Como ya se vió en la [subsección 1.4.4](#) y en la [figura 1.8](#), cuando los números de onda k son pequeños se tiene un espectro de potencias proporcional a k . Al añadir la función de transferencia se coloca $n_s = 5$ para obtener el carácter proporcional a k deseado. El campo de fluctuaciones $\delta(\mathbf{x})$ que se obtenga ha de ser similar a uno *blue-biased* donde las fluctuaciones son de pequeño tamaño. La realización se muestra en la [figura 4.6](#) para los mismos valores de N y L usados en la [figura 4.4](#). Se amplia la misma zona del campo para poder compararlas. Se encuentra gran similitud visual como se esperaba. La amplitud de las fluctuaciones, en cambio, es levemente mayor que en el caso del espectro primordial, pudiendo ser esto debido a la manera de colocar los valores en la barra de color del software.

Con este resultado se puede afirmar que la función de transferencia no tiene gran efecto en las fluctuaciones a grandes escalas (pequeños k), tal y como se esperaba.

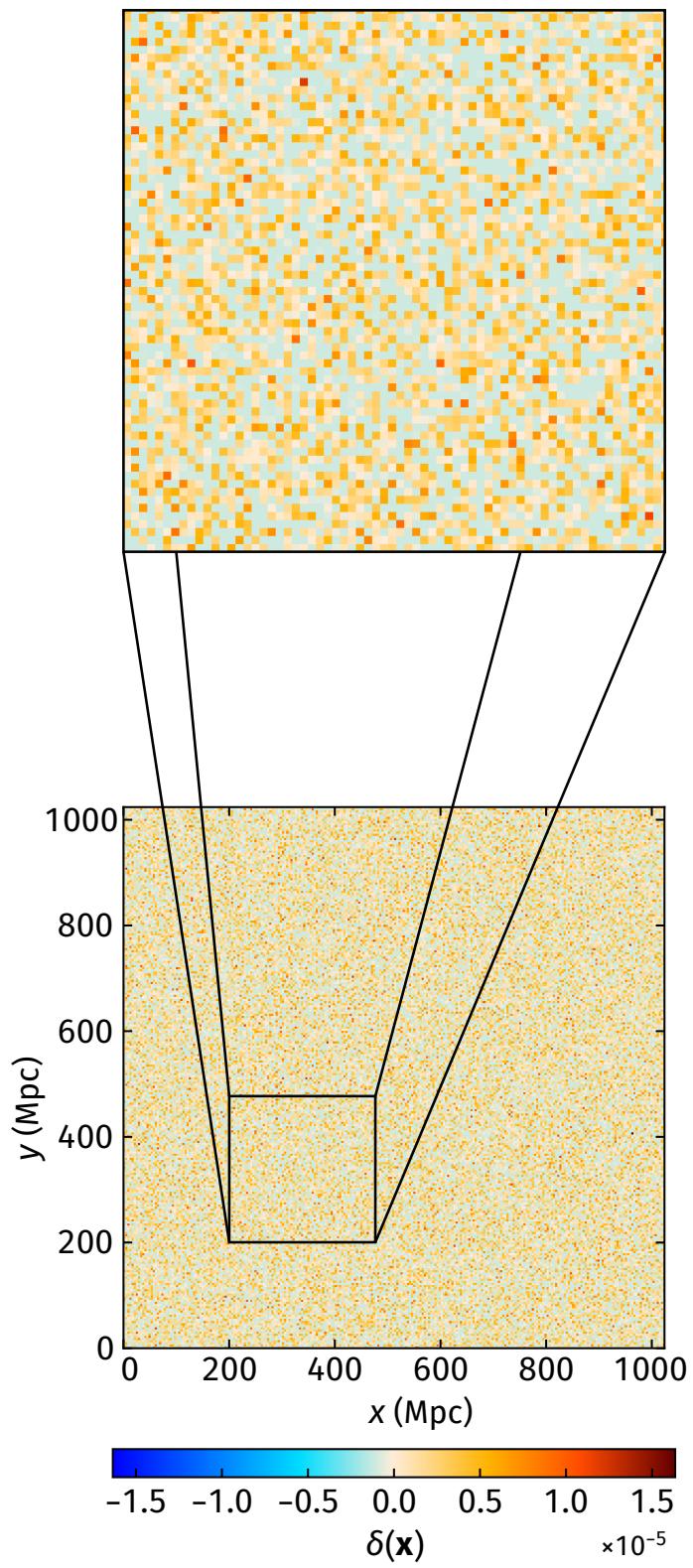


Figura 4.6. Campo gaussiano aleatorio del espectro en época de recombinação ($n_s = 5$) con $L = 4$ Mpc/píxel y $A_0 = 1E-19$ Mpc³. Las fluctuaciones son homogéneas como se espera en grandes escalas.

4.2.2. VALORES DEL CMB ($n_s = 0.965$)

El último resultado que se presenta es el que más se acerca a lo observado por los radiotelescopios en el CMB. Incluyendo en la función de transferencia el valor medido en el fondo cósmico de microondas para el índice espectral $n_s = 0.965$, se obtiene un espectro de potencias de carácter *red-biased*. En este caso, las fluctuaciones tienen que ser de gran tamaño. La imagen extraída se muestra en la [figura 4.7](#) para $N = 512$ píxeles. La forma de las fluctuaciones se ve “enfocada” respecto de la [figura 4.5](#) por la influencia de la función de transferencia. Si se compara la [figura 4.7](#) con el CMB de la [figura 4.8](#), hay una gran similitud en el resultado con experimentos reales.

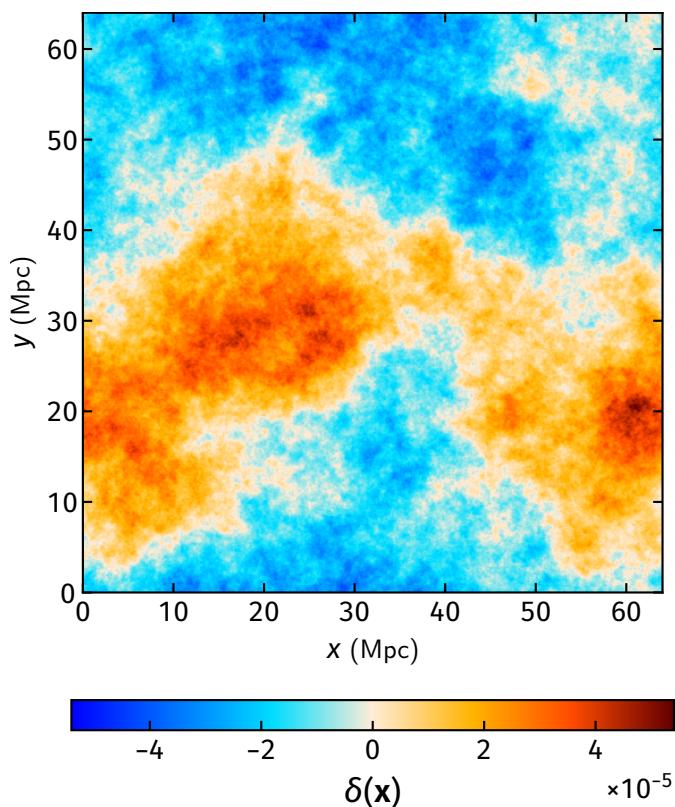


Figura 4.7. Campo gaussiano aleatorio del espectro en época de recombinación ($n_s = 0.965$) con $L = 0.125 \text{ Mpc/píxel}$ y $A_0 = 1\text{E}-3 \text{ Mpc}^3$. Ahora la función de transferencia sí tiene un efecto notorio, suavizando la forma y bordes de las fluctuaciones.

Para obtener fluctuaciones del orden de 10^{-5} se utiliza $A_0 = 1\text{E}-3$ en este caso, lo cual significa que la función de transferencia disminuye la amplitud de las fluctuaciones en un valor considerable. Con este resultado es posible asegurar que la función de transferencia hace cuenta de los efectos gravitatorios que sienten las fluctuaciones en escalas pequeñas (grandes k), permitiendo la posterior evolución de las mismas en estructuras más complejas como galaxias o cúmulos.

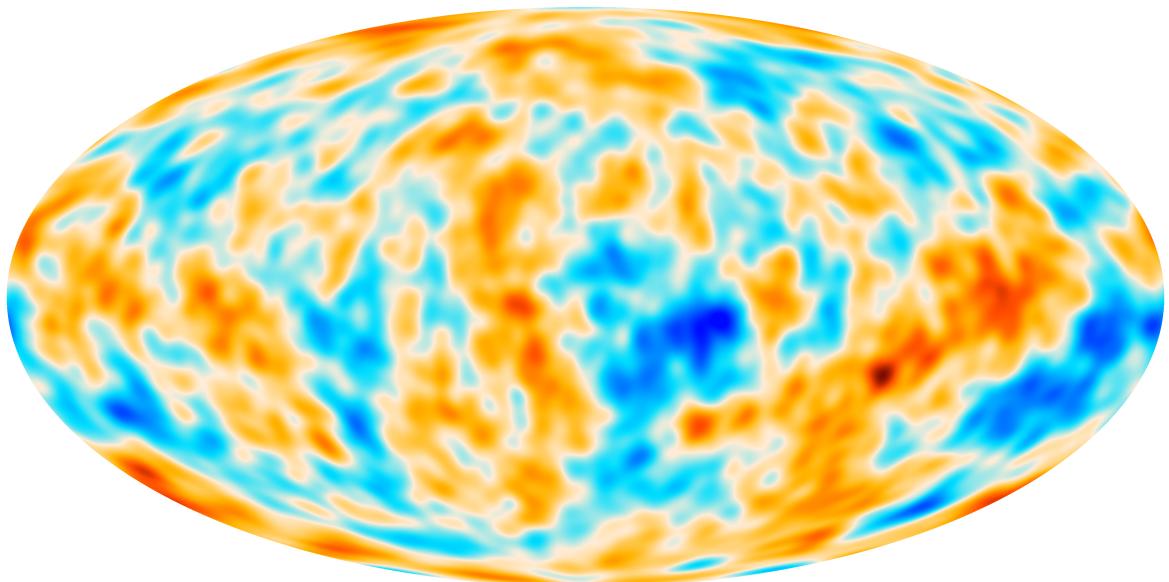


Figura 4.8. Mapa del fondo cósmico de microondas suavizado (tomada de [28])

4.3. CAMPO GAUSSIANO TRIDIMENSIONAL CON LOS VALORES DEL CMB

Usando los mismos parámetros que para generar la figura 4.7, se añade la tercera dimensión tomando diferentes cortes (se recorren las diferentes celdas de 0 a N en esta dimensión) y haciendo una animación con ellos generada a partir de usar un corte para cada fotograma, con un total de 52. El resultado se puede visualizar escaneando el código QR de la figura 4.9.



Figura 4.9. Código QR de la animación tridimensional

Lo que se aprecia en este resultado es que los cortes están relacionados entre sí cuando hay un desplazamiento por la caja tridimensional, observándose una conexión entre un corte y el inmediatamente anterior/posterior. Es decir, existe una correlación estadística en las fluctuaciones para diferentes valores espaciales. Como la elección de los ejes no es determinante en las simulaciones, dicha correlación espacial existe para las tres dimensiones como se esperaba que ocurriese.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

- El uso del lenguaje Python para simulaciones cosmológicas es totalmente esencial. Por motivos como que, de la comunidad que hay tras él podemos tomar funciones ya creadas que son necesarias en nuestros algoritmos.
- La transformada rápida de Fourier y los números aleatorios han sido realmente relevantes en el desarrollo del trabajo. El modelizado por ordenador de los campos gaussianos aleatorios no hubiera sido posible sin estos dos materiales, ya que se usaron *arrays* complejos de tamaño hasta 512^3 y debían ser lo suficientemente aleatorios para dar el modelo como válido.
- Se ha podido comprobar que los campos de densidad primordiales, generados con el espectro de potencias $P_0(k)$, muestran dominancia de fluctuaciones grandes para $n_s < 0$ y de fluctuaciones pequeñas para $n_s > 0$. El caso Harrison-Zel'dovich ($n_s = 1$) ha devuelto el esperado campo de fluctuaciones homogéneo en grandes escalas pero con fluctuaciones notables en escalas más pequeñas (esto se comprobó amplificando la imagen de dicha realización).
- La incorporación de la función de transferencia ha permitido reproducir la distribución espacial de las fluctuaciones en el CMB.
- Los cortes bidimensionales de las realizaciones han aportado lo necesario para entender los espectros de potencias. Gracias a la animación tridimensional se ha verificado que existe correlación espacial en los campos gaussianos aleatorios.

Conclusions

- The use of the Python language for cosmological simulations is absolutely essential. For reasons such as, from the community behind it we can take existing functions that are needed in our algorithms.
- The fast Fourier transform and random numbers have been really relevant in the development of the work. The computer modeling of the Gaussian random fields would not have been possible without these two materials, since complex arrays of size up to 512^3 were used and had to be random enough to give the model as valid.
- It has been found that the primordial density fields, generated with the power spectrum $P_0(k)$, show dominance on large fluctuations for $n_s < 0$ and on small fluctuations for $n_s > 0$. The Harrison-Zel'dovich case ($n_s = 1$) has returned the expected homogeneous fluctuation field at large scales but with noticeable fluctuations at smaller scales (this was verified by amplifying the image of such a realization).
- The incorporation of the transfer function has made it possible to reproduce the spatial distribution of fluctuations in the CMB.
- Two-dimensional slices of the realizations have provided what is needed to understand the power spectra. Thanks to the three-dimensional animation, spatial correlation in the Gaussian random fields has been verified.

Bibliografía

- [1] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking,” *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 17, pp. 1220–1223, 1982. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1220>
- [2] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, vol. 23, no. 2, pp. 347–356, 1981. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347>
- [3] A. D. Linde, “A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9)
- [4] P. Peebles, *Principles of physical cosmology*. Princeton university press, 1993, vol. 27. <https://doi.org/10.1515/9780691206721>
- [5] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, “Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe,” *JETP Lett.*, vol. 33, pp. 532–535, 1981. http://jetpletters.ru/ps/1510/article_23079.pdf
- [6] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, “Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe,” *Physical Review D*, vol. 28, no. 4, p. 679, 1983. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.679>
- [7] S. W. Hawking, “The development of irregularities in a single bubble inflationary universe,” *Physics Letters B*, vol. 115, no. 4, pp. 295–297, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90373-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90373-2)
- [8] A. A. Starobinsky, “Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations,” *Physics Letters B*, vol. 117, no. 3-4, pp. 175–178, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90541-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90541-X)
- [9] A. H. Guth and S.-Y. Pi, “Quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe,” *Physical Review D*, vol. 32, no. 8, p. 1899, 1985. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.1899>

- [10] G. Gamow, "Expanding universe and the origin of elements," *Physical review*, vol. 70, no. 7-8, pp. 572–573, 1946. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.70.572.2>
- [11] R. A. Alpher and R. Herman, "Evolution of the universe," *Nature*, vol. 162, no. 4124, pp. 774–775, 1948. <https://doi.org/10.1038/162774b0>
- [12] R. A. Alpher, J. W. Follin Jr, and R. C. Herman, "Physical conditions in the initial stages of the expanding universe," *Physical Review*, vol. 92, no. 6, pp. 1347–1361, 1953. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.1347>
- [13] A. R. Liddle, "An introduction to cosmological inflation," *High energy physics and cosmology*, p. 260, 1998. <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9901124>
- [14] E. Hubble, "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae," *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929. <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- [15] D. Baumann, *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022. <https://doi.org/10.1017/9781108937092>
- [16] A. A. Penzias and R. W. Wilson, "A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s." *The Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419–421, 1965. <https://doi.org/10.1086/148307>
- [17] A. Friedmann, "On the curvature of space," *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377–386, 1922. <https://doi.org/10.1023/A:1026751225741>
- [18] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern cosmology*. Academic Press, 2020. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-01943-2>
- [19] C. Knobel, "An introduction into the theory of cosmological structure formation," *arXiv*, 2012. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.5931>
- [20] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge university press, 2000. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139175180>
- [21] J. A. Peacock, *Cosmological physics*. Cambridge university press, 1998. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511804533>
- [22] W. B. Bonnor, "Jeans' formula for gravitational instability," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 117, no. 1, pp. 104–117, 1957. <https://doi.org/10.1093/mnras/117.1.104>
- [23] H. Mo, F. van den Bosch, and S. White, *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511807244>
- [24] K. S. Miller, "Complex random fields," *Information Sciences*, vol. 9, no. 3, pp. 185–225, 1975. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90024-9](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90024-9)

- [25] R. J. Adler, *The Geometry of Random Fields*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718980>
- [26] P. Peebles, *The Large-scale Structure of the Universe*, ser. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1980. <https://doi.org/10.1063/1.2914699>
- [27] P. Watts and P. Coles, “Statistical cosmology with quadratic density fields,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 338, no. 3, pp. 806–815, 2003. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06130.x>
- [28] N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. iv. diffuse component separation,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, no. A4, 2020. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833881>
- [29] E. R. Harrison, “Fluctuations at the threshold of classical cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 1, pp. 2726–2730, May 1970. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.1.2726>
- [30] Y. B. Zel'dovich and I. D. Novikov, “A hypothesis for the initial spectrum of perturbations in the metric of the friedmann model universe.” *Soviet Astronomy*, vol. 13, pp. 754–757, 1970. <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1970SvA....13..754Z>
- [31] P. J. Peebles and J. Yu, “Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 162, pp. 815–836, 1970. <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1970ApJ...162..815P>
- [32] N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, no. A6, 2020. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>
- [33] D. J. Eisenstein and W. Hu, “Baryonic features in the matter transfer function,” *The Astrophysical Journal*, vol. 496, no. 2, p. 605, 1998. <https://doi.org/10.1086/305424>
- [34] N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, no. A1, 2020. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>
- [35] C. R. Harris *et al.*, “Array programming with NumPy,” *Nature*, vol. 585, no. 7825, pp. 357–362, Sep. 2020. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- [36] S. G. Murray, “powerbox: A python package for creating structured fields with isotropic power spectra,” *Journal of Open Source Software*, vol. 3, no. 28, p. 850, 2018. <https://doi.org/10.21105/joss.00850>
- [37] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex fourier series,” *Mathematics of computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965. <https://doi.org/10.2307/2003354>

- [38] G. C. Danielson and C. Lanczos, “Some improvements in practical fourier analysis and their application to x-ray scattering from liquids,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 233, no. 5, pp. 435–452, 1942. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(42\)90624-0](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(42)90624-0)
- [39] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007. <https://dl.acm.org/doi/10.5555/1403886>
- [40] M. E. O’Neill, “Pcg: A family of simple fast space-efficient statistically good algorithms for random number generation,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2014. <https://www.cs.hmc.edu/tr/hmc-cs-2014-0905.pdf>
- [41] J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2d graphics environment,” *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- [42] O. I. Ltd., “Animated gif editor and gif maker,” 2012. <https://ezgif.com/>

Escanee el siguiente código QR para obtener acceso a los enlaces



APÉNDICE A

Algoritmos

Algoritmo A.1. Script Python usado para generar y representar campos gaussianos dado un $P(k)$

```
1 """
2 Módulo Python del TFG Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias.
3 """
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 plt.rcParams.update({
7     'axes.autolimit_mode': 'data',
8     'axes.xmargin': 0,
9     'axes.ymargin': 0,
10    'xtick.direction': 'in',
11    'xtick.top': True,
12    'ytick.direction' : 'in',
13    'ytick.right': True,
14    'text.usetex': True})
15 from matplotlib.colors import ListedColormap, CenteredNorm
16 from powerbox.tools import _magnitude_grid as _mgrid
17 from powerbox.powerbox import _make_hermitian as _hermitian
18 from powerbox.dft import fftfreq as _fftfreq, ifft as _ifftn
19
20 timestr = "DEF"
21 k0 = 1.0
22
23 class FS2029FSC():
24     """
25         Calcula campos gaussianos en espacio real y de fourier generados con un
26         espectro de potencia dado.
27     """
28     def __init__(self, amplitude, power, size, dimensions, show, method,
29                  boxlength=1.0, normalise=True, a=1., b=1.):
```

```

29
30     self._amplitude = amplitude
31     self._boxlength = boxlength
32     self._normalise = normalise
33     self._coef_a = a
34     self._coef_b = b
35     self._power = int(power)
36     self._size = int(np.power(2, size))
37     self._dimensions = dimensions
38     self._show = show
39     self._method = method
40     self._volume = self._boxlength ** self._dimensions
41     self._dx = float(boxlength) / self._size
42     self._n = self._size + 1
43
44 def generator(self):
45     """
46     Genera el campo de fluctuaciones de densidad de energía  $\delta(x)$ .
47     """
48     rng = np.random.default_rng(seed=42)
49     seed_gaussiano_mag = rng.normal(0.0, 1.0, size=[self._n] * self._dimensions)
50     seed_gaussiano_phase = 2 * np.pi * rng.uniform(size=[self._n] * self.
51 _dimensions)
52     seed_gaussiano_hermitian = _hermitian(seed_gaussiano_mag,
53     seed_gaussiano_phase)
54     cutindex = (slice(None, -1),) * self._dimensions
55     seed_gaussiano_hermitian = seed_gaussiano_hermitian[cutindex]
56
57     self._vectork = _fftfreq(self._size, d=self._dx, b=self._coef_b)
58     normks = _mgrid(self._vectork, self._dimensions)
59     mask = normks != 0
60     self._normks = normks
61     self._normks[mask], self._name = self._method(self._amplitude, self._normks
62 [mask], self._power)
63
64     if self._normalise:
65         p_spectro = self._normks / self._volume
66     else:
67         p_spectro = self._normks
68
69     p_spectro_root = np.sqrt(p_spectro)
70     self._k_realize = seed_gaussiano_hermitian * p_spectro_root
71     self._x_realize = np.empty((self._size,), * self._dimensions,
72     dtype='complex128')
73     self._x_realize[...] = self._k_realize
74     self._x_realize[...] = self._volume * _ifftn(self._x_realize,
75     L=self._boxlength, a=self._coef_a, b=self._coef_b)[0]
76     self._x_realize = np.real(self._x_realize)

```

```

74     np.clip(self._x_realize, -1, np.inf, self._x_realize)
75
76     return self._x_realize
77
78 def show_x_realize(self):
79     """
80     Realización en el espacio de las posiciones.
81     """
82     if not hasattr(self, '_x_realize'):
83         print('Genera primero el campo con generator()')
84
85     planck_cmap = ListedColormap(
86         np.loadtxt("R:\\Documentos\\FS20-29-FSC\\scripts\\colormap.txt")/255.)
87     planck_cmap.set_bad("gray")
88     planck_cmap.set_under("white")
89     cmap = planck_cmap
90     for ind, realization in enumerate(self._x_realize[::self._size]):
91         fig, ax = plt.subplots(figsize=(4.5,4.5))
92         ax.yaxis.get_major_locator().set_params(integer=True)
93         fig.subplots_adjust(top = 0.95, bottom = 0.12, right = 1, left = 0)
94         ax.set_box_aspect(1)
95         plot = ax.imshow(realization, norm=CenteredNorm(), cmap=cmap,
96                           extent=(0,self._boxlength*self._size,0,self._boxlength*self._size),
97                           rasterized=True)
98         cbar = fig.colorbar(plot, orientation='horizontal', fraction=0.042,
99                             pad=0.15)
100        cbar.set_label(r'$\delta(\mathbf{x})$', rotation=0, size=12)
101        ax.set_xlabel(r'$x$ (Mpc)')
102        ax.set_ylabel(r'$y$ (Mpc)')
103        if self._show is True:
104            plt.show()
105        else:
106            plt.savefig(
107                f'R:\\Documentos\\FS20-29-FSC\\scripts64\\img\\gif\\'
108                f'transfercmbgif-{ind}-{timestr}.pgf',
109                dpi=900, bbox_inches='tight', pad_inches=0.0)
110    plt.close(fig)
111
112 def transferfunction_k(amplitude, modulus, power):
113     """
114     espectro de potencias en época de recombinación.
115     """
116     q = modulus/0.142
117     L0 = np.log(2 * np.exp(1) + 1.8 * q)
118     C0 = 14.2 + 731 * np.power(1 + 62.5 * q, -1)
119     T0 = L0 * np.power(L0 + C0 * np.power(q, 2), -1)
120     name = "transfer"
121
122     return amplitude * np.power(q, 1 * power) * np.power(T0, 2), name

```

```
120
121 def k_pol(amplitude, modulus, power):
122     """
123     Espectro de potencias primordial.
124     """
125     name = "pdek"
126     return amplitude * (modulus/k0) ** power, name
127
128 delta_x = FS2029FSC(amplitude=1E-3, power=0.965, size=9, dimensions=3, show=False,
129     method=transferfunction_k, boxlength=0.125)
130 delta_x.generator()
131 delta_x.show_x_realize()
```