

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias

Grado de Física

Trabajo Fin de Grado

# Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias

Código del TFG: **FS20-29-FSC**

Tipo de TFG: **Trabajo teórico-práctico general**

---

Autor: Rafael Jurado Ariza



A DETERMINAR



---

## Índice general

---

Índice general	2
Índice de figuras	3
Índice de tablas	4
Resumen. Palabras clave	5
Abstract. Keywords	6
1. Introducción	7
1.1. El universo homogéneo e isótropo . . . . .	9
1.1.1. Principio cosmológico . . . . .	9
1.1.2. El <i>Hot Big Bang</i> . . . . .	9
1.2. Inflación . . . . .	13
1.2.1. Dinámica del campo escalar . . . . .	14
Bibliografía	17

---

## Índice de figuras

---

1.1. Cuaderno con la idea original de Guth . . . . .	8
1.2. Representación de la recombinación de protones y electrones . . . . .	11
1.3. Ilustración del problema del horizonte . . . . .	12
1.4. Solución inflacionaria al problema del horizonte . . . . .	13
1.5. Ejemplo de un potencial <i>slow-roll</i> . . . . .	16

---

# Índice de tablas

---

1.1. Eventos clave en la historia del universo . . . . . 10

---

## Resumen

---

Escriba aquí un resumen de la memoria en castellano que contenga entre 100 y 300 palabras. Las palabras clave serán entre 3 y 6.

**Palabras clave:** palabra clave 1; palabra clave 2; palabra clave 3; palabra clave 4

---

## Abstract

---

Insert here the abstract of the report with an extension between 100 and 300 words.

**Keywords:** keyword1; keyword2; keyword3; keyword4

---

## Introducción

---

Si el universo tuvo un principio, como el *Big Bang*, procedente de esa “explosión” la distribución de materia y energía habría sido muy irregular. Enormemente difusa. El tiempo y el espacio habrían estado curvados, retorcidos, deformados.

Pero cuando miramos al universo hoy, no vemos nada de eso. La distribución de materia y energía es casi uniforme en el universo, y el propio espacio es extremadamente plano, obedeciendo a las leyes de la geometría más sencilla. Así que, ¿cómo llegamos desde ese salvaje estado inicial hasta el presente? Ahí es donde nació la idea de inflación.

El concepto que introdujo la inflación es que, después del *Big Bang*, quizás hubo un periodo de expansión muy rápida y acelerada, expandiendo el universo tan rápido que lo convertiría en algo aplanado y uniforme, y la distribución de materia y energía habría sido también uniformada de esta manera.

La teoría inflacionaria [1–3], uno de los ejes centrales de la Cosmología moderna, fue introducida por Alan Guth —entre otros— en 1981 para resolver una serie de problemas [4] que estaban presentes en el marco teórico de la Cosmología de la época: el *Hot Big Bang*. En la [figura 1.1](#) se muestra una parte de sus notas originales.

Una de las asombrosas características de la inflación es que encierra un mecanismo para producir las fluctuaciones de densidad primordiales. Estas pequeñas fluctuaciones cuánticas son estiradas por la expansión inflacionaria y se convierten en las semillas para la formación de la estructura a gran escala del universo [5–9]. Dichas fluctuaciones se describen mediante campos aleatorios, que son la generalización de las variables aleatorias a cantidades que toman valores diferentes en distintos puntos del espacio y/o del tiempo. La estadística de los campos aleatorios está codificada en el espectro de potencias  $P(k)$ , donde  $k$  es el módulo del vector de onda.



SPECTACULAR REALIZATION:

This kind of supercooling can explain why the universe today is so incredibly flat — and therefore ~~may~~ resolve the fine-tuning paradox pointed out by Bob Dicke in his Einstein day lectures.

Let me first rederive the Dicke paradox. He relies on the empirical fact the the deceleration parameter today  $q_0$  is of order 1.

$$q_0 \equiv -\ddot{R} \frac{R}{\dot{R}^2}$$

Use the eqs of motion

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R$$

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2,$$

so

$$q_0 = \frac{\frac{1}{2}(1 + 3p/\rho)}{1 - \frac{3kM_p^2}{8\pi\rho R^2}}$$

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2} - H^2 \quad G = \frac{1}{M_p^2}, \quad H = \frac{\dot{R}}{R}$$

$$q_0 = \frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + 3p) \frac{1}{H^2}$$

$$\frac{k}{R^2} = \frac{H^2}{(1 + \frac{3p}{\rho})} \left[ 2q_0 - 1 - \frac{3p}{\rho} \right]$$

Using the above eq, the fact the  $\frac{3p}{\rho} \approx 0$  for today's universe, and the fact that  $q_0 \sim 1$ , one has

Figura 1.1. Cuaderno con la idea original de Guth

Sin embargo, si se proporciona un  $P(k)$ , no es muy sencillo visualizar cómo sería el correspondiente mapa espacial de fluctuaciones, lo que dificulta la intuición de lo que significa un espectro de potencia concreto. En este trabajo, mediante el uso del lenguaje de programación *Python*, se generarán y representarán realizaciones de distintos campos aleatorios gaussianos de densidad.

## 1.1. EL UNIVERSO HOMOGÉNEO E ISÓTROPO

La cosmología física necesita un marco teórico que permita explicar los datos observacionales. En ausencia de dicho marco, ni siquiera las propiedades observables más básicas de las galaxias, como el desplazamiento al rojo, el brillo o tamaño aparentes, podrían interpretarse correctamente. El actual marco teórico aceptado por la mayoría de los astrónomos es el “modelo de concordancia” —dentro de la teoría del *Big Bang*— que es un modelo basado en la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Estos modelos están basados en la suposición de que el universo se rige por la relatividad general y es esencialmente homogéneo e isótropo, si se suaviza en escalas suficientemente grandes.

### 1.1.1. PRINCIPIO COSMOLÓGICO

La cosmología moderna se apoya en dos principios fundamentales: en primer lugar, la interacción dominante en escalas cosmológicas es la gravedad, y segundo, el principio cosmológico es una buena aproximación del universo. El principio cosmológico afirma que el universo, suavizado en escalas suficientemente grandes, es esencialmente homogéneo e isótropo. La homogeneidad tiene el significado intuitivo de que en un momento dado, el universo se ve igual en todas partes, e isotropía se refiere al hecho de que para cualquier observador que se mueve con la materia local, el universo se ve (localmente) igual en todas las direcciones.

### 1.1.2. EL HOT BIG BANG

La teoría estándar del *Hot Big Bang* es considerablemente exitosa, superando algunas pruebas clave de observación: expansión del universo, la existencia y espectro del *Cosmic Microwave Background* (CMB), las abundancias de elementos ligeros en el universo (nucleosíntesis) [10–12], entre otras [13].

El universo se está expandiendo [14]. Era entonces más denso y caliente en el pasado. Las partículas colisionaban frecuentemente y el universo estaba en un estado de equilibrio térmico con una temperatura  $T$ . Ajustando la constante de Boltzmann a la unidad  $k_B = 1$ , se mide la temperatura en unidades de energía. De este modo, midiendo las energías en electronvoltios:

$$\text{eV} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 1.2 \times 10^4 \text{ K}. \quad (1.1)$$

La relación entre la temperatura del universo temprano y su edad es [15]

$$\frac{T}{1 \text{ MeV}} \approx \left( \frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Un segundo después del *Big Bang* la temperatura del universo era de unos  $10^{11} \text{ K}$  (o  $1 \text{ MeV}$ ). Como aún había pasado poco tiempo en el universo temprano, la cadencia de

**Tabla 1.1.** Eventos clave en la historia del universo

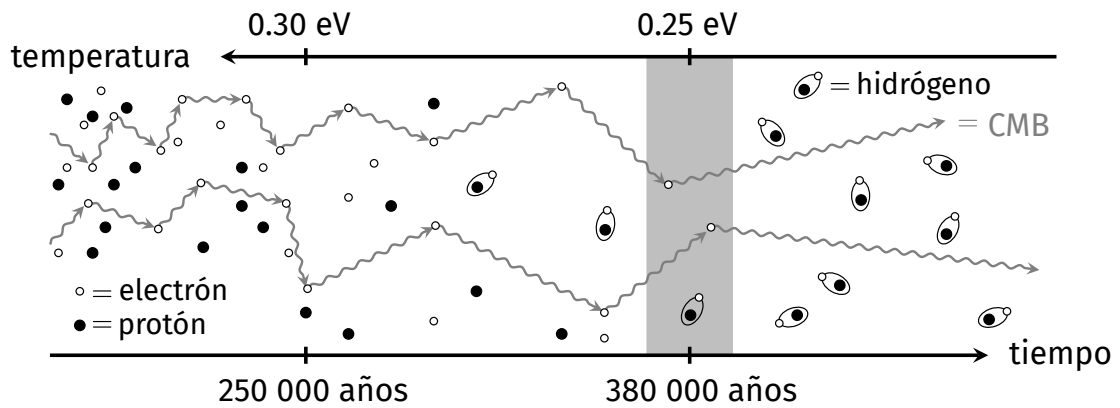
Evento	temperatura	energía	tiempo
Inflación	$< 10^{28}$ K	$< 10^{16}$ GeV	$> 10^{-34}$ s
Desacoplamiento materia oscura	?	?	?
Formación de bariones	?	?	?
Transición de fase electrodébil	$10^{15}$ K	100 GeV	$10^{-11}$ s
Formación de hadrones	$10^{12}$ K	150 MeV	$10^{-5}$ s
Desacoplamiento de neutrinos	$10^{10}$ K	1 MeV	1 s
Formación de núcleos	$10^9$ K	100 KeV	200 s
Formación de átomos	3400 K	0.30 eV	250 000 a
Desacoplamiento de fotones	2900 K	0.25 eV	380 000 a
Primeras estrellas	50 K	4 meV	100 Ma
Primeras galaxias	20 K	1.7 meV	1 Ga
Sistema solar	3.8 K	0.33 meV	9 Ga
Escritura de este TFG	2.7 K	0.23 meV	13.8 Ga

las reacciones era extremadamente alta, así que pasaron muchas cosas en un corto periodo de tiempo (véase [tabla 1.1](#)).

Un acontecimiento importante en la historia del universo primitivo es la formación de los primeros átomos y el consecuente desacoplamiento de los fotones (véase [figura 1.2](#)). Ocurrió 380 000 años después del *Big Bang* y se le conoce por **recombinación**. En este punto, la temperatura era lo suficientemente baja —debajo de 0.3 eV— para que se formaran átomos de hidrógeno mediante la reacción  $e^- + p^+ \rightarrow H + \gamma$ . Alrededor de 0.25 eV, los fotones se desacoplaron de la materia y el universo se torna transparente. Estos fotones todavía se ven hoy en día como un resplandor del *Big Bang*. Estirada por 13 800 millones de años de expansión cósmica, la primera luz del universo se observa hoy como una débil radiación de microondas, el CMB [16].

Una característica destacable de las correlaciones observadas en el CMB es que abarcan escalas mayores que la distancia recorrida por la luz entre el inicio del *Hot Big Bang* y el momento en que se creó el CMB. Esto entra en conflicto con la causalidad, a menos que las correlaciones se generaran antes del *Hot Big Bang*. De hecho, cada vez hay más pruebas de que el *Big Bang* no fue el comienzo del tiempo, sino que las fluctuaciones de densidad primordiales se produjeron durante un periodo anterior de expansión acelerada llamado inflación.

Aun así, surgen dilemas en esta teoría ya que se limita a aquellas épocas en las que el universo es lo suficientemente frío para que los procesos físicos fundamentales

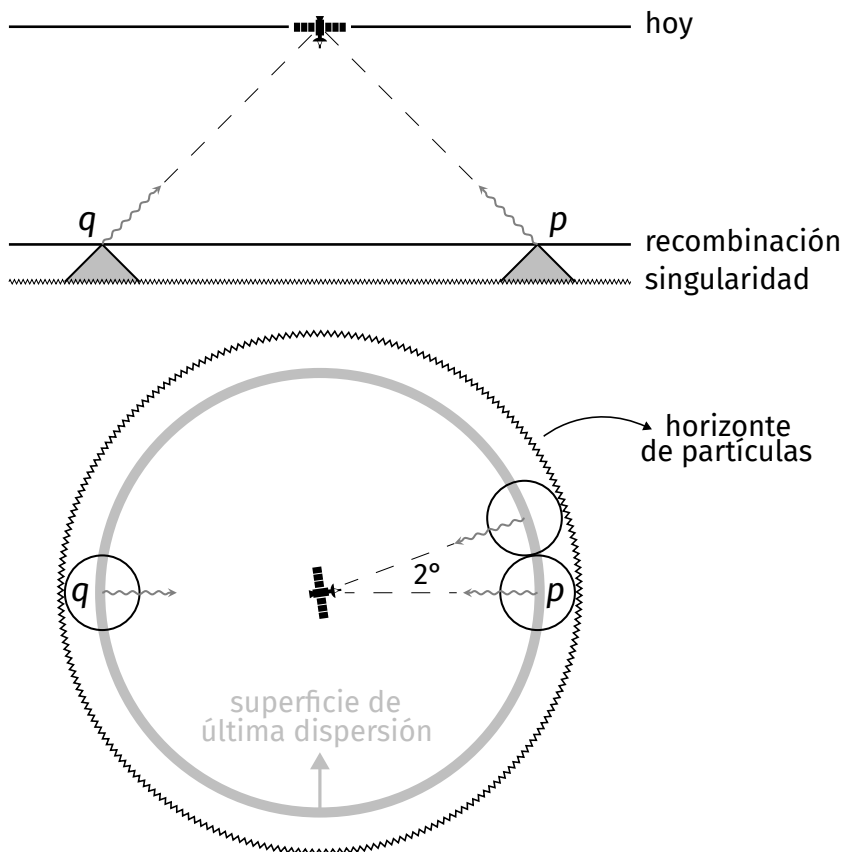


**Figura 1.2.** Representación de la recombinación de protones y electrones en átomos de hidrógeno neutros y el correspondiente desacoplamiento de los fotones

que subyacen estén bien consolidados y comprendidos a través de la experiencia en la Tierra; no aborda el estado del universo en momentos anteriores, más calientes. Estas cuestiones cruciales sin respuesta en el *Hot Big Bang* —precursoras en la introducción de la inflación— son el problema de la **planitud**, el problema del **horizonte** y la existencia de **monopolos magnéticos**. Tanto la primera como la segunda son el objeto de estudio de este texto al estar relacionadas con las condiciones iniciales del universo, que tuvieron que ser muy especiales y finamente ajustadas para dar lugar a lo que se observa hoy día. La última, la existencia de monopolos magnéticos y otras partículas que hoy no se observan pero deberían estar ahí [13], también queda resuelta con inflación pero no se dirá más sobre ella en este escrito.

Para especificar las condiciones iniciales del *Hot Big Bang*, se definen las posiciones y velocidades de todas las partículas en un intervalo de tiempo inicial, o aproximando al universo como un fluido la presión y densidad. Las leyes de la gravedad se utilizan entonces para hacer evolucionar el sistema en el tiempo. En la teoría estándar del *Big Bang* se supone la distribución de materia como homogénea e isotrópica [15]. Pero, ¿cómo se explica esta uniformidad del universo temprano? Incluso es algo que contrasta con la imagen proyectada por la teoría del *Big Bang* donde la mayor parte del universo parece no haber estado en contacto causal y no hay motivo dinámico para que estas regiones causalmente no conectadas tengan tales propiedades físicas similares que se suponen. Este problema de la homogeneidad se conoce como el problema del **horizonte**.

Para visualizar el primer problema, considérense dos direcciones opuestas en el cielo. Los fotones del CMB que recibimos de dichas direcciones fueron emitidos en los puntos etiquetados como  $q$  y  $p$  en la [figura 1.3](#). Se observa que los fotones fueron liberados lo suficientemente cerca de la singularidad del *Big Bang* para que los conos de luz del pasado de  $q$  y  $p$  no se superpongan. Como ningún punto se encuentra dentro de los horizontes de  $q$  y  $p$ , tenemos el siguiente enigma: ¿Cómo “saben” los fotones procedentes de estos dos puntos que deben estar a la misma

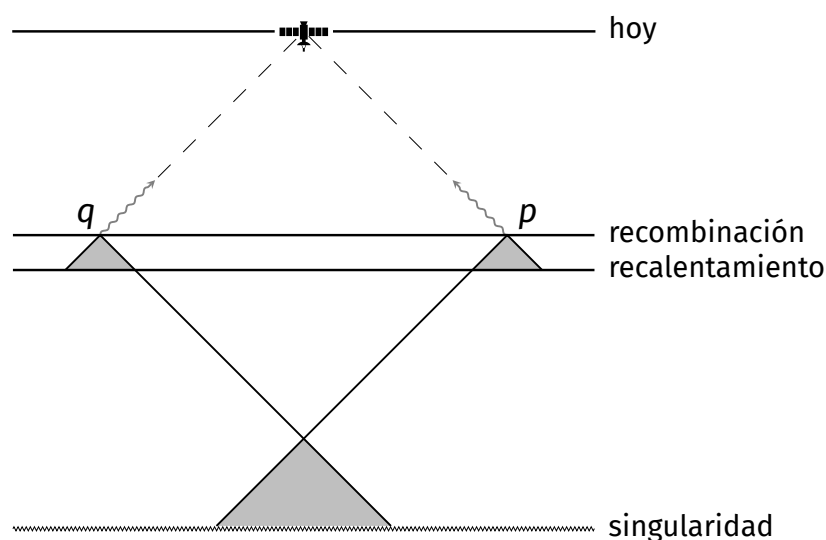


**Figura 1.3.** Ilustración del problema del horizonte en el modelo convencional del *Big Bang*. Todos los eventos que observamos actualmente están en nuestro cono de luz pasado. La intersección de nuestro cono de luz del pasado con la franja espacial en el momento de la recombinación es la superficie de última dispersión. Los puntos que están separados por más de  $2^\circ$  en el cielo parecen no haber estado nunca haber estado en contacto causal, ya que sus conos de luz pasados no se solapan. Notar que la singularidad del *Big Bang* es un momento en el tiempo y no un punto en el espacio.

temperatura? Simplemente no hubo tiempo suficiente para que las diferencias en las temperaturas iniciales se eliminaran mediante transferencia de calor. Lo mismo se aplica para cualesquiera dos puntos en el CMB que estén separados por más de  $2^\circ$  [15].

En teorías inflacionarias la singularidad de la [figura 1.3](#) no es la singularidad inicial, sino la transición entre inflación y el *Hot Big Bang*. Notar que el tiempo  $t = 0$  ahora se traslada a un momento previo. La física sigue manteniendo el tiempo entre la singularidad y recombinación en 380 000 años, pero los conos de luz se estiran drásticamente por la expansión inflacionaria permitiendo que estos se superpongan antes del fin de inflación. Esto es representado esquemáticamente en la [figura 1.4](#).

Para que el universo siga siendo homogéneo en tiempos posteriores, las velocidades iniciales deben tomar valores muy precisos. Si las velocidades iniciales son ligeramente demasiado pequeñas, el universo vuelve a colapsar en una fracción de segundo. Si son demasiado grandes, el universo se expande demasiado rápido y se queda casi vacío. El ajuste de las velocidades iniciales se hace aún más drástico si se



**Figura 1.4.** Solución inflacionaria al problema del horizonte. La singularidad del *Big Bang* estándar se sustituye por la superficie de recalentamiento. En lugar de marcar el comienzo del tiempo, ahora corresponde a la transición de la inflación a la evolución clásica del *Big Bang*. Todos los puntos del CMB tienen conos de luz pasados que se superponen y, por tanto, se originan en una región del espacio conectada causalmente.

considera en combinación con el problema del horizonte, ya que las velocidades de las partículas deben ajustarse a través de regiones del espacio causalmente desconectadas. Este ajuste preciso en la condición inicial de velocidad es lo que se conoce como el problema de la **planitud** y se plantea comúnmente como por qué la curvatura espacial del universo es tan pequeña, cuya relación con las velocidades viene dada por la suma de la energía cinética y potencial en una determinada región [15].

Los problemas de causalidad descritos arriba sugieren que hubo una fase antes del *Hot Big Bang*, durante la cual la homogeneidad del universo y sus correspondientes fluctuaciones fueron generadas. Un periodo de expansión acelerada es suficiente para resolverlos. Pero es necesario un escenario viable para dirigir tal expansión. Los campos escalares son la receta a seguir.

## 1.2. INFLACIÓN

Sabemos que para obtener una expansión acelerada, la presión efectiva debe ser negativa [17]. Inflación, aparentemente, fue dirigida por una forma de energía cuya presión  $\mathcal{P} < 0$ . La presión negativa no es algo familiar para los físicos. Así, sea lo que sea que conduce inflación, no es materia ordinaria o radiación. Tampoco puede ser una constante cosmológica: en este caso, el universo estaría en un estado de rápida inflación perpetuo, mientras que necesitamos que el periodo inflacionario termine y exista una transición de la fase dominada por radiación a la fase dominada por materia, ambas conocidas.



La forma más simple de generar tal época transitoria de expansión acelerada es mediante la energía potencial de un campo escalar. En física de partículas, se utilizan los campos escalares para representar partículas de espín cero. Se transforman como un escalar (es decir, no cambian) bajo transformaciones de coordenadas. En un universo homogéneo, un campo escalar será función del tiempo únicamente. Notar que no hay campo escalar conocido que pueda regir inflación. Aunque conocemos un campo escalar en la naturaleza, el campo de Higgs, usarlo para dirigir inflación resulta ser complicado. Sus propiedades e interacciones están lo suficientemente restringidas, por ahora, para que sepamos que no puede servir como fuente de la inflación. No obstante, hay que tener en cuenta que puede ser cierto que la idea de la inflación sea correcta, pero esté impulsada por algo distinto a un campo escalar.

### 1.2.1. DINÁMICA DEL CAMPO ESCALAR

Se toman como punto de partida las expresiones de la densidad de energía y presión efectivas de un campo escalar  $\phi(t, \mathbf{x})$  que llamaremos **inflatón**. Como se indica en la notación, el valor del campo depende del tiempo  $t$  y de la posición  $\mathbf{x}$ . Asociado a cada valor del campo hay una densidad de energía potencial  $V(\phi)$ . Cuando el campo es dinámico (cambia con el tiempo) entonces también incluye una densidad de energía cinética  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ . Si la energía asociada al campo escalar domina el universo, entonces sirve como fuente de la evolución de este en el modelo FLRW [15], donde se tiene al mismo ocupado por un fluido perfecto. Dichas expresiones de la densidad de energía y presión, se obtienen por comparación del tensor energía-momento (ecuaciones relatividad general de Einstein) del campo escalar con el de un fluido perfecto, y son

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.3a)$$

$$\mathcal{P}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (1.3b)$$

respectivamente.

En lo sucesivo son utilizadas las unidades naturales, esto es,  $c = \hbar = 1$ . Definimos la ecuación de estado de un fluido perfecto con el número adimensional  $w$ :

$$w \equiv \frac{\mathcal{P}_\phi}{\rho_\phi}. \quad (1.4)$$

El universo está acelerando solo si es gobernado por uno o varios componentes energéticos con ecuaciones de estado  $w_i < -1/3$  [18]. Así que durante inflación se ha de cumplir esta condición.

En el marco FLRW, el campo escalar es homogéneo y por tanto, solo depende del tiempo, esto es,  $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t)$ . Este obedece la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.5)$$

donde  $V'(\phi) = dV/d\phi$  y

$$H = H(t) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (1.6)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala —cantidad adimensional— del universo, el cual cuantiza el tamaño físico de este. La forma de  $a(t)$  depende de las propiedades del material dentro del universo [13]. El término  $\dot{\phi}^2/2$  en 1.3 es como la “energía cinética” del campo y  $3H\dot{\phi}$  en 1.5 viene de la expansión del universo y actúa como una fricción. Con las expresiones en 1.3, la ecuación de estado del campo escalar es

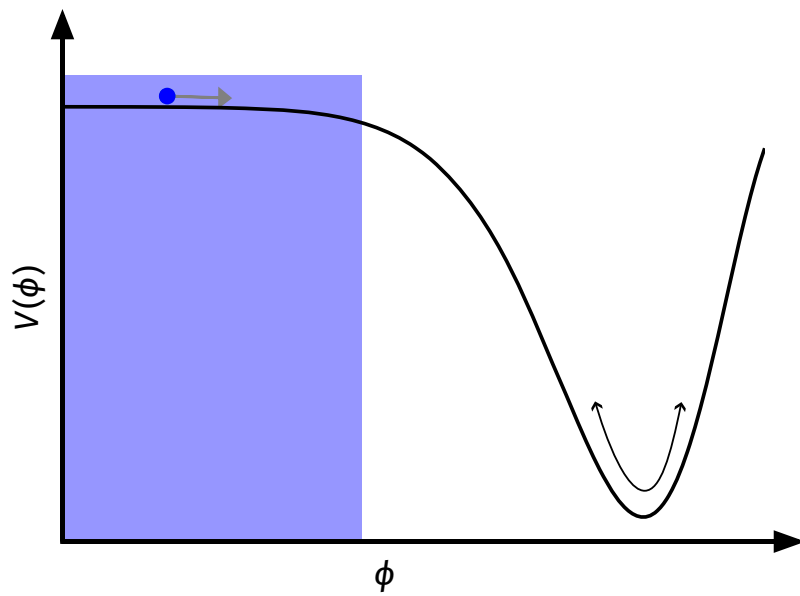
$$w(t) = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (1.7)$$

con los límites  $-1 \leq w(t) \leq 1$ . La ecuación de arriba es generalmente dependiente del tiempo. No obstante, si  $\dot{\phi}^2 < 4V(\phi)$  entonces  $w < -1/3$  y la condición para inflación es satisfecha. Más aún, si  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , entonces la ecuación de estado se torna  $w \approx -1$  y es constante. La expansión asociada del universo es, en este último caso, exponencial con  $H$  y  $\phi$  siendo prácticamente constantes [18].

Hasta ahora, la forma del potencial  $V(\phi)$  está indeterminada y hay bastantes escenarios de inflación posibles en la literatura, véase [19]. Sin embargo, las predicciones de los modelos más simples de inflación son bastante robustas y de este modo no es necesario especificar todos los detalles siempre y cuando se cumplan ciertas características. El escenario más popular y simple de inflación supone un campo escalar “rodando lentamente” (de aquí en adelante se usará el anglicismo *slow-roll* para referirnos a este tipo de escenarios) hacia su estado fundamental [1,3]. La energía potencial de un campo escalar *slow-roll* es muy cercana a constante (si el potencial no es muy pronunciado) por lo que rápidamente llega a dominar sobre la energía cinética (y la energía de todas las demás partículas). Un ejemplo es mostrado en la figura 1.5; inflación acaba una vez el campo haya llegado al mínimo del potencial, donde oscilará y decaerá a partículas más ligeras —eventualmente a aquellas del modelo estándar de partículas. En ese momento, el campo ya no rueda lentamente, sino que tiene una energía cinética importante, por lo que oscila en torno al mínimo. Entonces, la ecuación de estado 1.7 ya no está cerca de -1, sino cerca de cero, por lo que el universo ha pasado a una época de expansión desacelerada. Entonces, al final,  $\phi$  decae en partículas más ligeras. Con el tiempo, quizá tras una larga cadena de desintegraciones, el resultado es un universo casi completamente homogéneo, dominado por la radiación.

Inflación predice que las condiciones iniciales del universo son descritas con buena aproximación por un campo aleatorio gaussiano [15,17].





**Figura 1.5.** Ejemplo de un potencial *slow-roll*. Inflación ocurre en la parte sombreada.

---

## Bibliografía

---

- [1] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking," *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 17, pp. 1220–1223, 1982. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1220>
- [2] A. H. Guth, "Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems," *Physical Review D*, vol. 23, no. 2, pp. 347–356, 1981. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347>
- [3] A. D. Linde, "A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems," *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9)
- [4] P. J. Peebles, *Principles of physical cosmology*. Princeton university press, 1993, vol. 27. <https://doi.org/10.1515/9780691206721>
- [5] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, "Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe," *JETP Lett.*, vol. 33, pp. 532–535, 1981. [http://jetpletters.ru/ps/1510/article\\_23079.pdf](http://jetpletters.ru/ps/1510/article_23079.pdf)
- [6] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, "Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe," *Physical Review D*, vol. 28, no. 4, p. 679, 1983. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.679>
- [7] S. W. Hawking, "The development of irregularities in a single bubble inflationary universe," *Physics Letters B*, vol. 115, no. 4, pp. 295–297, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90373-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90373-2)
- [8] A. A. Starobinsky, "Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations," *Physics Letters B*, vol. 117, no. 3-4, pp. 175–178, 1982. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90541-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90541-X)
- [9] A. H. Guth and S.-Y. Pi, "Quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe," *Physical Review D*, vol. 32, no. 8, p. 1899, 1985. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.1899>

- [10] G. Gamow, "Expanding universe and the origin of elements," *Physical review*, vol. 70, no. 7-8, pp. 572–573, 1946. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.70.572.2>
- [11] R. A. Alpher and R. Herman, "Evolution of the universe," *Nature*, vol. 162, no. 4124, pp. 774–775, 1948. <https://doi.org/10.1038/162774b0>
- [12] R. A. Alpher, J. W. Follin Jr, and R. C. Herman, "Physical conditions in the initial stages of the expanding universe," *Physical Review*, vol. 92, no. 6, pp. 1347–1361, 1953. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.1347>
- [13] A. R. Liddle, "An introduction to cosmological inflation," *High energy physics and cosmology*, p. 260, 1998. <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9901124>
- [14] E. Hubble, "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae," *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929. <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- [15] D. Baumann, *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022. <https://doi.org/10.1017/9781108937092>
- [16] A. A. Penzias and R. W. Wilson, "A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s." *The Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419–421, 1965. <https://www.doi.org/10.1086/148307>
- [17] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern cosmology*. Academic Press, 2020. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-01943-2>
- [18] C. Knebel, "An introduction into the theory of cosmological structure formation," *arXiv*, 2012. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.5931>
- [19] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge university press, 2000. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139175180>