Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias

TFG: FS20-29-FSC

22 de noviembre de 2022

Universidad de Córdoba

Rafael Jurado Ariza

Abstract

Abstract

In order to explain certain peculiarities that appear in the Big Bang theory, we resort to the concept of inflation.

This work gives an introduction to the theoretical framework of the Big Bang and its problems and inflation, as well as the fluctuations that occurred in the primordial universe and the statistics needed to understand them. The initial distribution of these fluctuations can be shaped by means of a random density field with Gaussian statistics. For the purpose to delve into the meaning of such a Gaussian statistics, an algorithm has been programmed in the Python language. This is done by using tools such as the fast Fourier transform or random numbers.

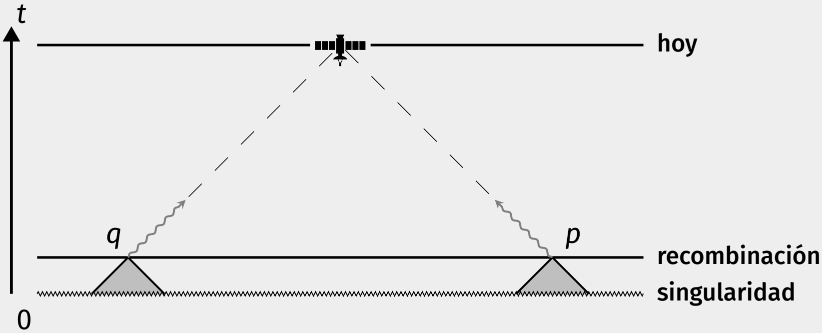
Finally, the numerical simulations are represented by means of heat maps, which are the peak results of the work.

Introducción

Inflación

El Universo no es como las ecuaciones del *Hot Big Bang* orquestan. Aparecen una serie de problemas teóricos, entre ellos: **el problema del horizonte**

Introducción



Introducción

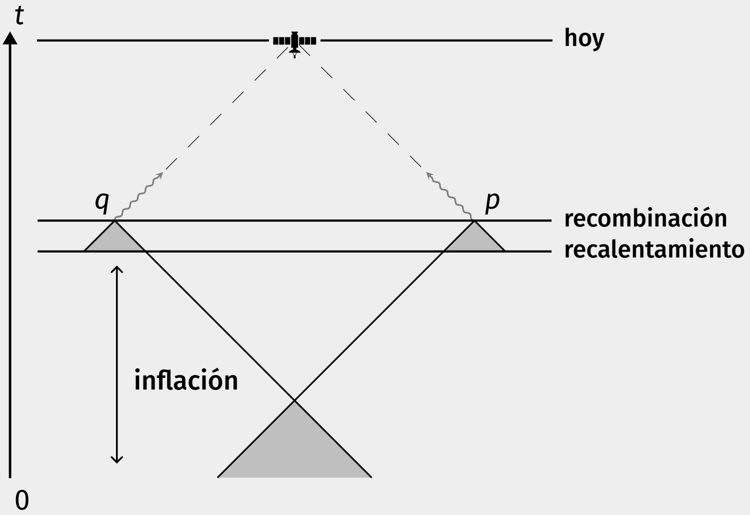
Inflación

El Universo no es como las ecuaciones del *Hot Big Bang* orquestan. Aparecen una serie de problemas teóricos, entre ellos: **el problema del horizonte** y el **problema de la planitud**:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \qquad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho.$$

Inflación es capaz de **resolver** estos dos problemas y además provee de manera natural un **mecanismo generador** de las fluctuaciones primordiales.

Introducción

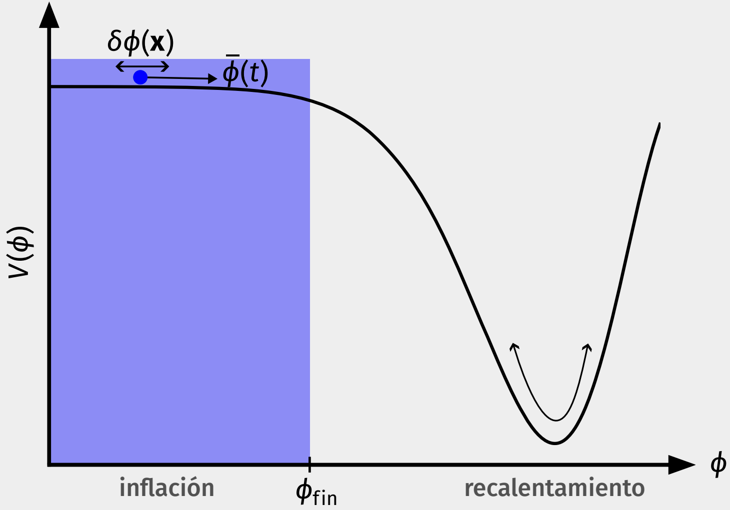


Introducción

Inflación

- Marco teórico $\longrightarrow$ Campos escalares.
- El campo escalar es el **inflatón** $\phi(t, \mathbf{x})$.
- Su ec. de estado $w = \mathcal{P}_\phi / \rho_\phi < -1/3$.
- Tiene una densidad de e. potencial $V(\phi)$ y de e. cinética $\dot{\phi}^2/2$.
- Su ec. de movimiento $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$.
- Escenario *slow-roll*.

Introducción



Introducción

Espectro de potencias y función de transferencia

Fluctuaciones cuánticas $\delta\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow$ Fluctuaciones clásicas densidad de energía $\delta\rho(t, \mathbf{x})$

Estas fluctuaciones clásicas son descritas en el **régimen lineal**:

$$\delta(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta\rho(t, \mathbf{x})}{\bar{\rho}(t)} \ll 1.$$

El espacio de Fourier entra en juego para facilitar el estudio de las fluctuaciones (“modos”). En cosmología nos importa el comportamiento estadístico de las cantidades estudiadas. El campo de fluctuaciones δ se modela con un **campo aleatorio**.

Introducción

Espectro de potencias y función de transferencia

Estamos interesados en la correlación espacial de las fluctuaciones:

$$\xi(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) \equiv \langle \delta(\mathbf{x},t), \delta(\mathbf{x}',t) \rangle = \int \mathcal{D}\delta \, \mathbb{P}[\delta] \, \delta(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}',t).$$

$$\text{Homogeneidad e isotropía} \implies \xi(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \xi(r).$$

En el espacio de Fourier:

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 \, \delta_{\mathrm{D}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \, \mathrm{P}(k),$$

donde $\mathrm{P}(k)$ es el espectro de potencias.

En el caso que veremos adelante, $\mathrm{P}(k)$ lleva toda la información del campo aleatorio. La evolución gravitatoria de las fluctuaciones es descrita con la función de transferencia $T(k)$.

Introducción

Campos aleatorios gaussianos

En este tipo de campos aleatorios, la FDP es una gaussiana en cada punto del espacio. Existe **evidencia observacional** suficiente para tomar este campo como modelo del campo de densidad primordial.

El **espectro de potencias** define completamente un campo aleatorio gaussiano.

Para los diferentes vectores de onda $\mathbf{k}$:

$$\delta(\mathbf{k}) = A_{\mathbf{k}} + \mathrm{i}B_{\mathbf{k}} = |\delta(\mathbf{k})|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\phi_{\mathbf{k}}}, \quad |\delta(\mathbf{k})| \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{P}(k)) \wedge \phi_{\mathbf{k}} \sim U(0,1).$$

Objetivos

- Algoritmo Python.
- FFT y números aleatorios como herramientas principales en este algoritmo.
- Modelo para espectro de potencias primordial $\mathrm{P}_0(k) = A_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s}$.
- Modelo para espectro de potencias en época de recombinación $\mathrm{P}(k) = \mathrm{P}_0(k) T^2(k)$.
- Visualizar los campos aleatorios.

Materiales y métodos

FFT y números aleatorios gaussianos

Al simular por ordenador la transformada de Fourier se convierte en una DFT.

- ✗ DFT (definición directa) $\longrightarrow O(N^2)$
- ✓ FFT (algoritmo ingenioso) $\longrightarrow O(N \log_2 N)$

Materiales y métodos

FFT y números aleatorios gaussianos

Al simular por ordenador la transformada de Fourier se convierte en una DFT.

- ✗ DFT (definición directa) $\longrightarrow O(N^2)$
- ✓ FFT (algoritmo ingenioso) $\longrightarrow O(N \log_2 N)$

El campo aleatorio gaussiano es computado mediante el uso de número aleatorios bajo una estadística normal (o gaussiana) con media nula y desviación típica $\sqrt{\mathrm{P}(k)}$.

Materiales y métodos

Método

Caja (L, N)

Determinamos $k_j = \frac{2\pi}{L} j, \quad j \in \left(-\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2}\right)$

Creamos el array $k_j = \sqrt{\sum_d k_{d,j}^2}$ y el $G(0,1)$

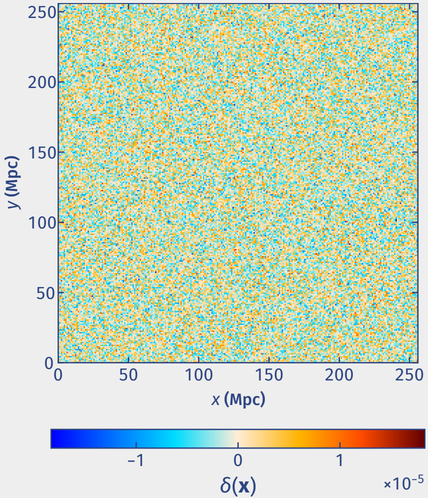
Calculamos el array $\mathrm{P}(k_j)$

Computamos el array $\delta(\mathbf{k}) = G\sqrt{\mathrm{P}(k_j)}$

Campo de fluctuaciones real $\delta(\mathbf{x}) = L^3 \mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\mathbf{k})\right]$

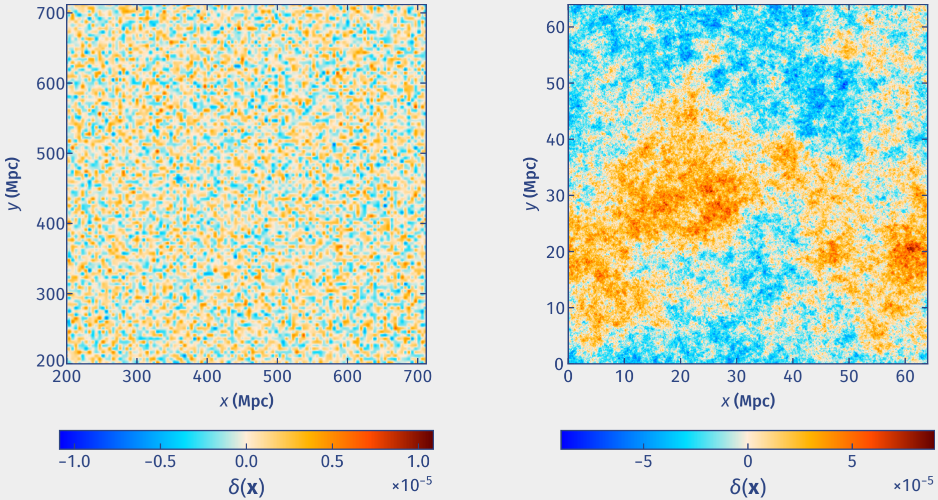
Resultados

Ruido blanco ($n_s = 0$)



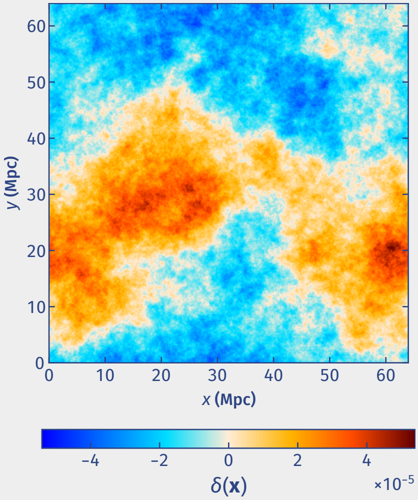
Resultados

Campo primordial (Izda. $n_s = 1$ Dcha. $n_s = -3$)



Resultados

Campo en época de recombinación ($n_s = 0.965$)



Resultados

Campo tridimensional ($n_s = 0.965$)

Conclusions

- → Python 💙 Computational cosmology.
- → FFT and random numbers are essential in this simulation approach.
- → For $\mathrm{P}_0(k)$:
  - Large scale fluctuations for $n_s < 0$.
  - Small scale fluctuations for $n_s > 0$.
  - Harrison-Zel'dovich ($n_s = 1$) homogeneous fluctuations at large scales with noticeable fluctuations at smaller scales.
- → With $T(k)$ we reproduce the spatial distribution of fluctuations in the CMB.
- → 2D and 3D realizations are essential for the comprehension.

Generación de campos gaussianos en teorías inflacionarias

TFG: FS20-29-FSC

22 de noviembre de 2022

Universidad de Córdoba

Rafael Jurado Ariza