

FÍSICA DEL PLASMA



“La inmensa mayoría de la materia conocida del Universo es plasma”

*Universidad de Córdoba.
Facultad de Ciencias.*



Antonio Sola Díaz

Antonio Gamero Rojas

Índice general

1. INTRODUCCIÓN. EL PLASMA Y SUS CARACTERÍSTICAS	4
1.1. <i>Generalidades</i>	4
1.2. <i>Parámetros característicos del plasma</i>	5
1.3. <i>Apantallamiento de Debye y longitud de Debye</i>	7
1.4. <i>Frecuencias características del plasma</i>	11
1.5. <i>Teoría de Debye-Hückel de los plasmas clásicos en equilibrio</i>	14
1.5.1. Funciones de distribución reducidas	15
1.5.2. Teoría de Debye-Hückel	18
1.5.3. Solución de la ecuación de Debye	19
1.5.4. Gráfica del potencial de Debye	21
1.5.5. Solución alternativa de la ecuación de Debye	21
1.6. <i>Procesos microscópicos o mecanismos: procesos colisionales y radiativos</i>	24
1.6.1. Colisiones elásticas	25
1.6.2. Colisiones inelásticas: ionización y recombinación	27
1.6.3. Otros procesos microscópicos o mecanismos	29
1.6.4. Plasma ideal	29
1.7. <i>Balance de partículas</i>	30
1.8. <i>Clasificación de los plasmas: tipos de plasmas</i>	33
1.9. <i>Aplicaciones de los plasmas</i>	33
2. PLASMA COMO CONJUNTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN MOVIMIENTO	35
2.1. <i>Introducción</i>	35
2.2. <i>Movimiento en campos eléctricos y magnéticos uniformes</i>	35
2.2.1. Campo \vec{B} uniforme y constante en el tiempo	36
2.2.2. Campo \vec{B} y \vec{E} uniformes y constantes en el tiempo	39
2.3. <i>Movimientos en campos eléctricos y magnéticos inhomogéneos</i>	42
2.3.1. Gradiente de \vec{B} perpendicular a \vec{B}	42
2.3.2. Campo magnético \vec{B} curvado (inhomogeneidad en curvatura)	45
2.3.3. Gradiente de \vec{B} paralelo al propio \vec{B}	47
2.3.4. Espejos magnéticos	51
2.3.5. Campo \vec{E} inhomogéneo	54
2.4. <i>Movimientos en campos variables con el tiempo</i>	57
2.4.1. Campo \vec{B} variable con el tiempo (lentamente)	57
2.4.2. Campo \vec{E} variable con el tiempo (lentamente)	61
2.5. <i>Invariantes adiabáticos</i>	65

3. PLASMAS COMO FLUIDOS	70
3.1. <i>Introducción.</i>	70
3.2. <i>Ecuaciones de un plasma como fluido.</i>	71
3.2.1. Ecuaciones del campo electromagnético	71
3.2.2. Ecuación de continuidad	74
3.2.3. Ecuación de balance de la cantidad de movimiento	77
3.2.4. El tensor de presión \overleftrightarrow{P}	80
3.2.5. Ecuación de balance de la energía cinética. Momentos de la ecuación de Boltzmann	82
3.2.6. Ecuación de estado y ecuaciones de transformaciones termodinámicas	83
3.3. <i>Desplazamiento del fluido.</i>	84
3.3.1. Resistividad del plasma	84
3.3.2. Desplazamiento del fluido perpendicular al campo magnético	86
3.3.3. Aplicación	87
3.3.4. Velocidad de arrastre (o deriva) y velocidad de desplazamiento	88
3.3.5. Desplazamiento del fluido paralelo al campo magnético	89
3.4. <i>Modelo magnetohidrodinámico.</i>	91
3.4.1. Ecuaciones del modelo magnetohidrodinámico	91
3.4.2. Aplicaciones	93
3.5. <i>Difusión y movilidad en plasmas débilmente ionizados.</i>	96
3.6. <i>Soluciones de la ecuación de difusión.</i>	100
3.6.1. Extinción de un plasma cilíndrico por difusión pura	100
3.6.2. Estados estacionarios: mantenimiento de la descarga	103
3.6.3. Pérdidas por recombinación	104
4. OSCILACIONES Y ONDAS EN PLASMAS	106
4.1. <i>Introducción.</i>	106
4.2. <i>Oscilaciones y ondas electrónicas.</i>	107
4.2.1. Oscilaciones electrónicas en ausencia de campo magnético	107
4.2.2. Ondas electrónicas en un plasma no magnetizado	110
4.2.3. Ondas electrónicas con atenuación	113
4.2.4. Oscilaciones electrónicas en un plasma magnetizado	114
4.2.5. Ondas electrónicas en un plasma magnetizado	115
4.2.6. Ondas electrónicas con atenuación en un plasma magnetizado	118
4.3. <i>Ondas iónicas.</i>	119
4.3.1. Ondas iónicas en un plasma no magnetizado	119
4.3.2. Ondas iónicas con atenuación	123
4.3.3. Ondas iónicas con campo magnético externo (\perp) : $\vec{B} = B_0 \vec{k}$	126
4.4. <i>Ondas electromagnéticas.</i>	126
4.4.1. Ondas electromagnéticas en plasmas sin atenuación ($\nu_e = 0$) y sin agitación térmica ($T_e = 0$)	128
4.4.2. Ondas electromagnéticas con atenuación ($\nu_e \neq 0$) y sin agitación térmica ($T_e = 0$)	130
4.4.3. Ondas electromagnéticas sin atenuación ($\nu_e = 0$) y con agitación térmica ($T_e \neq 0$)	133
4.4.4. Ondas electromagnéticas transversales con campo magnético externo \vec{B}_0	134

5. DESCARGAS EN GASES.	135
5.1. <i>Introducción.</i>	135
5.2. <i>Descargas de corriente continua.</i>	135
5.3. <i>Descargas de arco.</i>	136
5.4. <i>Descargas inductivas y capacitivas de radio frecuencia.</i>	136
5.5. <i>Descargas producidas por microondas.</i>	138
6. DIAGNOSIS DE PLASMAS	139
6.1. <i>Introducción.</i>	139
6.1.1. Plasmas que podemos diagnosticar	139
6.1.2. Clasificación de las técnicas de diagnosis	140
6.1.3. Características de estas técnicas	140
6.1.4. Para la diagnosis de plasmas ¿qué magnitudes queremos medir?	140
6.2. <i>Diagnosis por sondas.</i>	141
6.2.1. Tipos de sondas	141
6.2.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis por sonda simple	142
6.3. <i>Diagnosis electromagnética.</i>	144
6.3.1. Técnicas puramente propagativas	145
6.3.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis electromagnética propagativa	146
6.3.3. Técnicas interferométricas	147
6.3.4. Técnicas por reflectometría	148
6.3.5. Técnicas resonantes	149
6.4. <i>Diagnosis espectroscópica.</i>	151
6.4.1. Clasificación de las técnicas espectroscópicas	153
6.4.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis espectroscópica	155
6.5. <i>Otras técnicas de diagnosis.</i>	160
6.5.1. Técnicas de interrupción	160
6.5.2. Espectroscopía de masas	160
6.6. <i>Conclusiones.</i>	160
A. Estudio de las colisiones binarias en la teoría cinética elemental.	162
A.1. Ecuaciones de supervivencia: frecuencia de colisión y recorrido libre medio.	162
A.2. Hipótesis de la Teoría Cinética elemental.	166
A.3. Colisiones elásticas en un plasma.	167
A.4. Colisiones inelásticas en un plasma.	168
B. Método de los momentos de la ecuación de Boltzmann.	169
B.1. Obtención de la ecuación de continuidad a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de orden cero.	170
B.2. Obtención de la ecuación de Euler a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de primer orden.	171
B.3. Obtención de la ecuación del flujo de calor a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de segundo orden.	173
C. Obtención de las ecuaciones de la hidrodinámica a partir de la ecuación de Enskog.	176

Tema 1

INTRODUCCIÓN. EL PLASMA Y SUS CARACTERÍSTICAS

1.1. *Generalidades.*

Plasma → Significa *moldeable*, que se adapta rápidamente al recipiente que lo contiene. Éste nombre se debe a Langmuir (1920).

Nosotros llamaremos *plasma* a un gas formado por partículas neutras y partículas cargadas, e^- , I^+ , I^- (iones positivos y negativos), I^{++} , I^{--} (iones positivos y negativos con distintos grados de ionización), consecuencia de procesos de ionización de sus átomos y/o moléculas.

Puede considerarse como el cuarto estado de la materia, aunque desde el punto de vista termodinámico esto no tiene demasiado sentido puesto que no se produce cambio de fase alguno: no hay transición de un gas neutro a un gas ionizado o plasma. A temperatura ambiente, la relación entre las partículas cargadas y las neutras en el aire es del orden de 10^{-122} , lo que obviamente implica que no existe plasma en estas circunstancias.

$$T \approx 300K \quad \rightarrow \quad \frac{n_i}{n_N} \approx 10^{-122}$$

Desde un punto de vista más axiomático, PLASMA es: Gas ionizado **cuasineutro** formado por partículas neutras y cargadas que presentan un **comportamiento colectivo**.

- **Cuasineutralidad:** en el gas ionizado globalmente tendremos el mismo número de partículas positivas y negativas; además, si localmente aparece una descompensación de la carga, el plasma intenta restablecer la neutralidad mediante la redistribución de carga eléctrica y la aparición de un campo eléctrico restaurador. El plasma tiende a ser equipotencial.
- **Comportamiento colectivo:** en un gas neutro, al no existir partículas cargadas, podemos despreciar las interacciones eléctricas entre las partículas y hablaremos únicamente de colisiones (interacciones de corto alcance). Sin embargo, en un gas ionizado aparecerán interacciones de largo alcance debidas a los campos eléctricos creados; es decir, lo que ocurre en una zona del plasma es consecuencia de lo que ocurre en todo el plasma.

Cuando tenemos las dos características anteriores al mismo tiempo en un gas ionizado, hablamos de plasma. La condición de plasma es más fuerte o restrictiva que la de simplemente gas ionizado.

1.2. Parámetros característicos del plasma.

Introducimos a continuación diversos parámetros característicos del plasma

1. **GRADO DE IONIZACIÓN**, $\delta \rightarrow$ Relación o razón (cociente) entre la cantidad de partículas ionizadas y las totales medidas por sus concentraciones o densidades de partículas (en m^{-3}).

$$\delta = \frac{\text{densidad de los iones}}{\text{densidad total de partículas}} = \frac{n_i}{n_i + n_N}.$$

Como regla general, aceptaremos que en el plasma coexisten procesos ionizantes (que producen partículas cargadas eléctricamente creando el plasma) y procesos recombinantes (que las destruyen haciendo desaparecer el plasma), cumpliéndose que:

- Una mayor temperatura del plasma favorece que el grado de ionización sea mayor al aumentar la influencia de los procesos ionizantes: $T \uparrow \Rightarrow \delta \uparrow$
- Una mayor densidad de partículas cargadas (iónica/electrónica) tiende a disminuir el grado de ionización al aumentar la influencia de los procesos recombinantes: $n_e, n_i \uparrow \Rightarrow \delta \downarrow$
- Si $\delta \approx 1 \Rightarrow n_i \gg n_N \equiv$ Plasmas muy energéticos, con temperaturas elevadas \rightarrow PLASMA TOTALMENTE IONIZADO.
- Si $\delta < 10^{-4} \Rightarrow n_i \ll n_N \equiv$ Quiere decir que por cada partícula ionizada hay 10^4 partículas o más sin ionizar \rightarrow PLASMA DÉBILMENTE IONIZADO. A bajas temperaturas se denominan PLASMAS FRÍOS.

2. TEMPERATURA CINÉTICA.

Cada tipo de partícula existente en el plasma tendrá una temperatura cinética. Entre partículas del mismo tipo existirá algún tipo de equilibrio térmico, y en principio podríamos considerar que este equilibrio térmico va a dar lugar a una función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann (plasmas Maxwellianos).

Tenemos partículas con velocidades que se encuentran comprendidas al mismo tiempo entre:

$$v_x, v_x + dv_x$$

$$v_y, v_y + dv_y$$

$$v_z, v_z + dv_z$$

tal que el número medio de partículas por doble intervalo de volumen $d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ es

$$\frac{d^3n}{dv_x dv_y dv_z} = f(v_x, v_y, v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

o función de distribución de velocidades Maxwelliana, que normaliza parcialmente al integrar para todas las velocidades al número de partículas por unidad de volumen o densidad de partículas (de cualquier velocidad) de esa especie o tipo n al integrarla $\forall \vec{v}$

$$n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

En el equilibrio, esta densidad es uniforme en todo el plasma.

Veamos otro parámetro relacionado con la temperatura cinética.

ENERGÍA CINÉTICA MEDIA $\langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon}$

Si la energía cinética de las partículas es $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$ la energía media según la distribución de Maxwell-Boltzmann (M-B) es:

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon f d^3\vec{v}}{\int_{-\infty}^{\infty} f d^3\vec{v}} = \frac{3}{2}k_B T; \text{ donde } T \equiv \text{Temperatura cinética.}$$

Notemos que hay una energía de $\frac{1}{2}k_B T$ por cada grado de libertad de traslación de la partícula (teorema de equipartición de la energía cinética para tres grados de libertad translacionales).

3. VELOCIDAD TÉRMICA Y VELOCIDAD CUADRÁTICA MEDIA.

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_{th}^2 \Rightarrow v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}: \text{esta velocidad estará asociada a la temperatura cinética.}$$

$$\text{Para la velocidad cuadrática media (v.c.m.): } \overline{v^2} = v_{cm}^2 = \frac{2}{m}\bar{\epsilon} = \frac{3}{m}k_B T \Rightarrow v_{cm}^2 = 3v_{th}^2 \Rightarrow v_{cm} = 1,73v_{th}$$

4. TEMPERATURA EFECTIVA.

Vendrá determinada por la energía media de las partículas cuando no exista rigurosamente equilibrio Maxwelliano (M-B); es decir, es una temperatura asociada a la energía cinética media del gas fuera del equilibrio.

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2}k_B T_{ef}.$$

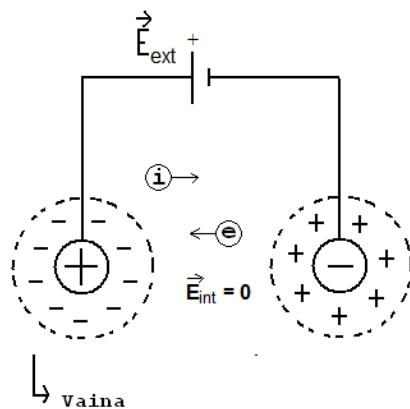
Además podremos tener una cierta anisotropía. Si por ejemplo tenemos el plasma en el seno de un campo \vec{B} , éste condicionará los movimientos de las partículas cargadas y hará que los mecanismos de ganancia-pérdida de energía cinética no sean iguales en una dirección u otra del espacio; es decir, el existencia de \vec{B} provoca una anisotropía, y como consecuencia las mismas partículas podrán tener distinta temperatura dependiendo de la dirección de movimiento considerada (*p.e.* Temperatura de los $e^- \perp \vec{B} \neq$ temperatura de los $e^- \parallel \vec{B}$).

Con frecuencia, en el plasma pueden coexistir distintos tipos o especies de partículas (e^- , iones, neutros, ...) con distintas temperaturas cinéticas y distintas funciones de distribución de velocidades, que a su vez pueden estar o no en equilibrio. Introducimos a continuación de forma destacada otros parámetros característicos del plasma como son la *longitud de Debye* y las *frecuencias del plasma*; la primera de ellas asociada al comportamiento estático del plasma, la segunda al dinámico.

1.3. Apantallamiento de Debye y longitud de Debye.

Experimentalmente se comprueba que si existe una perturbación local de la carga, es decir, que hay una descompensación local de la neutralidad eléctrica entre la carga positiva y negativa, se genera un campo eléctrico local inducido \vec{E}_{ind} que tenderá a redistribuir la carga para que se restituya la neutralidad del plasma \equiv APANTALLAMIENTO. Este campo eléctrico inducido se convierte en restaurador del equilibrio al objeto de hacer desaparecer la perturbación.

Supongamos un plasma inicialmente neutro que perturbaremos mediante un campo eléctrico externo, \vec{E}_{ext} , debido a una diferencia de potencial entre los electrodos de prueba.



Debido a esta perturbación externa, se rompe el equilibrio electrostático y aparece un redistribución de los portadores de carga (e^- e iones) que inducen el campo eléctrico \vec{E}_{ind} ya mencionado que se opone al campo externo perturbador. La redistribución de carga finaliza cuando el campo eléctrico total en el interior del plasma, suma del campo externo perturbador y del campo restaurador inducido, se anula en el interior del plasma $\vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = 0$ como ocurre en ausencia de perturbación externa \rightarrow Plasma equipotencial (cuasi-neutralidad eléctrica.)

Este fenómeno recibe el nombre de *apantallamiento de Debye*. La zona que apantalla se llama zona no neutra o *vaina*, y fuera de ésta se reproduce (se vuelve a conseguir) la cuasineutralidad del plasma. En el caso del ejemplo hay dos vaina, una vaina iónica donde predomina la carga positiva (entorno al electrodo negativo) y una vaina electrónica donde predomina la carga negativa (entorno al electrodo positivo). Dentro de las vainas - positiva y negativa - no existe neutralidad eléctrica y es $\vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} \neq 0$.

Veamos qué espesor debe tener la vaina para que el plasma sea equipotencial fuera de la misma; es decir, para que se produzca el apantallamiento de la perturbación que hemos introducido en el plasma.

Sea un plasma neutro, con el mismo número de partículas por unidad de volumen positivas (iones) y negativas (electrones), a unas temperaturas cinéticas constantes (uniformes) en el espacio.

Cuando se da cuasi-neutralidad en uasencia de perturbación, tenemos que:

$$n_e = Z n_i \text{ donde:}$$

- $n_e \equiv$ densidad electrónica.
- $n_i \equiv$ densidad iónica.
- $Z \equiv$ número de carga de los iones.

En presencia de perturbación eléctrica externa, aparece una distribución de potencial eléctrico no uniforme ϕ y en cualquier punto del espacio tendremos una energía total de las partículas dada por:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi \Rightarrow \text{cinética} + \text{potencial}.$$

para: $e^- \rightarrow q_e = -e$

$$i \rightarrow q_i = Ze$$

En el equilibrio térmico a la temperatura T entre las partículas del mismo tipo sometidas al campo de potencial ϕ (equilibrio de sedimentación electrostático), la función de distribución de velocidades de las partículas se escribe

$$f(v_x, v_y, v_z) = Ae^{-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + q\phi}{k_B T}},$$

que aplicaremos indistintamente a electrones e iones y donde, f tiene simetría esférica por lo que se refiere a las velocidades (sólo depende de su módulo).

Si integramos $f(v_x, v_y, v_z)$ en el subespacio de las velocidades, obtendremos la densidad de partículas n que conserva la dependencia con el potencial que supone la perturbación, y por tanto con la posición:

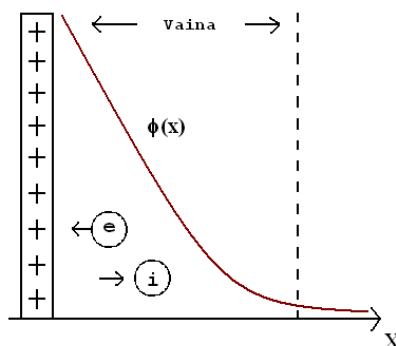
$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + q\phi}{k_B T}} d^3\vec{v} = cte \cdot e^{-\frac{q\phi}{k_B T}}$$

* Un mayor potencial implica una mayor densidad electrónica $n_e = cte \cdot e^{\frac{e\phi}{k_B T_e}}$.

* Un menor potencial implica una mayor densidad iónica $n_i = cte \cdot e^{\frac{-eZ\phi}{k_B T_i}}$.

En estas expresiones, cada tipo de partícula cargada (electrones e iones) tiene su temperatura cinética correspondiente que no tiene por qué ser la misma.

Para simplificar nuestro razonamiento, consideremos ahora el caso unidimensional más simple matemáticamente (eje x). Sea un plano cargado positivamente situado en el interior de un plasma y analicemos la zona espacial próxima (vaina); en ella la quasi-neutralidad eléctrica está rota y no hay apantallamiento.



La distribución desigual de carga eléctrica de distinto signo dependiente de la distancia en la dirección perpendicular al plano generará un potencial $\phi(x)$ en la situación de perturbación. Inicialmente, la densidad de partículas cargadas positiva y negativamente es igual, $n_{e\infty} = Zn_{i\infty}$ en ausencia de perturbación.

Una vez perturbado el plasma, para x suficientemente grande, fuera de la zona de apantallamiento o vaina, la densidad electrónica se compensa con la densidad iónica de nuevo (cuasi-neutralidad).

$$x \rightarrow \infty$$

$$n_{e\infty} = Zn_{i\infty}$$

$\phi(\infty) = 0 \rightarrow$ Plasma sin perturbar.

- Para los e^- :

$$n_{e\infty} = cte \cdot e^0 = cte \cdot 1 = cte$$

$$\phi(x) = 0$$

$$\text{En cualquier posición } x \neq \infty \Rightarrow n_e(x) = n_{e\infty} e^{\frac{e\phi(x)}{k_B T_e}}$$

- Para los iones:

$$n_{i\infty} = Zcte \cdot e^0 = Zcte \cdot 1 = Zcte$$

$$\phi(x) = 0$$

$$\text{En cualquier posición } x \neq \infty \Rightarrow Zn_i(x) = \underbrace{Zn_{i\infty}}_{n_{e\infty}} e^{\frac{-Ze\phi(x)}{k_B T_i}}.$$

La relación entre la carga neta y la distribución de potencial viene dada por la Ecuación de Poisson:

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\rho = e(n_e - Zn_i)$$

Sustituyendo los valores de n_e y n_i tendremos:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(n_{e\infty} e^{\frac{e\phi}{k_B T_e}} - n_{e\infty} e^{\frac{-Ze\phi}{k_B T_i}} \right).$$

Para resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales que nos permita encontrar $\phi(x)$, suponemos el caso más simple e interesante para nosotros, el de la zona donde se produce el apantallamiento. Y supondremos que el potencial en esta zona es lo suficientemente pequeño y las temperaturas de las partículas lo suficientemente altas como para que $\frac{e\phi}{k_B T} \ll 1$. Hagamos ahora un desarrollo en serie de las exponenciales y despreciamos en los desarrollos términos de orden superior al primer orden, con lo que linealizamos en la perturbación $\phi(x)$ la ecuación diferencial anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{en_{e\infty}}{\varepsilon_0} \left[\left(1 + \frac{e\phi}{k_B T_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{k_B T_e} \right)^2}_{\sim 0} + \dots \right) - \left(1 - \frac{Ze\phi}{k_B T_i} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{Ze\phi}{k_B T_i} \right)^2}_{\sim 0} - \dots \right) \right] \simeq \\ &\simeq \frac{en_{e\infty}}{\varepsilon_0} \left(\frac{e\phi}{k_B T_e} + \frac{Ze\phi}{k_B T_i} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \underbrace{\frac{e^2 n_{e\infty}}{\varepsilon_0 k_B T_e} \left(1 + Z \frac{T_e}{T_i}\right)}_{\text{dimensionalmente } \equiv L^{-2} \rightarrow \lambda_D^{-2}} \quad \phi = \frac{\phi}{\lambda_D^2} \quad ; \quad \lambda_D^{-2} = \frac{e^2 n_{e\infty}}{\varepsilon_0 k_B T_e} \left(1 + Z \frac{T_e}{T_i}\right)$$

La solución final a la que llegamos, después de integrar en x es:

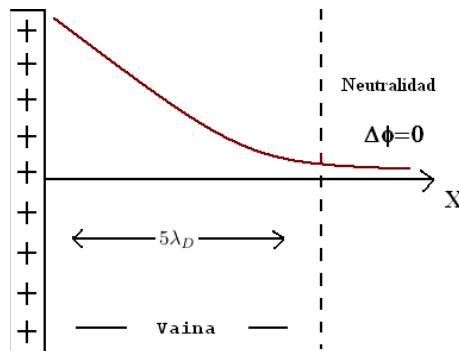
$$\phi(x) = \phi_0 e^{-\frac{x}{\lambda_D}}$$

donde definimos λ_D como **LONGITUD DE DEBYE**. Es una distancia típica o característica del apantallamiento, que depende de las condiciones de densidad y temperatura del plasma.

$$\lambda_D = \left(\underbrace{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_{e\infty}}}_{(1)} \underbrace{\frac{1}{1 + Z \frac{T_e}{T_i}}}_{(2)} \right)^{\frac{1}{2}} = f(n_e, T_e, T_i).$$

A distancias del origen de 5 ó 6 veces λ_D , el potencial habrá caído lo suficiente como para considerar que el plasma no tiene ya perturbación: se ha reestablecido el equilibrio y se mantiene la cuasi-neutralidad del plasma (plasma equipotencial).

- (1) Nos informa acerca de la contribución electrónica.
- (2) Factor de corrección del aporte iónico.



La longitud de Debye nos dará el orden de magnitud de la anchura de la vaina o zona de apantallamiento. Cuanto menor es la longitud de Debye más delgada es la vaina y, por lo tanto, antes se consigue el apantallamiento total de la perturbación producida dentro del plasma.

Para condiciones típicas:

$$\left. \begin{array}{l} T_e \sim 10 T_i \\ Z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_D \sim \lambda_{D_e} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La contribución electrónica es del mismo orden que λ_D , es decir, en general consideraremos sólo el aporte electrónico para definir λ_D .

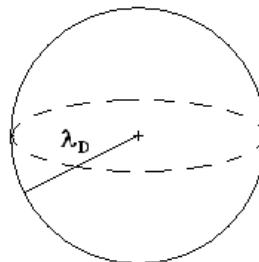
- Una menor longitud de Debye es indicativo de una mayor densidad electrónica:
 $\Rightarrow \downarrow \lambda_D \rightarrow \uparrow n_e \Rightarrow$ Estrechamiento de la vaina: mejor apantallamiento.
- Una mayor longitud de Debye será consecuencia de una mayor temperatura electrónica:
 $\Rightarrow \uparrow \lambda_D \rightarrow \uparrow T_e \Rightarrow$ Ensanchamiento de la vaina: peor apantallamiento.

En realidad, este planteamiento puede simplificarse notablemente y eleminar los iones y su contribución al apantallamiento de las ecuaciones anteriores dado que mucho antes de que éstos puedan detectar el campo \vec{E}_{ext} de la perturbación externa, los electrones ya han producido el apantallamiento ellos solos debido a su elevadísima movilidad (muchísimo mayor que la de los iones).

Para que pueda mantenerse la neutralidad del plasma frente a una perturbación se tiene que cumplir que la longitud de Debye sea mucho menor que las dimensiones características del plasma $\Rightarrow \lambda_D \ll L$ donde $L \equiv$ longitud característica del plasma (orden de magnitud de sus dimensiones). De otro modo, el gas ionizado no podría mantener la neutralidad eléctrica y no sería propiamente un plasma .

Esta condición se obtiene mediante un tratamiento estadístico del problema y por ello el número de partículas ha de ser significativo. Por lo tanto, para que se produzca el apantallamiento de Debye el número de partículas cargadas por unidad de volumen debe ser suficientemente elevado al mismo tiempo que la agitación térmica de las mismas (o su temperatura) no debe ser demasiado alta. Con bajas densidades de partículas y temperaturas elevadas es más difícil conseguir el mencionado apantallamiento (Ver teoría de Debye-Hückel).

Dada una perturbación puntual en el interior de un plasma, la zona de apantallamiento de la misma será una esfera de algunas veces (5 ó 6) el radio $\lambda_D \equiv$ esfera de apantallamiento. La esfera de Debye tiene por radio λ_D y es demasiado pequeña para apantallar eficazmente la perturbación. No obstante, el número de partículas cargadas debe ser muy grande dentro de esta esfera.



El número medio de partículas cargadas en el interior de la esfera de Debye vendrá dado por:

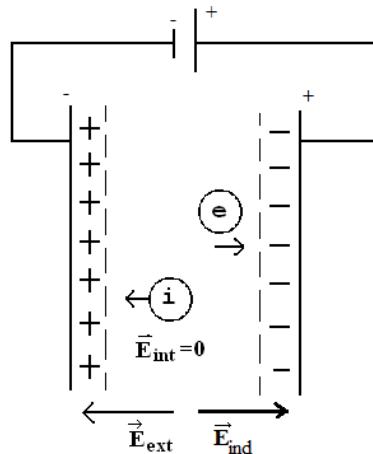
$$N_D = n_e \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \gg 1 \Rightarrow n_e \lambda_D^3 \gg 1 \rightarrow \text{PARÁMETRO DEL PLASMA.}$$

$n_e \lambda_D^3 \gg 1$: podríamos llamar a ésta la *condición de existencia del plasma*.

1.4. Frecuencias características del plasma.

Veamos a continuación, la respuesta dinámica del plasma a una perturbación. Esto nos va a permitir introducir las frecuencias características del plasma.

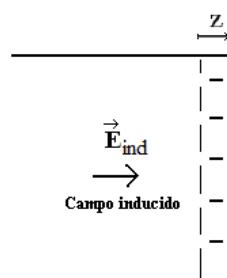
Sea un gas ionizado entre dos placas planoparalelas, inicialmente cuasineutro (equipotencial). Si provocamos una perturbación sobre el plasma debido a una diferencia de potencial (ddp) entre las placas, se producirá un campo eléctrico externo \vec{E}_{ext} .



Como el plasma es un medio conductor en el que se pueden mover con libertad las cargas, habrá una redistribución de las mismas en presencia del \vec{E}_{ext} (debido a la d.d.p.) y aparecerán cargas inducidas a la derecha y a la izquierda del plasma en forma de densidad superficial de carga σ que generará un campo eléctrico inducido \vec{E}_{ind} opuesto al anterior, de manera tal que el campo eléctrico total interno, suma del externo y el inducido, sea nulo: $\vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = 0$. En estas circunstancias, la fuerza eléctrica interna sobre las cargas es nula y tenemos el equilibrio electrostático.

Si eliminamos la perturbación súbitamente eliminando \vec{E}_{ext} , el plasma se encuentra súbitamente fuera de este equilibrio porque aún permanece \vec{E}_{ind} , lo que provocaría una nueva redistribución de las cargas hasta alcanzar la neutralidad final. Pero debido a la energía electrostática (potencial) almacenada y su transformación en energía cinética de las partículas cargadas, el movimiento no se detiene sino que las partículas oscilan a una frecuencia propia característica.

Para ver esto, nos centraremos en la vaina de la derecha.



La densidad superficial de carga en esta vaina será: $\Rightarrow -\sigma = -n_e e z$, y el campo eléctrico inducido vendrá dado por: $\Rightarrow E_{ind} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; z es el desplazamiento que sufren las cargas eléctricas (perturbación pequeña, desplazamiento pequeño).

La ecuación de movimiento en este caso será (para un electrón promedio sin colisiones)

$$m_e \ddot{z} = m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = F_e \Rightarrow \begin{cases} F_e = qE_{ind} = -eE_{ind} \\ E_{ind} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = -e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -e^2 \frac{n_e z}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \underbrace{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}_{\omega^2} z = 0 \Rightarrow \text{movimiento armónico (sin amortiguar) de frecuencia propia } \omega$$

$$\omega = \left(\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_{pe} \Rightarrow \text{Frecuencia electrónica del plasma}$$

Podemos relacionar esta frecuencia electrónica del plasma con la longitud de Debye encontrada anteriormente mediante la sencilla relación $\lambda_D = \frac{v_{th}}{\omega_{pe}}$, lo que es muy fácil de obtener. La frecuencia de oscilación de los electrones respecto a su situación de equilibrio, o frecuencia electrónica del plasma, nos permite encontrar el orden de magnitud del tiempo característico de respuesta del plasma para conseguir el apantallamiento de una perturbación externa.

$$t_{pe} \sim \frac{1}{\omega_{pe}} \Rightarrow \text{Tiempo característico}$$

Análogamente para la nube iónica se tiene que:

$$\omega_{pi} = \left(\frac{Zn_i e^2}{\varepsilon_0 m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t_{pi} \sim \frac{1}{\omega_{pi}}$$

Como la densidad iónica coincide con la electrónica, $n_e = Zn_i$, lo único que diferencia a ω_{pe} y ω_{pi} es la masa de los e^- y los iones respectivamente.

$$m_e \ll m_i \Rightarrow \omega_{pe} \gg \omega_{pi} \Rightarrow t_{pe} \ll t_{pi}$$

y por lo tanto, el tiempo característico de apantallamiento en el plasma viene dado por el tiempo más corto; es decir, $t_p \sim t_{pe}$ (los e^- son las partículas más rápidas) y la frecuencia del plasma será $\omega_p \sim \omega_{pe}$

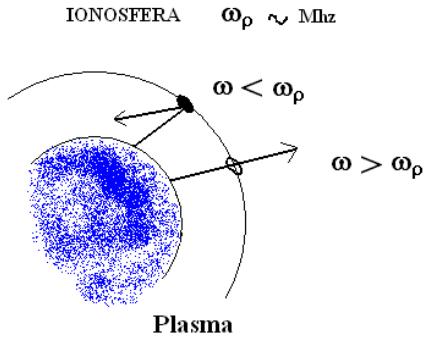
$$\omega_p = \left(\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{FRECUENCIA DEL PLASMA.}$$

$$t_p \sim \frac{1}{\omega_p} \Rightarrow \text{TIEMPO CARACTERÍSTICO DEL PLASMA.}$$

Sea t el tiempo característico de una perturbación que introducimos en el plasma. Puede suceder que:

- a) $t < t_p \Rightarrow$ No existe apantallamiento de la perturbación introducida: no da el tiempo para que se cree la vaina y por lo tanto no se consigue la neutralidad del plasma. La perturbación se propaga por el gas ionizado y no desaparece.
- b) $t > t_p \Rightarrow$ Se consigue el apantallamiento de la perturbación introducida: en este otro caso, existe sólo el potencial variable con el tiempo en la zona de la vaina mientras que en

el plasma (fuera de la zona de apantallamiento) no existe perturbación que se propague. Se mantiene la cuasineutralidad del gas ionizado y desaparece la perturbación.



Pongamos como ejemplo una onda electromagnética de radio-frecuencia ω que incide sobre el plasma de la ionosfera y que lo perturbará. Puede suceder:

- a) $\omega > \omega_p \Rightarrow t < t_p$. El campo eléctrico (perturbación) varía más rápidamente que el tiempo de respuesta del plasma, por lo tanto, no se genera ninguna vaina y no se puede apantallar la perturbación. Es decir, la onda electromagnética avanza por la ionosfera propagándose porque la perturbación no ha podido ser apantallada.
- b) $\omega < \omega_p \Rightarrow t > t_p$. El tiempo de variación de la perturbación es mayor que el tiempo de respuesta del plasma, por lo tanto se consigue el apantallamiento y fuera de la vaina se mantiene la neutralidad. Es decir, la perturbación que supone la onda electromagnética no se puede propagar por el plasma de la ionosfera porque ha sido apantallada.

En este último caso se tiene que parte de la energía de oscilación será absorbida por el plasma de la ionosfera (por colisiones), mientras que la otra pasa a ser remitida como onda reflejada hacia el interior.

1.5. Teoría de Debye-Hückel de los plasmas clásicos en equilibrio.

La idea fundamental la desarrollan en 1923 Debye y Hückel en un enfoque semifenomenológico al estudio de los electrolitos y plasmas cuyo éxito fue grande, y contiene las ideas principales de los modernos desarrollos.

Fijamos nuestra atención en una partícula genérica de referencia en un punto P, y consideramos otra partícula en el punto Q a una distancia r de P en el interior del plasma. En un gas ordinario, si r es suficientemente grande, la partícula situada en Q no nota en absoluto la presencia de la de referencia y su energía potencial dependerá sólo de sus interacciones con las vecinas próximas (potencial de interacción de corto alcance). Sin embargo, debido al largo alcance del potencial de Coulomb ($u_{QP}^C(r)$ de largo alcance), el caso es diferente en un gas ionizado entre electrones e iones. Incluso a distancias grandes, la partícula de campo en Q aprecia una influencia pequeña pero no nula debida a la partícula en P. Además, entre ellas existen otras partículas intermedias que influyen o contribuyen a la energía potencial de la partícula situada en Q. La energía potencial de esta partícula es, por tanto, un efecto acumulativo de sus débiles interacciones con un gran número de partículas constituyendo un efecto colectivo que depende de la distribución espacial de

las partículas. Por otro lado, esta distribución espacial depende de la energía de interacción: si la interacción es repulsiva, el número de partículas alrededor de una dada será menor que la densidad numérica media n . De aquí que la distribución espacial y la energía potencial de interacción haya que determinarlas conjuntamente; esto es un hecho característico de un campo autoconsistente (teoría de campo medio).

1.5.1. Funciones de distribución reducidas

Debemos investigar acerca de esta distribución espacial de partículas, en concreto de las partículas negativas del plasma o electrones. En nuestro modelo, los iones positivos serán considerados como un fondo continuo uniforme en el que los electrones están embebidos y que garantiza la quasi-neutralidad eléctrica en ausencia de perturbación. Para los electrones del plasma, partiendo de su función densidad de probabilidad de microestados $\rho^0(q, p)$ en su espacio fásico de N partículas de posiciones \vec{r}_i y momentos \vec{p}_i , si integramos $\forall \vec{r}_i, \vec{p}_i \neq \vec{r}_1, \vec{p}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_2$ tenemos, en el equilibrio ($\rho^0(q, p) = \rho_N^0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$)

$$\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \int d^3\vec{r}_3 \dots d^3\vec{r}_N \cdot d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_N \rho_N^0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N),$$

y representa la probabilidad diferencial en el sistema (auténtica) de que la partícula 1 (en P) se encuentre con posición comprendida entre \vec{r}_1 y $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$ y momento entre \vec{p}_1 y $\vec{p}_1 + d\vec{p}_1$, y que al mismo tiempo la partícula 2 (en Q) se encuentre con posición comprendida entre \vec{r}_2 y $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$ y momento entre \vec{p}_2 y $\vec{p}_2 + d\vec{p}_2$, CON INDEPENDENCIA de cómo se encuentren las demás partículas 3, 4, ..., N (aceptamos cualquier valor posible de sus \vec{r} y \vec{p}) si la multiplicamos por $d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2$

$$\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 = dP_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2).$$

Esta función de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ se denomina función de distribución reducida específica de dos partículas. En general,

$$\rho_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s) = \int d^6\vec{x}_{s+1} \dots d^6\vec{x}_N \rho_N^0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \text{ con } \vec{x}_i = (\vec{r}_i, \vec{p}_i) \text{ y } d^6\vec{x}_i = d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i$$

es la función de distribución reducida específica (o de probabilidad) de un grupo de s partículas. Multiplicada por $d^6\vec{x}_1 \dots d^6\vec{x}_s$, representan la probabilidad de que la partícula 1 esté entre \vec{x}_1 y $\vec{x}_1 + d\vec{x}_1$, la 2 entre \vec{x}_2 y $\vec{x}_2 + d\vec{x}_2$, ... y la partícula s entre \vec{x}_s y $\vec{x}_s + d\vec{x}_s$ con independencia de cómo se encuentren las $N - s$ partículas restantes.

Ahora bien, si multiplicamos estas funciones por el número de grupos de s partículas que pueden formarse entre un conjunto de N , $\frac{N!}{(N-s)!}$, obtenemos

$$f_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s) = \frac{N!}{(N-s)!} \rho_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s),$$

o número medio de grupos de s partículas que cumplen dicha condición o restricción si la multiplicamos por $d^6\vec{x}_1 \dots d^6\vec{x}_s$. Se llama función de distribución reducida genérica de s partículas y normaliza a $\frac{N!}{(N-s)!}$. En particular,

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = N(N-1)\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

es la función de distribución reducida genérica de 2 partículas, y su significado es claro: es el del número medio de parejas de partículas en el sistema tales que la partícula 1 está entre \vec{r}_1 y $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$; \vec{p}_1 y $\vec{p}_1 + d\vec{p}_1$ y a la vez la partícula 2 está entre \vec{r}_2 y $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$; \vec{p}_2 y $\vec{p}_2 + d\vec{p}_2$ en el espacio fásico, SIN IMPORTARNOS cómo están el resto de las $N - 2$ partículas (normaliza a $N(N - 1)$), si la multiplicamos por $d^6\vec{x}_1d^6\vec{x}_2 = d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_1d^3\vec{p}_2$.

A partir de ella, si sólo queremos información sobre sus posiciones al objeto de conocer la configuración de estos pares de partículas, y por tanto su distribución espacial de carga, la integramos $\forall \vec{p}_1, \vec{p}_2$, y obtenemos:

$$n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = N(N - 1) \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \\ N(N - 1) \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N d^3\vec{r}_3 \dots d^3\vec{r}_N \rho_N^0(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N; \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N),$$

denominada función de distribución configuracional de 2 partículas cuyo significado es el número medio de pares de partículas tales que la partícula 1 se encuentra entre \vec{r}_1 y $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$ y la 2 entre \vec{r}_2 y $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$, sin importarnos qué posiciones ocupan las restantes ni las cantidades de movimiento de todas, si la multiplicamos por $d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2$.

En general, se definen las funciones de distribución configuracionales de s partículas como:

$$n_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_s) = \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_s f_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s) = \frac{N!}{(N-s)!} \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_s \rho_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s) = \\ \frac{N!}{(N-s)!} \int d^3\vec{r}_{s+1} \dots d^3\vec{r}_N \cdot d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N \rho_N^0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \text{ (normalizan a } \frac{N!}{(N-s)!} \text{)}$$

y representan el n° medio de grupos de s partículas tales que la 1 está entre \vec{r}_1 y $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$, la 2 entre \vec{r}_2 y $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$,... la s entre \vec{r}_s y $\vec{r}_s + d\vec{r}_s$ cuando las multiplicamos por $d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_s = \prod_{i=1}^s d^3\vec{r}_i$. Las más conocidas de todas estas son:

$n_1(\vec{r}_1)$ = densidad numérica de partículas (o función de distribución configuracional de una partícula) = $n(\vec{r})$

$n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ = función de distribución configuracional de 2 partículas.

¡ESTA ÚLTIMA ES LA QUE NOS INTERESA PARA NUESTRO PROBLEMA!

Nos interesa calcular el número medio de pares de partículas por unidad de volumen separadas una distancia relativa entre ellas $r = r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Para ello, pasamos a coordenadas C.M. e integramos n_2 obteniendo otra función configuracional que llamaremos $n'_2 = \frac{n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{n}$, que normaliza a $N - 1$

En efecto, partiendo de la normalización de $n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

$$N(N - 1) = \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \stackrel{C.M.}{=} \int d^3\vec{r}_{CM} d^3\vec{r}_{12} n_2(\vec{r}_{CM}, \vec{r}_{12}) = V \int d^3\vec{r}_{12} n_2(\vec{r}_{12})$$

$$N - 1 = \frac{V}{N} \int d^3\vec{r}_{12} n_2(\vec{r}_{12}) = \int d^3\vec{r} \frac{n_2(\vec{r})}{n}; \boxed{n'_2(\vec{r}) = \frac{n_2(\vec{r})}{n}},$$

donde aceptamos que para la energía potencial de interacción entre las partículas (electrones) en nuestro modelo sólo cuentan las posiciones relativas entre ellas, en particular la distancia relativa

$r = r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Tratemos de evaluar $n'_2(\vec{r})$ y para ello usaremos el colectivo canónico, y así asumimos para el equilibrio térmico a la temperatura T que

$$\rho_N^0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{1}{Z_{tras}} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}} \frac{1}{Z_{conf}} e^{-\beta(u_{12} + \sum_{(3 \leq i < j \leq N)} u_{ij})}$$

En esta expresión, es como si las partículas 1 y 2 (electrones) no interaccionaran con el resto, sólo entre ellas mediante una energía potencial coulombiana pura (repulsiva). Esto último no es rigurosamente correcto pero nos ayudará en nuestros propósitos. Podemos escribir para la función de distribución configuracional de dos partículas

$$n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = N(N-1) \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N d^3\vec{r}_3 \dots d^3\vec{r}_N \frac{e^{-\beta \sum \frac{p_i^2}{2m} - \beta u_{12} - \beta \sum_{i < j} u_{ij}}}{\int dp e^{-\beta \sum \frac{p_i^2}{2m}} \cdot \int dq e^{-\beta u_{12} - \beta \sum_{i < j} u_{ij}}} =$$

$$N(N-1) \cdot \frac{e^{-\beta u_{12}}}{\int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 e^{-\beta u_{12}}} \stackrel{C.M.}{=} \frac{N(N-1)}{V} \cdot \frac{e^{-\beta u_{12}}}{\int d^3\vec{r}_{12} e^{-\beta u_{12}}} = n(N-1) \cdot \frac{e^{-\beta u_{12}(r)}}{\int d^3\vec{r} e^{-\beta u_{12}(r)}} = n_2(r_{12}).$$

Aplicamos nuestra teoría a los llamados plasmas calientes, aquellos en los que la temperatura es tan alta que $\beta u_{12} \ll 1$. En tal caso, el denominador coincide con V menos una contribución despreciable de orden inferior. Por tanto, podremos escribir:

$$n_2(r_{12}) = n_2(r) \simeq n \frac{(N-1)}{V} e^{-\beta u_{12}(r)} \simeq n^2 e^{-\beta u_{12}(r)}; n'_2(r) = \frac{n_2(r)}{n} = \frac{n^2}{n} e^{-\beta u_{12}(r)} = n e^{-\beta u_{12}(r)}$$

¡Este es el número medio de pares de partículas por unidad de volumen separadas una distancia r ! La llamamos función de distribución de pares.

Esta situación tendría lugar si el potencial que notara 2 debido a 1 fuera efectivamente el coulombiano debido a su exclusiva interacción, $u_{12}^C = \frac{e^2}{r} = -e\frac{-e}{r} = -e\phi^C(r) = e\varphi^C(r)$, donde $\phi^C(r) = \frac{-e}{r}$ es el potencial coulombiano creado por un electrón a la distancia r y $\varphi^C(r)$ su opuesto. Pero en la realidad, la existencia de otras muchas partículas de carga negativa entre la 1 y la 2, así como la existencia del fondo iónico positivo, distorsionan este potencial de interacción coulombiano puro entre ellas de manera que sustituiremos la energía $u_{12}^C(r) = \frac{e^2}{r}$ anterior por una energía potencial de interacción “efectiva” que llamaremos $W(r) = -e\phi(r) = e\varphi(r)$ que podremos expresar en términos de un potencial de interacción “efectivo” $\phi(r) = -\varphi(r)$. Este potencial, en principio desconocido, está producido por todas las cargas eléctricas existentes a la distancia r del origen. En particular, nos permitirá encontrar para la función de distribución de pares anterior que:

$$n'_2(r) = n e^{-\beta W(r)} = n e^{-\beta(-e)\phi(r)} = n e^{-\beta e\varphi(r)},$$

de manera que $\frac{n'_2(r)d^3\vec{r}}{N-1}$ es la probabilidad diferencial de encontrar a la partícula 2 a una distancia de la 1 comprendida entre r y $r + dr$, donde $\phi(r) = -\varphi(r)$ es el potencial electrostático efectivo que sobre la partícula 2 provoca la 1, el resto de las otras partículas negativas y el fondo iónico positivo. Debye y Hückel propusieron una foma exitosa de determinar $\phi(r) = -\varphi(r)$, de manera que $W(r)$ sea una energía potencial de interacción efectiva entre parejas de partículas negativas (electrones) a una distancia r , interacción que resultará ser de más corto alcance que la interacción Coulombiana como veremos a continuación.

1.5.2. Teoría de Debye-Hückel

Tengamos un plasma en el que virtualmente, excepto la partícula 1 y 2, todas permanecen inmóviles y aproximemos la partícula 2 a la 1 desde el infinito. Cuando 2 se encuentra muy lejos, la fuerza media que actúa sobre ella es prácticamente la misma tanto si está la 1 como si no. Esto no sucede cuando 2 se encuentra muy cerca de 1, donde nota mucho su influencia. Así, cualquier partícula se mueve en una especie de campo medio que crean todas las demás, pero cuando se acerca demasiado a una en particular, además del campo medio anterior sufre la influencia de esa partícula en concreto. Parece como si las fuerzas de interacción fueran de corto alcance y, además, sólo hubiera interacciones o colisiones “duras” de dos partículas. Consideramos por tanto un campo medio y “ciertas” colisiones cuando una partícula se aproxima demasiado a otra.

Lo que hicieron Debye y Hückel fue aplicar la anterior idea al plasma, pero introduciendo lo que hemos llamado potencial efectivo en vez del coulombiano entre partículas. Por esa razón se admite en la teoría que $n'_2(r) = ne^{-\beta e\varphi(r)}$ para la función de distribución de pares.

Además, Debye y Hückel admitieron como válida para la solución del problema una ecuación de la física macroscópica (fenomenológica) como es la ecuación de Poisson de la electrostática $\nabla^2\phi = -4\pi\rho(r)$ (c.g.s.) válida para distribuciones continuas de carga aunque en el problema en cuestión son discretas (aquí, $\rho(r)$ es la densidad volumétrica de carga total debido tanto a electrones como a iones). Por tanto, la hipótesis es suponer válida esta ecuación. Ahora podemos preguntarnos: ¿cuánta carga eléctrica por unidad de volumen hay a una distancia r del origen donde situamos la partícula 1?

Tomando esa partícula 1 en el origen, pueden formarse precisamente $n'_2(r) = \frac{n_2(r)}{n} = ne^{-\beta e\varphi(r)}$ pares por unidad de volumen, por lo que la carga eléctrica por unidad de volumen o densidad volumétrica de carga vista desde ese punto en el que colocamos la partícula 1 es:

$$\rho(r) = -\underbrace{ene^{-\beta e\varphi(r)}}_1 + \underbrace{ne}_2 - \underbrace{e\delta(\vec{r})}_3$$

- 1 → Carga eléctrica debida a las restantes partículas (negativa),
- 2 → Término debido al fondo continuo positivo,
- 3 → Densidad de carga debida a una partícula 1, que se encuentra en el centro.

Sustituyendo en la ecuación de Poisson que resolveremos para $\varphi(r)$, queda:

$$\nabla^2\varphi(r) = -4\pi \left[ene^{-\beta e\varphi(r)} - en \right] - 4\pi e\delta(\vec{r}) \quad (\text{Ecuación de Poisson-Boltzmann})$$

Es una ecuación en derivadas parciales de 2º orden NO LINEAL de difícil solución. Para resolverla de forma aproximada deberemos linealizarla, por lo que hacemos una hipótesis simplificadora adicional: supondremos que la energía potencial de interacción de una partícula con todas las demás $W(r)$ es mucho menor que su energía térmica característica (del orden de $k_B T_e$) por lo que $\beta e\varphi(r) << 1 \rightarrow$ Plasma caliente.

Admitir esto equivale a que casi siempre el potencial de interacción entre partículas es el potencial promedio y que despreciamos las colisiones duras (o puramente coulombianas a distancias muy cortas entre partículas). Es aplicable, por tanto, a plasmas diluidos calientes en los que existe poca densidad de partículas cargadas (electrones e iones) y alta temperatura electrónica (la aplicación de hipótesis sucesivas que limitan cada vez más el campo de validez de una teoría es un rasgo característico de toda teoría semi-fenomenológica). Con esta hipótesis simplificadora podemos

hacer un desarrollo en serie de potencias de la exponencial y, quedándonos en el primer orden del desarrollo, linealizamos la ecuación anterior y resulta la que llamaremos ecuación de Poisson-Debye (o de Debye) para plasmas:

$$\nabla^2 \varphi(r) = 4\pi\beta e^2 n \varphi(r) - 4\pi e \delta(\vec{r}) = k_D^2 \varphi(r) - 4\pi e \delta(\vec{r}) \text{ (lineal en } \varphi(r))$$

dónde hemos introducido el parámetro característico $k_D^2 = 4\pi\beta e^2 n$; $\lambda_D = k_D^{-1} = (4\pi\beta e^2 n)^{-1/2}$ (m) (longitud de Debye).

1.5.3. Solución de la ecuación de Debye

La solución de la que hemos llamado ecuación de Debye, o ecuación de Poisson-Boltzmann linealizada, podemos obtenerla haciendo uso de la transformada de Fourier. Tomamos por tanto la transformada de Fourier de la ecuación de Debye

$$\nabla^2 \varphi(r) = k_D^2 \varphi(r) - 4\pi e \delta(\vec{r}) \text{ con } k_D^2 = 4\pi\beta e^2 n; \lambda_D = k_D^{-1} = (4\pi\beta e^2 n)^{-1/2}$$

donde λ_D es la longitud de Debye. El método de la transformada de Fourier resulta aplicable ya que se cumple que $\varphi(r) = 0$ para $r \rightarrow \infty$. Recordemos que

$$\tilde{\varphi}_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi(r) \text{ y que: } \varphi(r) = \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{\varphi}_k$$

Calculemos para empezar la transformada de los operadores $\vec{\nabla}$ y ∇^2 , y lo hacemos para la componente x :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dy dz e^{-i(k_y y + k_z z)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ik_x x} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r)$$

Hagamos la última integral por partes, teniendo en cuenta la condición en los límites

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ik_x x} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) = \left[e^{-ik_x x} \varphi(r) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + ik_x \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ik_x x} \varphi(r)$$

Tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy dz e^{-i(k_y y + k_z z)} \right] \cdot \left[ik_x \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(r) e^{-ik_x x} \right] = \\ ik_x \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi(r) &= ik_x \tilde{\varphi}_k. \end{aligned}$$

Para todas las tres componentes x, y, z es

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\nabla} \varphi(r) = i\vec{k} \tilde{\varphi}_k,$$

lo que fácilmente nos permite calcular la transformada de Fourier del laplaciano:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla^2 \varphi(r) = -k^2 \tilde{\varphi}_k$$

Sustituyendo estas transformadas en la ecuación de Debye, es:

$$-k^2 \tilde{\varphi}_k = k_D^2 \tilde{\varphi}_k - 4\pi e \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r})}_{1} = k_D^2 \tilde{\varphi}_k - \frac{4\pi e}{(2\pi)^3};$$

$$-k^2 \tilde{\varphi}_k = k_D^2 \tilde{\varphi}_k - \frac{e}{2\pi^2} \rightarrow \boxed{\tilde{\varphi}_k = \frac{e}{2\pi^2} \frac{1}{k^2 + k_D^2}}$$

Hagamos ahora la transformada inversa de Fourier para encontrar $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{\varphi}_k = \frac{e}{2\pi^2} \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{k^2 + k_D^2}$$

Pasamos a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{e}{2\pi^2} 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{k^2 + k_D^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{ikr \cos\theta} = \\ &\frac{e}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + k_D^2} \left[\frac{-e^{ikr \cos\theta}}{ikr} \right]_0^\pi = \frac{e}{\pi} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \\ &\frac{e}{i\pi r} \left[\int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} e^{ikr} - \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} e^{-ikr} \right] \end{aligned}$$

La segunda integral es:

$$\int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} e^{-ikr} \underset{k \rightarrow -k}{=} \int_0^{-\infty} (-dk) \frac{(-k)}{k^2 + k_D^2} e^{ikr} = - \int_{-\infty}^0 dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} e^{ikr}, \text{ por lo que}$$

$$\varphi(r) = \frac{e}{i\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{k^2 + k_D^2} e^{ikr}$$

Haremos esta integral en el plano complejo. La integral real anterior es equivalente a la integral a lo largo de ese contorno cerrado en el plano complejo (el integrando se anula para $|k| \rightarrow \infty$):

$$\varphi(r) = \frac{e}{i\pi r} \oint_C dk \frac{k}{(k + ik_D)(k - ik_D)} e^{ikr} : \text{ polos de la función en } k = ik_D \text{ y } k = -ik_D.$$

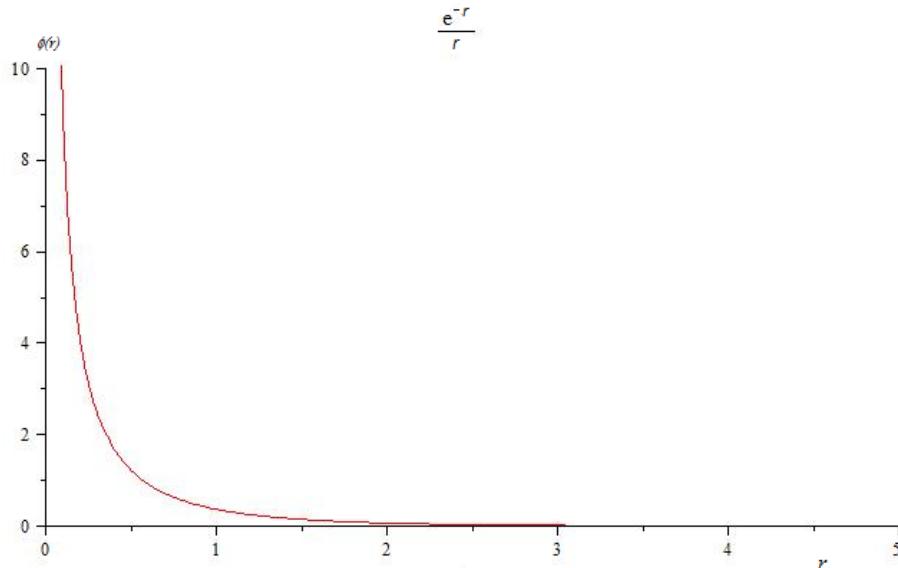
Según el teorema de Cauchy:

$$\varphi(r) = \frac{e}{i\pi r} 2\pi i \frac{ik_D}{2ik_D} e^{-k_D r} = \frac{e}{r} e^{-k_D r}; \boxed{W(r) = e\varphi(r) = \frac{e^2}{r} e^{-k_D r}}$$

Este es el potencial efectivo que notan dos partículas próximas: el de Coulomb multiplicado por un factor exponencial decreciente: para $r \gg \lambda_D$, $\varphi(r) \rightarrow 0$; para $r \ll \lambda_D$, $\varphi \rightarrow \frac{e}{r}$.

1.5.4. Gráfica del potencial de Debye

El potencial $\varphi(r)$ se comporta como la función e^{-r}/r , representada abajo:



El efecto de apantallamiento es tanto más acusado cuanto mayor es k_D (menor es la longitud de Debye λ_D). Dentro de la aproximación de plasma diluido caliente, esto se consigue cuando más denso es el plasma y menos caliente está: $k_D = (4\pi\beta e^2 n)^{1/2} = (\frac{e^2 n}{\epsilon_0 k_B T_e})^{1/2}$.

$$k_D \uparrow \text{ si } \beta \uparrow; \text{ o sea, si } T_e \downarrow \quad \rightarrow \lambda_D \downarrow$$

$$k_D \uparrow \text{ si } n \uparrow; \quad \rightarrow \lambda_D \downarrow$$

...y lo contrario. El radio de la esfera de Debye disminuye por el efecto combinado del aumento de la densidad y la disminución de la temperatura, lo que implica un mejor apantallamiento espacial. Fuera de la esfera de Debye, esfera centrada en la partícula 1 de radio λ_D , AÚN NO se ha dado el apantallamiento total, lo que se consigue para otra esfera mayor de radio 5 ó 6 veces λ_D (esfera de apantallamiento).

1.5.5. Solución alternativa de la ecuación de Debye

Este otro método de resolver la ecuación de Debye será un método de superposición. La ecuación de Debye la escribimos ahora (S.I.):

$$\nabla^2 \varphi(r) = k_D^2 \varphi(r) - \frac{e}{\epsilon_0} \delta(r) \text{ donde } k_D^2 = \frac{\beta e^2 n}{\epsilon_0} = \frac{e^2 n}{\epsilon_0 k_B T_e}$$

en el sistema de unidades S.I. Para resolverla fijémonos en que $\nabla^2 \varphi(r) = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(r)$ es la ecuación de Poisson correspondiente a una zona del espacio dónde sólo existe una carga puntual de valor

e en el origen. La solución de este problema es conocida, y es igual al potencial creado por una carga situada en el origen de valor e :

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Resolvamos entonces la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \varphi_0(r) = k_D^2 \varphi_0(r)$$

Dada la simetría central de la interacción electrostática debemos utilizar coordenadas esféricas. En estas coordenadas el laplaciano se escribe como:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r \varphi_0(r)]$$

por lo que la ecuación de Debye en coordenadas esféricas es:

$$\frac{d^2}{dr^2} [r \varphi_0(r)] = k_D^2 r \varphi_0(r)$$

Definamos ahora la función $\psi(r) = r \varphi_0(r)$. Utilizando esta definición, la ecuación anterior queda aún más simplificada

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} = k_D^2 \psi(r),$$

cuya solución general para $\psi(r)$ es:

$$\psi(r) = A e^{-k_D r} + B e^{k_D r}.$$

Para que esta solución sea finita en el infinito, tiene que cumplirse que $B = 0$, de modo que:

$$\psi(r) = A e^{-k_D r}$$

y por tanto:

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{r} \psi(r) = \frac{A e^{-k_D r}}{r}.$$

Esta solución no es válida en el origen. Sin embargo, en dicho punto es donde tiene importancia el término $-\frac{e}{\epsilon_0} \delta(r)$ de la ecuación de Debye, y cuya solución por separado es la indicada más arriba. Es decir, que para la función potencial original incógnita $\varphi(r)$ tiene que verificarse:

$$\varphi(r) \simeq \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ cuando } r \rightarrow 0.$$

Esa condición la cumple $\varphi_0(r)$ sin más que imponer que la constante $A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$. Con lo cual la solución de la ecuación de Debye es:

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-k_D r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}},$$

coincidente con la solución encontrada por el método anterior de la transformada de Fourier.

Al principio de nuestro estudio se hizo una suposición simplificadora que limitaría el alcance de los resultados obtenidos. Esta fue la de considerar la energía térmica de los electrones - determinada por su temperatura - mucho más significativa que la energía de interacción entre ellos (electrostática). Asumir esto nos llevó a obtener una ecuación más sencilla a costa de perder generalidad, ya que solo podríamos aplicar los resultados obtenidos a plasmas diluidos calientes. Sin embargo, a la hora de aplicar los resultados obtenidos a plasmas reales se comprueba que ocurre más bien lo contrario; es decir, que resulta mejor aproximación a la hora de explicar el comportamiento de plasmas más fríos y densos que de plasmas calientes y diluidos. A esta conclusión se llega en el contexto del estudio de los plasmas clásicos en equilibrio mediante métodos perturbativos en Mecánica Estadística.

Otra simplificación que se ha hecho en este estudio semifenomenológico ha sido tratar a los iones positivos no como partículas sino como un fondo continuo que únicamente aporta carga positiva al sistema con fin de mantener su quasineutralidad. Obviamente esto no es así y en realidad los iones son también partículas que interactúan con los electrones, aunque veremos que no de una forma tan intensa como los propios electrones entre sí. Cabe por tanto ampliar nuestro modelo estadístico con las partículas positivas y para ello comenzamos tomando su función de distribución de pares para iones, que por seguir la misma estadística asumimos equivalente a la encontrada para electrones, de la forma:

$$n'_2(r) = ne^{-\beta' W(r)} = ne^{-\beta'(+e)\phi(r)} = ne^{\beta'e\varphi(r)},$$

donde vamos a asumir que la densidad de iones y electrones en equilibrio es la misma al objeto de mantener la quasineutralidad. La diferencia entre esta función para iones y la correspondiente para electrones reside en la β del factor de Boltzmann ya que ésta, al definirse como $\beta = 1/k_B T$, tiene diferentes valores de T para cada caso (para iones la temperatura iónica T_i y para electrones la temperatura electrónica T_e del plasma) y en que como estamos considerando ahora iones positivos simplemente ionizados, su carga neta es la carga del electrón, pero de signo opuesto. Para diferenciarlas, la correspondiente a electrones seguirá siendo $\beta = \beta_e$ con $T = T_e$ mientras que la correspondiente a iones será $\beta' = \beta_i$ con $T' = T_i$. Según esto, la densidad del fondo positivo del modelo simplificado anterior vendrá sustituida ahora en la ecuación de Poisson por la densidad de pares de iones, pudiéndose escribir:

$$\nabla^2\varphi(r) = -4\pi \left[ene^{-\beta e\varphi(r)} - ene^{\beta' e\varphi(r)} \right] - 4\pi e\delta(\vec{r}) \quad (\text{Ecuación de Poisson-Boltzmann}),$$

que al linealizar en la interacción electrostática para $\beta e\varphi(r), \beta' e\varphi(r) \ll 1$ nos permite obtener la correspondiente ecuación de Poisson-Debye aplicada a los dos tipos de partículas:

$$\nabla^2\varphi(r) = 4\pi \left[\beta e^2 n \varphi(r) + \beta' e^2 n \varphi(r) \right] - 4\pi e\delta(\vec{r}) = (k_{De}^2 + k_{Di}^2) \varphi(r) - 4\pi e\delta(\vec{r}) = k_D^2 \varphi(r) - 4\pi e\delta(\vec{r}) \quad (\text{lineal en } \varphi(r))$$

dónde ahora introducimos dos parámetros característicos: $k_{De}^2 = 4\pi\beta e^2 n$; $\lambda_{De} = k_{De}^{-1} = (4\pi\beta e^2 n)^{-1/2}$ (longitud de Debye para electrones) y $k_{Di}^2 = 4\pi\beta' e^2 n$; $\lambda_{Di} = k_{Di}^{-1} = (4\pi\beta' e^2 n)^{-1/2}$ (longitud de Debye para iones) (m).

Ahora, la longitud de Debye definida a partir de $\lambda_D = k_D^{-1}$ con $k_D^2 = k_{De}^2 + k_{Di}^2$ tiene contribución tanto de las partículas negativas (e) como de las positivas (i), no existiendo fondo homogéneo positivo en el modelo de Debye-Hückel. Quedaría así que la longitud de Debye o longitud característica de apantallamiento se escribe como:

$$\lambda_D = k_D^{-1} = [4\pi ne^2(\beta + \beta')]^{-1/2} = \left[\frac{4\pi ne^2}{k_B} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \right]^{-1/2} = \left[\frac{4\pi ne^2}{k_B} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right) \right]^{-1/2}.$$

Este resultado sería el más correcto y nos daría una longitud de Debye en el plasma más próxima a la real que la que obtendida mediante el tratamiento en el que sólo se contemplaban los electrones como partículas, y no los iones. El caso es que a la hora de medir experimentalmente la temperatura iónica se encuentra que ésta es una 10 veces menor que la electrónica, por lo que no se comete un gran error al despreciarla frente a la electrónica, lo que nos da una garantía a la consideración realizada de tomar los iones simplemente como un fondo positivo. Este resultado coincide con el encontrado en la página 10 de este Capítulo 1.

1.6. Procesos microscópicos o mecanismos: procesos colisionales y radiativos.

Son procesos entre partículas del mismo tipo o distinto que tienen lugar en el interior del plasma y que eventualmente pueden implicar la existencia de fotones. Se denominan colisionales cuando existen colisiones o choques entre partículas y radiativos cuando aparece radiación en forma de fotones. Estos procesos microscópicos o mecanismos tendrán dos efectos:

- Intercambio de cantidad de movimiento y energía (\vec{p}, E) entre las partículas.
- Posible producción o destrucción de partículas de una determinada especie.

Por lo que se refiere a las colisiones entre partículas, éstas podrán ser:

- **ELÁSTICAS** \Rightarrow Colisiones en las que las partículas mantienen su identidad y su estado de energía interna (energía de excitación de las partículas). Existe un intercambio de \vec{p} y de E_c entre las partículas, donde $E_{ci} = E_{cf}$ para el conjunto de ellas.
- **INELÁSTICAS** \Rightarrow Alguna de las partículas cambia su identidad o bien su estado de energía interna. Las colisiones inelástivas provocarán: excitación (con cambio la energía interna de las partículas), ionización (con cambio de la identidad y creación de carga eléctrica libre), o recombinación (con cambio de la identidad y destrucción de carga eléctrica libre). En este caso, $E_{ci} \neq E_{cf}$ para el conjunto de las partículas. Podemos distinguir:
 - $E_{ci} > E_{cf} \Rightarrow$ Se pierde energía cinética porque parte de la E_{ci} se invierte durante la colisión en excitación y/o ionización \equiv INELÁSTICAS
 - $E_{ci} < E_{cf} \Rightarrow$ Se gana energía cinética durante la colisión debido al cambio producido en las partículas en desexcitación y/o recombinación \equiv SUPERELÁSTICAS.

Por otro lado, podemos tener distintos tipos de partículas involucradas en los procesos colisionales, aunque las más importantes son electrones, neutros e iones:

- Electrones $\Rightarrow e^-$
- Átomos y moléculas neutros $\Rightarrow A, M$
- Iones positivos o negativos $\Rightarrow I^+, I^-$
- Iones múltiplemente ionizados $\Rightarrow I^{++}$

pudiendo encontrarse todos en distintos niveles o estados internos de excitación.

Por lo que se refiere a los procesos radiativos, la existencia de ellos es debida a que la mayoría de los estados excitados se desexcitan de forma espontánea, emitiendo un fotón (estados radiativos). Los estados radiativos son típicamente estados que tienen un tiempo de vida media del orden del ns . Los niveles radiativos más bajos que se desexcitan hacia el estado fundamental de la partícula se conocen como estados resonantes. Los niveles que tienen muy baja probabilidad de desexcitación se llaman estados metaestables. El hecho de que aparezcan o desaparezcan (se emitan o se absorban) fotones en un proceso microscópico o mecanismo entre partículas le da un carácter radiativo, si bien dicho proceso también podrá tener carácter colisional cuando también haya choques o colisiones entre partículas. Algunos ejemplos simples serán presentados a continuación.

Es importante en los procesos radiativos distinguir entre aquellos en los que existe la radiación de línea (o discreta) y en los que existe la radiación de continuo: la primera ocurre a frecuencias (o longitudes de onda) concretas o específicas, la segunda tiene lugar a cualquier frecuencia (o longitud de onda) de forma continua.

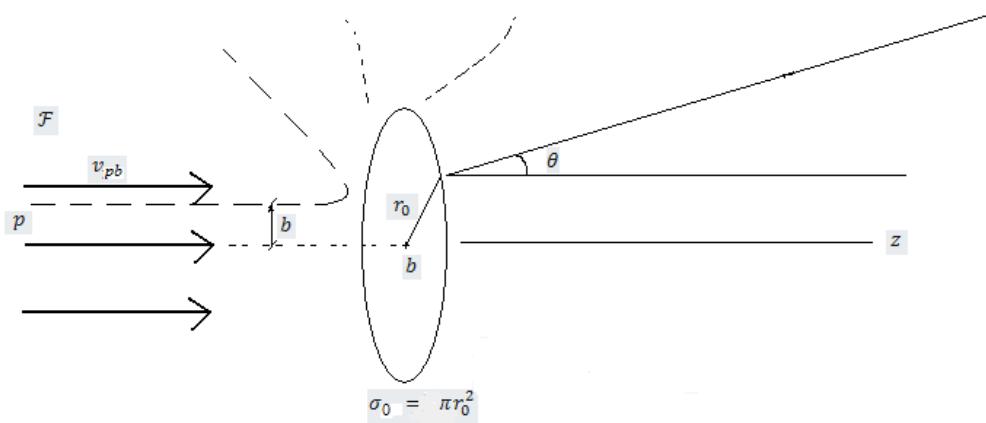
- Radiación discreta \Rightarrow La energía del fotón emitido o absorbido tiene un valor determinado, y por tanto su frecuencia ν también lo tiene. Se visualiza por espectrometría como líneas o rayas espectrales a frecuencia bien determinada en el rango del visible, el UV, el infrarrojo, etc. Tienen su origen en desexcitaciones radiativas espontáneas desde niveles electrónicos excitados superiores, pero no sólo. También pueden estar mediadas por colisiones entre especies excitadas (átomo o moléculas) con otras partículas (electrones, iones, ...).
- Radiación continua \Rightarrow La energía del fotón emitido o absorbido tiene cualquier valor continuo, no uno determinado o discreto, y por tanto su frecuencia ν también lo tiene. Se visualiza por espectrometría como un fondo de radiación caracterizado por una distribución continua y no puede achacarse a desexcitaciones de estados radiativos como en el caso anterior sino a otros fenómenos bien distintos que son de carácter colisional como la radiación de frenado (*Bremsstrahlung*) y la recombinación radiativa.

1.6.1. Colisiones elásticas

Para discutir los procesos que se ponen de manifiesto en el plasma en los que existen colisiones, se utilizan conceptos cinéticos ya conocidos como sección eficaz de colisión (diferencial y total), recorrido libre medio, frecuencia de colisión, etc., que recordamos a continuación. Para cada proceso colisional que consideremos, se define una sección eficaz de colisión asociada a dicho proceso. Empecemos considerando las colisiones elásticas.

En la siguiente figura representamos un haz de partículas (proyectiles) colisionando contra un centro dispersivo (blanco) a una velocidad relativa v_{pb} y saliendo en un

ángulo θ tras una colisión de parámetro de impacto b . Integrando para todas las pertículas que salen de la colisión en todos los ángulos posibles, llegamos al concepto de sección eficaz de colisión total $\sigma_0 = \pi r_0^2$, donde r_0 es el alcance de potencial de interacción proyectil-blanco.



En las colisiones elásticas, una partícula proyectil que incide sobre la sección eficaz de colisión total (parámetro de impacto $b < r_0$) altera su cantidad de movimiento y energía, mientras que las que no inciden sobre dicha sección (parámetro de impacto $b > r_0$) no se verán afectadas.

El recorrido libre medio de las partículas colisionantes es del orden del inverso del producto de la sección eficaz de colisión total por la densidad de partículas proyectil (para colisiones entre el mismo tipo de partículas de la teoría cinética elemental de las colisiones binarias).

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n_p \sigma_{pb}} = \frac{1}{\sqrt{2}n_p \sigma_0}$$

Así mismo, el tiempo medio entre colisiones se define como la relación entre el recorrido libre medio y la velocidad media en módulo de las partículas proyectil de velocidad \bar{v}_p

$$\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}_p}$$

Finalmente, la frecuencia de colisión entre partículas (proyectil y blanco) es el inverso de este tiempo característico entre colisiones, que introduciendo la velocidad relativa proyectil-blanco podemos escribirnos mejor como

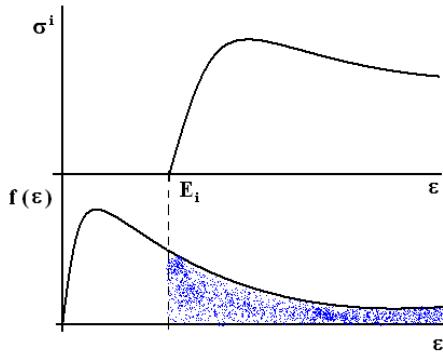
$$\bar{\nu} = \langle \nu \rangle = \langle \nu_{pb} \rangle = \frac{1}{\tau} = n_p \langle \sigma_{pb} v_{pb} \rangle \cong n_p \langle \sigma_{pb} v_p \rangle$$

donde en la última expresión aparece simplemente la velocidad de los proyectiles ya que la velocidad relativa entre proyectil y blanco será prácticamente la del primero (p.e. los proyectiles son los electrones y los blancos el resto de las partículas). Para hacer este promedio habrá que tener en cuenta que la sección eficaz de colisión total

también depende de la velocidad relativa entre proyectil y blanco, $\sigma_{pb} = \sigma_{pb}(v_{pb})$. Cuando las partículas colisionantes (proyectil) son electrones, la velocidad relativa v_{pb} es prácticamente la de los electrones v_e al tener éstos una velocidad típica mucho mayor que la de las partículas con la que colisionan (blanco). Esta es la frecuencia de colisión promedio entre todos los electrones (proyectil) y una otra partícula cualquiera en el plasma: neutro, ión u otro electrón (blanco). Pero al haber muchas de estas otras partículas blanco, deberemos tener en cuenta sus densidades como pondremos de manifiesto a continuación.

1.6.2. Colisiones inelásticas: ionización y recombinación

Estas ideas sobre las colisiones elásticas pueden ser aplicadas razonablemente a las inelásticas, debiendo especificarse entonces que los parámetros colisionales anteriores (sección eficaz de colisión, recorrido libre medio, frecuencia de colisión, ...) son propios de ese proceso colisional en particular. Pensemos, como ejemplo para comprender mejor lo que decimos, en un proceso de ionización de átomos neutros (blanco) por colisión directa con electrones (proyectil) que simbolizamos mediante $[e + A \rightleftharpoons A^+ + e + e]$. Este proceso microscópico o mecanismo se denomina ionización colisional directa por impacto electrónico y el proceso inverso es la recombinación colisional de tres cuerpos. Estos son dos procesos microscópicos o mecanismos colisionales puros, uno el reverso del otro, que producen iones y electrones (el de ionización), o que los eliminan (el de recombinación). Al no existir fotones involucrados, este mecanismo no tienen carácter radiativo.



Analizando específicamente el proceso de ionización (I) por colisiones inelásticas entre electrones y neutros, podemos definir la sección eficaz total de colisión inelástica de ionización de forma parecida a como se hace con las colisiones elásticas (para interacciones de corto alcance *p.e.*, interacción de esfera dura, depende de las dimensiones de la partícula neutra), $\sigma_0 \simeq \pi a_0^2$ (a = radio de la partícula), dependiendo este valor muy poco de la velocidad, ($\sigma \neq \sigma(v)$). Pero en general, la sección eficaz de colisión inelástica de ionización depende de la velocidad relativa de las partículas involucradas - básicamente la velocidad de los electrones - y tenemos entonces, haciendo el promedio sobre todas las velocidades, que :

$$\langle \nu_{ea}^i \rangle = n_p \langle \sigma_{pb} v_{pb} \rangle = n_e \langle \sigma_{ea}^i v_{ea} \rangle,$$

que debemos entender como el número medio de colisiones por unidad de tiempo entre el gas de electrones y un átomo neutro genérico en promedio que podrá ser ionizado

(es el punto de vista de lo que ocurre antes de la colisión). Cuando los electrones involucrados en dichas colisiones tengan energía cinética suficiente, podrá tener lugar la ionización con una probabilidad determinada por su sección eficaz.

En los procesos que intervienen las colisiones inelásticas que implican creación (I) y destrucción (R) de partículas, puede obtenerse el ritmo de creación o destrucción de dichas partículas por unidad de volumen (*rate equation*). Esto se hace mediante una ecuación de evolución temporal en un punto dado del plasma de la densidad de partículas en estudio, en este caso la densidad electrónica n_e o iónica n_i .

Se define S_i como el ritmo de producción por ionización (I) de partículas para este proceso colisional, proporcional al producto de la frecuencia de colisión anterior sobre un átomo neutro por el número medio de átomos (por unidad de volumen) disponibles para ser ionizados por colisiones electrónicas inelásticas:

$$S_i = \frac{\partial n_e}{\partial t} = <\nu_{ea}^i> n_a: \text{ritmo de crecimiento de la densidad de electrones,}$$

$$S_i = n_e <\sigma_{ea}^i v_e> n_a = K_i n_e n_a = \underbrace{n_a <\sigma_{ea}^i v_e>}_{<\nu^i>} n_e = <\nu^i> n_e,$$

donde ahora $<\nu^i>$ es la frecuencia de ionización del proceso que debemos entender como el número medio de ionizaciones por unidad de tiempo que se han producido en promedio por electrón (es el punto de vista de lo que ocurre después de la colisión).

Este proceso constituye un término fuente de electrones e iones (se crean partículas cargadas) y a la vez un término sumidero de átomos neutros (se destruyen), donde el superíndice i significa ionización y K_i es el coeficiente de ionización directa por impacto electrónico. Como en el proceso de recombinaión (3-B) colisional reverso a la ionización por impacto directo la colisión tiene lugar entre tres partículas, no es aplicable el esquema simple de colisión binaria que hemos descrito anteriormente y nos es difícil encontrar una expresión simple para la sección eficaz total de colisión para recombinaión de tres cuerpos y su correspondiente frecuencia de recombinación ya que habría que saber formular cinéticamente el coeficiente. No obstante, sabemos que la correspondiente ecuación de ritmo de decrecimiento de la densidad de electrones puede escribirse como

$S_r = -K_r n_i n_e^2 = -K_r n_e^3$: este proceso constituye un término sumidero de electrones e iones (se destruyen) y a la vez un término fuente de átomos neutros (se crean). Aquí, el coeficiente K_r es el coeficiente de recombinación colisional de tres partículas o tres cuerpos.

Analizamos por ello como otro ejemplo ilustrativo el llamado de recombinación radiativa $[e + A^+ \rightarrow A + h\nu]$ que implica destrucción o desaparición (R) de partículas cargadas (electrones e iones) por impacto directo electrón-ión con creación de fotones, otro caso más de proceso colisional simple binario. El proceso microscópico o mecanismo reverso es la foto-ionización (I), resultando fácil ver aquí el doble carácter colisional y radiativo de un proceso microscópico. Ahora, la colisión binaria entre proyectil y blanco podemos aplicarla de nuevo a la colisión entre electrones (p) e iones (b). Hablaremos de la sección eficaz total de recombinación electrón-ión, de la frecuencia de colisión para recombinación,... Podremos escribir, finalmente, una ecuación de ritmo (*rate equation*) para la variación temporal de la densidad electrónica por recombinación radiativa donde introducimos un signo menos (–) para describir una pérdida de partículas (electrones e iones simultáneamente)

$$S_r = \frac{\partial n_e}{\partial t} = - < \nu_{ei}^r > n_i = -n_e \underbrace{< \sigma_{ei}^r v_e > n_i}_{< \nu^r >} = -n_e < \nu^r >,$$

donde $< \nu^r > = < \sigma_{ei}^r v_e > n_i$ es la frecuencia de recombinación radiativa. Si el plasma mantiene su cuasineutralidad ($n_i = n_e$) se sigue:

$S_r = -n_e < \sigma_{ei}^r v_e > n_e = -\alpha n_e^2$. Este proceso es un sumidero de iones y electrones, donde el superíndice r indica recombinación y α es el coeficiente de recombinación radiativa. Al mismo tiempo, este proceso colisional es un término fuente de átomos neutros.

Vemos por tanto que cada proceso colisional inelástico viene determinado por una sección eficaz de colisión y una frecuencia de colisión que nos permite escribir una ecuación de ritmo para el proceso en cuestión, ecuación que nos da cuenta del cambio temporal local de partículas involucradas en el mismo. Para las colisiones elásticas, la frecuencia de colisión se denomina frecuencia de transferencia de cantidad de movimiento y gracias a dichas colisiones se alcanza el equilibrio de equipartición de energía cinética entre las partículas o equilibrio térmico. Dichas colisiones elásticas pueden darse entre electrones, iones y neutros, pero también entre partículas distintas. Se distingue entre la interacción de corto alcance, siendo $< \nu_{ea} > \gg < \nu_{ia} >$, y la de largo alcance (interacciones entre partículas cargadas), y en términos de las frecuencias de colisión de los distintos mecanismos colisionales se tiene: $< \nu_{ee} > \approx < \nu_{ei} > \gg < \nu_{ii} >$.

Es muy importante conocer cuáles son las interacciones dominantes en el plasma. Para analizar este aspecto deberemos considerar la influencia del grado de ionización, $\delta = \frac{n_i}{n_i + n_N}$. Según esto pueden clasificarse los plasmas en *débilmente ionizados*, donde dominan las colisiones de corto alcance - la frecuencia de colisión para procesos donde intervienen neutros es mucho mayor que la frecuencia de colisión donde intervienen partículas cargadas (plasma Lorentziano) -; en ellos el grado de ionización es inferior a un valor crítico δ_0 , del orden de 10^{-4} a 10^{-6} . En caso contrario, el grado de ionización será superior a este valor crítico y diremos que el plasma es *fuertemente ionizado*, dominando ahora las colisiones de largo alcance. En este último caso se distinguen dos tipos, fuertemente ionizado sin interacción entre partículas, que ocurre cuando el gas es muy diluido existiendo en este caso muy pocas colisiones y el movimiento de las partículas vendrá determinado por la acción de campos externos; y por otra parte, fuertemente ionizado con interacción entre partículas, para los que la densidad de partículas cargadas es tan elevada que las colisiones de largo alcance (coulombianas) determinan la dinámica de las partículas en el plasma.

1.6.3. Otros procesos microscópicos o mecanismos

Estos que hemos estudiado no son los únicos procesos microscópicos colisionales y radiativos existentes, aunque no nos proponemos aquí hacer un estudio exhaustivos de los mismos. Dejaremos por tanto su estudio abierto en posibles trabajos complementarios.

1.6.4. Plasma ideal

Entendemos por plasma ideal aquel en el que prácticamente no existen interacciones entre las partículas cargadas (Coulombianas) y muy pocas entre partículas cargadas y

neutrales, con independencia de su grado de ionización. Así, la energía interna, la presión y en general cualquier propiedad termodinámica del plasma es prácticamente independiente de las colisiones y sólo tienen su origen en el movimiento de sus partículas (los grados de libertad traslacionales) y no en sus interacciones. La forma de ilustrar esto es como sigue, para lo cual consideraremos las interacciones entre los electrones del plasma (largo alcance).

Sabemos de la teoría cinética elemental que el recorrido libre medio λ entre colisiones electrónicas es del orden de $\lambda \sim \frac{1}{n_e \pi r_0^2}$. Para esta interacción Coulombiana, si se produce colisión, entendemos que la energía potencial de interacción entre los electrones ha de ser del orden de la energía cinética de los mismos, donde r_0 es el alcance del potencial. De otro modo, no podríamos considerar la existencia de interacciones entre las partículas al ser despreciable su energía de interacción.

$$\underbrace{\langle \frac{1}{2}mv_e^2 \rangle}_{\frac{3}{2}k_B T_e} \cong \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \Rightarrow r_0 \cong \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{3}{2}k_B T_e}.$$

Obtenemos así un valor estimado del alcance del potencial repulsivo entre electrones r_0 que nos permite a su vez estimar el valor del recorrido libre medio. Por tanto, es

$\lambda \cong \frac{36\pi\varepsilon_0^2 k_B^2 T_e^2}{n_e e^4}$. Y teniendo en cuenta que la longitud de Debye es $\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}\right)^{\frac{1}{2}}$, el recorrido libre medio queda de la forma:

$$\lambda \cong 36\pi \lambda_D^4 n_e = 36\pi (\lambda_D^3 n_e) \lambda_D.$$

Sin más que se verifique la condición de existencia del plasma ($\lambda_D^3 n_e >> 1$), el recorrido libre medio será como consecuencia mucho mayor que la longitud de Debye. En estas circunstancias, los electrones se mueven todo el tiempo libres de interacciones y sólo rara vez interactúan entre ellos (dentro de la esfera de apantallamiento o interacción de Debye) como describe la teoría de Debye-Hückle de los plasmas clásicos en equilibrio (local). Cualitativamente puede entenderse que si $\lambda >> \lambda_D$ no existen interacciones entre las partículas cargadas (electrones). Entonces la energía de interacción entre partículas es mucho menor que la energía térmica. Y a su vez, esto quiere decir que se siguen verificando las condiciones del gas ideal.

Así por ejemplo, según la ley de Dalton de los gases resulta que $p = p_e + p_i + p_a$ (suma de presiones parciales), y bajo condiciones de gas ideal $p = n_e k_B T_e + n_i k_B T_i + n_a k_B T_a$. Cuando la energía de interacción deje de ser despreciable (plasmas muy densos), aparecerán términos correctores de esta ley como consecuencia de esta energía no despreciable entre las partículas del plasma. Igual puede decirse para otras propiedades termodinámicas.

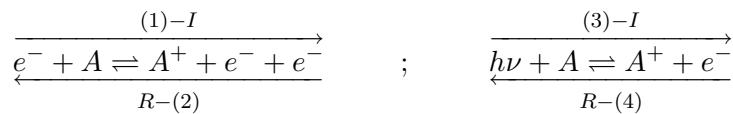
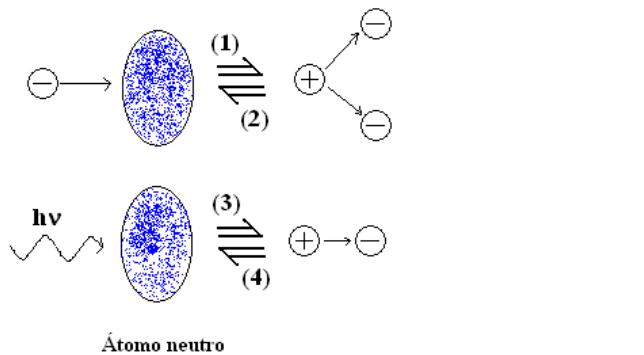
1.7. Balance de partículas.

Si la ganancia y la pérdida de partículas cargadas en el plasma están compensadas, las concentraciones o densidades de especies se mantienen constantes y en particular el grado de ionización (situación estacionaria). Estos procesos de ganancia y pérdidas

pueden ser procesos de creación y destrucción de partículas cargadas del tipo colisional y/o radiativo (colisiones inelásticas, procesos de ionización y recombinación,...) y procesos debidos al transporte pasivo en presencia de inhomogeneidades (por ejemplo, difusión debida a un gradiente de partículas cargadas por la no uniformidad del plasma). Cuando los procesos de recombinación son despreciables frente a los transportes por difusión, las únicas pérdidas considerables son las difusivas y el plasma se encuentra en *régimen de difusión*.

Los mecanismos de ionización y recombinación a su vez se clasifican en procesos co-collisionales y radiativos, pero también pueden tener un carácter híbrido o mixto como hemos visto en los ejemplos anteriores que ahora resumimos.

PROCESOS	IONIZACIÓN	RECOMBINACIÓN
Colisionales	Por impacto electrónico (1)	De tres cuerpos (2)
Radiativos	Fotoionización (3)	Radiativa (4)



A grandes rasgos se cumple que a medida que aumenta la densidad electrónica aumentan los procesos colisionales en detrimento de los radiativos.

Cuando cada proceso está equilibrado con su reverso (balances propios), el plasma está en equilibrio termodinámico completo (ETC). Un plasma en equilibrio termodinámico completo - como consecuencia de la existencia de balance detallado (B.D.) - cumple varios equilibrios parciales:

- Equilibrio cinético:** Podemos aplicar la distribución Maxwelliana a cada tipo de partículas. Esto se debe a las colisiones elásticas que equiparten muy eficazmente la energía cinética media entre las partículas, pudiéndose definir la temperatura cinética de cada especie (tipo de partícula): T_e, T_i, T_a
- Equilibrio de excitación:** Tenemos una distribución de Boltzmann de estados excitados en el equilibrio, esto se debe a las colisiones inelásticas. Aparece una temperatura de excitación característica: T_{exc}

- c) Equilibrio de ionización: Tenemos una relación de equilibrio entre partículas ionizadas y partículas neutras (equilibrio de Saha). Esto se debe también a colisiones inelásticas. Aparece una temperatura de ionización característica: T_{ion}
- d) Equilibrio de radiación: Ley de Planck, distribución de intensidad con la frecuencia. Aparece una temperatura de radiación característica: T_{rad}

... y algunas más que por simplificar no enumeraremos.

Este equilibrio termodinámico completo supone equilibrio de partículas y equilibrio de radiación. Esta situación es excepcional y sólo se da en situaciones muy extremas (plasmas muy densos, núcleos estelares). En esta situación, todas las partículas están a la misma temperatura, única en el plasma.

$T_e = T_i = T_a \dots$, y existe una sola temperatura en el plasma = T_{plasma} .

En condiciones de laboratorio sin embargo, el plasma no es lo suficientemente grande y lo suficientemente denso para retener todos los equilibrios parciales anteriores, y se pierde al menos el equilibrio de radiación: parte de la radiación emitida por el plasma no puede ser reabsorbida en el mismo. Sin embargo se mantiene el equilibrio localmente entre partículas por colisiones, y en estas condiciones se dice que el plasma está en *Equilibrio Termodinámico Local (ETL)*, que es el máximo grado de equilibrio al que podemos aspirar en plasmas de laboratorio.

Ahora ocurre que cada proceso no está necesariamente equilibrado con su reverso (balances impropios), y el plasma se encuentra fuera del equilibrio termodinámico completo. Conforme la densidad electrónica aumenta, los procesos colisionales adquieren más importancia mientras que a medida que la densidad electrónica disminuye la pierden, aumentando el peso de los procesos radiativos. No obstante, los procesos de foto-ionización (3) carecen de relevancia en el plasma y dominarán los procesos colisionales de ionización por impacto electrónico (1) y recombinación radiativa (4). En este punto se alcanza el llamado equilibrio corona que es algún tipo de equilibrio termodinámico local parcial (p-ETL). Un proceso puede estar equilibrado no por su reverso sino por otro mecanismo complementario distinto, de manera que mediante balances impropios puede mantenerse una situación estacionaria lejos del equilibrio termodinámico total. Podría ocurrir en un plasma que los procesos anteriormente mencionados de ionización (I) por impacto electrónico (1) y recombinación (R) radiativa (4) mantuvieran de forma efectiva la población electrónica estabilizada mediante balance impropio (corona).

Existen muchos otros procesos microscópicos o mecanismos presentes en los plasmas - en mayor o menor medida, dependiendo de su situación de densidades y temperaturas - que producen ionización, recombinación, emisión y absorción de radiación, excitación, desexcitación, etc. Es característico de los plasmas esta vivísima actividad a escala microscópica. Lejos de situaciones de equilibrio donde no pueden aplicarse las leyes antes mencionadas de Maxwell, Boltzmann, Saha,..., los plasmas pueden ser estudiados de forma cinética mediante las ecuaciones de ritmo (*rate equations*) para el cambio temporal de las poblaciones de especies de interés (de electrones, iones, átomos o moléculas excitados, y radiación). Un conjunto de tales ecuaciones que describan los procesos microscópicos dominantes (no tienen por qué ser todos sino los de más relevancia) en el plasma - mecanismos que serán de carácter colisional o radiativo, ionizante o recombinante -, constituye los llamados modelos *colisional-radiativos*. Tanto para situaciones estacionarias como cambiantes en el tiempo, tanto si el plasma es homogéneo como en presencia de gradientes espaciales, los modelos colisional-radiativos

nos aproximan a una descripción cinética enormemente importante del plasma, como demuestra la gran cantidad de estudios existentes en este campo.

1.8. Clasificación de los plasmas: tipos de plasmas.

Pueden hacerse varias clasificaciones de los plasmas atendiendo a diferentes criterios. Una de ellas es atendiendo al valor del parámetro denominado grado de ionización $\delta = \frac{n_i}{n_i + n_N}$ ya conocido. En este caso, y según el estado crítico de ionización, existen plasmas débilmente ionizados $\delta \ll 1$ y fuertemente ionizados $\delta \cong 1$. Atendiendo a su temperatura, se clasifican en plasmas de alta temperatura y en plasmas de baja temperatura (temperatura electrónica), estando el límite en torno a 1 KeV. Por encima de este valor crítico se dan las condiciones para que se produzca la fusión termonuclear. A temperaturas inferiores al citado valor crítico hablamos de plasmas a bajas temperaturas o plasmas fríos. Otra clasificación puede hacerse a partir del tratamiento a los plasmas. Para hacer el estudio de las colisiones se hará un tratamiento clásico, existiendo un límite relativista. Cuando la velocidad de las partículas sea del orden de la velocidad de la luz (para estimar esta velocidad, se igualan las energías térmica y cinética de las partículas). En ocasiones, aunque el plasma sea tratado clásicamente, los electrones de la cola por ser más energéticos, tendrán que ser tratados en el límite relativista.

En el caso en el que el plasma sea tratado desde el punto de vista cuántico, existirá una indeterminación máxima en la posición [$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(\Delta r)^3} \rightarrow \Delta r \approx n^{\frac{1}{3}}$], y mínima en la cantidad de movimiento [$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta r} = \hbar n^{\frac{1}{3}}$]. Podrá hacerse un tratamiento clásico siempre que la cantidad de movimiento en promedio de las partículas sea muy superior al valor de la incertidumbre para la misma magnitud.

$$\left[\vec{p} \gg \Delta p \Rightarrow m\sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{mk_B T} \Rightarrow \sqrt{mk_B T} \gg \hbar n^{\frac{1}{3}} \Rightarrow n \ll \frac{(mk_B T)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \right]$$

(ver transparencia sobre clasificación de los plasmas).

1.9. Aplicaciones de los plasmas.

Muy brevemente podemos decir que el estudio de la Física del Plasma tiene dos grupos de aplicaciones fundamentales, *a)* de soporte o apoyo para otros campos y *b)* de aplicaciones en la ciencia y tecnología. Ejemplos de esto son plasmas en Física del Estado Sólido donde el comportamiento de un gas ionizado puede servir para el estudio del comportamiento de los semiconductores, el gas interestelar, que es un plasma, y el interior de las estrellas, que es otro plasma, así como la corona estelar (corona solar por ejemplo). El estudio de los plasmas es muy importante en el campo de la astrofísica en la que la dinámica de una galaxia puede estudiarse como la evolución de un gran plasma. La Física del Plasma igualmente se aplica a la física espacial (entorno de los planetas), al estudio de la ionosfera y del viento solar (plasmas condicionados y confinados por el campo magnético de los planetas), etc.

En cuanto a la aplicación directa de los plasmas como tales, históricamente el primer plasma que se estudió fue el plasma de fusión termonuclear, en el que la dificultad radica en conseguir plasmas lo suficientemente energéticos como para que se produzcan colisiones termonucleares durante un tiempo suficiente, y una vez conseguido, confinarlo, mediante campos magnéticos o sistemas de confinamiento inercial. Otro grupo de aplicaciones directas, lo constituyen los llamados plasmas de descargas de gases. Con ellos se consiguen tecnologías para el tratamiento de superficies y deposición de películas delgadas, pueden utilizarse para la fabricación de semiconductores (etching), que son los componentes de los circuitos integrados. Y un largo etcétera que incluye fuentes de excitación para análisis químico (ICP, MIP), síntesis química (y en general la química de plasmas), lámparas de iluminación, lámparas espectrales, fuentes de láser, producción de recubrimientos, fuentes de iones,... En nuestra Universidad se ha desarrollando tecnología mediante plasma para eliminar residuos tóxicos, así como trabajo en los llamados plasmas de iluminación (ver presentación). Puede consultarse además el texto *Aplicaciones de los plasmas* que aparece en Moodle.

Tema 2

PLASMA COMO CONJUNTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN MOVIMIENTO

2.1. *Introducción.*

En plasmas diluidos, las interacciones coulombianas de largo alcance tienen una mayor influencia que las interacciones de corto alcance o colisiones, por lo que podremos despreciar el comportamiento colectivo de las partículas en el plasma. Para ello será necesario que el recorrido libre medio sea realmente muy grande en comparación con la longitud de Debye. La dinámica de estas partículas cargadas vendrá determinada más por sus interacciones electrodinámicas que por sus colisiones o choques, especialmente si el plasma se encuentra en el seno de campos eléctricos y magnéticos externos. Entonces, analizamos el movimiento de una de las N partículas del plasma y el resto de ellas tendrá un comportamiento similar (Tema 2). El planteamiento de este tema 2 también se conoce como *teoría de órbitas* o *teoría girocéntrica*.

Por el contrario, en plasmas muy densos las colisiones (o interacciones de corto alcance) predominan frente a las interacciones culombianas. En este caso hacemos un tratamiento del plasma como un continuo con la mecánica de fluidos en donde tiene realmente importancia el comportamiento colectivo de las partículas en el plasma, que se moverán como un todo en el seno de campos eléctricos y magnéticos externos (Tema 3). Deberemos entonces analizar el movimiento no ya de una partícula individual sino de un elemento diferencial de fluido plasma en el que hay incluidas muchas partículas. Y ese comportamiento del plasma como fluido será a veces similar al de las partículas consideradas individualmente pero otras veces será muy distinto. El planteamiento en el tema 3 siguiente también se conoce como Magnetohidrodinámica (MHD).

2.2. *Movimiento en campos eléctricos y magnéticos uniformes.*

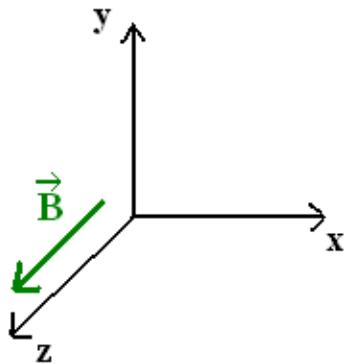
Vamos a aceptar que las partículas del plasma modifican muy poco las condiciones de los campos eléctricos y magnéticos aplicados externamente. Tomemos un plasma diluido, la teoría de órbitas explica el movimiento individual de las partículas del

plasma cuando están sometidas a campos eléctricos y magnéticos externos. Empezamos considerando campos eléctricos y magnéticos uniformes y que no varían con el tiempo.

2.2.1. Campo \vec{B} uniforme y constante en el tiempo

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = B\vec{k} \end{array} \right\}$$

Tenemos:



La ecuación de movimiento para la partícula (fuerza de Lorentz) es: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

En componentes:

$$m\dot{v}_x = q v_y B$$

$$m\dot{v}_y = -q v_x B$$

$$m\dot{v}_z = 0 \Rightarrow v_z = v_{z0} = cte \text{ (traslación uniforme).}$$

Trabajamos con la segunda ecuación, donde despejamos $m\dot{v}_y$, y la primera ecuación, que derivamos en t :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x \Rightarrow \frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x = 0$$

donde aparece la frecuencia ciclotrónica de la partícula $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$. Tenemos una solución de tipo armónico para v_x que es:

$$v_x = \operatorname{Re} \left\{ v_{\perp} e^{i(\omega_c t + \delta)} \right\} = v_{\perp} \cos (\omega_c t + \delta)$$

siendo $v_{\perp} \equiv$ velocidad perpendicular a la dirección de aplicación de \vec{B}

$$\text{Como } v_y = \frac{m}{qB} v_x$$

$$v_y = -\frac{\omega_c}{\pm \omega_c} v_{\perp} \sin (\omega_c t + \delta) = \mp v_{\perp} \sin (\omega_c t + \delta)$$

\mp indica el signo de q

Las condiciones iniciales para $t = 0$ son:

$$\begin{cases} v_{x0} \\ v_{y0} \end{cases} \Rightarrow v_{\perp} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \Rightarrow \text{módulo de la velocidad transversal}$$

$$v_{z0} = v_{\parallel} = Cte$$

$$\delta = \mp \operatorname{arctg} \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right)$$

En definitiva tenemos:

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \cos (\omega_c t + \delta) \\ v_y = \mp v_{\perp} \sin (\omega_c t + \delta) \\ v_z = cte = v_{z0} = v_{\parallel} \end{cases}$$

Ahora podemos obtener la posición de la partícula sin más que integrar en t estas ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin (\omega_c t + \delta) \\ y(t) = y_0 \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos (\omega_c t + \delta) \\ z(t) = z_0 + v_{z0}t = z_0 + v_{\parallel}t \end{cases}$$

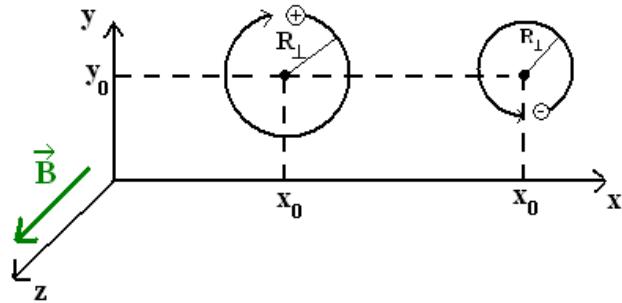
Son trayectorias circulares en el plano X, Y que se denominan ciclos de Larmor. El radio de la trayectoria viene dado por:

$$r_L = R_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

Podemos introducir una energía cinética transversal que nos permita escribir el valor del radio de Larmor de otra forma:

$$E_{c\perp} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \Rightarrow r_L = R_{\perp} = \frac{(2mE_{c\perp})^{\frac{1}{2}}}{|q|B}$$

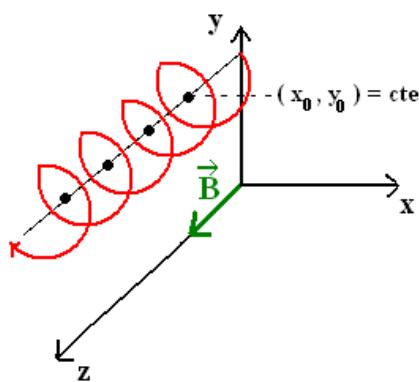
Los electrones tendrán menor radio de Larmor que los iones para las mismas condiciones de campo y carga, por tener menor masa. Además, el sentido de giro de la trayectoria depende del signo de la carga de la partícula para una dirección de campo magnético dada.



El movimiento de las partículas positivas es tal que crea un campo magnético interno (local) de sentido opuesto al externo. El movimiento de las partículas negativas también crea un campo magnético interno que se opone al externo.

Esto nos dice que cuando tenemos un plasma sometido a un campo magnético externo, las partículas tienen un movimiento de Larmor que crean unos campos que se oponen a los campos externos aplicados (ley de Lenz de las corrientes inducidas). Esto da un carácter diamagnético al plasma al ser el campo magnético total en su interior ligeramente menor que el campo externo.

El movimiento de las partículas cargadas sometidas al campo magnético constante y uniforme es por tanto un movimiento helicoidal con un paso de hélice constante.



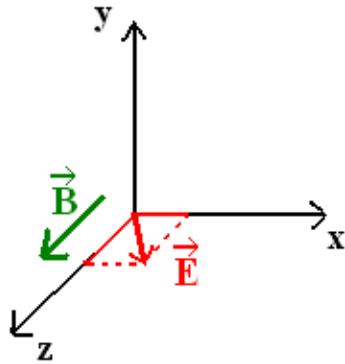
La partícula tiene un desplazamiento lineal de los centros de giro $\vec{v}_{||} = \vec{v}_{z0} = Cte$.

Se puede representar el movimiento de las partículas como el movimiento en la dirección del campo magnético de los centros de giro, y sobre esos centros las partículas describen unos ciclos de Larmor, transversales a \vec{B} .

2.2.2. Campo \vec{B} y \vec{E} uniformes y constantes en el tiempo

Ahora incluimos en el problema también un campo eléctrico externo. Además del campo magnético anterior uniforme, vamos a tener un campo eléctrico también uniforme actuando sobre las partículas de manera que la fuerza de Lorenz tendrá componentes tanto magnéticas como eléctricas. Suponemos que $\vec{B} = B\vec{k}$ y que el campo eléctrico tiene una componente transversal (\perp) y otra longitudinal (\parallel) a \vec{B} . Tomamos el sistema de referencia de manera que la componente transversal de \vec{E} coincide con la dirección del eje X .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = E_x \vec{i} + E_z \vec{k} \\ \vec{B} = B \vec{k} \end{array} \right\} \text{Uniformes y constantes (independientes de la posición y el tiempo)}$$



Aplicamos la ley de Lorentz para la ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); & \vec{v} \times \vec{B} &= v_y B \vec{i} - v_x B \vec{j} = (v_y B, -v_x B, 0) \\ \vec{E} &= E_x \vec{i} + E_z \vec{k} \end{aligned}$$

Equivale a las ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B + \frac{q}{m} E_x = \pm \omega_c v_y \pm \frac{\omega_c}{B} E_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m} v_x B = \mp \omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m} E_z \quad \Rightarrow \quad v_z = v_{z0} + \frac{q E_z}{m} t \end{aligned}$$

En el eje Z tenemos un movimiento uniformemente acelerado, con $a_z = \frac{q E_z}{m}$. Trabajamos con las dos primeras ecuaciones y las derivamos respecto a t :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= \pm \omega_c \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c^2 v_x \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= \mp \omega_c \frac{dv_x}{dt} = \mp \omega_c (\pm \omega_c v_y \pm \frac{\omega_c}{B} E_x) = -\omega_c^2 (v_y + \frac{E_x}{B}) \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variable llamando:

$$v'_y = v_y + \frac{E_x}{B}$$

y tenemos:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{d^2 v'_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v'_y$$

nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) \\ v_y(t) = \mp v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta) - \frac{E_x}{B} \\ v_z(t) = v_{z0} + \frac{qE_z}{m}t = v_{\parallel} + \frac{qE_z}{m}t \end{array} \right\}$$

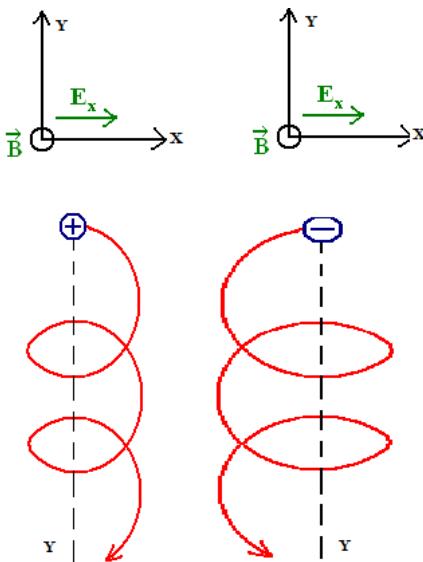
Ahora tenemos superpuesto al movimiento de giro anterior de los ciclos de Larmor un movimiento transversal a los ejes X y Z al aparecer el término del campo eléctrico: es transversal al campo \vec{B} y al campo \vec{E}_x por lo que tiene la dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$.

En efecto, $v_E = -\frac{E_x}{B}$ en la dirección de \vec{j} negativa: ésta es la velocidad del movimiento de traslación que los centros de giro, que llamaremos de arrastre por campo eléctrico, realizan en el plano X, Y .

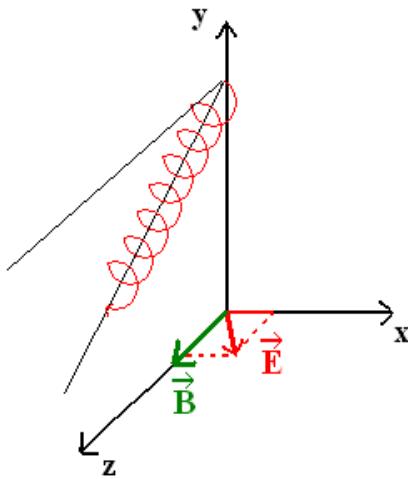
$$\vec{E} \times \vec{B} = -E_x B \vec{j}, \text{ de manera que} \quad -\frac{E_x}{B} \vec{j} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = \vec{v}_E \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Esta velocidad es una velocidad de arrastre de los centros de giro de los ciclos de Larmor, se denomina de arrastre por campo \vec{E} o arrastre eléctrico, y se superpone a la velocidad de la partícula. Como puede verse, \vec{v}_E es independiente de las velocidades transversal y paralela de la misma, así como de su masa y de su carga, de manera que todas las partículas sufren el mismo arrastre por campo \vec{E} .

El movimiento de la partícula en el plano X, Y puede representarse de la siguiente manera:



y puede entenderse cualitativamente como sigue: en la primera parte del ciclo de Larmor, \vec{E} acelera las cargas, aumenta v_{\perp} y por tanto r_L ; en la segunda parte del ciclo, \vec{E} frena las cargas, disminuye v_{\perp} y también r_L . Como consecuencia, el centro de giro se desplaza. En un esquema de tres dimensiones quedaría:



Se ve el efecto de arrastre hacia abajo (dirección $-\vec{j}$ para $E_x > 0$) de los centros de giro, siendo realmente parabólica la trayectoria de éstos (sería realmente rectilínea en el caso particular de $E_z = 0$). Al moverse portadores de carga en grupo debido a esta velocidad de arrastre en el plasma, tendremos una corriente nula de carga neta al anularse mutuamente las contribuciones del movimiento de los electrones e iones a dicha corriente.

Ahora vamos a ver qué ocurre si tenemos un campo gravitatorio uniforme - en lugar del campo eléctrico - además del campo magnético uniforme.

- Hemos visto que

$$\exists \vec{B} \Rightarrow \text{si } \exists \vec{E} \Rightarrow \vec{F}_E = q\vec{E} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Teníamos la velocidad de arrastre por campo eléctrico proporcional a $\vec{E} \times \vec{B}$

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_E \times \vec{B}}{B^2}$$

- Veamos ahora qué ocurre si sustituimos el campo eléctrico por uno gravitatorio.

$$\exists \vec{B} \Rightarrow \text{si } \exists \vec{g} \Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{g} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Tenemos ahora una velocidad de arrastre por campo gravitatorio proporcional a $\vec{g} \times \vec{B}$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_g \times \vec{B}}{B^2} = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

Esta otra velocidad de arrastre sí depende de la masa y de la carga de la partícula. Al moverse portadores de carga en grupo debido a esta velocidad en el plasma en

sentidos contrarios crearán una corriente de carga neta no nula por ser las cargas de signo contrario. En la práctica, el efecto de arrastre por campo gravitatorio (o arrastre gravitatorio) es despreciable frente al de campo eléctrico.

2.3. *Movimientos en campos eléctricos y magnéticos inhomogéneos.*

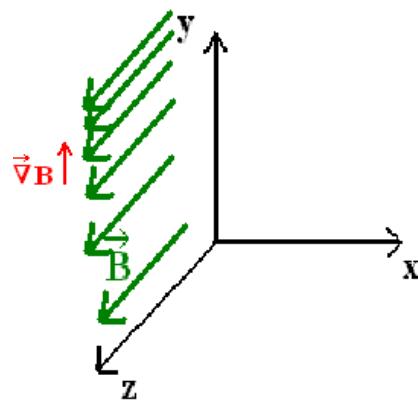
Si tenemos una longitud característica constante de las inhomogeneidades de los campos, L , supondremos que ésta será mucho mayor que los radios de Larmor descritos por las trayectorias de las partículas. Esto nos permite suponer que la no homogeneidad de los campos va a ser moderada (no muy fuerte) al objeto de que los campos no cambien espacialmente durante los ciclos de Larmor al ser $L \gg r_L$. Además supondremos que durante el periodo de un ciclo de Larmor los campos varían muy poco en el tiempo (frecuencia de cambio temporal de los campos mucho menor que la frecuencia ciclotrónica): podrá cambiar el valor de los campos pero en ciclos de Larmor distintos (campos externos quasi-estáticos). En este apartado, sin embargo, simplemente supondremos que los campos externos son rigurosamente estacionarios (no dependen del tiempo).

En estas circunstancias, podemos seguir describiendo la trayectoria de las partículas con el movimiento de arrastre de los centros de giro y superponiéndole los ciclos de Larmor. Es la teoría de órbitas para el movimiento de las partículas sometidas a campos inhomogéneos. Analizaremos distintos casos particulares con \vec{B} y \vec{E} .

2.3.1. Gradiente de \vec{B} perpendicular a \vec{B}

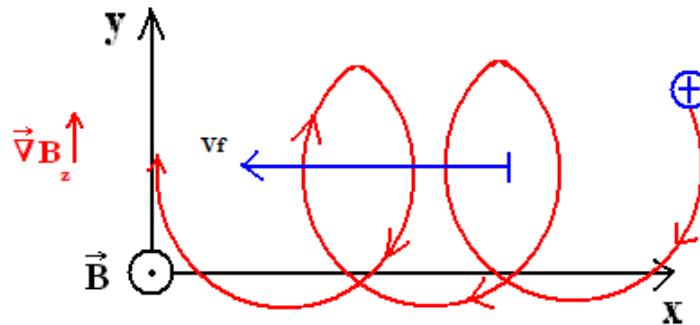
(\vec{B} independiente del tiempo (estacionario) en el eje Z , $\vec{B} = B_z \vec{k}$)

Empezamos analizando el caso en el que la componente z de \vec{B} cambia con y , $B_z = B_z(y)$.



$$\vec{\nabla}B = \frac{\partial B}{\partial y} \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}B_z = \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{j},$$

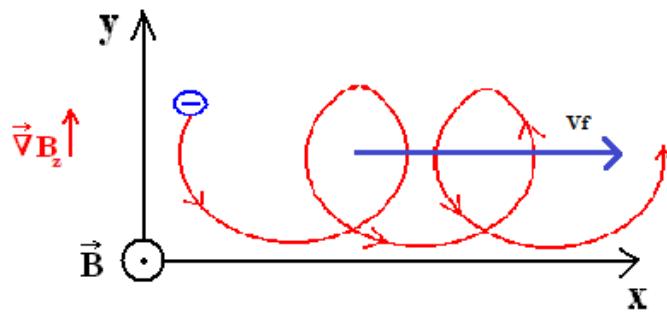
y aceptaremos que hay cada vez más líneas de campo al crecer y ; o sea, $\frac{\partial B_z}{\partial y} > 0$. Para una partículas con carga positiva, el movimiento puede representarse de la siguiente forma:



y lo podemos entender cualitativamente como sigue: al disminuir B_z durante el medio periodo ciclónico en el que la partícula se desplaza contra el gradiente de B_z , r_L aumenta mientras que ocurre lo contrario durante el medio periodo siguiente en el que aumenta B_z y por lo tanto r_L disminuye: hay un desplazamiento neto de los centros de giro durante un periodo ciclónico completo, para los que el radio de Larmor viene dado por:

$$R_\perp = r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$$

Después de muchos ciclos de Larmor, el centro de giro de la partícula se desplaza en la dirección negativa del eje X a una velocidad que queremos determinar y que denominaremos de arrastre por gradiente de B . Para una partícula negativa ocurrirá lo mismo salvo que al contrario, por lo que el arrastre por $\vec{\nabla}B$ es en sentido contrario (dirección positiva del eje X).



Al margen del signo de la carga eléctrica de la partícula, el arrastre es transversal a \vec{B} y a $\vec{\nabla}B$, por lo que tiene la dirección de $\vec{B} \times \vec{\nabla}B$.

Veamos ahora la fuerza que tenemos sobre la partícula debido a $\vec{\nabla}B$ al objeto de poder utilizar la forma general de la velocidad de arrastre que ya conocemos y hemos utilizado en los casos anteriores

$$\vec{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}$$

\vec{F} tendrá la dirección \vec{j} , ya que \vec{v}_F está en la dirección \vec{i} .

Obtenemos esta fuerza como componentes de la fuerza de Lorentz sólo magnética (ahora no hay campo eléctrico) cuando el campo magnético es moderadamente inhomogéneo. Tenemos las ecuaciones para la fuerza instantánea sobre las partículas:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = qv_y B_z \\ F_y = -qv_x B_z \\ F_z = 0 \end{array} \right\}$$

y veremos cómo afecta el cambio espacial de B_z a la solución de las ecuaciones de movimiento anteriores (solución inhomogénea o para campo inhomogéneo). Para ello, desarrollamos B_z en serie de Taylor (si la inhomogeneidad es débil, $L \gg r_L$, dicho desarrollo en el eje Y está justificado):

$$B_z(y) = B_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_{y_0} + \underbrace{\frac{1}{2!}(y - y_0)^2 \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right)_{y_0}}_{\approx 0} + \dots$$

Admitiendo que B_0 es la solución del problema sin que haya cambio espacial de B_z (solución conocida del caso anterior de campo B_z uniforme), y sustituyendo el desarrollo anterior de $B_z(y)$ hasta el primer orden del desarrollo, la componente y de la fuerza $F_y = -qv_x B_z(y)$ queda:

$$\begin{aligned} F_y &= -q \underbrace{v_\perp \cos(\omega_c t + \delta)}_{v_x} \left\{ B_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_{y_0} \right\} = \\ &= -qv_\perp \cos(\omega_c t + \delta) B_0 \mp qv_\perp r_L \cos^2(\omega_c t + \delta) \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_{y_0} \end{aligned}$$

ya que $(y - y_0) = \pm \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \delta) = r_L \cos(\omega_c t + \delta)$. Haciendo el promedio temporal en un ciclo de Larmor para calcular la fuerza media sobre la partícula en ese eje debido a $\vec{\nabla}B$, y sabiendo que el promedio temporal en un periodo del coseno es 0 y el del coseno cuadrado es $\frac{1}{2}$, nos queda:

$$\bar{F}_y = \mp \frac{1}{2} q v_\perp r_L \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_{y_0} \Rightarrow \text{que es la componente de la fuerza de Lorentz buscada.}$$

Haciendo el promedio para la componente x de la fuerza, F_x , se llega a que $\bar{F}_x = 0$, lo que puede comprobarse fácilmente.

Hemos asumido que la inhomogeneidad es prácticamente constante durante los ciclos de Larmor y como consecuencia se sigue que si $B = B(y)$ tendremos un arrastre de los centros de giro por gradiente de campo $\vec{\nabla}B$ de velocidad $\vec{v}_{\vec{\nabla}B}$, que vale:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{\vec{\nabla}B} = \frac{1 \mp \frac{1}{2} q v_\perp r_L \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{j} \times \vec{B} \right)}{B^2} = \pm \frac{1}{2} v_\perp r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}B}{B^2}$$

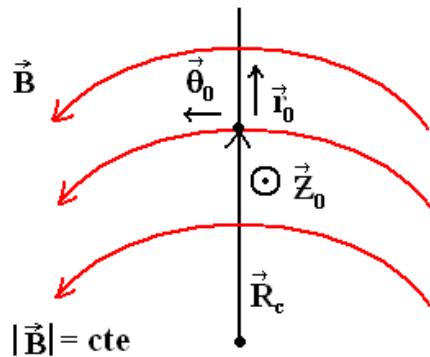
Podemos expresarla también como:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} = \pm \frac{\frac{E_{c\perp}}{m}}{|q|B} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} = \frac{E_{c\perp}}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3}$$

donde se ha introducido la energía cinética transversal. Esta velocidad de arrastre de los centros de giro sí depende de la carga de la partícula, por lo que crearán una corriente de carga neta por ser las cargas de signo contrario. La misma descripción anterior de arrastre de los centros de giro nos ha servido para estudiar este caso de campo magnético inhomogéneo apareciendo una nueva velocidad de arrastre $\vec{v}_{\nabla B}$.

2.3.2. Campo magnético \vec{B} curvado (inhomogeneidad en curvatura)

Consideramos que el campo magnético tiene líneas con un cierto radio de curvatura y que es constante en módulo para un radio de curvatura dado. Vamos a tomar como inhomogeneidad del campo magnético la curvatura del mismo para lo que usaremos coordenadas cilíndricas donde el subíndice 0 indica vector unitario:



Esta situación es imposible que se dé - ya que no es compatible con las ecuaciones de Maxwell - a menos que tengamos fuentes vectoriales del campo magnético. No se puede tener un campo magnético curvado con módulo constante sin presencia de fuentes vectoriales del campo magnético. Para deducir la variación del módulo de \vec{B} , haremos sus fuentes vectoriales igual a cero.

Por otro lado, tendremos una fuerza centrífuga actuando sobre los centros de giro de las partículas cuando éstos sigan la dirección curvada del campo magnético a la velocidad v_{\parallel} (en el movimiento a lo largo de una trayectoria curvada aparece una fuerza centrífuga en dirección radial):

$$\vec{F}_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \vec{r}_0 = mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2}$$

y también obtendremos una velocidad de arrastre de los centros de giro que llamaremos de arrastre de curvatura debido a esta fuerza centrífuga cuando apliquemos la fórmula general de la velocidad de arrastre de los centros de giro:

$$\vec{v}_{curv} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_c \times \vec{B}}{B^2} = \frac{m}{q} \frac{v_{\parallel}^2}{R_c^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{B^2} = \frac{2E_{c\parallel}}{qR_c^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{B^2}$$

Este efecto de la curvatura de \vec{B} conlleva la existencia de un gradiente en su módulo como veremos a continuación, que introduce un nuevo arrastre por $\vec{\nabla}B$ distinto al de curvatura. Para determinar este gradiente del módulo de \vec{B} , que será perpendicular al propio \vec{B} , recordamos que el campo magnético sólo tiene componente $\vec{\theta}_0$, constante a un r dado pero que varía ligeramente de una distancia radial a otra:

$\vec{B} = B_{\theta}\vec{\theta}_0 = B(r)\vec{\theta}_0 = (0, B(r), 0)$: B_{θ} es constante a r dado, pero cambia de un r a otro; es decir, existe un gradiente radial de B_{θ} . Para encontrar dicho gradiente, anulamos sus fuentes vectoriales en la 4^a ecuación de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \text{ no hay fuentes vectoriales.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{r}_0 \left\{ \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial B_{\theta}}{\partial z}}_{=0} \right\} + \vec{\theta}_0 \left\{ \underbrace{\frac{\partial B_r}{\partial z}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial r}}_{=0} \right\} + \vec{z}_0 \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (rB_{\theta})}{\partial r} - \underbrace{\frac{\partial B_r}{\partial \theta}}_{=0} \right\}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial (rB_{\theta})}{\partial r} = 0 \Rightarrow rB_{\theta} = cte = A \Rightarrow B_{\theta} = \frac{A}{r} = |\vec{B}|$$

$$\vec{\nabla}B = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} \right) \vec{r}_0 = -\frac{A}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{|\vec{B}|}{r} \vec{r}_0 = -\frac{B_{\theta}}{r} \vec{r}_0$$

$$\text{Haciendo } \vec{r} = \vec{R}_c \begin{cases} \vec{\nabla}B = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} |\vec{B}| \\ \frac{\vec{\nabla}B}{|\vec{B}|} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \end{cases}$$

Llegamos a que $\vec{\nabla}B$ es perpendicular a \vec{B} y tenemos también una velocidad de arrastre de los centros de giro que responde a la fórmula general:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\vec{\nabla}B} &= \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}B}{B^2} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B}}{B^2} \times \left(-\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} B \right) = \\ &= \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2}, \text{ (depende del signo de } q \text{)} \end{aligned}$$

La velocidad de arrastre total que sufren los centros de giro en este caso de inhomogeneidad por curvatura del campo \vec{B} acumula el arrastre por curvatura y el de $\vec{\nabla}B$ que conlleva, quedando:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{curv+\vec{\nabla}B} &= \vec{v}_{curv} + \vec{v}_{\vec{\nabla}B} = \frac{m}{q} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} = \\ &= \frac{(2E_{c\parallel} + E_{c\perp})}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} = \frac{(2E_{c\parallel} + E_{c\perp})}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}B}{B^3} \end{aligned}$$

Esta expresión depende del signo de q , lo que supone que el arrastre sobre un conjunto de partículas provoca la aparición de una corriente neta de carga no nula ya que la contribución a la misma de los portadores de carga negativa no se cancela sino que se suma a la de los portadores de carga positiva.

Hipótesis de equilibrio: Si para el conjunto de partículas del plasma aceptamos equilibrio térmico entre ellas por equipartición parcial (al menos) debido a la anisotropía que introduce el campo \vec{B} , podemos aplicar las distribuciones de Maxwell para la energías cinética transversal y paralela promedio de las partículas cumpliéndose que:

$$\langle E_{c\parallel} \rangle = \frac{1}{2} k_B T_{\parallel}, \text{ siendo } T_{\parallel} \text{ la temperatura cinética paralela.}$$

$$\langle E_{c\perp} \rangle = \frac{2}{2} k_B T_{\perp}, \text{ siendo } T_{\perp} \text{ la temperatura cinética perpendicular.}$$

Si estamos con un plasma isótropo, en el que la distribución de velocidades es la misma para todas las direcciones, se cumple que $T_{\perp} = T_{\parallel} = T$.

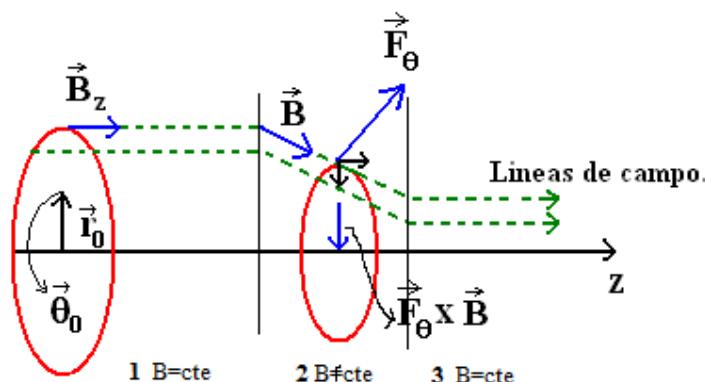
En este caso, tenemos una velocidad de arrastre en promedio para las partículas que vale:

$$\langle \vec{v}_{curv+\vec{\nabla}B} \rangle = \frac{2k_B T}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}B}{B^3}$$

para cada tipo de partícula (electrones e iones), existiendo una corriente neta de portadores de carga no nula al sumarse sus contribuciones.

2.3.3. Gradiente de \vec{B} paralelo al propio \vec{B}

Seguimos considerando campos magnéticos estacionarios. Supongamos que tenemos una situación como la de la figura en la que existen dos regiones del espacio con campo magnético constante en dirección del eje Z separadas por una zona de transición donde el campo pasa de ser menos intenso a ser más intenso (campo variable espacialmente en su misma dirección). Las líneas discontinuas son las líneas de campo \vec{B}_z , más apretadas a la derecha que a la izquierda. Tenemos así el caso de existencia de gradiente de \vec{B} paralelo al propio \vec{B} (cambio de B_z con z).



$B_z = B_z(z) \Rightarrow \vec{\nabla}B \parallel \vec{B}$. Suponemos que la intensidad aumenta cuando z crece: a la derecha de z tenemos una mayor densidad de líneas de campo ($\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$).

Tenemos simetría de revolución en la que \vec{B} no tiene componente polar ($B_\theta = 0$). El dibujo representa un tubo de líneas de campo magnético (superficie que recoge las líneas de campo), siendo \vec{B} tangente a las líneas de campo en cada punto.

En la zona de transición de la figura (zona intermedia de transición o zona 2) el campo magnético tiene componentes z y r (la componente $B_\theta = 0$ por simetría): $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$. En esa zona de transición podemos encontrar una relación entre estas componentes dado que la divergencia de \vec{B} - que escribimos en cilíndricas - siempre es nula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}}_{=0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

integrando la ecuación:

$$r B_r = - \int_0^r r' \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dr' = - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{r=0},$$

donde hemos supuesto por simplicidad que $\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$ es aproximadamente constante y que no depende de r . Así resulta:

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Determinemos la fuerza de Lorentz actuando sobre las partículas gárgolas, $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$, $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$, de componentes cilíndricas:

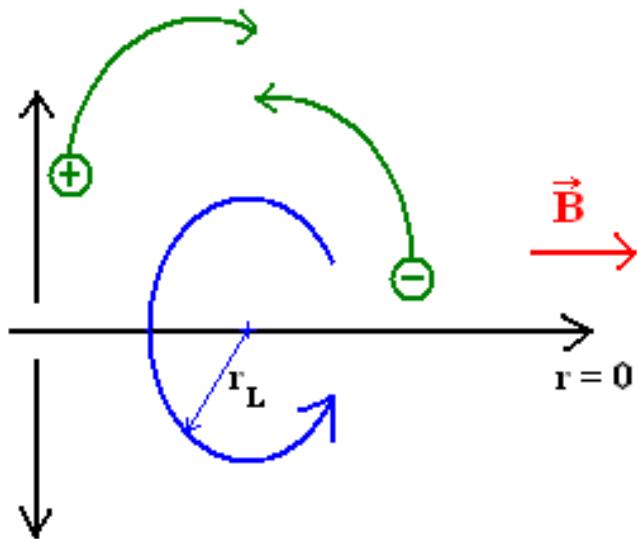
$$\left. \begin{aligned} F_r &= q \left(\underbrace{v_\theta B_z - v_z B_\theta}_{(1)} \right) \\ F_\theta &= q \left(\underbrace{v_z B_r - v_r B_z}_{(3)} - \underbrace{v_r B_\theta}_{(2)} \right) \\ F_z &= q \left(\underbrace{v_r B_\theta - v_\theta B_r}_{(4)} \right) \end{aligned} \right\}$$

- Componente de fuerza (1) → como si \vec{B} fuera uniforme
- Componente de fuerza (2) → como si \vec{B} fuera uniforme

Estas dos fuerzas son las únicas existentes en campo magnético uniforme, e imprimen a la partícula el movimiento ya conocido de giro ciclotrón a la frecuencia angular ω_c

- Componente de fuerza (3) → esta nueva componente tangencial de fuerza sobre la partícula se debe a la no uniformidad del campo \vec{B} y genera una velocidad de arrastre de los centros de giro que vale $\vec{v}_{arraste} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_\theta \times \vec{B}}{B^2}$, arrastre que hace que los centros de giro sigan las líneas de campo y cuyas componentes de velocidad se pueden determinar como ejercicio (dirección $-\vec{r}_0$ y $-\vec{k}$).

- Componente de fuerza (4) → esta también nueva componente axial de fuerza sobre la partícula se debe igualmente a la no uniformidad del campo \vec{B} y produce un importante efecto dinámico sobre su movimiento a lo largo de este eje. Su valor es $F_z = -qv_\theta B_r = \frac{1}{2}qrv_\theta \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$ y ejercerá un efecto de frenado sobre la partícula en ese eje.



Centremos nuestra atención en esta última nueva componente de la fuerza magnética cuya existencia se debe a la inhomogeneidad (o no uniformidad) de la componente z del campo \vec{B} en el eje Z . Las partículas positivas y negativas giran cada una según el comportamiento diamagnético para crear campos magnéticos que se opongan al aplicado.

Tenemos que $r \approx r_L$ y $v_\theta = \mp v_\perp$ durante un ciclo. La media de F_z en un ciclo es:

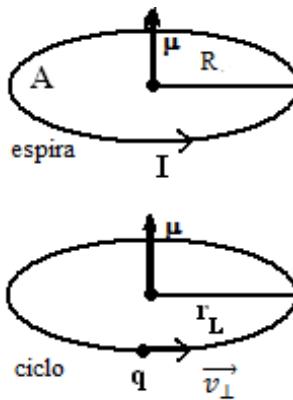
$$\bar{F}_z = \pm \frac{1}{2}|q|r_L(\mp v_\perp) \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2}|q|\frac{v_\perp^2}{\omega_c} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B_z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = -\frac{E_{c\perp}}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$\bar{F}_z = -\frac{E_{c\perp}}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}$: es una fuerza opuesta al sentido de crecimiento de B_z que intenta llevar a la partícula a una región donde B_z es menos intenso. Es decir, es una fuerza que frena el movimiento de las partículas en la dirección positiva del eje Z .

Definamos el momento magnético de las partículas en su giro en el ciclo de Larmor como:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \frac{E_{c\perp}}{B_z} = \frac{1}{2}|q|r_Lv_\perp$$

Esto es así ya que el movimiento de la partícula cargada durante el ciclo de Larmor genera una pequeña corriente eléctrica circular elemental similar a una espira circular de corriente, y la situación es:



Tanto en la espira de corriente elemental como en el ciclo de Larmor es $\mu = IA$:

$$\left. \begin{array}{l} A = \pi r_L^2 \\ I = \frac{e}{2\pi} \end{array} \right\} \mu = IA = \frac{e\omega_c \pi}{2\pi} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega_c^2} \right) = \frac{e}{2} \frac{v_\perp^2}{eB} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \frac{E_{c\perp}}{B}$$

Por tanto podemos escribir:

$\bar{F}_z = F_\parallel = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$: esta componente de la fuerza magnética se opone al sentido creciente del campo magnético (contraria al sentido del gradiente de campo magnético B_z) y tiende a dirigir a la partícula a zonas donde la intensidad de éste es menor con independencia del signo de su carga eléctrica.

En general tomaremos la dirección del campo como s , en lugar de z , por lo que la ecuación de movimiento de las partículas en la dirección del campo será:

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}; \quad v_\parallel = \frac{ds}{dt}$$

$$\left(m \frac{dv_\parallel}{dt} \right) v_\parallel = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv_\parallel^2)}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}.$$

Es como si la partícula al moverse pudiera ver un campo magnético variable con el tiempo, aunque \vec{B} es constante con t .

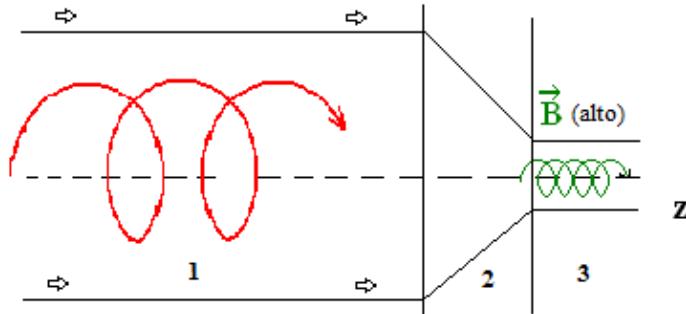
Aplicemos este resultado a la conservación de la energía cinética total de la partícula, que es constante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 \right) = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B \right) = 0$$

$$\frac{d \left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2 \right)}{dt} + \frac{d(\mu B)}{dt} = 0 \Rightarrow -\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d\mu}{dt} B + \mu \frac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \text{ es un invariante en el movimiento de la partícula.}$$

El movimiento de la partícula en las tres zonas puede representarse (por simplicidad sobre el eje Z donde $r = 0$) de la manera siguiente:



Como $\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B} = \frac{E_{c\perp}}{B_z} = \frac{1}{2}|q|r_Lv_{\perp}$, en la zona en la que B_z aumenta (zona 2 al pasar de la 1 a la 3), ω_c y v_{\perp} aumentan mientras que v_{\parallel} y r_L disminuyen, manteniéndose $\mu = cte$:

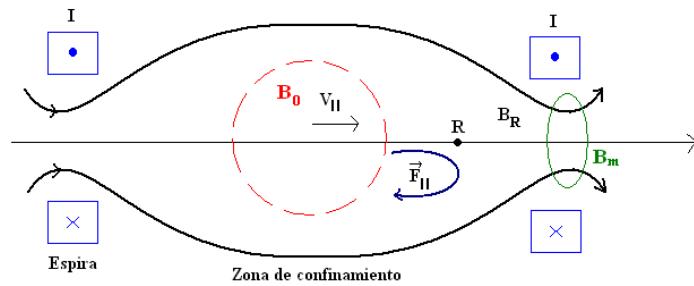
$$B_z \uparrow \Rightarrow \begin{cases} r_L \downarrow \quad \omega_c \uparrow \quad v_{\parallel} \downarrow \\ \mu = cte \quad \Rightarrow \quad v_{\perp} \uparrow \end{cases}$$

La invarianza del momento magnético μ que hemos visto (1^{er} Invariante Adiabático) es el fundamento de los *espejos magnéticos* en los que el movimiento de las partículas \parallel al campo magnético B_z se puede llegar a invertir por la existencia de un $\vec{\nabla}B \parallel \vec{B}$.

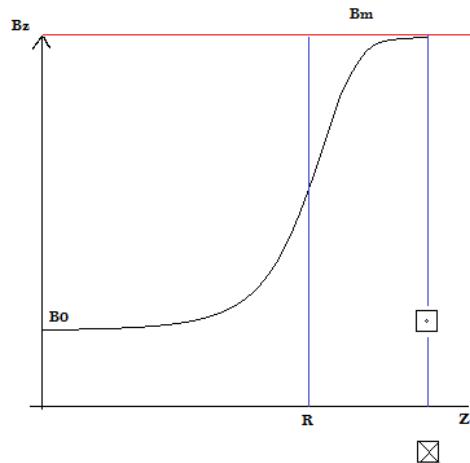
2.3.4. Espejos magnéticos

Cuando una partícula se desplaza de una zona de menor campo magnético a otra de mayor campo magnético, su componente v_{\perp} aumenta. La energía cinética total se mantiene constante, por lo que v_{\parallel} disminuye. Esto es lo que hemos visto antes con la fuerza F_{\parallel} que frena el movimiento paralelo a la partícula. Puede llegar un momento en el que B sea tan intenso que F_{\parallel} aumente tanto que haga que $v_{\parallel} = 0$. Esta fuerza frena totalmente a la partícula en esa dirección y se produce una condición de reflexión de la misma en sentido contrario al $\vec{\nabla}B$. El punto donde tiene lugar la reflexión de la partícula se denomina punto de retorno.

Los espejos magnéticos nos permiten confinar partículas cargadas, confinar plasmas mediante el empleo de gradientes de campos magnéticos. Para ello es necesario que haya al menos dos de estos espejos donde las partículas en su movimiento puedan reflejarse en direcciones contrarias de forma periódica. Esta configuración de campos magnéticos a veces se denomina botella magnética, y permite al menos parcialmente que las partículas cargadas se mantengan como encerradas en una zona del espacio.



R : Punto de retorno (donde se produce la reflexión)



B_m es el máximo valor del campo magnético conseguido en el diseño del espejo.

$R_m = \frac{B_m}{B_0}$ es la razón del espejo magnético.

Un par de espejos magnéticos, o botella magnética, confina tanto iones como electrones por igual ya que $F_{||}$ no depende del signo de la carga.

$v_{\perp} \uparrow \Rightarrow F_{||} \uparrow$ (buen confinamiento, las partículas se frenan eficazmente)

$F_{||} \propto v_{\perp}^2 \Rightarrow v_{\perp} \downarrow \Rightarrow F_{||} \downarrow$ (mal confinamiento, las partículas no se frenan bien)

Las partículas con menor velocidad transversal son difíciles de confinar por ser $F_{||}$ menor. En el caso extremo en que $v_{\perp} = 0$, la partícula escapa del confinamiento ($F_{||} = 0$).

Condiciones de la zona de confinamiento:

$$\left. \begin{array}{l} B = B_0 \Rightarrow v_{\perp 0}, v_{||0} \neq 0 \\ B = B_R \Rightarrow v_{||R} = 0, v_{\perp R} \text{ es máx.} \end{array} \right\}$$

(en R se anula $v_{||}$).

Imponemos en el punto de retorno R dos invariancias: la conservación del momento magnético de la partícula μ

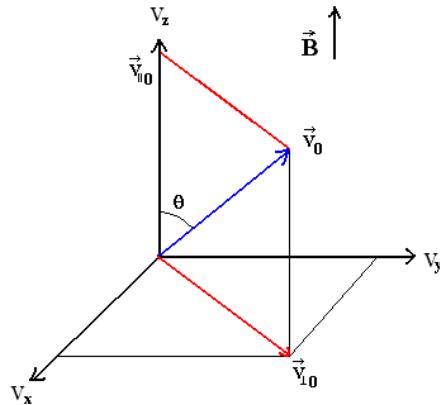
$$\mu_0 = \mu_R \Rightarrow \frac{1}{2}m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{1}{2}m \frac{v_{\perp R}^2}{B_R}$$

y la conservación de la energía cinética de la partícula E_c

$E_{cR} = E_{c0} \Rightarrow v_{\perp R}^2 + \underbrace{v_{\parallel R}^2}_{=0} = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 = v_0^2$. Llegamos a poder formular la condición de retorno, cumpliéndose que:

$$\frac{B_0}{B_R} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp R}^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}$$

Si representamos esto en el espacio de las velocidades de la partícula:



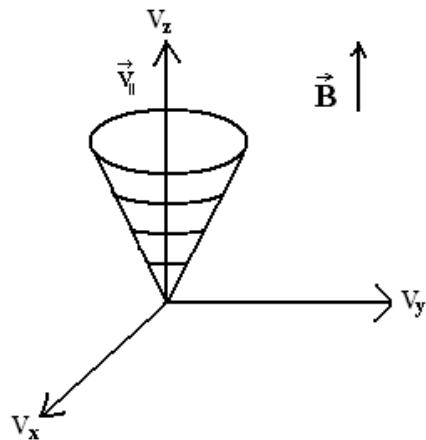
$$\sin \theta = \frac{v_{\perp 0}}{v_0} = \frac{v_{\perp 0}}{\sqrt{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2}}. \quad \text{La condición de retorno puede representarse como:}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{B_0}{B_R}.$$

A medida que $v_{\perp 0} \downarrow \rightarrow \theta \downarrow \rightarrow B_R \uparrow$: haría falta en R un campo B_R cada vez mayor pero este valor está limitado:

$$\text{para } (B_R)_{max} = B_m \Rightarrow \begin{cases} \theta_{min} \\ v_{\perp 0, min} \end{cases}$$

El θ_{min} define un cono de velocidades que se denomina *cono de pérdidas*. Las partículas del interior del cono de pérdidas tienen un $\theta < \theta_{min}$ por lo que no cumplen la condición de confinamiento (no existe para ellas punto de retorno R o condición de reflexión) y pueden escapar del espejo magnético moviéndose en la dirección z positiva: no son reflejadas y se pierden del plasma.



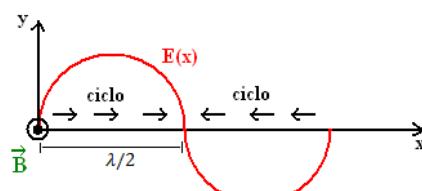
$$\left(\frac{v_{\perp 0}^2}{v_o^2} \right)_{min} = \sin^2 \theta_{min} = \frac{B_0}{B_m} = \frac{1}{R_m}$$

Estas partículas que escapan son las que tienen menor velocidad transversal y esto hace que el plasma tienda a adquirir una función de distribución de velocidades anisótropa en el espacio de velocidades para las partículas que permanecen confinadas.

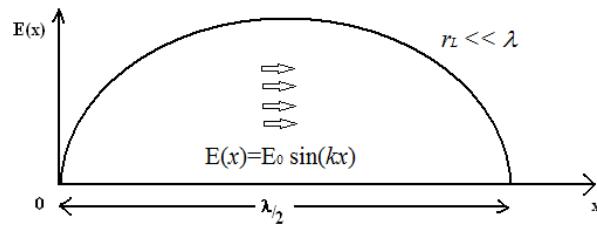
El confinamiento y la fuerza de confinamiento no dependen ni de la masa ni de la carga de la partícula, por lo que obtenemos los mismos conos de pérdida para electrones y para iones. Sin embargo, y aunque hemos despreciado este efecto en primera aproximación, si consideramos muchas partículas y tomásemos en consideración sus débiles y escasas colisiones, éstas cambian las orientaciones de las velocidades y por tanto los valores de los ángulos θ respecto del campo magnético. Las colisiones, por escasas que puedan ser, hacen que las partículas entren en el cono de pérdidas y así se mantenga una fuga neta de partículas. Los electrones son las partículas que tienen una mayor frecuencia de colisión por lo que son los electrones los que entran más fácilmente en el cono de pérdidas, y por tanto los que más se escapan en el confinamiento. De esta forma, el plasma se iría quedando cargado positivamente apareciendo un campo eléctrico de separación espacial de carga que en alguna medida acabaría frenando esta pérdida de electrones, de manera que quedaría restituida la neutralidad del plasma.

2.3.5. Campo \vec{E} inhomogéneo

Seguimos teniendo un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ uniforme en el eje Z y además un campo eléctrico perpendicular al campo magnético. Este campo eléctrico no cambia en el tiempo pero es inhomogéneo en el eje X y al que en particular daremos la forma $\vec{E} = E_0 \sin(kx)\hat{i}$: la inhomogeneidad del campo eléctrico es en el eje X con la posición x . Por tanto, se trata de gradiente de \vec{E} paralelo al propio \vec{E} . En general será $\vec{E} = \vec{E}(x)$, sin necesidad de especificar su dependencia analítica con x .

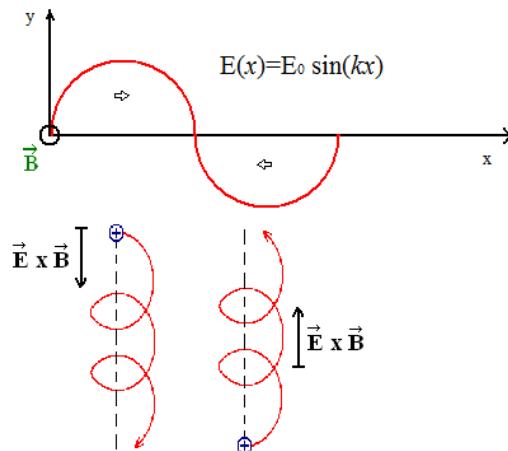


Suponemos que durante un ciclo de Larmor el campo eléctrico que ve la partícula varía muy poco. Tomando el parámetro λ de variación espacial del campo eléctrico, podemos representar la suposición que hacemos como:



$$\frac{r_L}{\lambda} \ll 1; \quad r_L \frac{k}{2\pi} \ll 1.$$

Tendremos un arrastre $\vec{E} \times \vec{B}$



La ecuación de movimiento queda:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Tenemos las ecuaciones escalares siguientes, una para cada eje:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m}(v_y B + E) = \pm \omega_c v_y \pm \frac{\omega_c}{B} E \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m}(v_x B) = \mp \omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \Rightarrow (E_z = 0) \text{movimiento uniforme} \end{aligned} \right\}$$

Con las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \pm \omega_c [\mp \omega_c v_x] \pm \frac{\omega_c}{B} \frac{dE}{dt} = -\omega_c^2 v_x \pm \frac{\omega_c}{B} \frac{dE}{dt}$$

E no depende de t , pero la partícula en su movimiento ve un campo eléctrico distinto en cada instante.

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = \mp\omega_c \left[\pm\omega_c v_y \pm \frac{\omega_c}{B} E \right] = -\omega_c^2 v_y - \frac{\omega_c^2}{B} E.$$

Las ecuaciones son análogas a las del campo uniforme. Se cumple que la velocidad en promedio tiene dirección \vec{j} ,

$$\begin{cases} \bar{v}_x = 0 \\ \bar{v}_y \neq 0 \end{cases}$$

y $\bar{v}_y(x)$ depende de la posición de la partícula.

Como la posición de la partícula es la misma a lo largo de un ciclo (se va alternando pero va tomando siempre los mismos valores), \bar{v}_y se va a mantener constante para cada ciclo. Por cumplirse esto, $\bar{v}_y = 0$. La velocidad en promedio queda:

$$-\omega_c^2 \bar{v}_y - \frac{\omega_c^2}{B} \bar{E} = 0 \quad (\text{sale de tomar } \frac{d^2\bar{v}_y}{dt^2} = 0)$$

$$\bar{v}_y = -\frac{\bar{E}}{B} = -\frac{1}{B} E_0 \overline{\sin(kx)} = -\frac{E_0}{B} \overline{\sin(kx)}.$$

Vamos a seguir aceptando la solución del caso del campo eléctrico uniforme pero la no uniformidad del campo eléctrico la incluiremos como una perturbación de la solución del caso uniforme; esta idea la hemos utilizado ya en casos anteriores de débil inhomogeneidad. La solución del caso uniforme es:

$$x = x_0 + r_L \sin(\omega_c t + \delta)$$

Tenemos que calcular la media durante un ciclo de Larmor de la función

$$\sin \{k(x_0 + r_L \sin(\omega_c t + \delta))\} = \sin \left\{ \underbrace{kx_0}_a + \underbrace{kr_L \sin(\omega_c t + \delta)}_b \right\} = \sin(a + b).$$

Así,

$$\sin \{kx_0 + kr_L \sin(\omega_c t + \delta)\} = \sin(kx_0) \cos(kr_L \sin(\omega_c t + \delta)) + \cos(kx_0) \sin(kr_L \sin(\omega_c t + \delta)),$$

y usando los desarrollos del seno y del coseno siguientes con $\alpha = kr_L \sin(\omega_c t + \delta)$:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots,$$

sustituimos y nos quedamos sólo con hasta los términos cuadráticos en los desarrollos, resultando:

$$\sin [kx_0 + kr_L \sin (\omega_c t + \delta)] \simeq \sin (kx_0) \left[1 - \frac{1}{2} k^2 r_L^2 \sin^2 (\omega_c t + \delta) \right] + \cos (kx_0) [kr_L \sin (\omega_c t + \delta)].$$

Haciendo ahora el promedio temporal de esta función sobre un ciclo de Larmor tenemos:

$$\overline{\sin (kx)} \simeq \sin (kx_0) \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2 \right),$$

y la velocidad media de arrastre de los centro de giro buscada queda:

$$\bar{v}_y \simeq -\frac{E_0}{B} \sin (kx_0) \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2 \right) = -\frac{E(x_0)}{B} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2 \right)$$

siendo $E_0 \sin (kx_0) = E(x_0)$ el campo eléctrico en el centro de giro de posición x_0 .

Esta resulta ser una nueva velocidad de arrastre de los centros de giro consecuencia de la inhomogeneidad de \vec{E} . Por el hecho de que el campo eléctrico no es uniforme (inhomogéneo) tenemos un arrastre por campo eléctrico con un factor de corrección respecto del caso de campo eléctrico uniforme (homogéneo):

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2 \right)$$

La corrección resulta diferente en valor para cada tipo de partícula (iones y electrones) ya que tienen distinto radio de Larmor r_L , aunque no depende del signo de la carga eléctrica.

Dicha corrección es de segundo orden en la inhomogeneidad, el mismo orden en la aproximación del desarrollo que hemos hecho. En la práctica, esta corrección no modifica sustancialmente la velocidad de arrastre $\vec{E} \times \vec{B}$ de las partículas al ser $k^2 r_L^2 \ll 1$. Puede demostrarse que para este caso de gradiente de \vec{E} paralelo al propio \vec{E} la velocidad de arrastre de las partículas por campo \vec{E} inhomogéneo toma la forma general:

$$\vec{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2 \right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

2.4. *Movimientos en campos variables con el tiempo.*

Analizamos por último el movimiento de partículas cargadas en el seno de campos magnéticos y eléctricos dependientes del tiempo. Como es usual, supondremos dependencia armónica de los campos variables con t ($\approx \cos \omega t$) si bien aceptaremos que esta variación es suficientemente lenta imponiendo que $\omega \ll \omega_c$.

2.4.1. Campo \vec{B} variable con el tiempo (lentamente)

Supongamos que \vec{B} es espacialmente homogéneo aunque de lenta variación temporal armónica. Sólo tenemos este campo magnético, y supongamos que la frecuencia de variación del campo ω es $\ll \omega_c$, lo que equivale a aceptar que en un ciclo de Larmor el campo magnético no varía prácticamente nada (cuasi-estático).

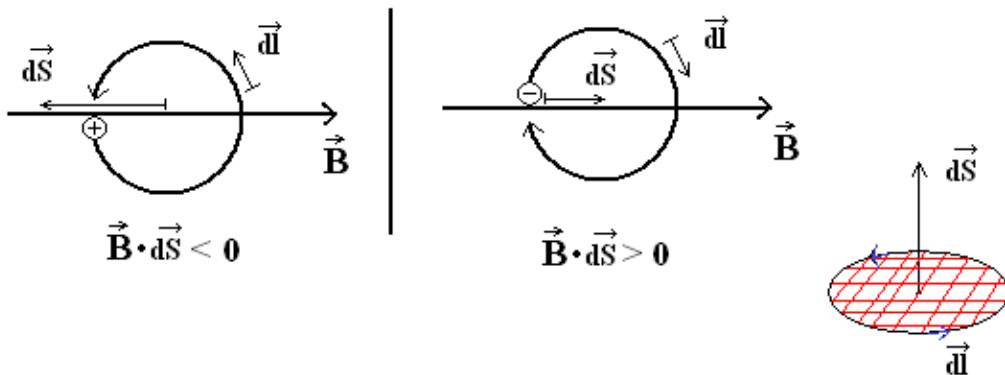
Ya sabemos que un campo magnético estacionario no aporta energía cinética a las partículas. Sin embargo, un campo magnético variable con el tiempo se convierte en una fuente de campo eléctrico y este campo eléctrico sí que puede modificar la energía cinética de las partículas al realizar un trabajo eléctrico sobre las mismas ya que las acelera transversalmente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Podemos aplicar el teorema de Stokes a un ciclo de Larmor C_{Larmor} :

$$\oint_{C_{Larmor}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Tenemos:



Vamos a considerar por simplicidad que $v_{||} \ll v_{\perp}$ por lo que las trayectorias de los ciclos de Larmor son casi cerradas (las partículas describen trayectorias que son hélices con un parámetro o constante de paso pequeño).

$$v_{||} \ll v_{\perp} = \frac{dl}{dt}$$

Nos interesa la componente transversal de la velocidad ya que es en la dirección transversal donde hay modificación de la energía cinética de las partículas. Para determinar dicho cambio, multiplicando la ecuación de movimiento escalarmente por \vec{v}_{\perp} , queda:

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} \cdot \vec{v}_{\perp} = q(\vec{E} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_{\perp} \Rightarrow \frac{d(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2)}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}_{\perp}.$$

Luego la variación media de la energía cinética de las partículas en un ciclo de Larmor, durante un periodo ciclotrón τ_c es,

$$\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c} = \int_0^{\tau_c} q\vec{E} \cdot \vec{v}_{\perp} dt = \oint_{C_{Larmor}} q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = q \left(-\frac{\partial}{\partial t} \int_{S=\pi r_L^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

que siempre es > 0 : en efecto, si q es negativa (electrones de carga $-e$), $d\vec{S} > 0$ paralela al campo \vec{B} y el cambio de energía cinética es positivo; si q es positiva (iones de

carga e), $d\vec{S} < 0$ contraparalela al campo \vec{B} y el cambio de energía cinética también es positivo.

$\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c} > 0$ con independencia del signo de la carga. También podemos escribir este cambio como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c} &= |q| \frac{\partial B}{\partial t} \pi r_L^2 = |q| \frac{\partial B}{\partial t} \pi \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{m}{|q|B} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_\perp^2}_{\mu} \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_c}}_{\tau_c} \frac{\partial B}{\partial t} = \mu \tau_c \frac{\partial B}{\partial t} = \mu \Delta t|_{ciclo} \frac{\partial B}{\partial t} = \mu \Delta B|_{ciclo} = \mu \Delta B|_{\tau_c}\end{aligned}$$

Queda finalmente que $\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c} = \mu \Delta(B)_{\tau_c}$: cambio de la energía cinética de la partícula durante un ciclo de Larmor en función del cambio temporal de B un ciclo de Larmor.

Durante uno sólo de estos ciclos de Larmor la variación es pequeña, pero después de bastantes ciclos la variación neta puede ser considerable. Podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c} = \frac{E_{c\perp}}{B} \Delta(B)_{\tau_c} \Rightarrow \frac{\Delta(E_{c\perp})_{\tau_c}}{E_{c\perp}} = \frac{\Delta(B)_{\tau_c}}{B}$$

Tanto para partículas positivas como negativas, un aumento de B supone un aumento de la energía cinética transversal. En general, se cumple que

$$\Delta(E_{c\perp}) = \Delta(\mu B) = \Delta(\mu)B + \mu \Delta(B)$$

En un ciclo de Larmor $\Delta(\mu) = 0$, y el momento magnético de la partícula permanece constante ya que μ es un invariante (prácticamente constante dentro de nuestra aproximación).

Otro resultado interesante puede obtenerse del estudio de flujo del campo magnético sobre la trayectoria de un ciclo de Larmor. Estudiamos el flujo en valor absoluto a través de una órbita de Larmor, y vemos que es:

$$|\phi| = \int_{S=\pi r_L^2} B dS = B \pi r_L^2 = \pi B \frac{v_\perp^2}{q^2 B^2} m^2 = \frac{2\pi m}{q^2} \underbrace{\frac{1}{2}mv_\perp^2}_{\mu} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{invariante:}$$

el flujo del campo magnético se mantiene invariante a través de una órbita de Larmor, igual que μ .

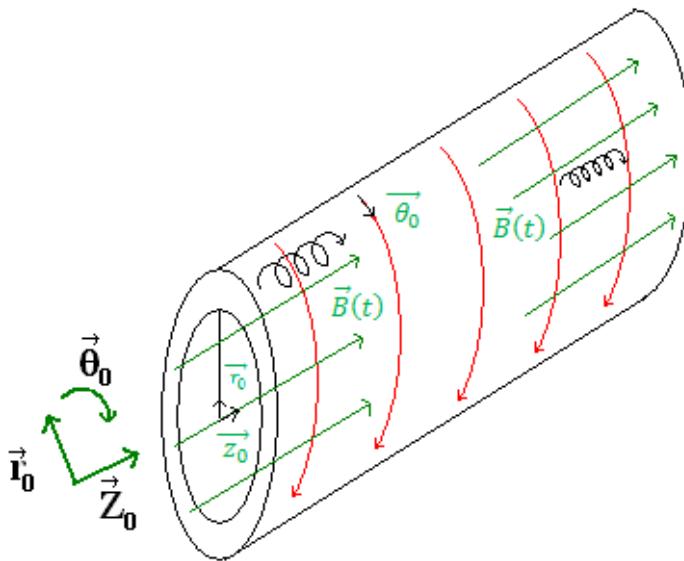
Tenemos que si $B(t)$ crece, entonces:

- r_L disminuye y $\phi = \text{invariante}$

- $E_{c\perp}$ aumenta y $\mu = \text{invariante}$

ocurriendo lo contrario si $B(t)$ decrece. Estos dos invariantes del movimiento cuasiperiódico de las partículas transversal al campo magnético en los ciclos de Larmor están relacionados con el 1^{er} Invariante Adiabático (I.A.) de dicho movimiento. Tenemos dos invariantes en el movimiento de las partículas durante la variación temporal del campo magnético con $\omega \ll \omega_c$, aunque realmente son el mismo.

Dentro de este apartado estudiaremos como aplicación la *compresión adiabática*. Vamos a hacer un análisis de las consecuencias de la variación temporal de $B(t)$ para el plasma en su conjunto considerando una configuración particular de plasma para simetría cilíndrica (plasma en el interior de un solenoide por ejemplo) y una dependencia temporal de $B(t)$ armónica de frecuencia ω mucho menor que ω_c : $B(t) = B_0 \cos \omega t$ con $\omega \ll \omega_c$.



Durante medio ciclo, $B(t)$ es creciente lo que hará que r_L disminuya y $E_{c\perp}$ aumente. El campo eléctrico que aparece a una distancia radial r debido al cambio temporal de \vec{B} por el teorema de Stokes es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$E_\theta(r) 2\pi r = -\frac{\partial B_z(r)}{\partial t} \pi r^2 \Rightarrow E_\theta(r) = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_z(r)}{\partial t}.$$

Este campo eléctrico nos da un arrastre por campo \vec{E} de los centros de giro en sentido radial,

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \text{ cuya componente radial es } v_r(r) = \frac{dr}{dt} = \frac{E_\theta B_z}{B^2} = -\frac{1}{2} \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Como vemos, $v_r < 0$ independientemente del tipo de partícula si $\partial B / \partial t > 0$. Los centros de giro de las partículas siguen a las líneas de campo magnético que se van

estrechando y se van acercando todos ellos al eje del cilindro de plasma. El plasma en su conjunto parece comprimirse radialmente durante el medio ciclo de \vec{B} creciente con t .

Calculamos también la variación temporal del flujo magnético ϕ asociada a esta compresión adiabática:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(B\pi r^2)}{dt} = 2\pi r B \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = 2\pi r B \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \right) + \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = 0,$$

y vemos que ϕ no varía. Aumentando el campo magnético en la primera parte del ciclo aumentamos la energía cinética transversal mientras el plasma se comprime. En la segunda parte del ciclo de cambio temporal de \vec{B} , tendremos una disminución del campo magnético y por tanto de la energía cinética transversal que vuelve a su valor original (descompresión adiabática). Pero consideremos ahora un efecto externo a esta dinámica que es de nuevo la posible existencia de colisiones entre las partículas, colisiones que deberán ser débiles y escasas. Debido a estas posibles colisiones, parte de la componente transversal de la velocidad puede pasar a paralela, tanto más eficazmente en el tiempo cuanto mayor sea la frecuencia de colisión. Esto supone un trasvase de energía cinética de las partículas de transversal a paralela por lo que, después de un ciclo completo de cambio temporal de \vec{B} , devolvemos en promedio menos energía cinética transversal a la situación original dado que ésta ha estado disminuyendo al pasar parcialmente a energía cinética paralela por colisiones. Y este canal de transferencia energética supone un mecanismo de calentamiento del plasma en su conjunto, un aumento de su temperatura debido al campo magnético lentamente oscilante en el tiempo y a las posibles colisiones.

En definitiva, tenemos una compresión periódica como consecuencia de un cambio temporal periódico para $B(t) = B_0 \cos \omega t$ con $\omega \ll \omega_c$:

- 1º parte del ciclo: $B(t) \uparrow \Rightarrow E_{c\perp} \uparrow \Rightarrow v_\perp \uparrow$
- 2º parte del ciclo: $B(t) \downarrow \Rightarrow E_{c\perp} \downarrow \Rightarrow v_\perp \downarrow$

Debido a las posibles colisiones, por débiles y escasas que sean, este balance en promedio temporal sobre un período de cambio de \vec{B} no es nulo y hay un aumento de energía cinética de las partículas del plasma en su conjunto, por lo que éste acabaría calentándose.

2.4.2. Campo \vec{E} variable con el tiempo (lentamente)

Suponemos un campo magnético \vec{B} uniforme y constante con el tiempo en dirección de z y además un campo eléctrico \vec{E} uniforme en el espacio pero variable en el tiempo de forma armónica, $E_0 \cos \omega t$ con $\omega \ll \omega_c$. En general, este campo eléctrico tiene una componente \perp a \vec{B} y otra \parallel (componente en la dirección de \vec{k}) que originaría un movimiento uniforme acelerado que no consideraremos para simplificar. Así nos quedamos sólo con la componente del campo eléctrico \perp a \vec{B} oscilante en el tiempo lentamente en la dirección de \vec{i} : $E_x = E_0 \cos \omega t$.

Planteemos la ecuación de movimiento de las partículas en el seno de estos campos transversales:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} E_x + \frac{q}{m} B v_y = \pm \frac{\omega_c}{B} E_x(t) \pm \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} B v_x = \mp \omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

Nos centramos de nuevo en la parte transversal a \vec{B} de su movimiento, y derivamos las ecuaciones en los ejes X e Y para desacoplarlas:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \pm \frac{\omega_c}{B} \frac{dE_x}{dt} \pm \omega_c \frac{dv_y}{dt} = \pm \frac{\omega_c}{B} \frac{dE_x}{dt} - \omega_c^2 v_x$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \mp \omega_c \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\omega_c^2}{B} E_x - \omega_c^2 v_y$$

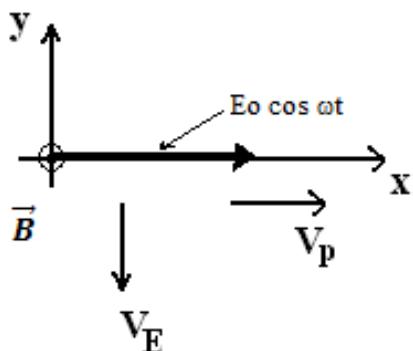
$$\frac{dE_x}{dt} = \dot{E}_x = -\omega E_0 \sin(\omega t)$$

Reorganizando los términos:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 \left(v_x \underbrace{\mp \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_x}{dt}}_{(a)} \right), (a) = -v_p$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 (v_y - v_E),$$

con $v_E = -\frac{E_x(t)}{B}$. En caso que no tuviéramos dependencia temporal de E_x , el término (a) sería 0.



En la dirección y existe una velocidad de arrastre por campo eléctrico v_E de los centros de giro de los ciclos de Larmor como si éste fuera estacionario, pero además estos centros de giro se verán también arrastrados en la dirección x debido al cambio temporal de $E_x(t)$, con una velocidad de arrastre v_p (desplazamiento de los centros de giro en el eje X) que denominamos de *polarización*.

$$v_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_x}{dt}$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega_c^2(v_x - v_p)(1)$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega_c^2(v_y - v_E)(2)$$

(1) y (2) son las ecuaciones de movimiento de los centros de giro sometidos a los dos arrastres distintos y perpendiculares pero asociados al campo eléctrico: $\vec{v}_p(\parallel \vec{i})$ y $\vec{v}_E(\parallel \vec{j})$.

Como hemos estudiado en situaciones anteriores similares, aceptaremos que tenemos unas componentes de velocidad para las partículas en la dirección x e y como soluciones a las ecuaciones diferenciales anteriores del tipo:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) + v_p$$

$$v_y = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta) + v_E,$$

que veremos ahora que son aceptables para las mismas para un tiempo del orden de τ_c (periodo de ciclotrón) en el que $E(t)$ no varía prácticamente ($\omega \ll \omega_c$). Para la componente x de la velocidad es:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) + \frac{d^2v_p}{dt^2}$$

$\frac{d^2v_p}{dt^2} = -\omega^2 v_p$, siendo ω la lenta frecuencia de variación armónica del campo \vec{E} con t , por lo que

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega_c^2(v_x - v_p) + (-\omega^2 v_p) = -\omega_c^2 \left(v_x - v_p + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} v_p \right)$$

De forma análoga, para la componente y de la velocidad es:

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 \left(v_y - v_E + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} v_E \right)$$

Como vemos, estas ecuaciones son las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente siempre que $\omega \ll \omega_c$; y esto quiere decir que el campo eléctrico apenas varía durante un ciclo de Larmor.

El arrastre de polarización de velocidad v_p depende del tipo de partículas, es decir, las de distinto signo serán opuestas. Así que se formarán corrientes de distinto signo que se desplazarán en sentidos opuestos, proporcionales a la variación temporal de \vec{E} , y que darán lugar a una corriente neta no nula, corriente alterna a la frecuencia ω . Hay analogía con los dieléctricos para los que $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Por ello, a este fenómeno se llama arrastre de polarización y a esta v_p llamamos velocidad de arrastre de polarización.

$$\vec{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{m}{qB^2} \frac{d\vec{E}}{dt} = -\frac{m\omega \vec{E}_0}{qB^2} \sin \omega t$$

Bajo este movimiento de cargas, la corriente de polarización podemos expresarla en función de los portadores. Consideramos que $Z = 1$ (átomos simplemente ionizados) y que $n_e = n_i$. Tenemos entonces que:

$$\vec{j}_p = en_i \vec{v}_{p_i} + (-e)n_e \vec{v}_{p_e} = n_e \left(\frac{m_i + m_e}{B^2} \right) \frac{d\vec{E}}{dt} = -n_e \frac{m_i + m_e}{B^2} \omega \vec{E}_0 \sin \omega t$$

\vec{j}_p variará de forma armónica con el tiempo como ocurre con el campo eléctrico aunque con un desfase de $\pi/2$. También $\vec{j}_p \approx \vec{j}_{p_i}$ ya que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones.

Estos resultados nos van a permitir calcular algunas propiedades electrodinámicas importantes del plasma considerado como conjunto de estas partículas independientes: la conductividad eléctrica σ y la permitividad eléctrica del plasma $\epsilon \perp$ al campo \vec{B} con la aproximación $\omega \ll \omega_c$ (para campos de baja frecuencia). Así, el rotacional de \vec{B} dependerá de las corrientes exteriores al medio que estamos estudiando más la variación temporal del campo eléctrico.

Determinemos en primer lugar la conductividad σ a partir de la ley de Ohm que relaciona la densidad de corriente de polarización anterior con el campo eléctrico aplicada que aparece en la última expresión sólo que utilizando notación compleja que tenga en cuenta la amplitud y la fase de los campos ($E(t) \propto e^{i\omega t}$)

$$\vec{j}_p = en_i \vec{v}_{p_i} + (-e)n_e \vec{v}_{p_e} = n_e \left(\frac{m_i + m_e}{B^2} \right) \frac{d\vec{E}}{dt} = \underbrace{n_e \left(\frac{m_i + m_e}{B^2} \right) i\omega}_{\sigma} \vec{E} = \sigma \vec{E},$$

apareciendo así una conductividad eléctrica imaginaria pura que le confiere al plasma carácter de medio sin pérdidas frente a esta conducción: $\sigma = i\omega n_e \left(\frac{m_i + m_e}{B^2} \right)$.

Podemos ahora determinar la permitividad eléctrica del plasma para lo cual escribimos el rotacional de \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{ext} + \epsilon \dot{\vec{E}})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{ext} + \vec{j}_p + \epsilon_0 \dot{\vec{E}})$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ \vec{j}_p &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

Tenemos:

$$\varepsilon \dot{\vec{E}} = \vec{j}_p + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \underbrace{\left(n_e \frac{m_i + m_e}{B^2} + \varepsilon_0 \right)}_{\varepsilon} \dot{\vec{E}}$$

$\varepsilon = n_e \frac{m_i + m_e}{B^2} + \varepsilon_0 = \varepsilon_{\perp}$: permitividad eléctrica transversal, ya que existe anisotropía en el espacio, que es real pura.

La anisotropía en el espacio será debido a que unas direcciones estarán beneficiadas y otras no. La constante dieléctrica la podemos poner en función de la frecuencia iónica del plasma y la frecuencia ciclotrónica de los iones. Como $m_i \gg m_e$,

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 \left(1 + n_i \frac{m_i + m_e}{B^2 \varepsilon_0} \right) \simeq \varepsilon_0 \left(1 + n_i \frac{m_i}{\varepsilon_0 B^2} \right); \begin{cases} \omega_{p_i}^2 = \frac{n_i e^2}{\varepsilon m_i} \\ \omega_{c_i}^2 = \frac{e^2 B^2}{m_i^2} \end{cases}$$

Introduciendo estas frecuencias características obtenemos:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{c_i}^2} \right),$$

por lo que cabe identificar la susceptibilidad eléctrica $\chi_e = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{c_i}^2}$. Puede demostrarse que $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0$.

Todos estos resultados son válidos para variaciones lentas del campo eléctrico con el tiempo y son coherentes con la relación general existente entre σ y ε en presencia de campos electromagnéticos armónicos $\varepsilon = \varepsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega}$ como es fácil de comprobar.

Comparando el arrastre de polarización con el arrastre $\vec{E} \times \vec{B}$, en módulo tenemos:

$$\omega \ll \omega_c \Rightarrow |v_p| \ll |v_E| :$$

el arrastre o deriva por campo se realiza a mucha mayor velocidad que el arrastre o deriva de polarización, si bien el más rápido no genera corriente neta y el más lento sí.

2.5. Invariantes adiabáticos.

Cuando tenemos un movimiento periódico, descrito en Mecánica por una coordenada generalizada (q) y su momento generalizado conjugado (p), y hacemos la integral de acción de ambas coordenadas generalizadas conjugadas nos queda una constante de movimiento:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{ciclo} pdq \equiv \text{cte de movimiento}$$

Cuando no tenemos un movimiento estrictamente periódico sino cuasiperiódico, la integral de acción no es estrictamente una constante de movimiento pero en primera aproximación (y salvo pequeñas perturbaciones) es prácticamente constante:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{ciclo} pdq = \text{invariante adiabático de movimiento}$$

Las constantes de movimiento nos dan información o facilidades para analizar propiedades de los sistemas mecánicos. Igualmente pasa con los invariantes adiabáticos pero sólo en primeras aproximaciones.

En el movimiento general del plasma vamos a tener distintos movimientos periódicos. Si tenemos algunas pequeñas perturbaciones durante estos movimientos periódicos, tendremos movimientos cuasiperiódicos y podremos hablar de los invariantes adiabáticos asociados a los mismos.

Tenemos 3 invariantes:

a) Primer invariante: J_1

Está asociado al momento magnético μ de la partícula en su giro ciclotrón, que permanece casi constante con pequeñas variaciones espaciales y/o temporales. Los ciclos de Larmor no tienen por qué ser cerrados, debido al movimiento de las partículas y/o a las perturbaciones temporales o espaciales de \vec{E} o \vec{B} . Pero aunque las partículas no vuelvan a su punto de partida después de cada ciclo de Larmor, sí mantienen un comportamiento cuasiperiódico.

Movimiento generalizado:

$$\left. \begin{array}{l} dq = d\theta \\ p = mr_L v_\perp \end{array} \right\} \text{Primer invariante adiabático (I.A.) asociado : } J_1$$

$$1^{\text{er}} \text{ I.A.} \equiv J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ciclo}} pdq = \frac{1}{2\pi} \oint mr_L v_\perp d\theta = r_L m v_\perp.$$

Podemos expresar también el primer invariante adiabático en función de sólo r_L o sólo v_\perp , aunque ambas expresiones son equivalentes:

$$\bullet (v_\perp) \Rightarrow J_1 = \frac{mv_\perp^2}{\omega_c} = 2 \frac{m}{|q|} \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = 2 \frac{m}{|q|} \frac{E_{c\perp}}{B} = 2 \frac{m}{|q|} \mu$$

$J_1 = 2 \frac{m}{|q|} \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \frac{|q|}{m} J_1$ (invariante adiabático: momento dipolar magnético de la partícula en el ciclo de Larmor)

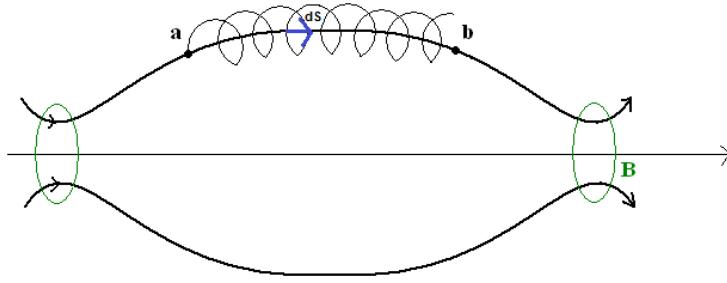
$$\bullet (r_L) \Rightarrow J_1 = m \frac{|q|B}{m} r_L^2 = \frac{|q|}{\pi} \underbrace{\pi r_L^2 B}_{\phi} = \frac{|q|}{\pi} \phi$$

$\phi = \frac{\pi}{|q|} J_1$ (invariante adiabático: flujo magnético a través de la superficie barrida por ciclo de Larmor que es πr_L^2)

$$\text{de donde se obtiene que } \phi = \frac{2\pi m}{q^2} \mu.$$

b) Segundo invariante: J_2

Está asociado al movimiento periódico que puede darse cuando una partícula está atrapada entre espejos magnéticos.



Tenemos dos puntos de retorno en a y b , estando la partícula confinada entre espejos magnéticos.

Esta ida y vuelta de la partícula entre a y b nos da un movimiento cuasiperiódico, de cuasiperíodo τ_J , dándonos otro invariante adiabático llamado invariante longitudinal J_2 .

Movimiento generalizado:

$$\left. \begin{array}{l} p = mv_{\parallel} \\ dq = ds_{\parallel} \end{array} \right\} \text{Segundo invariante adiabático asociado : } J_2$$

$$2^0 I.A. \equiv J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_{ciclo} pdq = \frac{1}{2\pi} \oint_{a,b,a} mv_{\parallel} ds_{\parallel}$$

ds_{\parallel} es el diferencial de desplazamiento a lo largo de la trayectoria cuasiperiódica entre dos puntos de retorno simétricos $a \rightarrow b \rightarrow a$.

Si consideramos la masa constante y definimos este movimiento para un semiperíodo $\frac{\tau_J}{2}$, tenemos:

$$J_2 = \frac{2m}{2\pi} \int_a^b v_{\parallel} ds_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int_a^b mv_{\parallel} v_{\parallel} dt:$$

durante este movimiento se van a conservar algunas magnitudes asociadas al movimiento de ida y vuelta de la partícula.

Sabemos que su energía cinética $E_c = E_{c\parallel} + E_{c\perp} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B$, de donde podemos despejar v_{\parallel} :

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_c - \mu B)}$$

Llevando este valor a la expresión anterior de J_2 , queda

$$J_2 = \frac{m}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{2}{m}(E_c - \mu B)} ds_{\parallel}$$

Supongamos que prácticamente en toda la región del arco $a \rightarrow b$ por la que se mueven las partículas el campo magnético es homogéneo \vec{B}_0 , y sólo en regiones muy pequeñas, cercanas a los puntos de retorno a y b , toma valores mucho mayores como para que se dé la condición de retorno (reflexión magnética). La integral J_2 es simplemente

$$J_2 \cong \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{2}{m}(E_c - \mu B_0)} L$$

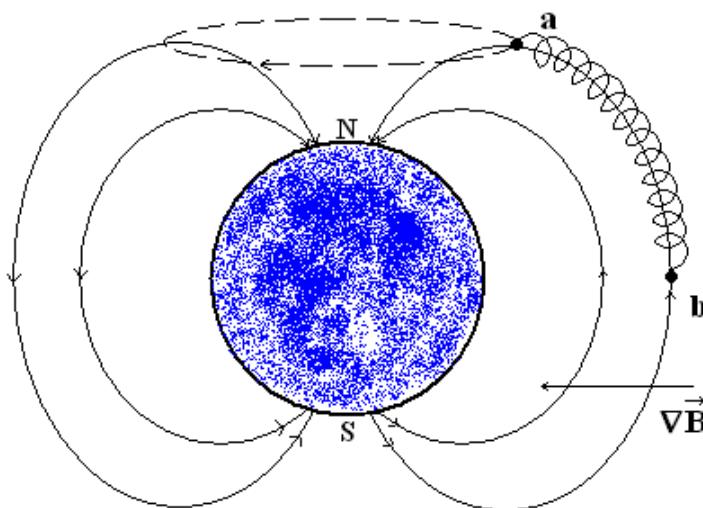
donde L es el arco $b - a$. Consideraremos ahora que L varía lentamente en el tiempo, por lo que también variará E_c . Sabiendo que tanto μ como J_2 se conservan (invariantes), de $dJ_2/dt = 0$ obtenemos

$$L \frac{dE_c}{dt} = -2(E_c - \mu B_0) \frac{dL}{dt},$$

que podemos integrar para obtener

$$L^2(E_c - \mu B_0) = L_0^2(E_{c0} - \mu B_0).$$

Esta ecuación nos dice que la energía cinética de las partículas atrapadas en el movimiento cuasiperiódico aumenta relativamente rápido cuando disminuye L . Esto es también lo que ocurre con el confinamiento de partículas cargadas en un campo magnético planetario.



Las líneas de campo no tienen por qué ser simétricas ya que por el viento solar existe radiación (ésta será nuestra perturbación).

Además existen puntos de retorno a y b distintos por el distinto valor del campo magnético, es decir, las partículas están confinadas para un valor dado del campo magnético.

Ocurre también que tenemos un gradiente de \vec{B} ($\vec{\nabla}B$), de manera que la partícula va a tener también un movimiento de precesión. Este movimiento de precesión es también un movimiento cuasi-periódico, y lo que ocurre es que el punto a y b pueden estar cambiando la longitud. El mecanismo descrito en el párrafo anterior de cambio en la energía cinética de las partículas por cambio de la longitud $L = b - a$ sería un posible mecanismo de generación de rayos cósmicos de alta energía, lo que fue propuesto originalmente por Fermi.

c) Tercer invariante: J_3

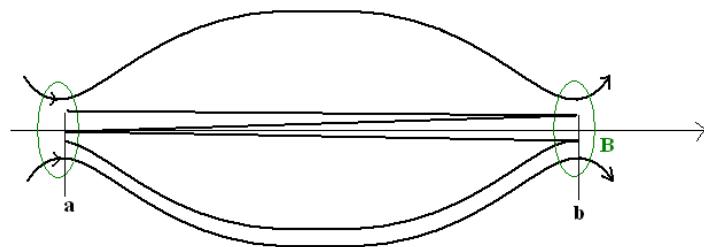
El tercer invariante adiabático nos lo dará el movimiento cuasiperiódico de precesión de las partículas. Tenemos un flujo magnético que barre los ciclos de Larmor... Movimiento generalizado:

$$\left. \begin{array}{l} p = mRv_\perp \\ dq = d\theta_{preces} \end{array} \right\} \text{Tercer invariante adiabático asociado : } J_3$$

$$3^{er} I.A \equiv J_3 = cte \cdot \underbrace{\pi R^2 B}_{\phi_B}$$

Cuando \vec{B} disminuye aumenta R para poder mantener el flujo \vec{B} constante.

Gráficamente:



Lo que se mantiene constante es el flujo de \vec{B} en el movimiento de precesión.

Tema 3

PLASMAS COMO FLUIDOS

3.1. *Introducción.*

En el tema anterior habíamos considerado un plasma constituido por partículas cargadas individuales que se movía en el seno de campos electromagnéticos externos sin prácticamente sufrir colisiones. Estudiábamos qué sucedía para una partícula dada y luego hacíamos la media para el conjunto. Este tratamiento es apropiado cuando tenemos bajas densidades de partículas en donde las colisiones entre ellas son muy escasas, con un recorrido libre medio muy grande en comparación con la longitud de Debye. En este dominio, el comportamiento colectivo del plasma es irrelevante salvo por lo que se refiere al apantallamiento. Es lo que denominábamos Teoría de Órbitas.

Cuando tenemos altas densidades de partículas, las colisiones van a ser predominantes en el comportamiento colectivo del plasma y si tenemos que analizar las trayectorias de las partículas, esto no es manejable en la práctica. Se puede considerar que las colisiones son tan numerosas que podemos tratar el plasma en este caso de alta densidad como un medio continuo, como un fluido. Con el término fluido podemos referirnos a un gas o a un líquido, y lo que los diferencia es el coeficiente de compresibilidad (mucho mayor para gases que para líquidos). En el caso de un plasma, se parece más a un gas denso.

Hablaremos por tanto de un elemento diferencial de volumen de fluido (también utilizaremos el término de *partícula* de fluido) y veremos cómo evoluciona dinámicamente a partir de la densidad de masa de ese elemento de volumen, la presión a la que está sometido así como a las fuerza debidas a los campos electromagnéticos externos. Eventualmente, también sometido a los campos electromagnéticos internos que genere el movimiento de dicho fluido eléctrico. Esto será un tratamiento macroscópico del plasma, y lo que tendremos en cuenta es que nuestro fluido es un fluido electrizado, constituido por partículas cargadas. Tenemos que usar las ecuaciones de la *hidrodinámicas* así como las del *electromagnetismo*, lo que en su conjunto configura las ecuaciones de la **Magnetohidrodinámica** (MHD). Así, las partículas cargadas del elemento de fluido plasmático se verán afectadas por los campos electromagnéticos presentes en el fluido, y a su vez, los campos electromagnéticos pueden ser consecuencia del campo exterior o del propio movimiento de las partículas constituyentes del plasma, por lo que de nuevo estaremos en presencia de un problema de campo autoconsistente.

3.2. Ecuaciones de un plasma como fluido.

En esta nueva descripción del plasma como un fluido electrizado que queremos abordar, buscaremos una solución que satisfaga las ecuaciones hidrodinámicas y las ecuaciones electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell) al mismo tiempo.

- *Magnetohidrodinámica* \Rightarrow es un tratamiento macroscópico (teoría de campos) donde todo es función de $(x, y, z; t)$.

Hay otras veces en las que es necesario conocer las funciones de distribución de velocidades de cada especie de partículas $f(v)$, ocurriendo que el comportamiento del plasma pudiera depender significativamente de cómo sea esa distribución de velocidades. Puede ocurrir que las distribuciones de velocidades nos den por integración la misma área (igualdad de valores medios) pero que el comportamiento del plasma sea diferente por ser las funciones de distribución distintas. En estos otros casos, habríamos de recurrir a la Teoría Cinética del plasma a partir de la ecuación de Boltzmann-Vlasov, que en definitiva es la ecuación de Boltzmann para plasmas. A nosotros, en general y a menos que queramos considerar algún aspecto cinético concreto, nos bastará con el tratamiento hidrodinámico considerando el plasma simplemente como un medio continuo constituido por un fluido electrizado, usando por tanto un modelo hidromagnético dentro de lo que conocemos como Magnetohidrodinámica (MHD).

3.2.1. Ecuaciones del campo electromagnético

Vamos a plantear las ecuaciones del Maxwell para un medio material genérico en el que podremos identificar cargas y corrientes libres (o externas) así como cargas y corrientes ligadas (o internas) al medio. Tendremos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde $\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}$ y $\vec{j} = \vec{j}_{int} + \vec{j}_{ext}$ son densidades de carga y de corriente totales, suma de libres o externas más las ligadas o internas. En el caso particular del vacío sólo tendremos densidades de carga y de corriente libres o externas. Cuando planteamos las ecuaciones de Maxwell para un medio material podemos escribir alternativamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde ahora $\rho = \rho_{ext}$ y $\vec{j} = \vec{j}_{ext}$ son las densidades de carga y de corriente libres o externas. La existencia de las densidades de carga y de corriente ligadas al medio queda incluida en las relaciones constitutivas con la introducción de los vectores desplazamiento eléctrico \vec{D} y excitación magnética \vec{H} , cuyas fuentes escalares y vectoriales son las densidades de carga y de corriente libres o externas respectivamente: estos dos vectores están libres de la influencia del medio material y sus relaciones con los campos \vec{E} y \vec{B} son

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}$$

- a) Plasma como medio magnético. Vamos a describir el plasma como un medio diamagnético, e intentemos buscar una expresión de la permeabilidad magnética del medio. El medio presenta un momento magnético $\vec{\mu}_i$ para cada partícula en su ciclo de Larmor. El vector magnetización en un elemento de volumen es:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i.$$

Además, aparecen unas densidades de corrientes internas o de imanación dadas por:

$$\vec{j}_{int} = \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$

Teníamos la ecuación de Maxwell usando las corrientes totales:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\vec{j}_{ext} + \vec{j}_{int} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).$$

La versión de esta misma ecuación usando sólo corrientes externas es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\vec{j}_{ext} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).$$

Comparando ambas expresiones tenemos la relación:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

Sabemos que la magnetización puede expresarse usando la susceptibilidad magnética:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

En los ciclos de Larmor de las partículas teníamos un momento dipolar magnético elemental $\mu_i = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp i}^2}{B} = \frac{E_{c\perp i}}{B} \propto \frac{1}{B}$. Para el conjunto de las partículas, podemos evaluar el valor medio de μ_i si suponemos equipartición de la energía cinética (equilibrio Maxwelliano) de donde se deduce que $\bar{\mu}_i = \frac{k_B T_{\perp}}{B}$. Ahora podemos escribir

la imanación o magnetización media \bar{M} del medio como $\bar{M} = -n\bar{\mu}_i = -\frac{n k_B T_\perp}{B}$, que tiene sentido contrario al campo \vec{B} . Así obtenemos que $\bar{M} \propto -\frac{1}{B}$ por lo que la susceptibilidad diamagnética χ_m no es independiente de B . Esto hace que no sea conveniente describir un plasma mediante su permeabilidad magnética.

- b) Plasma como medio dieléctrico. Vamos alternativamente a describir el plasma como un medio dieléctrico. Tendremos en el medio una polarización al aplicar un campo eléctrico externo: el vector polarización se define como $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$, donde \vec{p}_i es el momento dipolar eléctrico de cada partícula. Cuando la polarización no es uniforme en el medio, aparece una densidad de carga de polarización, que son cargas ligadas (internas al medio) dadas por:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}.$$

Usando las ecuación de Maxwell con cargas totales, podemos escribir:

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_{ext} + \rho_{int},$$

o usando la versión de sólo cargas externas o libres:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ext}.$$

Comparando las expresiones anteriores, obtenemos la relación constitutiva del medio material, que en nuestro caso es el plasma:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

En el caso de que $\vec{P} \propto \vec{E}$ tenemos que: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$, quedando por tanto:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E},$$

donde la permitividad eléctrica relativa $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ (o constante dieléctrica) depende del medio y no del campo eléctrico. Resulta útil describir el plasma a partir de su permitividad eléctrica ε cuando ésta no depende del campo eléctrico aplicado al medio:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi_e).$$

- c) Ahora estudiamos como continuación esta permitividad eléctrica con más detalle para ver si es independiente del campo eléctrico \vec{E} aunque este aspecto ya había sido discutido al final del tema anterior cuando analizamos el movimiento de cargas en el seno de campos eléctricos lentamente variables con el tiempo. En efecto, cuando veíamos movimiento de partículas en el seno de campos eléctricos lentamente variables con el tiempo, sobre los centros de giro de los ciclos de Larmor aparecía una velocidad de arrastre de polarización $\vec{v}_p \perp \vec{B}$ que generaban unas corrientes netas de polarización no nulas asociadas al cambio temporal de \vec{E} :

$$\vec{j}_p = \frac{n_i m_i + n_e m_e}{B^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\rho}{B^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

donde $\rho = \rho_i + \rho_e$ es aquí densidad de masa y no de carga eléctrica.

Calculamos el rotacional de \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j}_{ext} + \vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \vec{j}_{ext} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Esto se cumple para una dirección transversal a \vec{B} y teniendo en cuenta una dependencia temporal armónica de \vec{E} tal que $\omega \ll \omega_c$ para poder suponer que el campo eléctrico varía poco en un ciclo de Larmor obtuvimos que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\rho}{B^2}.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} = 1 + n \frac{m_i + m_e}{\varepsilon_0 B^2} \approx 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = 1 + \chi_e,$$

expresión válida para bajas frecuencias del campo \vec{E} y en la dirección transversal a \vec{B} donde vemos que efectivamente es independiente del campo eléctrico, y tenemos los casos límites siguientes:

- $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 (\varepsilon_r \rightarrow 1)$

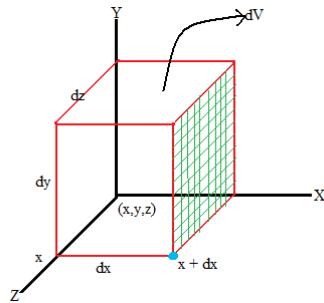
- $B \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 (\varepsilon_r \rightarrow 1)$

La susceptibilidad eléctrica χ_e es independiente del campo eléctrico, como queríamos, pero sí depende del campo magnético externo \vec{B} aunque en una descripción del plasma como medio dieléctrico esto no supone problema alguno ya que el campo magnético es en esta descripción un parámetro externo más.

Como valores típicos, ε es del orden de 100 o 1000 veces ε_0 , con lo que $\varepsilon_r \gg 1$. Como vemos, el plasma responde significativamente a la aplicación de un campo eléctrico externo débilmente variable con el tiempo en presencia de otro magnético estacionario.

3.2.2. Ecuación de continuidad

Ahora tratamos el plasma como un medio continuo macroscópico y vamos a empezar viendo la ecuación de continuidad que aparece como consecuencia de realizar un balance para el número de partículas durante el movimiento del fluido, teniendo una ecuación de continuidad para cada tipo de ellas. Consideraremos un elemento de volumen diferencial $dV = dx dy dz$, dentro del cual tendremos $dN = n dV$ partículas.



La densidad de partículas es n : $dN = ndV = ndxdydz$ es el número de partículas en el elemento diferencia de volumen elegido. La velocidad de estas partículas tiene una componente de deriva igual para todas y una componente aleatoria debida a la agitación térmica que llamaremos *peculiar*.

Se cumple que:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} = \vec{u} + \vec{v'}; \vec{\omega} = \vec{v'}$$

$$v_i = u_i + \omega_i$$

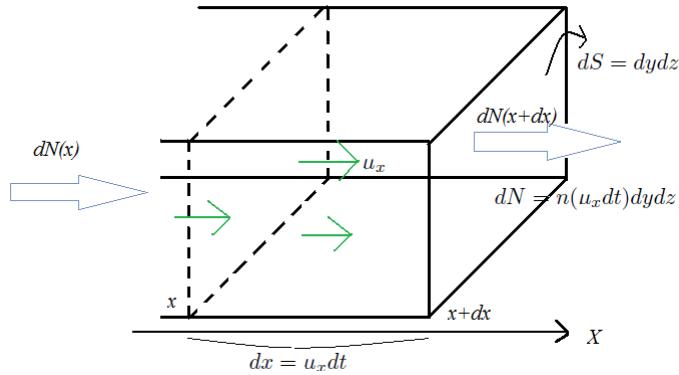
$$\langle v_i \rangle = u_i \quad \langle v_x \rangle = u_x$$

$$\langle v_y \rangle = u_y \quad \langle v_z \rangle = u_z$$

$$\frac{1}{2}m \langle \omega_x^2 \rangle = \frac{1}{2}m \langle \omega_y^2 \rangle = \frac{1}{2}m \langle \omega_z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

si existe equilibrio Maxwelliano (equipartición). Hay que indicar que esta última expresión nos dice que las partículas tienen la misma temperatura en todas direcciones (isotropía)¹. Vamos a calcular el flujo de partículas que atraviesan cada una de las caras y empezamos haciéndolo para la cara sombreada en $x + dx$, que resulta negativo por representar un pérdida de partículas (flujo saliente de partículas), y para la cara en x , que será positivo por representar un ganancia de partículas (flujo entrante de partículas):

¹Aceptamos que están Maxwellianizadas.



$$\frac{dN}{dt} \Big|_{x+dx} = -nu_x dydz|_{x+dx}; \frac{dN}{dt} \Big|_x = nu_x dydz|_x$$

Para las otras caras (en $y + dy$ y en y , y en $z + dz$ y en z), las cantidades de partículas que están fluyendo de forma similar son:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} \Big|_{y+dy} &= -nu_y dx dz|_{y+dy}; \frac{dN}{dt} \Big|_y = nu_y dx dz|_y \\ \frac{dN}{dt} \Big|_{z+dz} &= -nu_z dx dy|_{z+dz}; \frac{dN}{dt} \Big|_z = nu_z dx dy|_z \end{aligned}$$

Aquí estamos considerando que las partículas del fluido se mueven en promedio a la velocidad hidrodinámica \vec{u} al ser nula en promedio la velocidad peculiar: $\langle \vec{\omega} \rangle = \langle \vec{v}' \rangle \equiv 0$: la agitación térmica no afecta a este transporte. Se cumple que la variación local total del número medio de partículas en el dV es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial n}{\partial t} dV = [-(nu_x dy dz)_{x+dx} + (nu_x dy dz)_x]_{y,z} + []_{x,z} + []_{x,y} = \\ &= [-dy dz \underbrace{(nu_x|_{x+dx} - nu_x|_x)}_{d(nu_x)}]_{y,z} + []_{x,z} + []_{x,y} = [-dxdy dz \frac{d(nu_x)}{dx}]_{y,z} + []_{x,z} + []_{x,y}. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(nu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(nu_z)}{\partial z} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (n\vec{u})$$

Hemos llegado a la ecuación de continuidad o de balance para el número de partículas:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = 0.}$$

El número medio de partículas se conserva, y esto es así porque sólo hemos considerado el flujo de partículas en el elemento de volumen y no hemos tenido en cuenta la presencia de procesos de creación y destrucción de partículas durante el movimiento del fluido (ecuación de conservación del número de partículas). Teniendo en cuenta procesos en los que existe ganancia y pérdida de las mismas, la ecuación anterior ya no es igual a cero (ya no se conserva el número medio de partículas) si no que queda como:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = S = G - L,$$

donde S = Manantial o Fuente, G = Ganancia y L = Pérdidas.

Multiplicando la ecuación de continuidad anterior por la masa m de las partículas se obtiene la ecuación de continuidad de la masa para el fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = mS = m(G - L),$$

donde ρ es la densidad volumétrica de masa del fluido.

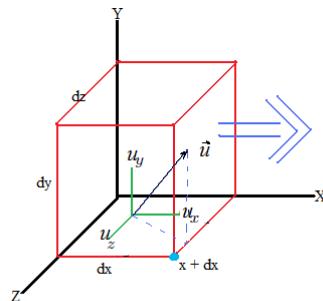
3.2.3. Ecuación de balance de la cantidad de movimiento

Veamos ahora la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, también denominada ecuación de Euler². Vamos a ver cómo es el movimiento del medio por la acción de la fuerza electromagnética sobre las partículas cargadas, por el flujo de agitación térmica de dichas partículas, por las colisiones con otro tipo de partículas e incluso por la acción de la gravedad. Estas tres o cuatro acciones distintas afectarán a la cantidad de movimiento del fluido contenido en elemento de volumen, cambiándola durante su evolución temporal. Evaluamos dicho cambio en un instante t analizando las fuerzas que actúan sobre este elemento diferencial de volumen dV , y empezamos discutiendo la acción debida a la fuerza externa electromagnética, que será la fuerza de Lorentz. Luego, analizaremos las otras contribuciones internas a esas fuerzas. El elemento de volumen contiene una carga eléctrica por unidad de volumen que vale $\rho_c = nq$, por lo que la fuerza de Lorentz por unidad de volumen es:

$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{f} = nq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$: fuerza electromagnética por unidad de volumen (Lorentz). Esta fuerza cambia la cantidad de movimiento del elemento de volumen, y dicho cambio por unidad de volumen vale

$$\frac{d(nm\vec{u})}{dt} = \vec{f} = nq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Analizamos ahora la contribución debida al flujo de cantidad de movimiento en el dV :



²Es la ecuación de movimiento del elemento de volumen del fluido de masa $dm = \rho_m dV$ y aceleración $\frac{d\vec{u}}{dt}$, que al dividir por dV , queda del tipo $\rho_m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}$

Al salir por la cara situada en $x + dx$ las partículas arrastran un flujo de componentes de cantidad de movimiento en cada dirección que se pierde del elemento de volumen (<0). Igualmente, al entrar por la cara en x las partículas arrastran un flujo de componentes de cantidad de movimiento en cada dirección que se gana en el elemento de volumen (>0). Vamos a denominar

$P_x|_{x+dx}$ al flujo de componente x de cantidad de movimiento en el eje X saliente;
 $P_x|_x$ al flujo de componente x de cantidad de movimiento en el eje X entrante;

$P_y|_{x+dx}$ al flujo de componente y de cantidad de movimiento en el eje X saliente;
 $P_y|_x$ al flujo de componente y de cantidad de movimiento en el eje X entrante;

$P_z|_{x+dx}$ al flujo de componente z de cantidad de movimiento en el eje X saliente;
 $P_z|_x$ al flujo de componente z de cantidad de movimiento en el eje X entrante.

Ahora repetiríamos la descripción para el fluido al salir las partículas por la cara en $y + dy$ y entrar por la cara en y , e igualmente para el fluido al salir las partículas por la cara en $z + dz$ y entrar por la cara en z , definiendo nuevos flujos correspondientes de manera que haciendo el balance - que no detallamos - para cada componente de cantidad de movimiento en cada uno de los ejes, primero sobre una partícula y luego promediando sobre todas las partículas, llegaríamos a la ecuación de balance de cantidad de movimiento o ecuación Euler, también llamada a veces ecuación de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(nm\vec{u})}{\partial t} &= mn\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + m\vec{u}\frac{\partial n}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P} - m\vec{u}\vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) - mn(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, \end{aligned}$$

donde \overleftrightarrow{P} es un tensor 3×3 denominado tensor presión que analizaremos a continuación. También veremos la contribución del denominado término colisional, que evalúa la contribución de las colisiones con partículas de otro tipo al cambio de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo y volumen. Teniendo en cuenta todas las contribuciones llegamos a la expresión final de la ecuación Euler que podemos considerar como la ecuación de movimiento del elemento diferencial de volumen de fluido bajo la acción de las fuerzas internas:

$$\frac{\partial(nm\vec{u})}{\partial t} = mn\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + m\vec{u}\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P} - m\vec{u}\vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) - mn(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{T}_c \quad (3.1)$$

donde \vec{T}_c es el término colisional. En la hipótesis de que las fuerzas internas y externas son independientes, introduciendo estas fuerzas externas (de Lorentz) en la ecuación anterior, ordenando términos y usando también la ecuación de continuidad anterior, la ecuación de balance cantidad de movimiento puede quedar de la forma:

$$mn \left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right] = nq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P} + \vec{T}_c \quad (3.3)$$

Podemos escribir el primer miembro de forma más compacta recordando que para cualquier variable dinámica vectorial $\vec{G}(x, t)$ se cumple que el cambio total con t es:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + u_x \nabla_x \vec{G}.$$

En tres dimensiones será:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} = \frac{D\vec{G}}{Dt},$$

donde $\frac{d\vec{G}}{dt}$ es la derivada total o sustancial, $\frac{\partial \vec{G}}{\partial t}$ es la derivada local y $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}$ es la derivada convectiva. Luego podemos escribir que:

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = mn \frac{d\vec{u}}{dt} = m n \vec{a}$$

donde el segundo término entre corchetes es la derivada convectiva (desplazamiento solidario con el fluido). De esta forma, podemos reconocer la ecuación de movimiento del elemento de volumen en forma de segunda ley de Newton para la fuerza por unidad de volumen.

Analicemos el término colisional que representa la variación temporal de la cantidad de movimiento del fluido en dV debido tanto a procesos de colisión entre partículas como a los procesos de creación y destrucción de las mismas si existen (colisiones elásticas e inelásticas).

$$\vec{T}_c = \sum_{\beta} \vec{R}_{\alpha\beta} - m \vec{u} S,$$

donde los subíndices del vector indican que nos referimos a las colisiones de las partículas α del fluido cuyo movimiento describimos con las partículas β de otro fluido con el que roza o fricciona el anterior (por ejemplo, cuando estudiemos la fricción del fluido electrónico sólo con el iónico, el término $\vec{R}_{\alpha\beta}$ será simplemente \vec{R}_{ei} , de manera que las partículas α son electrones y las β son iones). Como ya sabemos, $S = G - L$, es decir, la diferencia entre la ganancia y la pérdida de partículas.

$\vec{R}_{\alpha\beta}$ determina la densidad volumétrica de cantidad de movimiento que por unidad de tiempo gana el fluido del tipo α al friccionar o rozar con el fluido del tipo β . El término $-m \vec{u} S$ suele ser pequeño en comparación con el término $\sum_{\beta} \vec{R}_{\alpha\beta}$, que a su vez puede expresarse en función de la diferencia de velocidades entre los fluidos de partículas α y β .

Este intercambio de cantidad de movimiento debido a la fricción por colisiones puede representarse mediante una frecuencia de colisión: $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$ (β son las partículas blanco y α son las partículas incidentes o proyectil que ceden cantidad de movimiento por colisiones a las partículas β).

Podemos expresar:

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = -m_{\alpha} n_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha\beta} (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_{\beta}),$$

y podemos tener:

- $\vec{u}_{\alpha} > \vec{u}_{\beta} \rightarrow \vec{R}_{\alpha\beta} < 0 \Rightarrow$ Las partículas α ceden cantidad de movimiento a las partículas β por colisiones y el fluido de partículas tipo α se frena mientras que el fluido de partículas tipo β se acelera.

- $\vec{u}_\beta = 0 \Rightarrow$ Las partículas α colisionan con las partículas estáticas (situación de los electrones en plasmas débilmente ionizados que colisionan con partículas pesadas, los átomos neutros e iones).

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = -m_\alpha n_\alpha \bar{\nu}_{\alpha\beta} \vec{u}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{-R_{\alpha\beta}}{m_\alpha n_\alpha u_\alpha}.$$

- Por conservación de la cantidad de movimiento se cumple que:

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = -\vec{R}_{\beta\alpha} \rightarrow -m_\alpha n_\alpha \bar{\nu}_{\alpha\beta} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta) = -m_\beta n_\beta \bar{\nu}_{\beta\alpha} (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha) \rightarrow m_\alpha n_\alpha \bar{\nu}_{\alpha\beta} = m_\beta n_\beta \bar{\nu}_{\beta\alpha}.$$

3.2.4. El tensor de presión \overleftrightarrow{P}

Este tensor provenía de la transferencia de una determinada componente de la cantidad de movimiento en una determinada dirección espacial. Sus componentes están definidas como:

$$P_{ij} = mn < \omega_i \omega_j > = mn < v'_i v'_j >,$$

donde la velocidad de las partículas es $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} = \vec{u} + \vec{v}'$, con $\vec{\omega} = \vec{v}'$ como velocidad peculiar debido a la agitación térmica. Sabemos que:

$$< v_i > = < u_i > + < v'_i > \stackrel{0}{\equiv} u_i$$

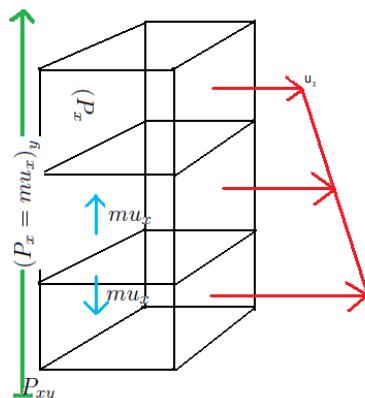
así como

$$\frac{1}{2} m < \omega_i^2 > = \frac{1}{2} k_B T_i$$

para el equilibrio Maxwelliano. Podemos escribir:

$$P_{ij} = mn < \underbrace{(v_i - u_i)}_{\omega_i = v'_i} \underbrace{(v_j - u_j)}_{\omega_j = v'_j} > = mn < \omega_i \omega_j > = mn < v'_i v'_j >$$

Esta expresión es un tensor simétrico $P_{ij} = P_{ji}$. P_{ij} representa el flujo en la dirección i de la componente j de la cantidad de movimiento debido a la agitación térmica de las partículas del fluido. En fluidos ordinarios, los términos que no están en la diagonal principal del tensor están asociados con las fuerzas tangenciales o de cizalladura, mientras que los términos diagonales están asociados con las fuerzas normales o de compresión.



En la figura tenemos contacto de los volúmenes contiguos. Si suponemos que la cantidad de movimiento se transporta en la dirección y , la caja de arriba aumenta la cantidad de movimiento

de la dirección x y la caja de abajo disminuye esa cantidad de movimiento. Entre las cajas se ejercen interacciones mutuas de tipo tangencial que tienen su origen en un rozamiento viscoso entre las capas de fluido que se desplazan paralelas a diferente velocidad. Esto es lo que ocurre en un tubo en régimen laminar (Ley de Poiseuille). Estas fuerzas viscosas son debida a las interacciones o colisiones microscópicas entre las partículas de fluido y por tanto están recogidas en \vec{T}_c .

En los plasmas esto también ocurre, incluso cuando la densidad de partículas es muy baja y no haya colisiones. Esto se debe a que los ciclos de Larmor tienden a distribuir a las partículas en al dirección transversal.

Cuando el radio de Larmor sea mucho menor que la escala de la variación de la velocidad tendríamos poco intercambio de cantidad de movimiento en la dirección transversal. En este caso:

- Si $r_L \downarrow \Rightarrow P_{ij} \approx 0; i \neq j$

En el caso de una distribución Maxwelliana nos queda un tensor diagonal:

$$P_{ij} = mn < \omega_i^2 > = nk_B T_i, \text{ para } i = j$$

$$P_{ij} = mn < \omega_i \omega_j > = 0, \text{ para } i \neq j$$

En una distribución isotrópica de velocidades (la función de velocidades Maxwelliana tiene simetría esférica), por lo que $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}$. Luego el tensor presión sería de la forma:

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

lo que hace que el tensor se convierta en un escalar. Si hacemos:

$$\frac{1}{2} nm < \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 > = \frac{3}{2} nk_B T = \frac{3}{2} P,$$

siendo la presión escalar $P = \frac{1}{3} nm < \omega^2 >$. En este caso, que será el habitual, el término $-\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P}$ en la ecuación de Euler quedará en la forma simple $-\vec{\nabla} P$.

La aproximación de presión escalar la usaremos sistemáticamente en el caso de plasma débilmente ionizado. En una distribución no isotrópica de velocidades ya no tenemos lo anterior sino que el tensor de presión lo podremos expresar con respecto de la dirección de la inisotropía con varia componentes distintas, paralela y perpendiculares al campo magnético externo:

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & 0 \\ P_{yx} & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}$$

como sería el caso de un plasma débilmente ionizado en presencia de un campo magnético externo $\vec{B} = B \vec{k}$ (eje z).

La velocidad \vec{u} nos da un valor finito aunque tengamos un campo de fuerzas constante aplicado, es decir, no crece indefinidamente. Las partículas se aceleran entre colisiones, pero la velocidad en promedio no crece indefinidamente. Esto no ocurriría para un haz de electrones en el vacío si lo sometemos a un campo eléctrico.

Para un fluido neutro en presencia de un campo gravitatorio la ecuación de balance de la cantidad de movimiento es la ecuación de Navier-Stokes ($\rho_m = mn$):

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \rho_m \vec{g},$$

donde en el segundo miembro, el primer sumando se refiere a los términos escalares de la diagonal, el segundo a los términos que no son de la diagonal y el último término a la acción la fuerza gravitatoria externa.

Si tenemos un plasma no colisional y un campo magnético \vec{B} , los radios de Larmor están en la dirección transversal a \vec{B} . Si tenemos un campo eléctrico:

- $\perp \vec{B} \Rightarrow \vec{v}_{\vec{E} \times \vec{B}} = cte (= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}) \Rightarrow \vec{u}_\perp = cte$ Podemos hacer un tratamiento como fluido.
- $\parallel \vec{B} \Rightarrow u_\parallel \Rightarrow \infty$ Acelera indefinidamente a las partículas mientras actúa el campo. Ahora tendríamos un chorro acelerado de partículas. NO es conveniente hacer un estudio como fluido en este caso.

3.2.5. Ecuación de balance de la energía cinética. Momentos de la ecuación de Boltzmann

Las ecuaciones de balance anteriores, así como la de la energía que aún nos falta, pueden encontrarse de otra forma distinta. Para ello, vamos a hacer uso de otro método distinto denominado el método de los momentos de la ecuación de Boltzmann. En el Apéndice B viene explicado resumidamente dicho método que se aplica para obtener la ecuación de continuidad (Apéndice B.1) así como la ecuación de Euler (Apéndice B.2), ecuaciones que ya hemos encontrado de otra manera en los párrafos anteriores. También la ecuación que ahora buscamos de balance de energía o ecuación del flujo de calor (Apéndice B.3).

A partir de la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{colisiones},$$

donde el último término es el término colisional, aplicamos el método de los momentos multiplicando por las sucesivas potencias enteras ($\alpha = 0,1,2,\dots$) de la velocidad e integrando para todo el espacio de velocidades. Para el momento de orden cero es ($\alpha=0$):

$$n(\vec{r}, t) = \int f d^3 v \Rightarrow \text{aparece la magnitud } n \text{ (normalización)}$$

Al integral obtenemos la ecuación de continuidad ya vista. Si hacemos la integración de la ecuación de Boltzmann multiplicada por \vec{v} ($\alpha=1$), tenemos el flujo de partículas (densidad de corriente de partículas, momento de orden 1):

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n \vec{u}(\vec{r}, t) = \int \vec{v} f d^3 v \Rightarrow \text{aparece el tensor } P_{ij} = nm < \omega_i \omega_j >$$

y obtenemos la ecuación de balance de la cantidad de movimiento si la multiplicamos por la masa m de las partículas.

Por último, si integramos la ecuación de Boltzmann para el momento de orden dos, multiplicando previamente por v^2 ($\alpha=2$), nos aparece la ecuación de balance de la densidad de energía cinética por unidad de volumen que nos falta.

$$\frac{1}{2} n m u^2 = \frac{1}{2} m \int v^2 f d^3 v \Rightarrow \text{es la densidad volumétrica de energía cinética en el fluido}$$

y aparece el tensor $Q_{ijk} = \frac{1}{2} nm < \omega_i \omega_j \omega_k >$ que describe el flujo de calor:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\vec{P}) \right) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{P}) - \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} (\vec{Q} \cdot \vec{\delta}) + n \vec{F} \cdot \vec{u}}$$

donde por simplicidad no se ha incluido el término de pérdida de energía debido a las fuerzas disipativas debidas al término de colisión \vec{T}_c y \vec{F} representa la fuerza externa neta. Nosotros no haremos uso de esta compleja ecuación y sólo necesitaremos parcialmente la información del tensor de presiones de componentes P_{ij} , por lo que cortaremos en la ecuación de balance de cantidad de movimiento. Si fuera necesario, en lugar de la ecuación de balance de la energía cinética anterior podríamos usar como aproximación la Ley de Fourier para el transporte de calor. En el Apéndice C, la deducción de esta ecuación de balance de la energía está descrita con todo detalle a partir de la *ecuación de Enskog* o ecuación de evolución temporal de los valores medios, así como en el apéndice B como el momento de segundo orden de la *ecuación de Boltzmann* como ya se ha comentado.

3.2.6. Ecuación de estado y ecuaciones de transformaciones termodinámicas

Estas van a ser las ecuaciones que introducimos para cortar el desarrollo de los momentos de la ecuación de Boltzmann y no tener que hacer uso de la complicada ecuación de balance de la energía cinética o ecuación del flujo de calor (tercera ecuación de los fluidos). Entendemos por ecuación de estado la que tiene el plasma considerado como un gas ideal compuesto por distintos componentes (neutros, electrones e iones), cada uno de los cuales aporta al conjunto una presión parcial dada por la ecuación de Clapeyron para los gases perfectos o ideales ($PV = nRT$) en equilibrio y viendo dada la presión total por la ley de Dalton. Las ecuaciones de estado nos informan de las propiedades de equilibrio (o estáticas) del sistema y se pueden representar por un punto en los diagramas termodinámicos habituales (diagramas $P - V$, $P - T$, etc).

Por otro lado, los gases que componen el plasma evolucionarán termodinámicamente en particular siguiendo transformaciones que conocemos como politrópicas. En general, estas evoluciones representan al sistema cuando cambia de un estado inicial a otro final pudiéndolo hacer pasando por estados intermedios de equilibrio (transformaciones quasi-estáticas). Recordemos las transformaciones politrópicas para las que se define el coeficiente $\nu = \frac{c_p - c}{c_v - c}$, donde ν es el índice de politropía, siendo una transformación politrópica aquella en la que se mantienen constantes los calores específicos. Podemos escribir para la transformación politrópica:

$$P = Cn^\nu = C \left(\frac{N}{V} \right)^\nu \Rightarrow PV^\nu = cte$$

En nuestros estudios por tanto usaremos y compatibilizaremos ambos grupos de ecuaciones, de estado y de transformaciones politrópicas quasi-estáticas. Así, podemos calcular el gradiente de presión durante la transformación:

$$\vec{\nabla}P = C \vec{\nabla}n \ n^{\nu-1} \nu = \frac{\vec{\nabla}n}{n} C n^\nu \nu \Rightarrow \frac{\vec{\nabla}P}{P} = \nu \frac{\vec{\nabla}n}{n}$$

- Para las transformaciones triviales tenemos: isobárica ($c = c_p, \nu = 0$) e isócora ($c = c_v, \nu = \infty$). No hacemos uso de estos casos.
- Si la transformación es suficientemente lenta comparada con el transporte de calor en los elementos de volumen debido a la conductividad térmica del fluido, sería un proceso isotérmo ya que el elemento de volumen se termaliza con los

otros elementos de volumen vecinos manteniendo su temperatura constante durante el proceso:

$$c \rightarrow \infty \Rightarrow \nu = 1 \Rightarrow PV = Nk_B T = cte \Rightarrow \text{Ecuación de la t. isoterna.}$$

- Si por el contrario la transformación es suficientemente rápida comparada con el ritmo de transporte de calor debido a la conductividad térmica, no hay en la práctica transferencia de energía entre los elementos de volumen contiguos que se comportarían como si estuviesen térmicamente (casi) aislados. En el caso extremo sería una transformación adiabática:

$$c \rightarrow 0 \Rightarrow \nu = \frac{c_p}{c_v} = \gamma \Rightarrow PV^\gamma = cte \Rightarrow \text{Ecuación de la t. adiabática.}$$

Mientras mayor sea el coeficiente adiabático γ , mayor será la dependencia de T con P .

En un plasma considerado como gas ideal monoatómico, las partículas tienen $s = 3$ grados de libertad translacionales (en 3 dimensiones), por lo que $\gamma = \frac{2+s}{s}$, y si $s = 3$, entonces $\gamma = \frac{5}{3}$, por lo que el valor de γ depende de la dimensionalidad.

Si esta transformación adiabática es, por otro lado, lenta respecto al ritmo al que las colisiones intercambian energía, da tiempo a su redistribución por grado de libertad y tendríamos la misma equipartición de la energía aún en el caso de existencia de anisotropía: para todas las direcciones, $\nu = \gamma = \frac{2+s}{s} = \frac{5}{3}$. La ecuación de estado sería la misma para todas las direcciones.

Si por el contrario esta transformación adiabática es rápida respecto al ritmo de las colisiones, no da tiempo a repartir la energía cinética de las partículas en todas direcciones por igual, pudiendo aparecer en presencia de anisotropía una equipartición desigual en el sentido paralelo a la anisotropía y en el sentido perpendicular: $(s_{||} = 1; \gamma_{||} = 3; T_{||})$ y $(s_{\perp} = 2; \gamma_{\perp} = 2; T_{\perp})$. Como $\gamma_{||} > \gamma_{\perp} \Rightarrow T_{||}$ varía más rápidamente con la presión que T_{\perp} . En este caso, la ecuación de estado y la ecuación de la transformación adiabática en presencia de anisotropía se desacoplarían en dos conjuntos de ecuaciones distintos, un conjunto para la dirección paralela y otro distinto para la perpendicular.

3.3. Desplazamiento del fluido.

Las ecuaciones de los fluidos que hemos estudiado nos proveen de herramientas poderosas para el estudio del movimiento del plasma como fluido bajo la acción de campos eléctricos y magnéticos externos. A dicho movimiento del fluido llamaremos genéricamente desplazamiento del fluido. Deberemos considerar separadamente el desplazamiento en la dirección del posible campo magnético existente o desplazamiento paralelo ($||$), pero también perpendicular al mismo (\perp), lo que en general da un carácter anisótropo al fenómeno. Estudiaremos ciertos casos particulares de desplazamiento paralelo y perpendicular del fluido a partir de la ecuación de Euler aplicada al plasma en la que, bajo ciertos razonamientos, retendremos o despreciaremos algunos de sus términos. Eventualmente, podremos comparar estos desplazamientos particulares con los movimientos de arrastre o deriva de los centros de giro estudiados en el contexto de la Teoría de Órbitas.

3.3.1. Resistividad del plasma

Consideremos un plasma completamente ionizado, en el que sólo tenemos electrones e iones, y consideremos el movimiento de los electrones paralelo al campo magnético, movimiento que no se ve afectado por dicho campo puesto que no hay fuerza magnética en esa dirección. Si no hay campo magnético, el movimiento será en la dirección del campo eléctrico. En este caso simple, el

término de fricción o rozamiento del fluido electrónico - cuyo movimiento queremos describir - con el fluido iónico es:

$$\vec{T}_c \approx \vec{R}_{ei} = -m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i),$$

en el que despreciamos ahora el término $-m_e \vec{u}_e S = -m_e \vec{u}_e (G - L)$. Así, la ecuación de movimiento del fluido electrónico se puede escribir simplemente como:

$$m_e n_e \left[\frac{\partial u_{e\parallel}}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) u_{e\parallel} \right] = n_e (-e) E_{\parallel} - (\vec{\nabla} P_e)_{\parallel} + R_{ei\parallel}$$

Si consideremos que el plasma es homogéneo espacialmente, es decir n_e y n_i son prácticamente constantes, la presión también lo es $P_e = cte$ y no hay fuerza interna sobre los electrones debido al gradiente de presión. Consideramos además una situación estacionaria donde la variación temporal de la velocidad del fluido electrónico es nula, ya que los electrones llegan rápidamente al régimen estacionario en su movimiento de fricción con los iones. En esta situación particular, la ecuación de movimiento del elemento de fluido electrónico es:

$$-n_e e E_{\parallel} + R_{ei\parallel} = 0 \Rightarrow n_e e E_{\parallel} = -m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (u_{e\parallel} - u_{i\parallel}).$$

Es decir, que la fuerza de fricción con los iones está continuamente cancelando la fuerza eléctrica sobre los electrones de manera que el fluido se mueve con movimiento uniforme a la velocidad límite. Ésta es la ecuación de movimiento paralela al campo magnético, y si no tenemos campo magnético es la ecuación en el sentido del campo eléctrico:

$$E_{\parallel} = -\frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{e} (u_{e\parallel} - u_{i\parallel}) = -\frac{m_e}{e} \bar{\nu}_{ei} (u_{e\parallel} - u_{i\parallel})$$

Para la densidad de corriente eléctrica debido al movimiento resistivo (fricativo) de los fluidos electrónico e iónico, tenemos:

$$j_{\parallel} = n_e (-e) u_{e\parallel} + n_i (e) u_{i\parallel} = -n_e e (u_{e\parallel} - u_{i\parallel}). \quad (n_i \simeq n_e)$$

De las dos expresiones anteriores se obtiene que:

$$E_{\parallel} = \frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{n_e e^2} j_{\parallel},$$

donde se define la resistividad del plasma como $\eta_{\parallel} = \frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{n_e e^2}$ en dirección \parallel a \vec{B} .

Como $\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$, esta resistividad también se puede escribir como:

$$\eta_{\parallel} = \frac{\bar{\nu}_{ei}}{\omega_{pe}^2 \epsilon_0} \Rightarrow \sigma_{\parallel} = \frac{1}{\eta_{\parallel}}$$

es la conductividad eléctrica \parallel al campo \vec{B} .

- Si $\vec{B} = 0$, $\vec{R}_{ei} = -m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i) = -\eta n_e^2 e^2 (\vec{u}_e - \vec{u}_i) = \eta n_e e \vec{j} \Rightarrow \Rightarrow \frac{\vec{R}_{ei}}{n_e e} = \eta \vec{j} = \vec{E}$ (Ley de Ohm): $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\eta} = \sigma \vec{E}$, $\sigma = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\bar{\nu}_{ei}}$

A altas temperaturas el plasma es un buen conductor. A temperaturas bajas aumenta la resistividad y no es tan buen conductor pero sigue conduciendo bien la electricidad.

- Si $\vec{B} \neq 0$ ($\vec{B} = B \vec{k}$), η se convierte en un tensor de componentes $\alpha\beta$:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & 0 \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz} \end{pmatrix}$$

La determinación de estas componentes del tensor resistividad en plasmas magnetizados constituye un buen ejercicio práctico como trabajo complementario.

3.3.2. Desplazamiento del fluido perpendicular al campo magnético

Planteamos en este caso la ecuación de movimiento del fluido y nos quedamos con la parte perpendicular al campo magnético (aceptamos $\vec{E} \perp \vec{B}$):

$$mn \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]}_{\frac{d\vec{u}}{dt} \ll qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})} = qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla}P + \vec{R}_{ei}^{(despreciable)},$$

donde suponemos que la presión es un escalar y que el término colisional es despreciable. Podremos suponer también que la fuerza electromagnética sobre un elemento de volumen del fluido hasta pueda variar de forma armónica en el tiempo aunque lentamente, lo que en ese caso implica que la velocidad \vec{u} también sea armónica lentamente variable en el tiempo.

Teniendo en cuenta esto podemos escribir los términos, donde aparece \vec{u} como:

$$\frac{mn}{qn} \frac{|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|}{|\vec{u} \times \vec{B}|} \equiv \left| \frac{m\omega}{qB} \right| \approx \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right|$$

Suponiendo que $\omega \ll \omega_c$, vemos que el $|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}| \ll |\vec{u} \times \vec{B}|$. También supondremos que el término convectivo es despreciable, por lo que el movimiento del fluido se realiza bajo condición estacionaria en donde la variación temporal de \vec{u} , si la hay, es lo suficientemente lenta. Para esta solución estacionaria, previamente multiplicando vectorialmente por \vec{B} y recordando que $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel$, esto nos lleva a la expresión:

$$\begin{aligned} 0 &= qn[\vec{E} \times \vec{B} + [\vec{u}_\perp \times \vec{B}] \times \vec{B}] - \vec{\nabla}P \times \vec{B} = \\ &= qn[\vec{E} \times \vec{B} + \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_\perp) - \vec{u}_\perp \vec{B}^2] - \vec{\nabla}P \times \vec{B} = \\ &= qn[\vec{E} \times \vec{B} - \vec{u}_\perp \vec{B}^2] - \vec{\nabla}P \times \vec{B} \end{aligned}$$

Despejando la velocidad de desplazamiento transversal del fluido tenemos que:

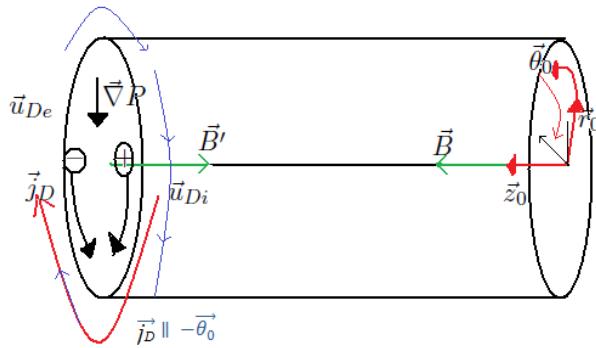
$$\vec{u}_\perp = -\frac{\vec{\nabla}P \times \vec{B}}{qnB^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = \vec{u}_D + \vec{u}_E,$$

donde \vec{u}_\perp es esta velocidad de desplazamiento transversal del elemento de fluido, $-\frac{\vec{\nabla}P \times \vec{B}}{qnB^2}$ es un término que depende del gradiente de presión y se denomina desplazamiento diamagnético \vec{u}_D , y $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ es la velocidad de desplazamiento por campo eléctrico \vec{u}_E similar a la que obtuvimos para el arrastre por campo eléctrico de los centro de giro en el tema anterior.

Representamos el desplazamiento diamagnético como $\vec{u}_D = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}P}{qnB^2}$, que depende del signo de la carga. Creará una corriente diamagnética \vec{j}_D en la dirección \perp a \vec{B} y $-\vec{\nabla}P$ (salvo el signo de q), y para que este término no sea nulo tiene que haber un gradiente de presión. Es una consecuencia de un comportamiento colectivo de las partículas, no es un resultado que aparecía cuando veíamos los arrastres de los centros de giro de partículas individuales (no existe su análogo en Teoría de Órbitas).

3.3.3. Aplicación

Veamos un plasma cilíndrico, por lo que utilizaremos coordenadas cilíndricas, y analicemos en él los conceptos anteriores. Las corrientes diamagnéticas que aparecen giran alrededor del eje del cilindro, crean un campo magnético \vec{B}' que se opone al campo magnético inicial de partida \vec{B} . Esto le dará un comportamiento diamagnético y de ahí el nombre que le damos de desplazamiento diamagnético. En nuestra aplicación, existe una mayor presión en el eje del cilindro que en el exterior, por lo que el gradiente de presión radial tiene sentido contrario a \vec{r}_0 . Podrá existir también un campo eléctrico radial que supondremos paralelo a $\vec{\nabla}P$, $\vec{E} = -Er_0$.



Hemos de indicar que \vec{u}_{De} es el desplazamiento diamagnético de los electrones (en dirección $\vec{\theta}_0$) y \vec{u}_{Di} es el desplazamiento diamagnético de los iones (en dirección $-\vec{\theta}_0$).

- Veamos qué ocurre cuando \vec{E} es pequeño con respecto al término $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$. En este caso, \vec{u}_D tiene la dirección de $\vec{\theta}_0$ y \vec{u}_E es despreciable, por lo que \vec{u}_\perp tiene la dirección de $\vec{\theta}_0$. El término $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, si consideramos una variación lenta, puede ser despreciado y como $\vec{\theta}_0 \times \vec{z}_0 = \vec{r}_0$, el término $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$ tiene la dirección de \vec{r}_0 , al igual que $\vec{\nabla}P$, por lo que el término $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$ es despreciable, ya que la dirección predominante es la \vec{r}_0 .
- Veamos qué ocurre cuando \vec{E} es paralelo a $\vec{\nabla}P$. Sabemos que la dirección de \vec{E} es $-\vec{r}_0$, así que \vec{u}_D y \vec{u}_E son paralelos $\Rightarrow \vec{u}_\perp = \vec{u}_D + \vec{u}_E$ tiene la dirección de $\vec{\theta}_0$. En este caso, el término $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$ vale cero al volver a ser la dirección predominante \vec{r}_0 .

Calculemos \vec{j}_D para un $\vec{\nabla}P$ dado. Los cambios de la presión durante el movimiento del fluido vienen dados por la ecuación de la transformación politrópica general:

$$P = Cn^\nu \Rightarrow \frac{\vec{\nabla}P}{P} = \nu \frac{\vec{\nabla}n}{n} \Rightarrow \vec{\nabla}P = P\nu \frac{\vec{\nabla}n}{n} = \nu k_B T \vec{\nabla}n$$

por lo que: $\vec{u}_D = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}P}{qnB^2} = \frac{\nu k_B T}{qB^2} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}n}{n},$

donde $q = \pm e$ respectivamente para iones y electrones.

Al suponer que tenemos como tipos de partículas electrones e iones simplemente ionizados ($n_e \simeq n_i = n$), la densidad total de corriente diamagnética producida por el desplazamiento de ambos fluidos queda:

$$\vec{j}_D = ne(\vec{u}_{Di} - \vec{u}_{De}) = \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla}P_i + \vec{\nabla}P_e)}{B^2} = (\nu_i k_B T_i + \nu_e k_B T_e) \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}n}{B^2}.$$

Si como es habitual $T_e >> T_i$, entonces los electrones tienen una mayor aportación a la densidad de corriente que los iones.

3.3.4. Velocidad de arrastre (o deriva) y velocidad de desplazamiento

El arrastre va referido a los centros de giro en Teoría de Órbitas y el desplazamiento va referido a un elemento infinitesimal de fluido en Magnetohidrodinámica. Veamos los equivalentes conceptuales entre ambas descripciones:

Arrastre centros de giro

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

(No tiene análogo a nivel de partículas)

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2}$$

$$\vec{v}_{curv}$$

...

Desplazamiento de fluido

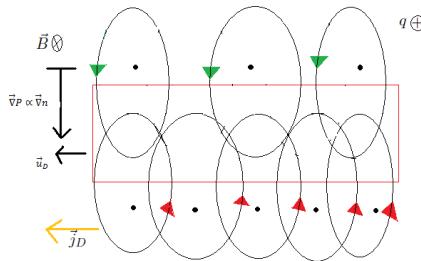
$$\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} P}{qnB^2}$$

(No tiene análogo en el modelo de fluido)

$$\vec{u}_{curv}$$

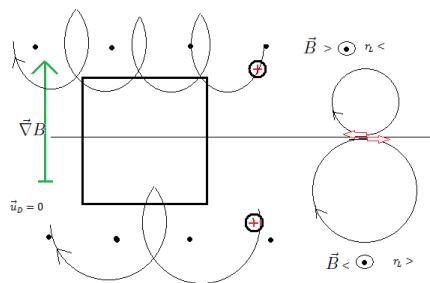
Podemos observar que en algunos casos no existe el análogo correspondiente y como ejemplo analicemos el caso del desplazamiento diamagnético que no tiene análogo a escala de movimiento de partícula en el seno de campos electromagnéticos. Para ello, intentemos imaginar cómo puede haber un desplazamiento diamagnético sin que haya un arrastre de los centros de giro. El desplazamiento diamagnético aparece cuando tenemos un gradiente de presión, lo que supone un gradiente de densidad de partículas. Supongamos que tenemos la siguiente situación, con partículas cargadas positivas más numerosas (mayor densidad) en la parte inferior.



Tenemos una componente neta de velocidad hacia la izquierda al hacer el promedio en el elemento de volumen sin que haya desplazamiento de los centros de giro dado que hay más ciclos de Larmor en la parte inferior que en la superior, ocurriendo lo mismo pero en sentido contrario para cargas negativas. Tendremos una corriente diamagnética \vec{j}_D .

Veamos ahora el caso contrario, cómo un arrastre de los centros de giro de las partículas individuales por gradiente de campo \vec{B} , $\vec{\nabla}B \perp \vec{B}$, no contribuye en promedio a una velocidad neta

(desplazamiento) de un volumen de fluido. Las partículas tienen la misma energía cinética, que se conserva bajo la acción del campo magnético. Ahora, sobre toda horizontal dentro del elemento de volumen, las componentes de velocidad tangencial de los ciclos de Larmor se cancelan al realizar el promedio, no existiendo flujo neto de velocidad horizontal aunque haya arrastre de sus centros de giro. Al situarnos sobre otra horizontal inferior, como tenemos menor campo magnético, los ciclos de Larmor tienen la trayectoria más abierta y menor velocidad tangencial, pero de nuevo el promedio es nulo al cancelarse estas componentes. Aunque hay arraste de los centros de giro, al hacer el promedio no hay velocidad neta de desplazamiento en el fluido.



Deberemos por tanto tener precavación de no mezclar los conceptos de las descripciones de la Teoría de Órbitas (descripción del plasma como medio discreto constituido por partículas puntuales moviéndose en el seno de campos eléctricos y magnéticos) y de la Magnetohidrodinámica (descripción del plasma como un medio fluido continuo electrizado cuyo movimiento está sometido a campos eléctricos y magnéticos), aunque también deberemos conocer cuáles son las diferencias y similitudes en ambas descripciones.

3.3.5. Desplazamiento del fluido paralelo al campo magnético

Planteamos la ecuación en la componente paralela al campo magnético que nos interesa:

$$mn \left[\frac{\partial u_{||}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_{||} \right] = qnE_{||} - \nabla_{||}P + \vec{J}_c \quad (\text{despreciable})$$

donde consideraremos un campo de presión escalar y despreciaremos de nuevo el término colisional ($\vec{T}_c = 0$).

Supongamos que la distribución de velocidades es espacialmente homogénea, con lo que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_{||} = 0$. Nos queda:

$$\frac{\partial u_{||}}{\partial t} = \frac{q}{m} E_{||} - \frac{\nabla_{||}P}{mn}.$$

Para un movimiento del fluido durante el que se produce transformación politrópica, $\frac{\vec{\nabla}P}{P} = \nu \frac{\vec{\nabla}n}{n}$. Por la ecuación de estado del fluido considerado como gas perfecto, $P = nk_B T$, por lo que $\vec{\nabla}P = \nu k_B T \vec{\nabla}n$, y tenemos que:

$$\frac{\partial u_{||}}{\partial t} = \frac{q}{m} E_{||} - \frac{\nu k_B T \nabla_{||}n}{mn},$$

donde en el segundo miembro el primer sumando es el término eléctrico y el segundo el término de gradiente de presión.

Vamos a considerar que la variación de la velocidad es lo suficientemente pequeña como para buscar una solución estacionaria (velocidad de desplazamiento constante), lo que se puede aplicar

especialmente a los electrones. En este caso, queda compensado el término de la fuerza eléctrica con el de la presión. En esta situación, para el fluido electrónico tenemos que:

$$\frac{-e}{m_e} E_{||} = \frac{\nu_e k_B T_e \nabla_{||} n_e}{m_e n_e}.$$

Si el posible campo magnético existente no varía con el tiempo (estático), entonces no hay fuentes vectoriales del campo eléctrico y podemos expresarlo como que deriva de un potencial eléctrico: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ y $E_{||} = E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$.

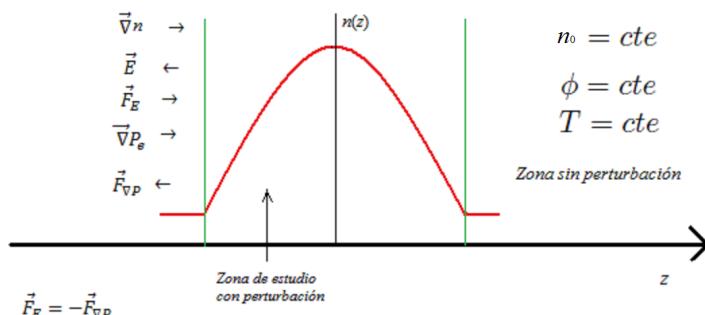
Podemos asumir para los electrones una conductividad térmica suficientemente alta que nos permita considerar durante el movimiento del fluido electrónico que la transformación es isotérmica, en la que el índice de politropía $\nu_e = 1$. En este caso:

$$e \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{k_B T_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial z},$$

e integrando esta expresión obtenemos que $e\phi = k_B T_e \ln n_e + cte$, y resulta

$$n_e = n_{e0} e^{\frac{e\phi}{k_B T_e}}$$

Hemos llegado así a la ya conocida relación de Boltzmann para electrones. En el caso en que tengamos un potencial ϕ constante a una T_e constante tendremos la cuasineutralidad, pero en una zona donde el potencial eléctrico esté perturbado espacialmente ($\phi(z)$ no sea uniforme), la densidad electrónica también lo estará y será $n_e(z)$.



Equilibrio para electrones en la zona de perturbación (Relación de Boltzmann)

Para iones no existe dicho equilibrio, las fuerzas eléctrica y de gradiente de presión no se cancelan y existe corriente positiva que acaba por eliminar la perturbación electrostática

$$F_{pi}, F_{Ei} \Rightarrow I^+$$

En los primeros instantes aparece una separación espacial de carga local, ya que los iones tardan más tiempo en reaccionar que los electrones. La separación de carga se produce hasta que $F_E^{e-} = F_{\nabla P_e}$; $\vec{\nabla}P_e = qn_e \vec{E}$.

Para el movimiento isotérmico de los iones sin embargo no hay un comportamiento similar, y aunque tardarán algo más en reaccionar que los electrones, no se podrán encontrar en equilibrio puesto que la fuerza electrostática que se produce debido a la perturbación F_E^{ion} no puede contrarrestarse con la fuerza debida al gradiente de presión $F_{\nabla P_i}$ ya que tiene su misma dirección. Por lo tanto, los iones estarán en desequilibrio y deberemos escribir la ecuación de movimiento de los mismos como sigue:

$$m_i n_i \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial t} \right) = -e n_i \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial P_i}{\partial z} = -k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial z} - k_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial z} = -(k_B T_e + k_B T_i) \frac{\partial n}{\partial z}$$

y debemos notar que $n_i \approx n_e = n$, por lo que tenemos cuasineutralidad aunque hay una perturbación.

En el movimiento de los iones interviene la temperatura electrónica, que es dominante respecto a la iónica, y el gradiente de densidad de ambos, electrones e iones. Este movimiento de los iones debido a la perturbación pervive hasta que su trasporte consigue acabar con dicha perturbación y restaurar la homogeneidad ($\frac{\partial n}{\partial z} = 0$). Durante el proceso, isotermo tanto para electrones como para iones, los electrones sin embargo han permanecido en equilibrio todo el tiempo siguiendo a los iones.

3.4. *Modelo magnetohidrodinámico.*

Hemos visto antes el conjunto de ecuaciones para un plasma como fluido donde hemos considerado que está compuesto al menos por dos fluidos, el fluido iónico y el fluido electrónico, cuando está completamente ionizado. Esto es lo que se llama *modelo de dos fluidos*. Una forma de simplificar la descripción del plasma como fluido es combinar linealmente las ecuaciones de los fluidos iónico y electrónico que permita finalmente describirlo como un solo fluido sometido a la acción de campos externos \vec{E} y \vec{B} . Esto es lo que se llama *modelo de un solo fluido* o modelo magnetohidrodinámico (MHD), y la ventaja de este modelo es que obviamente el conjunto de ecuaciones que lo describen es más fácilmente manejable a la vez que mantiene la mayor parte de la física importante del problema.

En lo que sigue obtendremos las ecuaciones del modelo MHD considerando un fluido plasma completamente ionizado donde los iones están simplemente ionizados (esto es, con carga e). Asumiremos también cuasi-neutralidad eléctrica, $n_e \approx n_i = n$ (si los iones tuvieran una carga Ze , la condición de cuasi-neutralidad eléctrica se escribiría $n_e \approx Zn_i = n$). Esta asunción será razonablemente válida cuando la escala de longitud de los fenómenos que estudiemos sea mucho mayor que la longitud de Debye, λ_D . Aunque aceptemos esta cuasineutralidad eléctrica, en cualquier caso aceptaremos al mismo tiempo la posibilidad de una pequeña separación espacial de carga que generará una carga eléctrica neta no compensada, acompañada de un campo eléctrico de separación espacial de carga.

3.4.1. Ecuaciones del modelo magnetohidrodinámico

Podemos definir las densidades volumétricas de masa y carga para el plasma considerado como un solo fluido como sigue:

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i \cong n(m_e + m_i) \quad \text{para la densidad volumétrica de masa}$$

(al ser $m_i \gg m_e \rightarrow \rho_m \cong n m_i$);

$$\rho_c = n_e q_e + n_i q_i = e(n_i - n_e) \quad \text{para la densidad volumétrica de carga,}$$

que será $\cong 0$ cuando exista cuasi-neutralidad eléctrica. Además, podemos definir la velocidad del fluido así como la densidad de corriente neta debida a electrones e iones:

$$\vec{u} = \frac{n_i m_i \vec{u}_i + n_e m_e \vec{u}_e}{\rho_m} \cong \frac{n(m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e)}{n(m_i + m_e)} = \frac{m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e}{m_i + m_e},$$

que de nuevo al ser $m_i \gg m_e$ queda $\vec{u} = \vec{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{u}_e$ (deben considerarse los dos términos porque puede ser $\vec{u}_i \ll \vec{u}_e$);

$$\vec{j} = n_i q_i \vec{u}_i + n_e q_e \vec{u}_e \cong en(\vec{u}_i - \vec{u}_e).$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden invertirse para obtener las velocidades de los fluidos iónico y electrónico separadamente, quedando:

$$\vec{u}_e \cong \vec{u} - \frac{\vec{j}}{en} \quad \text{y} \quad \vec{u}_i \cong \vec{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\vec{j}}{en}.$$

Las ecuaciones del modelo MHD para un solo fluido se pueden obtener tomando varias combinaciones lineales de las ecuaciones separadas para fluido iónico y electrónico. Para ello, tomemos las dos ecuaciones de continuidad escritas conjuntamente para electrones e iones (sin término $S = G - L$):

$$\frac{\partial n_{e,i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_{e,i} \vec{u}_{e,i}) = 0.$$

Pueden multiplicarse por m_e y m_i respectivamente, y al sumarlas obtenemos una ecuación de continuidad para la masa del fluido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e m_e}{\partial t} + \frac{\partial n_i m_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e m_e \vec{u}_e) + \vec{\nabla} \cdot (n_i m_i \vec{u}_i) = \\ \frac{\partial(n_e m_e + n_i m_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e m_e \vec{u}_e + n_i m_i \vec{u}_i) = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, si las multiplicamos por e y las restamos obtenemos la ecuación de continuidad para la carga eléctrica:

$$e \left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}_i) - \frac{\partial n_e}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) \right] = \frac{\partial(en_i - en_e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (en_i \vec{u}_i - en_e \vec{u}_e) = \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

según las definiciones anteriores de ρ_c y \vec{j} .

De forma similar, combinando adecuadamente las ecuaciones de movimiento individuales (Euler) de los fluidos electrónico e iónico se obtiene la ecuación de movimiento del fluido en su conjunto, resultando de forma aproximada (puede hacerse el cálculo como ejercicio) que

$$\rho_m \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho_m \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = e(n_i - n_e) \vec{E} + (en_i \vec{u}_i - en_e \vec{u}_e) \times \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P},$$

donde si existe campo de gravedad añadiríamos el término $\rho_m \vec{g}$ al segundo miembro. El término de colisión desaparece en la suma al ser $\vec{R}_{ie} = -\vec{R}_{ei}$.

De la ecuación de movimiento del fluido electrónico podemos obtener una segunda ecuación de movimiento del fluido único si realizamos alguna aproximación razonable. La cantidad de movimiento intercambiada por el fluido electrónico debido al término de colisión (fricción) \vec{R}_{ei} con el fluido iónico puede expresarse, según vimos, en función de la resistividad η por

$$\vec{R}_{ei} = -m_e n_e < \nu_{ei} > (\vec{u}_e - \vec{u}_i) = \eta n_e e \vec{j}.$$

En situación estacionaria - y también para procesos lentamente variables con el tiempo en los que los electrones siempre se encuentran en equilibrio - tendríamos:

$$\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B} = \frac{\vec{R}_{ei}}{en_e} - \frac{\vec{\nabla}P_e}{en_e} = \eta \vec{j} - \frac{\vec{\nabla}P_e}{en_e},$$

y recordando la expresión anterior de $\vec{u}_e \cong \vec{u} - \frac{\vec{j}}{en_e}$, podemos obtener

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla}P_e).$$

Esta expresión se denomina ley de Ohm generalizada y nos describe las propiedades eléctricas del plasma como fluido conductor resistivo en régimen estacionario, siendo el término $\vec{j} \times \vec{B}$ el correspondiente al conocido efecto Hall. Si por existir anisotropía la resistividad η en dirección paralela al campo \vec{B} es distinta a la dirección perpendicular, será necesario reemplazar el escalar η por un tensor diagonal de componentes η_{\perp} , η_{\perp} y $\eta_{||}$. Cuando los términos del segundo miembro correspondientes a $\vec{j} \times \vec{B}$ y $\vec{\nabla}P_e$ puedan despreciarse, o eventualmente cancelarse entre ellos, queda simplemente $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$, o ley de Ohm simplificada.

Debemos completar las ecuaciones del modelo MHD de un solo fluido con la ecuación de estado $P = nk_B T$ y la ecuación de la transformación politrópica $P = Cn^{\nu}$, donde ν podrá ser considerado 1 para electrones aunque no para iones, y el conjunto de las ecuaciones de Maxwell ya conocidas. Así, el plasma como un solo fluido conductor verá descrito por las ecuaciones de continuidad de masa y carga, la ecuación de movimiento del elemento de fluido o ecuación de Euler, la ley de Ohm generalizada, la ecuación de estado y la ecuación de la transformación, y las ecuaciones de Maxwell.

3.4.2. Aplicaciones

A partir de la ley de Ohm simplificada anterior $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$, puede describirse un interesante fenómeno conocido como congelamiento de líneas magnéticas en el plasma. Para ello, tomemos rotacional en los dos miembros de la ecuación anterior

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \eta \vec{\nabla} \times \vec{j}$$

que usando las ecuaciones de Maxwell conduce a

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \left[\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{\equiv 0} - \nabla^2 \vec{B} \right]$$

ya que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$, como sabemos. Ordenando términos queda:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} = \overbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})}^{(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})_{despl}} + \overbrace{D_M \nabla^2 \vec{B}}^{(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})_{dif}} = (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})_{despl} + (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})_{dif},$$

pudiendo interpretarse que el campo magnético \vec{B} evoluciona en el tiempo a la vez forzado o arrastrado por el campo de desplazamiento magnetohidrodinámico \vec{u} así como difundiéndose con un coeficiente de difusividad o difusión magnética $D_M = \eta/\mu_0$ que está relacionado con la resistividad del plasma. Estos dos términos que determinan la evolución temporal de \vec{B} tienen una importancia relativa uno respecto a otro que podemos comparar en orden de magnitud introduciendo una longitud característica de cambio espacial L y utilizando análisis dimensional:

$$\frac{|\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})|}{D_M |\nabla^2 \vec{B}|} \approx \frac{\mu_0 u B / L}{\eta B / L^2} = \frac{\mu_0 u L}{\eta},$$

que es independiente de \vec{B} . Esta expresión define un número de Reynolds magnético $R_M = \frac{\mu_0}{\eta} u L$ de forma parecida al que se define para fluidos viscosos, de tal manera que para R_M muy grande la difusión del campo es despreciable ya que debe ser el numerador mucho mayor que el denominador en el cociente del primer miembro, mientras que esta difusión es dominante en caso contrario para valores muy pequeños de R_M al ser ahora el numerador mucho menor que el denominador en dicho cociente.

Podemos calcular el cambio temporal de flujo del campo magnético \vec{B} a través de una superficie fluida $S(t)$ en movimiento durante su evolución, lo que deberemos hacer con precaución puesto que la superficie no está inmóvil: dicho cambio no será simplemente $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ sino que habrá algo más debido a que $S(t)$ se desplaza. Tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\phi(t + \Delta t) - \phi(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \Delta t \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]. \end{aligned}$$

Las integrales de superficie que aparecen en la expresión anterior están relacionadas entre sí por el hecho de que el flujo de \vec{B} a través de la superficie cerrada total formada por $S(t)$, $S(t + \Delta t)$ y la superficie lateral S_{lat} entre ellas como consecuencia el movimiento del fluido en Δt , y que tiene por anchura $\vec{u}\Delta t$, es nula por el teorema de Gauss (o de la divergencia):

$$\oint_{S(V)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \equiv 0 \Rightarrow - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0,$$

donde V es el volumen determinado por las tres superficies mencionadas, siendo éstas positivas hacia afuera de V . Así, hemos introducido el signo opuesto para la superficie $S(t)$ al objeto de que responda a la dinámica del movimiento del plasma como fluido, pudiéndose llevar la diferencia de las integrales de flujo de \vec{B} a través de $S(t + \Delta t)$ y $S(t)$, $\int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = - \int_{S_{lat}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$, a la ecuación anterior para el cambio temporal del flujo magnético ϕ :

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[- \int_{S_{lat}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \Delta t \int_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right].$$

Para la superficie lateral, su diferencial (positivo hacia afuera) se puede escribir por $dS_{lat} = d\vec{l} \times \vec{u}\Delta t$, de manera que $- \int_{S_{lat}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = -\Delta t \oint_C \vec{B}(t) \cdot (d\vec{l} \times \vec{u})$. Luego el cambio temporal del flujo magnético ϕ , eliminando Δt , es:

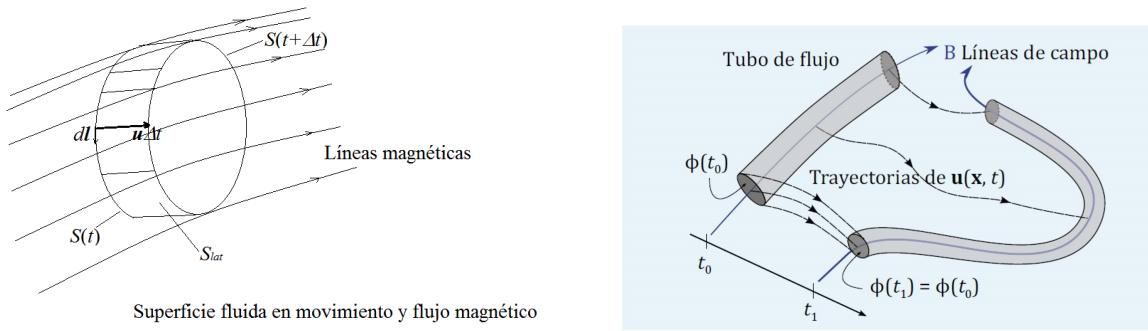
$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_C \vec{B}(t) \cdot (d\vec{l} \times \vec{u}) = \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}(t)) = \\ &= \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_{S(C)} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado sucesivamente la propiedad cíclica del producto mixto y el teorema de Stoke (o del rotacional). Si llevamos a esta ecuación el cálculo de $\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$ obtenido anteriormente, resulta

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S(C)} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \int_{S(C)} D_M \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{S(C)} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{S},$$

y finalmente

$$\frac{d\phi}{dt} = D_M \int_{S(C)} \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\eta}{\mu_0} \int_{S(C)} \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$



El resultado obtenido sugiere que si el plasma es débilmente resistivo, o no resistivo, (MHD ideal), este cambio temporal de flujo magnético es nulo; o sea, este flujo magnético es constante (se conserva). Como consecuencia, las líneas de campo magnético no puede atravesar las líneas de velocidad hidrodinámica (tienen que permanecer paralelas), y el movimiento hidrodinámico arrastra las líneas de campo magnético que parecen así congeladas o pegadas en el fluido en movimiento. El número de Reynolds magnético $R_M \rightarrow \infty$ dado que $\eta \rightarrow 0$, por lo que $|\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})| \gg D_M |\nabla^2 \vec{B}|$ y el término de difusión magnética es despreciable frente al de desplazamiento en la evolución temporal de $\vec{B}(t)$. De no ser así, el carácter MHD ideal se rompe, el flujo magnético no se conserva y, por tanto, las líneas de campo magnético pierden su entidad diferenciada (no hay arrastre de líneas por congelamiento magnético), pudiendo fundirse o reconectarse. En plasmas muy resistivos, este efecto llega a ser muy significativa en la evolución temporal de $\vec{B}(t)$.

Otra interesante aplicación es la existencia de la llamada presión magnética, también asociada al cuadrado del módulo de \vec{B} . Para ver esto, partamos de la ec. de Euler vista anteriormente para un sólo fluido

$$\rho_m \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho_m \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} P.$$

En situación se equilibrio estacionario, nada cambia con t (1^{er} miembro nulo) y no hay separación espacial de carga ($\rho_c = e(n_i - n_e) = 0$) aunque puede haber densidad de corriente neta $\vec{j} = (en_i \vec{u}_i - en_e \vec{u}_e) \neq 0$). La ecuación anterior queda simplemente como $0 = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} P$. A partir de esta expresión podemos encontrar la densidad de corriente \vec{j} que permite este equilibrio dinámico (hay movimiento de cargas), para lo cual despejamos y multiplicamos vectorialmente $\times \vec{B}$

$$\vec{B} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \vec{B} \times \vec{\nabla} P \quad \Rightarrow \quad \vec{j} B^2 - \underbrace{\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{j})}_{=0} = B^2 \vec{j} = \vec{B} \times \vec{\nabla} P,$$

y podemos despejar la densidad de corriente neta

$$\vec{j} = \frac{1}{B^2} \vec{B} \times \vec{\nabla} P \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \perp \vec{B} : \vec{j} \perp \vec{\nabla} P,$$

que resulta ser diamagnética debida al desplazamiento del fluido por gradiente de presión. Usamos la ley de Ampère en esta situación estacionaria para las fuentes vectoriales de \vec{B} , pudiendo escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Si multiplicamos vectorialmente $\times \vec{B}$ resulta $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} P$, de acuerdo con la expresión estacionaria anterior al ser $\vec{j} \times \vec{B} = \vec{\nabla} P$, y podemos operar

$$\mu_0 \vec{\nabla} P = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{\vec{\nabla} B^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} (P + \frac{B^2}{2\mu_0}) = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{\mu_0}.$$

Para ciertas geometrías, el segundo miembro de esta última ecuación es nulo (los cambios espaciales de \vec{B} así lo determinan), y obtenemos una especie de ecuación de conservación para la presión total en el espacio donde evoluciona el fluido plasma de forma estacionaria en el seno del campo magnético:

$$\vec{\nabla} (P + \frac{B^2}{2\mu_0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad P + \frac{B^2}{2\mu_0} = Cte.$$

El término $P_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ es la llamada presión magnética que evoluciona al contrario que la presión termodinámica en el fluido plasma de manera que donde P es máxima, P_m es mínima, manteniéndose constante la suma total $P + P_m = Cte$ (nos recuerda al Teorema de Bernoulli con un nuevo término debido al campo magnético).

3.5. Difusión y movilidad en plasmas débilmente ionizados.

Vamos a considerar un plasma débilmente ionizado (gas de Lorentz), o gas de partículas cargadas sumergido en un gas mayor de partículas neutras. En este caso las frecuencias de colisión con los neutros son más importantes que las frecuencias de colisión con partículas cargadas, es decir: $\langle \nu_{ea} \rangle, \langle \nu_{ia} \rangle >>> \langle \nu_{ee} \rangle, \langle \nu_{ei} \rangle, \langle \nu_{ii} \rangle$.

A tal efecto, planteamos la ecuación de movimiento del elemento de fluido en ausencia de campo magnético externo, (plasma no magnetizado $\vec{B} = 0$):

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = qn \vec{E} - \vec{\nabla} P \underbrace{- mn \langle \nu \rangle (\vec{u} - \vec{u}_a)}_{\vec{R}_{\alpha n}},$$

donde \vec{u} es la velocidad del elemento de volumen de fluido (electrónico o iónico indistintamente), \vec{u}_a es la velocidad de los átomos neutros, y el último sumando del segundo miembro es el término colisional de partículas cargadas con neutros, \vec{R}_{ea} o \vec{R}_{ia} dependiendo de si se trata del fluido electrónico o del iónico.

Supondremos que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ y que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0$, por lo que tendremos situación estacionaria con $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ en la que el plasma tiene un movimiento suficientemente uniforme y estacionario. También supondremos que $\vec{u} >> \vec{u}_a$, es decir la velocidad del fluido de electrones y de iones es mucho mayor que la velocidad del fluido de átomos neutros, que incluso podemos suponer en reposo.

Finalmente, asumiremos además que estamos en un régimen isotermo tanto para el fluido electrónico como el iónico, en el que hay buena conducción térmica para ambos, alcanzándose rápidamente la termalización de ese elemento de fluido con el resto del fluido. Esto es siempre cierto para electrones pero en general no lo es para iones. En esta suposición de régimen isotermo para ambos fluidos,

$$\nu = 1 \Rightarrow \frac{\vec{\nabla}P}{P} = 1 \cdot \frac{\vec{\nabla}n}{n} \Rightarrow \vec{\nabla}P = k_B T \vec{\nabla}n.$$

Así, la ecuación de partida para solución estacionaria queda como:

$$mn < \nu > \vec{u} = qn\vec{E} - \vec{\nabla}P = qn\vec{E} - k_B T \vec{\nabla}n.$$

Previamente, tratemos algunos casos particulares elementales de interés que nos permitirán reobtener ciertas leyes familiares de la Física en las que definiremos algunos magnitudes importantes que utilizaremos en nuestro estudio.

A. Obtención de la ley de Fick de la difusión libre: Ecuación de Euler para cualquier tipo de fluido con \vec{E} y \vec{B} nulos (no hay fuerza electromagnética de Lorentz) para desplazamiento estacionario del fluido por la acción de un gradiente de densidad.

$$mn \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\approx 0} \right] = \cancel{qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})}^0 - \vec{\nabla}P - mn < \nu > (\vec{u} - \vec{u}_a)^0,$$

de donde obtenemos, $-\vec{\nabla}P = mn < \nu > \vec{u}$. Dado que $\frac{\vec{\nabla}P}{P} = \nu \frac{\vec{\nabla}n}{n}$ y que la expresión del flujo de partículas del fluido es $\vec{\Gamma} = n\vec{u}$, bajo la acción del gradiente de densidad (difusión libre) podemos despejar $n\vec{u}$ de la ecuación anterior y escribir para desplazamiento isotermo del fluido con $\nu = 1$

$$\Gamma_D = n\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}P}{m < \nu >} = -\frac{k_B T}{m < \nu >} \vec{\nabla}n = -D \vec{\nabla}n \quad \text{Ley de Fick}$$

para el flujo de difusión libre, donde se ha introducido el coeficiente de difusión libre para las partículas del fluido, $D = \frac{k_B T}{m < \nu >}$.

B. Obtención de la movilidad de las partículas del fluido: Ecuación de Euler para cualquier tipo de fluido con \vec{E} no nulo, y \vec{B} y $\vec{\nabla}P$ nulos (no hay fuerza magnética de Lorentz ni difusión) para desplazamiento estacionario del fluido por la acción de un campo eléctrico.

$$mn \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\approx 0} \right] = qn\vec{E} + \cancel{n\vec{u} \times \vec{B}}^0 - \cancel{\vec{\nabla}P}^0 - mn < \nu > (\vec{u} - \vec{u}_a)^0$$

de donde obtenemos, $qn\vec{E} = mn < \nu > \vec{u}$. Despejando la velocidad de desplazamiento del fluido por la acción de la fuerza eléctrica, encontramos la movilidad de las partículas del fluido como la velocidad de desplazamiento por unidad de campo eléctrico: $\vec{u} = \frac{q}{m < \nu >} \vec{E} = \pm \frac{|q|}{m < \nu >} \vec{E} = \pm \mu \vec{E}$ (+ para iones y - para electrones), donde se ha introducido la movilidad eléctrica de las partículas cargadas del fluido $\mu = \frac{|q|}{m < \nu >}$ y así poder escribir el flujo eléctrico de partículas cargadas como

$$\Gamma_E = n\vec{u} = \pm n\mu \vec{E}$$

Multiplicando por la carga de las partículas, esto es la **Ley de Ohm** para las densidades de corriente eléctrica donde el coeficiente que relaciona densidad de corriente y campo eléctrico es la *conductividad eléctrica*. En efecto,

$$\vec{j} = \pm e\Gamma_E = \pm en\vec{u} = \underbrace{en\mu}_{\sigma} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad \text{Ley de Ohm}$$

donde la conductividad eléctrica se escribe como $\sigma = en\mu = en\frac{e}{m<\nu>} = \frac{e^2 n}{m<\nu>}$.

C. Régimen Ambipolar. En general, cuando tengamos en la ecuación de Euler tanto campo eléctrico \vec{E} como gradiente de presión $-\vec{\nabla}P$, el flujo total de partículas del fluido será la suma de los dos anteriores independientes y **esto es lo que vamos a estudiar aquí**. Podremos escribir para el flujo total de partículas del fluido:

$$\Gamma_{total} = n\vec{u} = \Gamma_E + \Gamma_D = \pm n\mu\vec{E} - D\vec{\nabla}n,$$

donde la movilidad es $\mu = \frac{|q|}{m<\nu>}$ y el coeficiente de difusión es $D = \frac{k_B T}{m<\nu>}$. La relación de

Einstein se obtiene eliminando $m<\nu>$ entre μ y D , obteniéndose $\mu = D \frac{|q|}{k_B T}$. Ésta relaciona μ , D y T para un tipo dado de partículas del fluido, electrones o iones. Este flujo total es una densidad de corriente de partículas que desplaza el fluido en movimiento estacionario.

Habíamos encontrado mediante argumentos cinéticos que la frecuencia de colisión elástica promedio para electrones, considerando éstos como proyectil y los átomos neutros como blanco, era $<\nu_{ea}> = n_e <\sigma_{ea} v_e>$, colisiones que consideradas de interacción de tan corto alcance como entre esferas duras da una sección eficaz de colisión independiente de las velocidades $\sigma \neq f(v)$ ³, donde la velocidad relativa entre la partículas colisionantes es prácticamente v_e . Luego como orden de magnitud tenemos que $<\nu_{ea}> = n_e <\sigma_{ea} v_e> = n_e \sigma_{ea}^* < v_e >$, donde hemos introducido la sección eficaz de colisión efectiva σ_{ea}^* que nos permitirá estimar órdenes de magnitud. Si aceptamos una distribución de velocidad Maxwelliana resulta

$$\bar{v}_e = < v_e > = \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}},$$

pudiéndose razonar igualmente para los iones.

Tenemos para las frecuencias de colisión con los átomos neutros de electrones e iones los siguientes resultados:

$$<\nu_{ea}> \cong n_e \sigma_{ea}^* \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}},$$

$$<\nu_{ia}> \cong n_i \sigma_{ia}^* \sqrt{\frac{8k_B T_i}{\pi m_i}},$$

por lo que, asumiendo cuasineutralidad, es

$$\frac{<\nu_{ea}>}{<\nu_{ia}>} \approx \frac{\sigma_{ea}^*}{\sigma_{ia}^*} \left(\frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde hemos considerado que $\sigma_{ea} \neq \sigma_{ia}$.

El cociente entre las movilidades de electrones e iones queda como

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \frac{\frac{e}{m_e <\nu_{ea}>}}{\frac{e}{m_i <\nu_{ia}>}} = \frac{m_i}{m_e} \frac{<\nu_{ia}>}{<\nu_{ea}>} \approx \frac{\sigma_{ia}^*}{\sigma_{ea}^*} \left(\frac{m_i}{m_e} \frac{T_i}{T_e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

³Ésta aproximación de colisiones como esferas duras es demasiado drástica.

Dado que $m_e \ll m_i$, y por tanto que $\sigma_{ea}^* \ll \sigma_{ia}^*$, y que $T_e \geq T_i$, en general para un campo eléctrico dado tenemos que $\mu_e \gg \mu_i$.

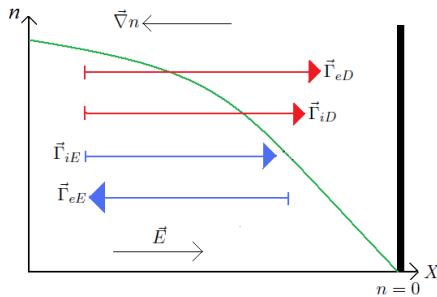
Por otro lado, el cociente entre los coeficientes de difusión queda:

$$\frac{D_e}{D_i} = \frac{\frac{k_B T_e}{m_e \langle \nu_{ea} \rangle}}{\frac{k_B T_i}{m_i \langle \nu_{ia} \rangle}} = \frac{m_i \langle \nu_{ia} \rangle T_e}{m_e \langle \nu_{ea} \rangle T_i} \approx \frac{\sigma_{ia}^*}{\sigma_{ea}^*} \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{\frac{1}{2}},$$

por lo que en general se cumple también que $D_e \gg D_i$ al ser en la expresión anterior todos los numeradores mayores, o mucho mayores, que los denominadores correspondientes.

Para un tipo de partícula α (electrón o ión) tendremos un flujo que vendrá dado por: $\vec{\Gamma}_\alpha = n \vec{u}_\alpha = \pm \mu_\alpha n \vec{E} - D_\alpha \vec{\nabla} n$. Cuando tenemos partículas neutras o no haya campo eléctrico, recuperamos la ley de Fick de la difusión libre: $\vec{\Gamma}_\alpha = -D_\alpha \vec{\nabla} n$.

En nuestro caso de electrones e iones, nunca o casi nunca se va a dar difusión libre, y tendremos los dos términos del flujo. Los electrones se mueven más rápidamente que los iones y aparece una separación espacial de carga que genera un campo electrostático que a su vez afectará a los iones, de manera que el movimiento de los electrones condiciona el de los iones y viceversa. Tendremos la denominada difusión ambipolar en la que ambos tipos de partículas se difunden conjuntamente:



El régimen ambipolar se alcanza cuando se igualan los flujos de ambas especies: $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i$. Esto hace que se desplacen conjuntamente electrones e iones, que se difundan los electrones al mismo tiempo que los iones sin romper la cuasi-neutralidad. Es la difusión ambipolar, que está condicionada por el campo eléctrico existente o campo eléctrico ambipolar \vec{E}_a .

Veamos cómo podemos determinar el campo eléctrico ambipolar. Los flujos electrónico e iónico cumplen que $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i = \vec{\Gamma}_a$ (flujo ambipolar), y es:

$$\vec{\Gamma}_a = \mu_i n_i \vec{E}_a - D_i \vec{\nabla} n_i = -\mu_e n_e \vec{E}_a - D_e \vec{\nabla} n_e,$$

por lo que el campo eléctrico ambipolar es:

$$\vec{E}_a = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\vec{\nabla} n}{n},$$

y como $D_e \gg D_i$, \vec{E}_a tiene sentido contrario a $\vec{\nabla} n$.

Podemos expresar este flujo ambipolar como:

$$\vec{\Gamma}_a = \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \vec{\nabla} n - D_i \vec{\nabla} n = \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i - \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \vec{\nabla} n = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \vec{\nabla} n.$$

La ecuación anterior es el análogo de la Ley de Fick, donde $D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$ es el coeficiente de difusión ambipolar; luego el análogo a la ley de Fick queda:

$$\vec{\Gamma}_a = -D_a \vec{\nabla} n.$$

El orden de magnitud de D_a es:

$$\mu_e \gg \mu_i \Rightarrow D_a \approx \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e + D_i,$$

y utilizando la relación de Einstein que nos permite eliminar las movilidades, queda como:

$$D_a = \frac{D_i|q|}{k_B T_i} \frac{k_B T_e}{D_e|q|} D_e + D_i = \left(\frac{T_e}{T_i} \right) D_i + D_i = \left(\frac{T_e}{T_i} + 1 \right) D_i.$$

Típicamente $T_e \geq T_i$ luego $D_a \geq 2D_i$ y $D_i \ll D_e$, por lo que llegamos a que en la difusión conjunta de ambas partículas o difusión ambipolar el coeficiente de difusión es $D_a \geq 2D_i$ con $D_a \ll D_e$. Puede comprobarse que el coeficiente de difusión ambipolar D_a es una media ponderada entre los coeficientes de difusión libre de electrones e iones D_e y D_i con unos pesos o coeficientes de ponderación inversos a sus movilidades.

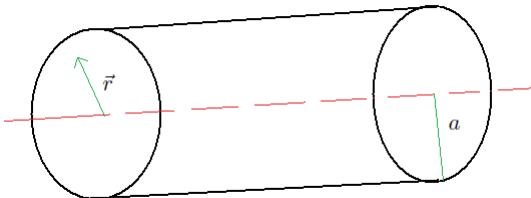
Como consecuencia de todo lo anterior, las partículas pesadas (iones) son más lentas al difundirse y se ven aceleradas por el campo ambipolar. Por el contrario, las partículas ligeras (electrones) tienen más facilidad para difundirse dado que su movilidad es muy alta, por lo que el campo ambipolar las frena. En la situación estacionaria, los fluidos de ambas especies se desplazan y difunden al mismo tiempo sin romper la cuasineutralidad y eso es el régimen de difusión ambipolar.

3.6. Soluciones de la ecuación de difusión.

Analizamos a continuación diversas soluciones de la ecuación de difusión ambipolar anterior para distintas situaciones físicas de interés.

3.6.1. Extinción de un plasma cilíndrico por difusión pura

Suponemos un plasma confinado en un cilindro longitudinalmente infinito, en el que no consideraremos los efectos de los bordes en los límites. Supondremos sólo dependencia radial para el gradiente y las magnitudes (simetría cilíndrica). No tendremos campo magnético actuando sobre el plasma, ni campo eléctrico de mantenimiento de la descarga puesto que el plasma se va a extinguir.



La ecuación de continuidad para el fluido es: $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) = S = G - L$.

Consideraremos que $G = L = 0$, por lo que $S = 0$. No hay mecanismos de ganancia de carga eléctrica por ionización ni mecanismos de pérdidas por recombinación, sólo de pérdidas por difusión hacia las paredes en presencia de gradientes radiales en régimen ambipolar.

Tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}_a = -\vec{\nabla} \cdot (-D_a \vec{\nabla} n) = D_a \nabla^2 n,$$

donde D_a depende de la temperatura electrónica y de la temperatura iónica (supondremos que estas temperaturas apenas varían espacialmente en el cilindro). Esta ecuación diferencial en derivadas parciales es la que controla la extinción temporal del plasma:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \nabla^2 n$$

Podemos aplicar separación de variables para resolver la ecuación diferencial anterior asumiendo que la solución buscada tiene la forma $n(r, t) = T(t)S(r)$. Así, podemos escribir

$$\frac{dT}{dt} S = D_a T \nabla^2 S \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{D_a}{S} \nabla^2 S = cte = -F.$$

La parte temporal queda:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -F \Rightarrow T(t) = T_0 e^{-Ft}.$$

Para la parte espacial tenemos:

$$\nabla^2 S = -\frac{F}{D_a} S.$$

Como sólo tenemos dependencia radial para las magnitudes, en cilíndricas nos queda:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dS}{dr} \right) = -\frac{F}{D_a} S,$$

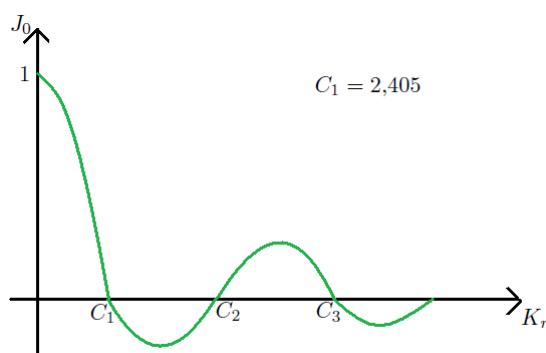
o ecuación de Maxwell:

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \frac{F}{D_a} S = 0,$$

cuyas soluciones son funciones de Bessel de orden cero ($n = 0$) con la constante $K^2 = \frac{F}{D_a}$.

Estas soluciones son combinaciones lineales de las funciones de Bessel de orden cero $S = AJ_0(Kr) + BN_0(Kr)$, donde el primer sumando es la función de Bessel de primera especie y el segundo sumando es la función de Bessel de segunda especie ambas de orden cero.

Se cumple que $N_0(Kr)$ tiende a ∞ cuando $r = 0$, lo que no tiene sentido físico en nuestro ejemplo. Por tanto tomamos $B = 0$. $S = AJ_0(Kr)$. Hay que recordar que:



en $r = a$ se cumple que la densidad de partículas cargadas n se anula ya que en contacto con la pared los electrones e iones se recombinan (condición de contorno). Luego:

$J_0(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = C_1, C_2, \dots, C_n$, son ceros de la función de Bessel $J_0(Kr)$.

Tenemos que:

$$\sqrt{\frac{F}{D_a}}a = C_i \Rightarrow F = \left(\frac{C_i}{a}\right)^2 D_a$$

Como los C_i son crecientes, F es una función creciente con el orden del cero. Además $T = T_0 e^{-Ft}$, por lo que mientras mayor sea F más rápidamente decaerá la densidad de partículas cargadas n con el tiempo.

Para C_1 tenemos la menor F y por tanto la dependencia más lenta con el tiempo. Es la solución que tarda más en extinguirse, es el modo más lento de difusión. Tendremos así que:

$$n(r, t) = n_0 e^{-Ft} J_0(Kr).$$

Durante la extinción del plasma tenemos una caída exponencial con el tiempo a la vez que una dependencia espacial de tipo Bessel.

Para $C_1 = 2,405$ tenemos el 1^{er} cero de la función de Bessel o modo de extinción más lento:

$$K^2 = \frac{F}{D_a} = \left(\frac{C_1}{a}\right)^2 = \frac{1}{\Lambda^2},$$

siendo Λ la longitud característica de difusión $= \frac{a}{C_1} = \frac{a}{2,405}$ (a = radio del plasma cilíndrico).

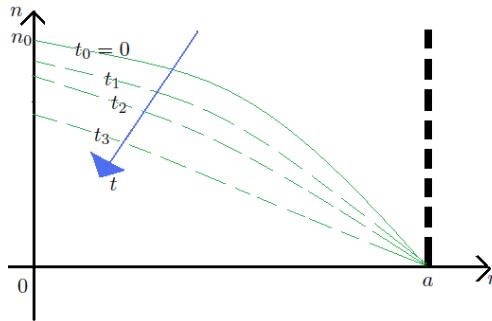
Por tanto,

$$F = \frac{D_a}{\Lambda^2} = \nu_D,$$

es la denominada frecuencia característica de difusión: cuanto mayor es ν_D , más rápidamente se extingue el plasma.

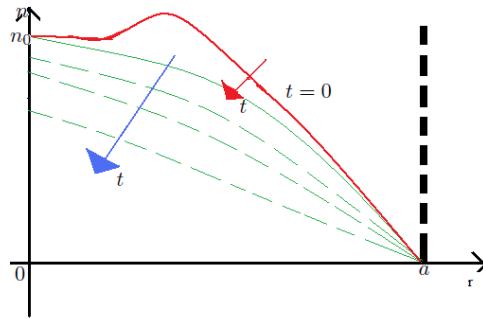
Tenemos que la solución queda: $n(r, t) = n_0 e^{-\nu_D t} J_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right)$.

Y representando gráficamente podemos discutir el resultado:



$$\nu_D \uparrow = \begin{cases} D_a \uparrow \\ \Lambda \downarrow, a \downarrow . \end{cases}$$

Inicialmente puede ocurrir que el perfil radial de densidad electrónica no sea de tipo Bessel, aunque podemos descomponerlo en términos de los distintos modos de difusión dados por los sucesivos ceros de la función de Bessel como hacíamos con el análisis de Fourier, pudiéndose escribir:



$$n(r, t) = \sum_i n_{oi} e^{-\left(\frac{C_i}{a}\right)^2 D_a t} J_0\left(\frac{C_i}{a} r\right) \Rightarrow (t \gg) \Rightarrow \underbrace{i = 1, C_1 = 2,405}_{\text{para tiempos suficientemente largos}}.$$

3.6.2. Estados estacionarios: mantenimiento de la descarga

En la situación estacionaria en la que la descarga se mantiene y el plasma no se extingue, aceptamos que existen ganancias de partículas por ionización que compensan las pérdidas que hay en el plasma pero que éstas son debidas exclusivamente a la difusión, siendo despreciables las pérdidas por recombinación (descarga automantenida en régimen de o controlada por difusión pura). Así, $S = G$ es un término de producción de partículas por ionización mientras que las pérdidas por recombinación son nulas. La ecuación de continuidad para partículas cargadas eléctricamente (electrones o iones) queda ahora como:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) = S = G > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = S.$$

donde consideramos que la única pérdida es la difusión (no existe término L).

En esta situación estacionaria se cumple que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \Rightarrow D_a \nabla^2 n = -S,$$

donde las ganancias dependen de la presión, y sólo hay pérdidas de partículas por transporte hacia fuera del plasma, por la difusión ambipolar hacia las paredes.

Expresamos el término fuente de ionización como (ionización por impacto directo):

$$S_i = n_a \langle \nu_{ea}^i \rangle = n_e \langle \nu^i \rangle = n_a n_e \langle \sigma_{ea}^i (v_e) v_e \rangle = K_{ea}^i n_e n_a,$$

donde K_{ea}^i es la constante del proceso de ionización directa o coeficiente de ionización por impacto directo. En esta descripción cinética, los electrones son las partículas proyectil y los neutros son las partículas blanco, por lo que consideramos que $v_a \ll v_e$.

En la situación estacionaria, llamando simplemente n a la densidad electrónica:

$$D_a \nabla^2 n = -n \langle \nu^i \rangle \Rightarrow \nabla^2 n = -\frac{\langle \nu^i \rangle}{D_a} n = -\frac{K_{ea}^i}{D_a} n_a n.$$

Pero como bajo régimen de pérdidas controladas por difusión ya encontramos en el párrafo anterior que $\nabla^2 n = -\frac{n}{\Lambda^2}$ para solución Bessel para el modo de difusión más lento, de la igualdad anterior se

sigue que en situación estacionaria $\langle \nu^i \rangle = \nu_D$, que traduce el hecho de que el ritmo de ganancias por ionización es igual al ritmo de pérdidas por difusión ambipolar.

- Si el cociente $\frac{\langle \nu^i \rangle}{D_a}$ es una constante independiente de r - cosa que ocurre cuando el campo eléctrico de mantenimiento de la descarga es radialmente constante -, al ser $D_a = \Lambda^2 \nu_D$ se sigue que el cociente queda como $\frac{\langle \nu^i \rangle}{\Lambda^2 \nu_D}$ y la solución es la de Bessel para el modo de difusión más lento. En el caso de un cilindro infinito, $n(r)$ sigue el comportamiento de la función de Bessel de primera especie de orden 0: $n(r) \Rightarrow J_0(r)$.

Las únicas pérdidas son la difusión hacia las paredes, lo que es propio de descargas en régimen por difusión que tiene lugar a bajas densidades y donde la recombinación no tiene ninguna importancia. En este régimen, el mecanismo que controla las pérdidas de partículas en el plasma es solamente la difusión que será ambipolar.

- En el caso en que $\langle \nu^i \rangle \neq cte$ con r , ya no tendríamos como solución un perfil de Bessel. Esto ocurre cuando el campo eléctrico no es constante con r ; es decir, el campo eléctrico de mantenimiento tiene una dependencia radial.
- Si no tenemos ionización directa, en el caso en que haya ionización por etapas, tampoco tendremos como solución un perfil de Bessel. En este otro caso de ionización por etapas, para sólo dos pasos colisionales, uno de excitación a un estado intermedio más otro de ionización desde ese estado, tendríamos:

$$S_{etapas} = K_{ea}^{etapas} n_a n_e^2 = \langle \nu_{ea}^{etapas} \rangle n_e \quad \Rightarrow \quad \langle \nu_{ea}^{etapas} \rangle = K_{ea}^{etapas} n_a n_e$$

Ahora la ganancia dependería de n_e^2 y no de n_e , por lo que al resolver analíticamente la ecuación de continuidad para la situación estacionaria no obtendríamos la solución de Bessel anterior. Esto ocurre cuando estamos en situaciones en las que aumentamos la presión en la descarga, aumenta la densidad electrónica y por tanto las colisiones entre los electrones y los neutros, lo que a su vez favorece el mecanismo de ionización por etapas que puede incluso ser de más de dos pasos.

3.6.3. Pérdidas por recombinación

Queremos estudiar finalmente de forma simplificada cómo tiene lugar la extinción de una columna cilíndrica de plasma cuando no podemos despreciar las pérdidas debido a la recombinación, que supondremos radiativa, por lo que en principio tendremos tanto pérdidas por difusión como pérdidas por recombinación. Los iones son las partículas blancas y los electrones los proyectiles incidentes sobre ellos en la colisión que conduce a la recombinación radiativa, cumpliéndose que $n_i n_e = n_e^2 = n^2$. El término de pérdidas por recombinación en la ecuación de continuidad deberá escribirse como:

$$S_r = -n_i \langle \nu_{ei}^r \rangle = -n_i n_e \underbrace{\langle v_e \sigma_{ei}^r (v_e) \rangle}_{K_{ei}^r = \alpha} = -n_e \langle \nu^r \rangle = -n_e n_i K_{ei}^r = -n_e n_i \alpha = -\alpha n^2,$$

al ser las densidades iónicas y electrónicas iguales.

Aquí, como sabemos, v_e es la velocidad de los electrones mucho mayor que la de los iones v_i , por lo que la velocidad relativa entre ellos es prácticamente v_e , y donde llamamos $\alpha = K_{ei}^r$ al coeficiente de recombinación colisional radiativa.

La ecuación de continuidad queda en este caso escrita como:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = S = S_i + S_r = S_i - \alpha n^2,$$

donde debemos anular el término de creación de partículas ($S_i = 0$) si queremos extinguir el plasma. Si n es suficientemente grande, las pérdidas por recombinación αn^2 pueden incluso ser mayores que las pérdidas por difusión $D_a \nabla^2 n$, lo que ocurre en un régimen de descarga dominado por recombinación para los primeros instantes de la extinción del plasma. En este caso particular y simplificado de extinción de la columna de plasma por recombinación pura tendríamos simplemente:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2,$$

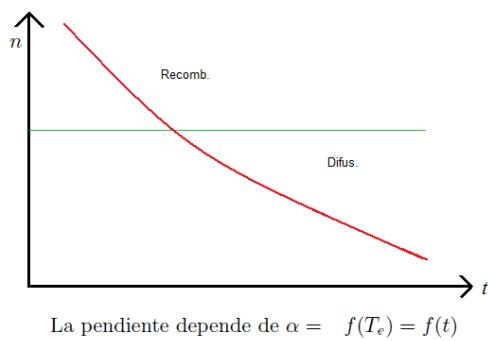
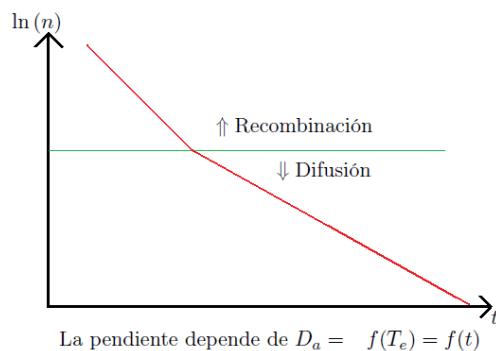
que tiene por solución:

$$\frac{1}{n(r,t)} = \frac{1}{n_0(r)} + \alpha t,$$

siendo $n_0(r)$ la distribución espacial de la densidad en $t = 0$.

A medida que el tiempo aumenta, n disminuye por lo que: $\frac{1}{n} >> \frac{1}{n_0} \Rightarrow n \propto \frac{1}{\alpha t}$.

Representamos gráficamente:



El ritmo de pérdidas durante la extinción es más rápido en los primeros instantes - dominando la recombinación como mecanismo principal de pérdidas - que en los instantes posteriores cuando, al disminuir mucho la densidad electrónica, la recombinación pierde importancia frente a la difusión. Esto puede reconocerse en las distintas pendientes de las figuras.

Tema 4

OSCILACIONES Y ONDAS EN PLASMAS

4.1. *Introducción.*

Los plasmas son unos medios materiales que se caracterizan por permitir a su través la propagación de multitud de oscilaciones de todo tipo: eléctricas, mecánicas, magnéticas, ... En este tema, introduciremos el estudio de estos fenómenos en plasmas infinitos o ilimitados, siendo en general el estudio de la propagación de ondas en plasmas limitados más complejo por la existencia de límites en los que deberemos aplicar condiciones de contorno adecuadas (libro de Quemada, “*Ondes dans Plasmas*”).

Este estudio lo desarrollaremos en el contexto del modelo fluido de plasma del tema anterior, y las ecuaciones que usaremos serán la ecuación de continuidad, la de la fuerza o de Euler, y la de Poisson aplicadas a dicho modelo. El plasma como fluido estará caracterizado por una densidad electrónica e iónica en cada punto así como por un campo de velocidad hidrodinámica, un campo de temperatura, y sobre cada elemento de volumen actuarán campos eléctricos, magnéticos y de presión que ejercerán fuerzas sobre dicho elemento, así como eventualmente existirán fuerzas de fricción por colisiones entre las partículas de los fluidos, como ya sabemos. En definitiva, haremos una descripción macroscópica propia de la física de los fluidos, sólo que se trata de un fluido electrizado que mantiene la quasi-neutralidad eléctrica en el equilibrio. Pues bien, en este medio especial estudiaremos la existencia de oscilaciones de las magnitudes macroscópicas que lo caracterizan como pequeñas perturbaciones respecto al estado de equilibrio, algunas de las cuales podrán propagarse como ondas. Desarrollaremos por tanto una teoría lineal de las oscilaciones y ondas en plasmas.

Analizaremos distintos tipos dependiendo de que sólo sea el fluido electrónico - más ligero - el que oscile, o sea el fluido iónico, o sean ambos. Así distinguiremos entre ondas electrónica y ondas iónicas. También analizaremos la propagación de ondas electromagnéticas en el seno de plasmas, para las que éste será el medio de propagación considerado como un dieléctrico. Estudiaremos para empezar ondas electrónicas planas en plasmas fríos no colisionales homogéneos e ilimitados, lo que supone el caso más simple de propagación de ondas en plasmas. Posteriormente, iremos completando nuestro estudio con situaciones más complejas como la propagación en plasmas calientes, con colisiones, y con campo magnético externo. Igualmente, a continuación, las ondas iónicas en los mismos casos, para acabar finalmente con la propagación de ondas electromagnéticas en plasmas. Como buscaremos soluciones armónicas a dicha propagación, usaremos habitualmente notación fasorial compleja tal que la parte real represente la onda.

Nuestro medio de propagación o plasma fluido estará compuesto por tanto de un fluido eléctrica-

mente negativo (fluido electrónico), de otro eléctricamente positivo (fluido iónico) y el gas neutro, todos los cuales podrán sufrir oscilaciones que - cuando se den las condiciones - se propagarán como ondas de forma individual o colectiva, existiendo a veces acople entre modos de propagación electrónicos y modos de propagación iónicos. En la situación de equilibrio (ausencia de perturbación oscilante), las densidades electrónica e iónica serán iguales manteniéndose la quasi-neutralidad eléctrica.

En general, el plasma será un medio dispersivo para la propagación de estas ondas, lo que significa que su velocidad depende de la frecuencia. Como es habitual en propagación de ondas, la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ nos permitirá determinar tanto la velocidad de fase $v_f = \frac{\omega}{k}$ como la velocidad de grupo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, conceptos que entendemos sobradamente conocidos.

Como resumen tenemos:

- Ondas electrónicas: Ondas longitudinales de compresión-descompresión del gas de electrones.
- Ondas iónicas: Ondas longitudinales de compresión-descompresión del gas iónico.
- Ondas electromagnéticas: Ondas transversales producidas por la acción conjunta de campos eléctrico y magnético rápidamente oscilante en el tiempo.

Cada una de estas ondas está caracterizada por su relación de dispersión $\omega(\vec{k})$. Recordamos:

- Medio dispersivo: Cada onda se propaga de una manera determinada en un medio dado tal que su velocidad de propagación depende de su frecuencia. Ej.: haz de luz propagándose por un dieléctrico (prisma, arco iris, ...). La relación de dispersión recoge las propiedades de propagación de la onda ligadas a las propiedades del medio.
- \vec{k} es complejo $\left\{ \begin{array}{l} \text{parte real} \Rightarrow \text{propagación.} \\ \text{parte imaginaria} \Rightarrow \text{atenuación.} \end{array} \right.$
- Velocidad de fase: Velocidad de propagación de los frentes de onda: $v_f = \frac{\omega}{k}$
- Velocidad de grupo: Velocidad con la que se propagan las magnitudes impulso y energía: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
- Medio no dispersivo: Aquel en el que la velocidad de fase coincide con la de grupo, y ninguna depende de la frecuencia. Ej.: ondas electromagnéticas en el vacío.

4.2. Oscilaciones y ondas electrónicas.

4.2.1. Oscilaciones electrónicas en ausencia de campo magnético

Lo único relevante van a ser los electrones del plasma. Los iones de mayor masa, permanecen imperturbables en equilibrio. Al pasar la perturbación, ésta sólo altera a los electrones. Éstos estarán tan fríos que prácticamente estarán parados y despreciamos la agitación térmica, aunque esta hipótesis tiene poca realidad física.

Supondremos así para empezar que $T_e = 0$, electrones inmóviles sin agitación térmica. En este caso los electrones realizan una oscilación colectiva única a la frecuencia electrónica del plasma $\omega_p = \omega_{pe}$ dada por:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Para describir la dinámica de estas oscilaciones electrónicas usaremos la ecuación de continuidad, la ecuación de la fuerza sobre un elemento de volumen o de Euler y la ecuación de Poisson aplicadas al fluido electrónico.

1) Ecuación de Euler o de la fuerza:

$$m_e n_e \left\{ \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e \right\} = -e n_e \vec{E}$$

donde: $\frac{d\vec{u}_e}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e$ es la derivada sustancial.

Como $T_e = 0$ no aparece el término de gradiente de presión en la ecuación de movimiento del elemento de volumen al no haber agitación térmica. También despreciamos en principio el término de colisión \vec{T}_c debido a la creación o destrucción de partículas, así como a la fricción del fluido electrónico con el resto del plasma.

$m_e \frac{d\vec{u}_e}{dt} = -e \vec{E} \Rightarrow$ Ecuación de movimiento para el electrón promedio al desaparecer de la ecuación la densidad electrónica n_e

2) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_e}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}_e$$

3) Ecuación de Poisson:

Existe separación entre carga oscilante electrónica y carga inmóvil iónica, y aparece un campo electrostático restaurador

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = e \frac{n_i - n_e}{\epsilon_0}$$

Tenemos que buscar soluciones armónicas para este conjunto de tres ecuaciones que rige la dinámica del fluido electrónico.

Podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_0 & \Rightarrow \text{Valor equilibrio} \\ \vec{E}_1 & \Rightarrow \text{Valor perturbado} \end{cases}$$

Como $\vec{E}_0 = 0$ en ausencia de perturbación por la cuasineutralidad, $\vec{E} = \vec{E}_1$

Para las densidades de partículas cargadas tendremos:

$n_e = n_{e0} + n_{e1}$, para electrones; $n_i = n_{i0}$, para iones (los iones no se perturban),

y supondremos que las perturbaciones serán mucho menores que los valores de equilibrio: $n_{e1} \ll n_{e0}$.

Por otra parte, para la velocidad del elemento de fluido electrónico:

$\vec{u}_e = \vec{u}_{e0} + \vec{u}_{e1}$, siendo $\vec{u}_{e0} = 0$ por considerar que el elemento de fluido está en reposo en ausencia de perturbación.

Tenemos que llevar todo esto a nuestras ecuaciones... Reescribimos las ecuaciones (1), (2) y (3) de la forma:

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}_{e1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{e1}}_{\simeq 0} \right] = -e \vec{E}_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_{e0} \vec{u}_{e1}) + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (n_{e1} \vec{u}_{e1})}_{\simeq 0} = \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e1} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1} \quad (3)$$

Éstas son las ecuaciones anteriores linealizadas en la perturbación en las que hemos despreciado los términos cuadráticos en la perturbación al ser éstos mucho menores que los lineales, al tratarse de pequeñas perturbaciones. Queremos hacer una teoría lineal de la propagación de ondas en plasmas.

Buscamos soluciones armónica a la frecuencia ω para la propagación de la perturbación en la dirección positiva del eje x (modelo monodimensional) del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} n_{e1}(x, t) = \tilde{n}_{e1} e^{i(\omega t - kx)} \\ \vec{u}_{e1}(x, t) = \tilde{u}_{e1} e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \\ \vec{E}_1(x, t) = \tilde{E}_1 e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \end{array} \right\} \text{El fasor lleva la amplitud y la fase inicial.}$$

Imponemos estas soluciones en las ecuaciones y tenemos:

$$(1) \quad m_e \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = i\omega \tilde{u}_{e1} m_e e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} = i\omega m_e \vec{u}_{e1}$$

$$u_{e1} \frac{\partial u_{e1}}{\partial x} \vec{i} = u_{e1} (-ik) u_{e1} \vec{i} = -ik u_{e1}^2 \vec{i} \quad (\text{lo despreciamos } u_{e1}^2 \ll u_{e1})$$

$$-e \vec{E}_1 = -e \tilde{E}_1 e^{i(\omega t - kx)} \vec{i}$$

La ecuación (1) queda:

$$i\omega m_e \tilde{u}_{e1} = -e \tilde{E}_1 \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} = i\omega \tilde{n}_{e1} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$n_{e0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e1}) = n_{e0} \frac{\partial u_{e1}}{\partial x} = -ik n_{e0} \tilde{u}_{e1} e^{i(\omega t - kx)}$$

La ecuación (2) queda:

$$\omega \tilde{n}_{e1} = k n_{e0} \tilde{u}_{e1} \quad (2)$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\partial E_1}{\partial x} = -ik \tilde{E}_1 e^{i(\omega t - kx)}; \quad -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \tilde{n}_{e1} e^{i(\omega t - kx)}$$

La ecuación (3) queda:

$$ik \tilde{E}_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} \tilde{n}_{e1} \quad (3)$$

Nuestras incógnitas son \tilde{E}_1 , \tilde{n}_{e1} y \tilde{u}_{e1} . Para encontrar la solución hacemos:

$$(I) \quad \frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{k n_{e0} \tilde{u}_{e1}}{ik \tilde{E}_1} = \frac{\omega \tilde{n}_{e1}}{\frac{e}{\varepsilon_0} \tilde{n}_{e1}} \Rightarrow \frac{n_{e0} \tilde{u}_{e1}}{\varepsilon_0 \tilde{E}_1} = \frac{i\omega}{e}$$

(II) Despejamos \tilde{E}_1 de (1) y eliminamos \tilde{E}_1 en (I)

$$\frac{n_{e0} \tilde{u}_{e1}}{-\varepsilon_0 \frac{i\omega m_e \tilde{u}_{e1}}{e}} = \frac{i\omega}{e}$$

El sistema es compatible indeterminado. Pero llegamos a la siguiente relación:

$$\frac{n_{e0} e}{\varepsilon_0 m_e \omega} = \frac{\omega}{e} \Rightarrow \omega^2 = \frac{n_{e0} e^2}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_{pe}^2$$

Es una oscilación colectiva que no implica propagación de onda, a la frecuencia del plasma para electrones ω_{pe} . No aparece propagación de onda alguna al no existir en esta primera solución el

parámetro característico de las ondas, el vector de onda \vec{k} . Lo que sí podemos hacer es asignar un valor a \tilde{E}_1 y encontrar \tilde{n}_{e_1} y \tilde{u}_{e_1} . No es un problema autoconsistente...

4.2.2. Ondas electrónicas en un plasma no magnetizado

Volvamos ahora a las mismas ecuaciones anteriores pero teniendo en cuenta la agitación térmica de los electrones, o sea, $T_e \neq 0$, lo que nos permite retomar el término de fuerzas debido a $-\vec{\nabla}p_e$ en la ecuación de movimiento. No obstante, seguimos sin considerar por el momento el término de colisión \vec{T}_c .

- 1) Ecuación de Euler o de la fuerza:

$$m_e n_e \left\{ \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e \right\} = -en_e \vec{E} - \vec{\nabla}p_e$$

$\vec{\nabla}p_e \equiv$ Gradiente de presión (presión total sobre el elemento de volumen debida a la agitación térmica de los electrones). La presión de los neutros e iones es constante y su gradiente nulo.

- 2) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0$$

- 3) Ecuación de Poisson:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = e(n_i - n_e)$$

Ecuación de transformación adiabática para los electrones:

$$T_e \neq 0, p_e = C n_e^\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

No hay tiempo para que haya intercambio de calor - asumimos que la perturbación es muy rápida respecto al transporte de calor por conducción térmica -, por lo que la transformación es adiabática. Las compresiones y descompresiones son tan rápidas que no da tiempo a que se equilibren las temperaturas entre elementos de volumen contiguos, que se comportan como si estuviesen térmicamente (cuasi) aislados. En el caso opuesto, cabría considerar la transformación isotérmica. La ecuación de transformación adiabática queda:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}p_e &= \vec{\nabla}(C n_e^\gamma) = \gamma C n_e^{\gamma-1} \vec{\nabla}n_e = \gamma C n_e^{\gamma-1} \frac{\vec{\nabla}n_e}{n_e} \\ \frac{\vec{\nabla}p_e}{p_e} &= \gamma \frac{\vec{\nabla}n_e}{n_e} = \frac{c_p}{c_v} \frac{\vec{\nabla}n_e}{n_e} \end{aligned}$$

Ecuación de transformación isotérmica para los electrones:

Si eventualmente el movimiento del fluido electrónico fuese isotérmico, aunque en nuestro caso no lo va a ser, la ecuación de transformación isotérmica sería:

$$\frac{\vec{\nabla}p_e}{p_e} = \frac{\vec{\nabla}(n_e k_B T_e)}{p_e} = \frac{k_B T_e \vec{\nabla}n_e}{n_e k_B T_e} = \frac{\vec{\nabla}n_e}{n_e} \Rightarrow \nu = 1.$$

Pero en nuestro proceso de compresión-descompresión adiabática para el fluido electrónico ($\nu \neq 1$ si no que $\nu = \gamma = \frac{c_p}{c_v}$), tenemos

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{2 + \text{dim}}{\text{dim}} = \frac{2 + 1}{1} = 3 \quad (\text{en 1 dimensión})$$

Luego:

$$\frac{\vec{\nabla}p_e}{p_e} = 3 \frac{\vec{\nabla}n_e}{n_e} \Rightarrow \vec{\nabla}p_e = 3k_B T_e \vec{\nabla}n_e$$

Como ahora T_e no puede equilibrarse, será considerada como una magnitud oscilante; es decir, otra perturbación.

$$T_e = T_{eq} + T_{perturb} \quad \text{siendo } T_{perturb} \ll T_{eq}$$

$$T_e = T_{e_0} + T_{e_1} \quad \text{siendo } T_{e_1} \ll T_{e_0}$$

Detallamos las expresiones de las perturbaciones:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}_1$$

$$n_e = n_{e_0} + n_{e_1} \text{ con } n_{e_1} \ll n_{e_0}$$

$$n_i = n_{i_0} \text{ (sin cambios)}$$

$$\vec{u}_e = \vec{u}_{e_0} + \vec{u}_{e_1} = \vec{u}_{e_1} \quad \text{al suponer que } \vec{u}_{e_0} = 0 \text{ (fluido en equilibrio en reposo)}$$

$$T_e = T_{e_0} + T_{e_1}$$

Ahora linealizamos las ecuaciones en la perturbación, reteniendo sólo términos lineales y despreciando los cuadráticos. Esto sólo es justificable si las perturbaciones, del tipo que sean, son pequeñas. Para las mismas tres ecuaciones anteriores, tenemos:

$$(1) \quad m_e n_{e_0} \frac{\partial \vec{u}_{e_1}}{\partial t} + m_e n_e \underbrace{(\vec{u}_{e_1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{e_1}}_{=0} = -en_{e_0} \vec{E}_1 - \underbrace{en_{e_1} \vec{E}_1}_{=0} - 3k_B T_{e_0} \vec{\nabla} n_{e_1} - \underbrace{3k_B T_{e_1} \vec{\nabla} n_{e_1}}_{=0} =$$

$$-en_{e_0} \vec{E}_1 - 3k_B T_{e_0} \vec{\nabla} n_{e_1}$$

$$(2) \quad \frac{\partial n_{e_1}}{\partial t} + n_{e_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e_1} = 0$$

$$(3) \quad \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -en_{e_1}$$

Tenemos como incógnitas las perturbaciones: $n_{e_1}, \vec{u}_{e_1}, \vec{E}_1$. Imponemos de nuevo soluciones propagativas armónicas a la frecuencia ω en la dirección positiva del eje x :

$$\left. \begin{aligned} n_{e_1}(x, t) &= \tilde{n}_{e_1} e^{i(\omega t - kx)} \\ \vec{u}_{e_1}(x, t) &= \tilde{\vec{u}}_{e_1} e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \\ \vec{E}_1(x, t) &= \tilde{\vec{E}}_1 e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \end{aligned} \right\} \text{El fasor lleva la amplitud y la fase inicial.}$$

Llevándolas a las ecuaciones tenemos:

$$i\omega m_e n_{e_0} \tilde{u}_{e_1} e^{i(\omega t - kx)} = -en_{e_0} \tilde{\vec{E}}_1 e^{i(\omega t - kx)} - 3(-ik) k_B T_{e_0} \tilde{n}_{e_1} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$i\omega m_e n_{e_0} \tilde{u}_{e_1} = -en_{e_0} \tilde{\vec{E}}_1 + 3ik_B T_{e_0} \tilde{n}_{e_1} k \quad (1)$$

La ecuación (2) queda como en el caso anterior, es decir:

$$\omega \tilde{n}_{e_1} = kn_{e_0} \tilde{u}_{e_1} \Rightarrow \tilde{n}_{e_1} = \frac{k}{\omega} n_{e_0} \tilde{u}_{e_1} \quad (2)$$

Para la ecuación (3) es también como en el caso anterior:

$$(3) \quad -ik\varepsilon_0 \tilde{\vec{E}}_1 = e \tilde{n}_{e_1} \Rightarrow \tilde{\vec{E}}_1 = \frac{e}{ik\varepsilon_0} \tilde{n}_{e_1} = -i \frac{e}{k\varepsilon_0} \frac{k}{\omega} n_{e_0} \tilde{u}_{e_1} = -i \frac{e}{\varepsilon_0 \omega} n_{e_0} \tilde{u}_{e_1}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos (eliminamos las perturbaciones del campo eléctrico $\tilde{\vec{E}}_1$ y la densidad electrónica \tilde{n}_{e_1}):

$$i\omega m_e n_{e_0} \tilde{u}_{e_1} = ien_{e_0}^2 \frac{e}{\varepsilon_0 \omega} \tilde{u}_{e_1} + 3ik_B T_{e_0} \frac{k^2}{\omega} n_{e_0} \tilde{u}_{e_1}.$$

Volvemos a tener un sistema compatible indeterminado.

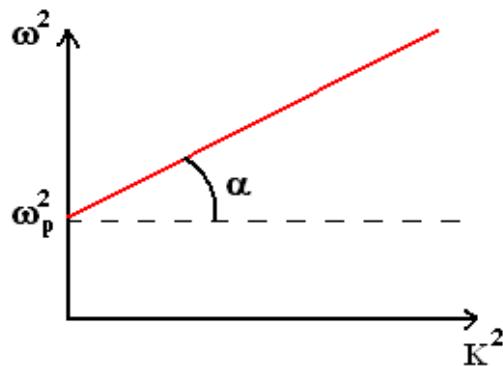
$$\omega^2 = \underbrace{\frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 m_e}}_{\omega_{pe}^2} + \underbrace{3 \frac{k_B T_{e_0}}{m_e} k^2}_{v_{cm}^2} = \omega_{pe}^2 + 3v_{th}^2 k^2,$$

donde $v_{cm} \equiv$ es la velocidad cuadrática media de los electrones y $v_{th} \equiv$ es la velocidad térmica de los electrones $v_{th}^2 = \frac{k_B T_{e_0}}{m_e}$.

Llegamos así a la relación de dispersión de las ondas electrónicas en plasmas ilimitados en su forma cuadrática:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_{th}^2 k^2.$$

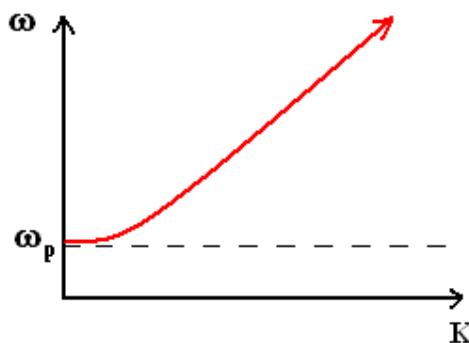
y ahora sí tenemos la propagación de una onda pues aparece el número de onda k . Gráficamente



con $\operatorname{tg} \alpha = v_{cm}^2 = 3v_{th}^2$.

Sacando la raíz cuadrada: $\omega(k) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3v_{th}^2 k^2}$

y representando:



Estudiamos ahora las velocidades de fase v_f y de grupo v_g :

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + \frac{3k_B T_e}{m_e}} \Rightarrow (\omega_p = \omega_{pe} \text{ y } T_e = T_{e_0})$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{cm}^2 \frac{k}{\omega} = \frac{v_{cm}^2}{v_f} \Rightarrow v_{cm}^2 = v_f v_g: \text{el producto de ambas es constante e igual a } v_{cm}^2.$$

Estudiamos dos casos límites:

$$1) \quad k \rightarrow \infty : \quad v_f \rightarrow v_{cm}, \quad v_g \rightarrow v_{cm}$$

En esta situación $\omega \gg \omega_p$, por lo que el plasma actúa como un medio no dispersivo a la perturbación.

Dentro de este límite si enfriamos súbitamente el plasma $T_e \rightarrow 0$, la curva se acortaría sobre ω_{pe} lo que nos llevaría a la oscilación colectiva de todo el plasma: $\omega = \omega_{pe}$.

- 2) $\underbrace{k \rightarrow 0}_{\lambda \rightarrow \infty}$: $v_f \rightarrow \infty$, $v_g \rightarrow 0$: No hay propagación, no hay onda electrónica.

Volvemos solamente a tener de nuevo la oscilación colectiva de todo el plasma a la frecuencia ω_{pe} .

Lo visto hasta ahora se ha hecho suponiendo que la masa inercial de los iones es tan elevada que éstos no pueden seguir la perturbación eléctrica oscilante tan rápidamente.

A frecuencias armónicas de perturbación oscilante mucho mas bajas, puede darse el caso de que los iones sigan también a la perturbación eléctrica, apareciendo en este caso ondas iónicas. Los electrones continuarán dando lugar a ondas electrónicas que en principio seguirían a las iónicas, más lentas.

4.2.3. Ondas electrónicas con atenuación

Para resolver este problema tomaremos el mismo planteamiento que llevamos haciendo hasta ahora pero incluyendo el término de colisión en la ecuación de Euler o de la fuerza, añadiendo el término de rozamiento o de fricción asociado a la velocidad de los electrones (partículas proyectiles) y a su frecuencia de colisión con las restante partículas del plasma (partículas blanco). Las ecuaciones de continuidad y de Poisson seguirán siendo las mismas que teníamos linealizadas en la perturbación para el caso anterior sin fricción. Esto será suficiente para resolver el problema y que aparezcan ondas electrónicas con atenuación.

- 1) Ecuación de Euler o de la fuerza:

$$m_e n_e \left\{ \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e \right\} = -en_e \vec{E} - \vec{\nabla} p_e - m_e n_e \nu_e \vec{u}_e$$

Siendo ν_e la frecuencia de colisión efectiva de los electrones (en promedio) con el resto de las partículas del plasma

- 2) Ecuación de continuidad de la carga:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e1} = 0$$

- 3) Ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

Buscamos soluciones armónicas de la forma:

$$\left. \begin{aligned} n_{e1}(x, t) &= \tilde{n}_{e1} e^{i(\omega t - kx)} \\ \vec{u}_{e1}(x, t) &= \tilde{u}_{e1} e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \\ \vec{E}_1(x, t) &= \tilde{E}_1 e^{i(\omega t - kx)} \vec{i} \end{aligned} \right\}$$

Linealizamos la ecuación (1), de las otras dos obtendremos el mismo resultado que en el apartado anterior.

$$(1) \quad m_e n_{e0} \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} + m_e n_{e0} \nu_e \vec{u}_{e1} = -en_{e0} \vec{E}_1 - 3k_B T_{e0} \vec{\nabla} n_{e1}$$

Los demás términos eliminados darían producto de perturbaciones, que serían de orden cuadrático y sólo nos interesan los términos lineales en la perturbación. Para las soluciones armónicas puras a la frecuencia ω tenemos:

$$(2) \quad \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \frac{\partial u_{e1}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega \tilde{n}_{e1} = kn_{e0} \tilde{u}_{e1}} \quad (2) \Rightarrow \tilde{n}_{e1} = \frac{k}{\omega} n_{e0} \tilde{u}_{e1}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_{e_1} \Rightarrow -ik\epsilon_0 \tilde{E}_1 = -e\tilde{n}_{e_1} \quad (3) \Rightarrow \tilde{E}_1 = \dots = -i\frac{e}{\epsilon_0\omega} n_{e_0} \tilde{u}_{e_1}$$

$$(1) \quad i\omega \tilde{u}_{e_1} m_e n_{e_0} + m_e n_{e_0} \nu_e \tilde{u}_{e_1} = -en_{e_0} \tilde{E}_1 - 3k_B T_{e_0} (-ik) \tilde{n}_{e_1}$$

$$(2) \quad \omega \tilde{n}_{e_1} = kn_{e_0} \tilde{u}_{e_1} \Rightarrow \tilde{u}_{e_1} = \frac{\omega \tilde{n}_{e_1}}{kn_{e_0}}$$

$$(3) \quad -ik\epsilon_0 \tilde{E}_1 = -e\tilde{n}_{e_1} \Rightarrow \tilde{E}_1 = \frac{e\tilde{n}_{e_1}}{ik\epsilon_0}$$

Resolvemos el sistema sustituyendo la velocidad y el campo en la expresión (1)

$$i\omega m_e n_{e_0} \frac{\omega \tilde{n}_{e_1}}{kn_{e_0}} + m_e n_{e_0} \nu_e \frac{\omega \tilde{n}_{e_1}}{kn_{e_0}} = -en_{e_0} \frac{e\tilde{n}_{e_1}}{ik\epsilon_0} + 3k_B T_{e_0} ik\tilde{n}_{e_1}$$

Simplifico \tilde{n}_{e_1} , multiplico por $-ik$,

$$\omega^2 m_e - im_e \nu_e \omega = e^2 \frac{n_{e_0}}{\epsilon_0} + 3k_B T_{e_0} k^2$$

y divido por m_e

$$\omega^2 - i\nu_e \omega = \underbrace{\frac{n_{e_0} e^2}{m_e \epsilon_0}}_{\omega_p^2} + \underbrace{3 \frac{k_B T_{e_0}}{m_e}}_{3v_{th}^2} k^2.$$

De manera que hemos llegado a la relación de dispersión en forma cuadrática de las ondas electrónicas amortiguadas:

$$\omega^2 - i\nu_e \omega = \omega_p^2 + 3v_{th}^2 k^2$$

Introducimos un número de onda k complejo de la forma $k = \beta + i\alpha$ tal que podemos obtener dos ecuaciones para la relación de dispersión, una para la parte real y otra para la parte imaginaria: la primera nos informa de cómo se propaga la perturbación armónica, la segunda de cómo se atenúa durante dicha propagación. Como $k^2 = (\beta + i\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta$, podemos escribir:

Re:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3v_{th}^2 (\beta^2 - \alpha^2)$$

Im:

$$-\nu_e \omega = 6v_{th}^2 \alpha \beta$$

Para el caso de propagación con baja atenuación $\alpha \ll \beta$, consecuencia de que $\nu_e \ll \omega$, las expresiones separadas anteriores se simplifican notablemente. Se sugiere terminar estos aspectos de la propagación de ondas electrónicas con débil atenuación como ejercicio.

4.2.4. Oscilaciones electrónicas en un plasma magnetizado

Usamos las hipótesis de los apartados anteriores sin agitación térmica ($T_e = 0$) ni término de fricción, y añadimos el campo magnético externo constante en dirección z , $\vec{B}_0 = B_0 \vec{k} = Cte$. En efecto, volvemos a considerar inicialmente la simplificación de plasmas fríos con $T_e = 0$ (sin agitación térmica para los electrones). Así, podremos escribir las ecuaciones correspondientes al movimiento del fluido electrónico en presencia de campo magnético externo como:

- 1) Ecuación de Euler:

$$m_e \nu_e \left\{ \frac{\partial \vec{u}_{e_1}}{\partial t} + (\vec{u}_{e_1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{e_1} \right\} = -e \nu_e \vec{E}_1 - e \nu_e (\vec{u}_{e_1} \times \vec{B}_0)$$

Aceptamos que el campo magnético \vec{B}_0 en el interior no se ve afectado por el movimiento de las cargas. Esto hará que podamos escribir el campo sin perturbar.

- 2) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_{e_1}}{\partial t} + n_{e_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e_1} = 0$$

- 3) Ecuación de Poisson:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -en_{e_1}.$$

Imponemos soluciones armónicas para las perturbaciones a la frecuencia ω , como ya hemos hecho anteriormente:

$$(1) \text{ En componentes} \left\{ \begin{array}{l} i\omega m_e \tilde{u}_{e_{1x}} = -e\tilde{E}_1 - eB_0 \tilde{u}_{e_{1y}} \\ i\omega m_e \tilde{u}_{e_{1y}} = 0 + eB_0 \tilde{u}_{e_{1x}} \Rightarrow \tilde{u}_{e_{1y}} = -i \frac{eB_0}{\omega m_e} \tilde{u}_{e_{1x}} \\ i\omega m_e \tilde{u}_{e_{1z}} = 0 \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de la componente y de la velocidad en la ecuación del movimiento del eje x , ésta se reduce a:

$$(1) \quad i\omega m_e \tilde{u}_{e_{1x}} = -e\tilde{E}_1 + i \frac{e^2 B_0^2}{\omega m_e} \tilde{u}_{e_{1x}}$$

$$(2) \quad \omega \tilde{n}_{e_1} = k n_{e_0} \tilde{u}_{e_{1x}} \Rightarrow \tilde{n}_{e_1} = n_{e_0} \frac{k}{\omega} \tilde{u}_{e_{1x}}$$

$$(3) \quad -i\varepsilon_0 k \tilde{E}_1 = -e \tilde{n}_{e_1} \Rightarrow \tilde{E}_1 = -i \frac{n_{e_0} e}{\varepsilon_0 \omega} \tilde{u}_{e_{1x}}$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando ω obtenemos la solución buscada, solución que resulta ser sólo oscilante (no propagativa al no aparecer k):

$$\begin{aligned} i\omega m_e \cancel{\tilde{u}_{e_{1x}}} &= -e(-i) \frac{n_{e_0} e}{\varepsilon_0 \omega} \cancel{\tilde{u}_{e_{1x}}} + i \frac{e^2 B_0^2}{\omega m_e} \cancel{\tilde{u}_{e_{1x}}} \\ \omega^2 &= \underbrace{\frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 m_e}}_{\omega_{pe}^2} + \underbrace{\left(\frac{e B_0}{m_e} \right)^2}_{\omega_c^2} = \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad ; \quad \omega = \omega_h = (\omega_{pe}^2 + \omega_c^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

siendo ω_p la frecuencia de plasma para electrones y ω_c la frecuencia ciclotrónica de los electrones en el seno del campo magnético. Como vemos, la frecuencia propia de oscilación del plasma en su conjunto (sin propagación) en presencia de campo magnético tiene un origen híbrido, ω_h . Es una frecuencia de oscilación colectiva, y como no depende de k no hay propagación de la oscilación en forma de onda, sólo oscilación del plasma en su conjunto.

4.2.5. Ondas electrónicas en un plasma magnetizado

Estudiamos la propagación de una onda electrónica en un plasma en presencia de campo magnético. Suponemos perturbaciones de campo eléctrico y magnético pequeñas, de forma que sólo afecten a los electrones del sistema, dejando inmóviles a los iones. Para ello debemos supondremos que existe una temperatura electrónica no nula, ($T_e \neq 0$) que dará lugar a un gradiente de presión durante la perturbación, que influirá en la aparición y propagación de la onda. La oscilación se propagará en una dirección arbitraria del plano x, y paralela al campo eléctrico ($\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j} \parallel \vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j}$), y perpendicular al campo magnético $\vec{B} = B_0\vec{k}$.

Comenzamos el estudio, planteando las ecuaciones que resolverán la dinámica de este nuevo caso. Dichas ecuaciones serán: la ecuación de Euler o de la fuerza, que contemplará términos de fuerza eléctrica, fuerza magnética y fuerza debida al gradiente de presión de los electrones, y donde

consideramos por el momento que no existe término por colisión entre las partículas, lo que darían lugar a la atenuación de la onda electrónica como ya sabemos; la ecuación de continuidad para el fluido electrónico y la ecuación de Poisson para describir la separación espacial durante la oscilación de la carga electrónica respecto a la iónica.

1) Ecuación de Euler:

$$m_e n_{e_0} \left\{ \frac{\partial \vec{u}_{e_1}}{\partial t} + (\vec{u}_{e_1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{e_1} \right\} = -en_{e_0} \vec{E}_1 - en_{e_0} (\vec{u}_{e_1} \times \vec{B}_0) - \frac{\gamma(\text{adia.})}{3} k_B T_{e_0} \vec{\nabla} n_{e_1}.$$

Aceptamos que el campo magnético \vec{B}_0 en el interior no se ve afectado por el movimiento de las cargas. Esto hará que podamos escribir el campo sin perturbar. A la hora de linealizar las ecuaciones despreciamos el término de gradiente de velocidad de la ecuación de Euler, ya que dará un producto de perturbaciones de segundo orden en la perturbación.

2) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_{e_1}}{\partial t} + n_{e_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e_1} = 0$$

3) Ecuación de Poisson:

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -en_{e_1}$$

Hacemos las consideraciones de que partimos del fluido en reposo, en el que el campo y la velocidad sin perturbar son nulos. Debemos notar también que durante un periodo de oscilación, aunque la compresión-descompresión del fluido electrónico será pequeña, al ser adiabático el proceso la temperatura electrónica estará perturbada: $T_e = T_{e_0} + T_{e_1}$; con $T_{e_1} \ll T_{e_0}$. Dicho esto, pasamos a escribir las ecuaciones anteriores en componentes, linealizando a la perturbación:

$$(1) \quad m_e n_{e_0} \frac{\partial u_{e_1x}}{\partial t} + m_e n_{e_0} \frac{\partial u_{e_1y}}{\partial t} = -en_{e_0} \vec{E}_{1x} \vec{i} - en_{e_0} \vec{E}_{1y} \vec{j} - en_{e_0} B_0 u_{e_1y} \vec{i} + en_{e_0} B_0 u_{e_1x} \vec{j} - 3k_B T_{e_0} \frac{\partial n_{e_1}}{\partial x} \vec{i} - 3k_B T_{e_0} \frac{\partial n_{e_1}}{\partial y} \vec{j}$$

$$(2) \quad \frac{\partial n_{e_1}}{\partial t} = -n_{e_0} \frac{\partial u_{e_1x}}{\partial x} - n_{e_0} \frac{\partial u_{e_1y}}{\partial y}$$

$$(3) \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} = -en_{e_1}$$

Ahora imponemos soluciones armónicas del tipo $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ para todas las perturbaciones, por lo que tenemos

$$(1a) \quad i\omega \tilde{u}_{e_1x} m_e = -e \tilde{E}_{1x} - e B_0 \tilde{u}_{e_1y} - \frac{3k_B T_{e_0} (-ik_x)}{n_{e_0}} \tilde{n}_{e_1}$$

$$(1b) \quad i\omega \tilde{u}_{e_1y} m_e = -e \tilde{E}_{1y} + e B_0 \tilde{u}_{e_1x} - \frac{3k_B T_{e_0} (-ik_y)}{n_{e_0}} \tilde{n}_{e_1}$$

Estas son las ecuaciones de Euler para el eje x y para el eje y . Para las ecuaciones de continuidad y de Poisson, resulta

$$(2) \quad \omega \tilde{n}_{e_1} = n_{e_0} [k_x \tilde{u}_{e_1x} + k_y \tilde{u}_{e_1y}] \Rightarrow \tilde{n}_{e_1} = n_{e_0} \left[\frac{k_x}{\omega} \tilde{u}_{e_1x} + \frac{k_y}{\omega} \tilde{u}_{e_1y} \right] = n_{e_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{u}_{e_1}}{\omega}$$

$$(3) \quad -i\varepsilon_0 [k_x \tilde{E}_{1x} + k_y \tilde{E}_{1y}] = -i\varepsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -e \tilde{n}_{e_1} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -i \frac{e}{\varepsilon_0} \tilde{n}_{e_1}$$

Sustituyendo (2) en (3) tenemos

$$(4) \quad k_x \tilde{E}_{1x} + k_y \tilde{E}_{1y} = -i \frac{e n_{e_0}}{\varepsilon_0 \omega} [k_x \tilde{u}_{e_1x} + k_y \tilde{u}_{e_1y}]$$

Por otra parte, si multiplicamos la ecuación (1a) por k_x y la (1b) por k_y ,

$$(1a) \quad i\omega \tilde{u}_{e_{1x}} m_e k_x = -ek_x \tilde{E}_{1x} - ek_x B_0 \tilde{u}_{e_{1y}} + i \frac{3k_B T_{e0} k_x^2}{n_{e0}} \tilde{n}_{e_1}$$

$$(1b) \quad i\omega \tilde{u}_{e_{1y}} m_e k_y = -ek_y \tilde{E}_{1y} + ek_y B_0 \tilde{u}_{e_{1x}} + i \frac{3k_B T_{e0} k_y^2}{n_{e0}} \tilde{n}_{e_1}$$

y las sumamos, tenemos

$$im_e \omega [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] = -e [k_x \tilde{E}_{1x} + k_y \tilde{E}_{1y}] - e B_0 [k_x \tilde{u}_{e_{1y}} - k_y \tilde{u}_{e_{1x}}] + i \frac{3k_B T_{e0} \tilde{n}_{e_1}}{n_{e0}} [k_x^2 + k_y^2].$$

Ahora, sustituimos (4) en el primer término de la derecha de la igualdad y (2) en el tercero, y obtenemos:

$$(5) \quad im_e \omega [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] = i \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 \omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] - e B_0 [k_x \tilde{u}_{e_{1y}} - k_y \tilde{u}_{e_{1x}}] + i \frac{3k_B T_{e0} n_{e0}}{n_{e0} \omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] [k_x^2 + k_y^2].$$

Si nos fijamos en esta expresión, nos damos cuenta de que no podemos simplificar los corchetes ya que en el término magnético tenemos restando el producto de las componentes de \vec{k} y \vec{u}_e cruzadas. Para solucionar esto haremos lo siguiente: multiplicamos la ecuación (1a) por k_y y la (1b) por k_x , y restamos (1b) k_x – (1a) k_y quedando:

$$(1a) k_y \quad i\omega \tilde{u}_{e_{1x}} m_e k_y = -ek_y \tilde{E}_{1x} - ek_y B_0 \tilde{u}_{e_{1y}} + i \frac{3k_B T_{e0} k_x k_y}{n_{e0}} \tilde{n}_{e_1}$$

$$(1b) k_x \quad i\omega \tilde{u}_{e_{1y}} m_e k_x = -ek_x \tilde{E}_{1y} + ek_x B_0 \tilde{u}_{e_{1x}} + i \frac{3k_B T_{e0} k_y k_x}{n_{e0}} \tilde{n}_{e_1}$$

$$im_e \omega [k_x \tilde{u}_{e_{1y}} - k_y \tilde{u}_{e_{1x}}] = -e \underbrace{[k_x \tilde{E}_{1y} - k_y \tilde{E}_{1x}]}_0 + e B_0 [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}]$$

de donde despejamos el corchete de componentes cruzadas:

$$[k_x \tilde{u}_{e_{1y}} - k_y \tilde{u}_{e_{1x}}] = -i \frac{e B_0}{m_e \omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}].$$

Llevando esto a la expresión (5):

$$im_e \omega [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] = i \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 \omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] + i \frac{e^2 B_0^2}{m_e \omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] +$$

$$+ i \frac{3k_B T_{e0}}{\omega} [k_x \tilde{u}_{e_{1x}} + k_y \tilde{u}_{e_{1y}}] [k_x^2 + k_y^2]$$

Ahora sí podemos simplificar los corchetes, la unidad imaginaria y despejar $\omega(k)$:

$$\omega^2 = \frac{n_{e0} e^2}{\varepsilon_0 m_e} + \frac{e^2 B_0^2}{m_e^2} + \frac{3k_B T_{e0}}{m_e} k^2 \quad \text{con} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 + 3v_{th}^2 k^2,$$

siendo:

$\omega_p \Rightarrow$ frecuencia del plasma de los electrones

$\omega_c \Rightarrow$ frecuencia ciclotrónica del plasma de los electrones

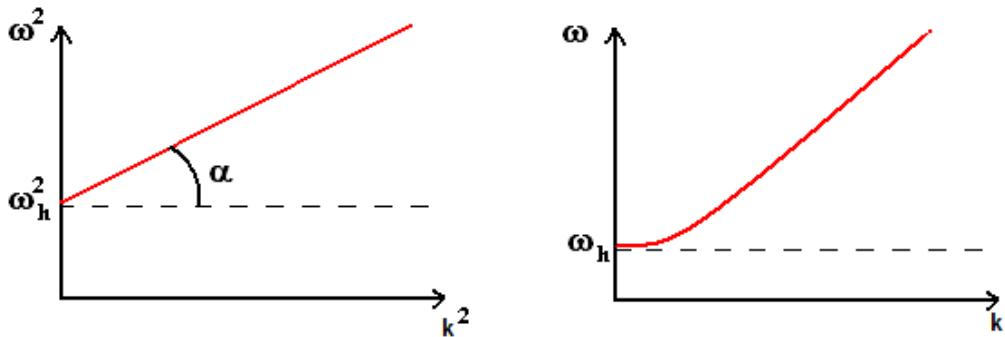
$v_{th} \Rightarrow$ velocidad térmica de los electrones

$\omega_h \Rightarrow$ frecuencia híbrida de oscilación de los electrones,

por lo que queda $\omega^2 = \omega_h^2 + v_{cm}^2 k^2 = \omega_h^2 + 3v_{th}^2 k^2$. Sacando la raíz cuadrada, llegamos a la relación de dispersión buscada:

$$\omega = \sqrt{\omega_h^2 + 3v_{th}^2 k^2}.$$

Representando gráficamente la relación de dispersión queda:



De nuevo podemos analizar la velocidad de fase y de grupo en dos límites:

- Para $k \rightarrow \infty$ $v_g = v_f = v_{cm} = \sqrt{3}v_{th}$, siendo v_{cm} la velocidad cuadrática media de los electrones, v_f la velocidad de fase de la onda y v_g la velocidad de grupo. En este límite, el plasma es un medio no dispersivo para la propagación de las ondas electrónicas como en el caso de ausencia de campo magnético.
- Para $k \rightarrow 0$ $v_g = \frac{d\omega}{dk} \rightarrow 0$; $v_f = \frac{\omega}{k} \rightarrow \infty$, de manera que en el límite de bajos valores de k ($k \ll k_D$), para frecuencias ω ligeramente por encima de ω_h , el plasma es un medio (fuertemente) dispersivo a la propagación de las ondas electrónicas. En $k = 0$, sólo hay oscilación colectiva a ω_h .

4.2.6. Ondas electrónicas con atenuación en un plasma magnetizado

De haberse considerado en la ecuación de Euler también el término colisional de fricción proporcional a la frecuencia de colisión de los electrones, estas ondas electrónicas en un plasma magnetizado sufrirían también atenuación. Como ya sabemos de los casos anteriores estudiados separadamente, la relación de dispersión para estas ondas se desdobra en una parte real que describe su propagación y otra imaginaria que da cuenta de su atenuación. Para ello, introducimos un número de onda complejo $k = \beta + i\alpha$, resultando

Re:

$$\omega^2 = \underbrace{\omega_p^2 + \omega_c^2}_{\omega_h^2} + 3v_{th}^2(\beta^2 - \alpha^2) = \omega_h^2 + 3v_{th}^2(\beta^2 - \alpha^2)$$

Im:

$$-\nu_e \omega = 6v_{th}^2 \alpha \beta$$

La diferencia respecto al caso de ondas electrónicas atenuadas sin campo magnético es que se sustituye en la ecuación de propagación ω_p^2 por ω_h^2 . De nuevo, para el caso de propagación con baja atenuación $\alpha \ll \beta$, consecuencia de que $\nu_e \ll \omega$, las expresiones separadas anteriores se simplifican notablemente.

4.3. Ondas iónicas.

4.3.1. Ondas iónicas en un plasma no magnetizado

Vamos a usar a continuación un modelo de fluido para las oscilaciones de los iones, teniendo en cuenta que los electrones van a ir acompañándolos siempre que sea posible. Para ello, la frecuencia de la perturbación deberá ser mucho más baja que la correspondiente a las ondas electrónicas. Como los electrones acompañan a los iones supondremos en principio que no habrá separación espacial de carga como primera aproximación, por lo que consideraremos que tenemos cuasineutralidad. En segunda instancia sí consideraremos la agitación térmica y usaremos la ecuación de Poisson considerando separación espacial de carga entre iones y electrones. Por tanto, el problema lo abordamos en dos fases:

Primer tratamiento: con la relación de Boltzmann conjuntamente para electrones e iones (sin ecuación de Poisson).

Es un tratamiento simplificado cuya solución es susceptible de mejorarse al considerar que la agitación térmica puede romper la cuasineutralidad. Las ondas iónicas también van a ser longitudinales. Desde el punto de vista termodinámico tenemos dos tipos de compresiones: adiabática e isotérmica. Para el fluido iónico consideraremos $\gamma_i = 3$, compresión adiabática. Para el electrónico por el contrario, consideraremos una compresión isotérmica con $\gamma_e = 1$ ya que ahora la compresión se realiza de forma lenta y puede intercambiarse calor por conducción térmica con los elementos de volumen contiguos.

Estas son las ecuaciones de nuestro modelo:

(1) Ecuación de Euler para iones:

$$m_i n_i \left\{ \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right\} = e n_i \vec{E} - \vec{\nabla} p_i = -e n_i \vec{\nabla} \phi - \gamma_i^3 k_B T_i \vec{\nabla} n_i$$

$n_i \simeq n_e$ aunque tengamos perturbación $\Rightarrow \begin{cases} n_{i_0} \equiv n_{e_0} \\ n_{i_1} \equiv n_{e_1} \end{cases}$. (Cuasi-neutralidad)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i}$$

Escribimos las perturbaciones, siendo las perturbaciones mucho más pequeñas que los valores de equilibrio.

$$\begin{aligned} n_i &= n_{i_0} + n_{i_1} \\ n_e &= n_{e_0} + n_{e_1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} n_{i_1} \equiv n_{e_1} \\ n_{i_0} \equiv n_{e_0} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \underbrace{\vec{E}_0}_{=0} + \vec{E}_1 \\ \phi &= \underbrace{\phi_0}_{=Cte} + \phi_1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{E}_1 = -\vec{\nabla} \phi_1 \\ \phi_1 = Cte \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \underbrace{\vec{u}_{i_0}}_{=0} + \vec{u}_{i_1} \\ \vec{u}_e &= \underbrace{\vec{u}_{e_0}}_{=0} + \vec{u}_{e_1} \\ T_i &= T_{i_0} + T_{i_1} \quad ; \quad T_{i_1} \ll T_{i_0} \\ T_e &= T_{e_0} + \underbrace{T_{e_1}}_{=0} \end{aligned}$$

(ϕ_0 es el potencial del plasma en valor constante en ausencia de perturbación). Linealizando e imponiendo soluciones armónicas ($\approx e^{i(\omega t - kx)}$), la ecuación de Euler anterior queda como:

$$(1) \quad i\omega m_i n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} e^{i(\omega t - kx)} = -(-ik) e n_{i_0} \tilde{\phi}_1 e^{i(\omega t - kx)} - (-ik) 3k_B (T_{i_0} + T_{i_1}) \tilde{n}_{i_1} e^{i(\omega t - kx)}$$

$i\omega m_i n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} = iken_{i_0} \tilde{\phi}_1 + ik3k_B T_{i_0} \tilde{n}_{i_1}$, al linearizar en las perturbaciones este último término.

$$\boxed{\omega m_i n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} = k n_{i_0} \tilde{\phi}_1 + k 3k_B T_{i_0} \tilde{n}_{i_1}} \quad (1)$$

(2) Ecuación de continuidad para iones:

$$\boxed{\omega \tilde{n}_{i_1} = k n_{i_0} \tilde{u}_{i_1}}, \quad (2)$$

que ya está linealizada en la perturbación para solución armónica.

(3) Relación de Boltzmann para electrones:

En el equilibrio, para los electrones debe cumplirse que la fuerza neta actuando sobre ellos sea nula. Es un equilibrio de sedimentación electrostático. Nos permite relacionar la perturbación en el potencial ϕ_1 con la perturbación en la densidad electrónica n_{e_1} .

$$n_e(\phi_1) = n_{e_0} e^{\frac{e\phi_1}{k_B T_{e_0}}}.$$

El caso en el que $e\phi_1 \ll k_B T_{e_0}$ podemos hacer un desarrollo en serie de potencias para linealizar. En este caso:

$$n_e \simeq n_{e_0} \left(1 + \frac{e\phi_1}{k_B T_{e_0}} + \dots \right) \simeq n_{e_0} + \underbrace{n_{e_0} \frac{e\phi_1}{k_B T_{e_0}}}_{n_{e_1} = n_{i_1}} = n_{e_0} + n_{e_1}$$

$$n_i = n_{i_0} + n_{i_1} \equiv n_{e_0} + n_{e_1} = n_e$$

$$(3) \quad \boxed{\tilde{n}_{i_1} = n_{i_0} \frac{e}{k_B T_{e_0}} \tilde{\phi}_1} \quad (\text{Relación de Boltzmann para los electrones linealizada en la perturbación que trasladamos y aplicamos a los iones}).$$

Ya podemos resolver nuestro sistema de ecuaciones para el movimiento oscilatorio de los iones acompañados de los electrones, para lo cual llevamos (2) y (3) a (1)

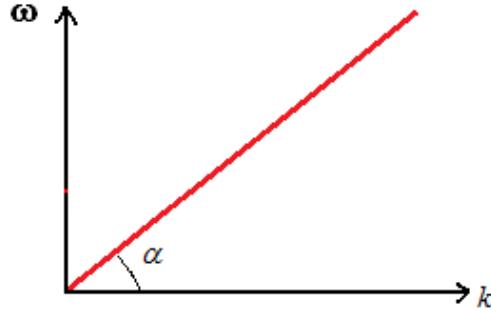
$$(1) \quad \omega m_i = e k n_{i_0} \frac{k_B T_{e_0}}{e n_{i_0}} \frac{k}{\omega} + k 3k_B T_{i_0} \frac{k}{\omega}$$

El sistema es compatible determinado. Llegamos a la relación de dispersión en su forma cuadrática, real pura ya que no hemos considerado término de colisión o fricción en la ecuación de Euler para el fluido iónico no magnetizado:

$$\omega^2 = \left(\overbrace{\frac{k_B T_{e_0}}{m_i} + \frac{3k_B T_{i_0}}{m_i}}^{c^2} \right) k^2 = c^2 k^2$$

Si tomamos la raíz cuadrada, queda la ecuación de una recta, que gráficamente es:

$$\omega = ck$$



donde $\operatorname{tg} \alpha = v_f = v_g = \left(\frac{k_B T_{e_0}}{m_i} + \frac{3k_B T_{i_0}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} = c$ es constante.

Al ser $v_f = v_g$, el medio (plasma) no es dispersivo y además no hay región prohibida a la propagación. Tampoco aparece posibilidad de sólo oscilación iónica colectiva para temperaturas nulas como aparecía en las oscilaciones electrónicas.

Tenemos que justificar en esta aproximación que no haya separación espacial de carga, que es nuestra hipótesis de partida, y no usar la ecuación de Poisson. Esto va a ser aproximadamente acertado a bajos valores de (ω, k) cuando la longitud de onda λ sea mucho mayor que la longitud de Debye λ_D y la perturbación armónica aprecie al plasma siempre eléctricamente cuasi-neutro (fuera de la esfera de apantallamiento de Debye). En esta circunstancia, la relación de Boltzmann para electrones resulta aplicable respecto a la oscilación de los iones. Podemos recordar la obtención de esta relación de Boltzmann a partir de la ecuación de movimiento para el fluido electrónico y suponiendo compresión isoterma de los elementos de volumen de los electrones en situación estacionaria.

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e \right] = -en_e \vec{E} - \vec{\nabla} p_e = en_e \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} p_e = 0 \quad (\text{Equilibrio dinámico})$$

$$en_e \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} p_e = p_e \frac{\vec{\nabla} n_e}{n_e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (e\phi_1) = \frac{\partial}{\partial x} (k_B T_e \ln n_e) \Rightarrow e\phi_1 = k_B T_e \ln n_e + cte, \quad cte = -k_B T_e \ln n_{e_0}$$

$$n_e(\phi_1) = n_{e_0}(\phi_1 = 0) e^{\frac{e\phi_1}{k_B T_e}}$$

Segundo tratamiento: con relación de Boltzmann para electrones y ecuación de Poisson para iones. Ahora vamos a tener que se rompe la cuasineutralidad, $n_i \neq n_e$, a altas (ω, k) durante la rápida oscilación como consecuencia de la existencia de agitación térmica en iones y electrones. Altas k significa bajas λ ; es decir, cuando la longitud de onda λ sea del orden o inferior a la longitud de Debye λ_D .

Usaremos nuestro modelo de fluido con la ecuación de Poisson para los iones; ahora deja de ser válida la relación de Boltzmann para los electrones aplicada o transportada a los iones.

Ecuaciones de nuestro modelo:

- (1) Ecuación de Euler: igual en todo que en el tratamiento anterior.
- (2) Ecuación de continuidad: igual en todo que en el tratamiento anterior.

(3) Ecuación de Poisson para los iones $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = e \frac{(n_{i_1} - n_{e_1})}{\varepsilon_0} \Rightarrow$ Perturbación armónica.

$$\varepsilon_0 k^2 \tilde{\phi}_1 e^{i(\omega t - kx)} = e(\tilde{n}_{i_1} - \tilde{n}_{e_1}) e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 k^2 \tilde{\phi}_1 = e(\tilde{n}_{i_1} - \tilde{n}_{e_1})} \quad (3b)$$

Seguiremos considerando válida la relación de Boltzmann para los electrones solamente, por lo que (3a)

$$\tilde{n}_{e_1} = \frac{n_{e_0} e}{k_B T_{e_0}} \tilde{\phi}_1$$

Teniendo esto en cuenta en la ecuación de Poisson,

$$\varepsilon_0 k^2 \tilde{\phi}_1 = e \tilde{n}_{i_1} - \frac{n_{e_0} e^2}{k_B T_{e_0}} \tilde{\phi}_1 \Rightarrow \varepsilon_0 \left[k^2 + \underbrace{\frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 k_B T_{e_0}}}_{\lambda_D^{-2} = k_D^2} \right] \tilde{\phi}_1 = e \tilde{n}_{i_1} \Rightarrow (\text{Ecuación de Poisson-Boltzmann}).$$

$$\boxed{\varepsilon_0 (k^2 + k_D^2) \tilde{\phi}_1 = e \tilde{n}_{i_1}} \quad \text{con } k_D = \lambda_D^{-1} = \left(\frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 k_B T_{e_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inverso de la longitud de Debye).}$$

Podemos escribir:

$$\varepsilon_0 (k^2 \lambda_D^2 + 1) \tilde{\phi}_1 = e \lambda_D^2 \tilde{n}_{i_1}$$

En esta última ecuación despejamos $\tilde{\phi}_1$ y sustituimos en ella la perturbación en la densidad iónica obtenida de la ecuación de continuidad:

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{\lambda_D^2}{k^2 \lambda_D^2 + 1} \tilde{n}_{i_1} = \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{\lambda_D^2}{k^2 \lambda_D^2 + 1} n_{i_0} \frac{k}{\omega} \tilde{u}_{i_1}.$$

Ahora usamos la ecuación de Euler para iones obtenida en el tratamiento anterior:

$$\omega m_i n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} = k e n_{i_0} \tilde{\phi}_1 + k 3 k_B T_{i_0} \tilde{n}_{i_1},$$

donde introducimos el valor de $\tilde{\phi}_1$, y sustituyendo en ella tenemos:

$$\omega m_i n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} = k e n_{i_0} \frac{\lambda_D^2}{\varepsilon_0} \frac{k}{k^2 \lambda_D^2 + 1} \frac{\omega}{\omega} \tilde{u}_{i_1} + k 3 k_B T_{i_0} n_{i_0} \frac{k}{\omega} \tilde{u}_{i_1}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{n_{i_0} e^2}{\varepsilon_0 m_i} \frac{\lambda_D^2}{k^2 \lambda_D^2 + 1} + \frac{3 k_B T_{i_0}}{m_i} \right) k^2,$$

siendo la frecuencia iónica del plasma o frecuencia del plasma para iones $\Omega_p^2 \equiv \omega_{pi}^2$:

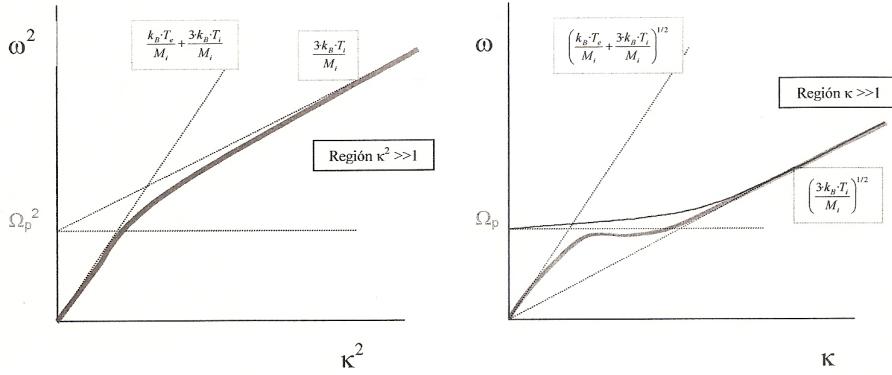
$$\Omega_p^2 = \omega_{pi}^2 = \frac{n_{i_0} e^2}{\varepsilon_0 m_i}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 m_e}.$$

$$\text{Se cumple que } \omega_{pi}^2 = \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe}^2 \Rightarrow \Omega_p \simeq 10^{-2} \omega_p$$

Teniendo todo esto en cuenta llegamos a la relación de dispersión:

$$\omega^2 = \left(\Omega_p^2 \frac{\lambda_D^2}{k^2 \lambda_D^2 + 1} + \frac{3 k_B T_{i_0}}{m_i} \right) k^2$$

Esta es la relación de dispersión que contiene a los casos de interés:



- 1) $k \ll k_D$, $\lambda \gg \lambda_D$ ($n_i \equiv n_e$, no se rompe la cuasineutralidad):

$$k^2 \lambda_D^2 \ll 1 \Rightarrow \omega^2 \simeq \left(\Omega_p^2 \lambda_D^2 + \frac{3k_B T_{i0}}{m_i} \right) k^2$$

Reobtenemos la solución anterior de bajas frecuencias (comprobar). La ecuación de Poisson es irrelevante en este caso y no hay en la práctica separación espacial de carga debida a la perturbación.

- 2) $k \gg k_D$, $\lambda \ll \lambda_D$ ($n_i \neq n_e$, fuerte separación espacial de carga):

$$k^2 \lambda_D^2 \gg 1 \Rightarrow \omega^2 \simeq \Omega_p^2 + \frac{3k_B T_{i0}}{m_i} k^2 = \Omega_p^2 + 3v_{thi}^2 k^2$$

Las ondas iónicas son como las electrónicas, sólo que tienen menor velocidad debido a que la velocidad térmica de los iones es muy inferior a la de los electrones:

$$\begin{array}{l} \text{ondas electrónicas: } \omega_p^2 + 3v_{the}^2 k^2 = \omega^2 \\ \text{ondas iónicas: } \Omega_p^2 + 3v_{thi}^2 k^2 = \omega^2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} v_{thi}^2 << v_{the}^2 \end{array} \right\}$$

En el caso que $T_{i0} = 0$, tendríamos sólo una oscilación colectiva de los iones.

- 3) $\lambda \simeq \lambda_D$, $k^2 \lambda_D^2 \simeq 1$

$$\omega^2 \simeq \left(\frac{k_B T_{e0}}{2m_i} + \frac{3k_B T_{i0}}{m_i} \right) k^2$$

La onda electrónica que acompaña a la onda iónica sigue siempre a la onda de potencial electrostático perturbado. En todo nuestro planteamiento hemos aceptado que todas las magnitudes están perturbadas pero muy débilmente (pequeñas perturbaciones) para poder linealizar las ecuaciones y tener una teoría lineal de las oscilaciones y ondas en plasmas.

4.3.2. Ondas iónicas con atenuación

Estudiamos a continuación la propagación en plasmas de ondas iónicas en ausencia de campo magnético pero con atenuación, y seguiremos teniendo para ello una temperatura iónica no nula que originará un gradiente de presión actuando sobre el elemento de fluido que estamos estudiando. Pero consideraremos ahora además un término de rozamiento o fricción para el fluido iónico en su oscilación que provocará la atenuación de la onda iónica, siendo este término de rozamiento o fricción proporcional al producto de la frecuencia de colisión de los iones por la velocidad del fluido iónico. Al igual que para el caso de las ondas electrónicas con atenuación, deberemos considerar un número de onda k complejo, y así obtener una relación de dispersión también compleja de forma similar a lo que ya hemos visto en otros casos de atenuación de ondas.

Comenzamos el estudio, planteando las ecuaciones que resolverán la dinámica del sistema. Dichas ecuaciones son: la ecuación de Euler o de la fuerza, que contemplará fuerza eléctrica, fuerza

debida al gradiente de presión y fuerza de fricción o rozamiento. También utilizaremos la ecuación de continuidad y eventualmente la ecuación de Poisson al considerar que la agitación térmica de las partículas, diferente para electrones que para iones, provocará una pequeña separación espacial de carga - la cual originará un campo eléctrico de separación espacial de carga - para longitud de onda del orden o menor que la longitud de Debye λ_D (segundo tratamiento anterior).

- 1) Ecuación de Euler o de la fuerza:

$$m_i n_i \left\{ \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right\} = e n_i \vec{E} - \vec{\nabla} p_i - m_i n_i \nu_i \vec{u}_i = -e n_i \vec{\nabla} \phi - 3k_B T_i \vec{\nabla} n_i - m_i n_i \nu_i \vec{u}_i,$$

siendo ν_i la frecuencia de colisión media de los iones $\langle \nu_i \rangle$ con el resto de las partículas del plasma, y donde hemos introducido la expresión $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$, siendo ϕ el potencial eléctrico en el plasma debido a la perturbación: $\phi = \phi_0 + \phi_1 = \phi_1$.

Las expresiones siguientes las escribiremos ya linealizadas en la perturbación

- 2) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_{i_1}}{\partial t} + n_{i_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{i_1} = 0$$

- 3) Ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i_1} - n_{e_1}) = -\nabla^2 \phi_1$$

Linealicemos la ecuación de Euler

$$m_i n_{i_0} \frac{\partial \vec{u}_{i_1}}{\partial t} = -e n_{i_0} \vec{\nabla} \phi_1 - 3k_B T_{i_0} \vec{\nabla} n_{i_1} - m_i n_{i_0} \nu_i \vec{u}_{i_1},$$

donde ya hemos tenido en cuenta despreciar productos de perturbaciones (órdenes superiores en la perturbación). T_{i_0} es la temperatura iónica de equilibrio en ausencia de perturbación.

Como siempre, buscamos soluciones armónicas para las magnitudes oscilantes de la forma: $e^{i(\omega t - kx)}$

$$(1) \quad i\omega \tilde{u}_{i_1} m_i n_{i_0} = -e n_{i_0} \tilde{\phi}_1 (-ik) - 3k_B T_{i_0} (-ik) \tilde{n}_{i_1} - m_i n_{i_0} \nu_i \tilde{u}_{i_1}$$

$$(2) \quad \omega \tilde{n}_{i_1} = k n_{i_0} \tilde{u}_{i_1} \Rightarrow \tilde{n}_{i_1} = n_{i_0} \frac{k \tilde{u}_{i_1}}{\omega}$$

$$(3) \quad k^2 \varepsilon_0 \tilde{\phi}_1 = e (\tilde{n}_{i_1} - \tilde{n}_{e_1})$$

Ahora introducimos en esta última ecuación (3) el término relativo a la relación de Boltzman para electrones

$$\tilde{n}_{e_1} = \frac{n_{e_0} e}{k_B T_{e_0}} \tilde{\phi}_1$$

$$(3) \quad k^2 \varepsilon_0 \tilde{\phi}_1 = e \tilde{n}_{i_1} - \frac{n_{e_0} e^2}{k_B T_{e_0}} \tilde{\phi}_1$$

$$\varepsilon_0 \left(k^2 + \underbrace{\frac{n_{e_0} e^2}{\varepsilon_0 k_B T_{e_0}}}_{\lambda_D^{-2} \equiv k_D^2} \right) \tilde{\phi}_1 = e \tilde{n}_{i_1}$$

Introducimos la expresión (2)

$$\varepsilon_0 (k^2 + k_D^2) \tilde{\phi}_1 = e n_{i_0} \frac{k}{\omega} \tilde{u}_{i_1}$$

y de aquí despejamos el potencial perturbado

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{en_{i_0}ku_{i_1}}{\varepsilon_0\omega(k^2 + k_D^2)}.$$

Llevando esto junto con la expresión (2) a la expresión (1) y operando, obtendremos la relación de dispersión buscada,

$$(1) \quad i\omega\tilde{u}_{i_1}m_in_{i_0} + m_in_{i_0}\nu_i\tilde{u}_{i_1} = \frac{in_{i_0}e^2k^2n_{i_0}\tilde{u}_{i_1}}{\varepsilon_0\omega(k^2 + k_D^2)} + \frac{i3k_BT_{i_0}k^2n_{i_0}\tilde{u}_{i_1}}{\omega}$$

Simplificamos $in_{i_0}\tilde{u}_{i_1}$, y queda

$$\begin{aligned} \omega m_i - im_i\nu_i &= \frac{e^2n_{i_0}}{\varepsilon_0\omega} \frac{k^2}{(k^2 + k_D^2)} + \frac{3k_BT_{i_0}}{\omega} k^2 \\ \omega^2 - i\omega\nu_i &= \underbrace{\frac{e^2n_{i_0}}{\varepsilon_0m_i}}_{\omega_{pi}^2 \equiv \Omega_p^2} \frac{k^2}{(k^2 + k_D^2)} + \underbrace{\frac{3k_BT_{i_0}}{m_i}}_{3v_{th_i}^2} k^2, \end{aligned}$$

con lo que llegamos a la expresión de la relación de dispersión que resulta compleja:

$$\omega^2 - i\nu_i\omega = \left[\Omega_p^2 \frac{1}{(k^2 + k_D^2)} + 3v_{th_i}^2 \right] k^2$$

Notemos que la expresión compleja que obtenemos es debido a la existencia del término de fricción o rozamiento en la ecuación de Euler. En efecto, para el caso particular de una frecuencia de colisión nula, volveríamos a resultados anteriores de ondas iónicas sin atenuación.

Como en el estudio de las ondas electrónicas atenuadas, introducimos un número de ondas k complejo de la forma $k = \beta + i\alpha$ de manera que a partir de la relación de dispersión anterior obtendremos dos ecuaciones, una para su parte real y otra para la imaginaria.

Comenzaremos estudiando casos límite para después llegar a la solución general:

- $k \ll k_D (\lambda \gg \lambda_D)$

La relación de dispersión quedaría:

$$\omega^2 - i\nu_i\omega = \left[\underbrace{\Omega_p^2 \lambda_D^2}_{\frac{k_B T_{e0}}{m_i}} + 3v_{th_i}^2 \right] k^2 = c^2 k^2$$

con $k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta$

Si dividimos en parte real e imaginaria nos queda:

$$(Re) \quad \omega^2 = \left(\frac{k_B T_{e0}}{m_i} + 3 \frac{k_B T_{i_0}}{m_i} \right) (\beta^2 - \alpha^2)$$

$$(Im) \quad -\omega\nu_i = \left(\frac{k_B T_{e0}}{m_i} + 3 \frac{k_B T_{i_0}}{m_i} \right) 2\alpha\beta$$

- $k \gg k_D (\lambda \ll \lambda_D)$

La relación de dispersión quedaría:

$$\omega^2 - i\nu_i\omega = \Omega_p^2 + 3v_{th_i}^2 k^2$$

con $k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta$

Si dividimos ahora en parte real e imaginaria nos queda:

$$(Re) \quad \omega^2 = \Omega_p^2 + 3 \frac{k_B T_{i_0}}{m_i} (\beta^2 - \alpha^2)$$

$$(Im) \quad -\omega\nu_i = 3 \frac{k_B T_{i_0}}{m_i} 2\alpha\beta$$

- Caso general

$$\omega^2 - i\nu_i\omega = \left[\Omega_p^2 \frac{1}{(k^2 + k_D^2)} + 3v_{th_i}^2 \right] k^2$$

Desarrollemos primeramente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + k_D^2} &= \frac{1}{(\beta + i\alpha)^2 + k_D^2} = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta + k_D^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2 - i2\alpha\beta}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} = \\ &= \underbrace{\frac{\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2}}_X - i \underbrace{\frac{2\alpha\beta}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2}}_Y \\ \omega^2 - i\nu_i\omega &= [\Omega_p^2(X - iY) + 3v_{th_i}^2] k^2 = [\Omega_p^2 X - i\Omega_p^2 Y + 3v_{th_i}^2] (\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta) = \\ &= [(\Omega_p^2 X + 3v_{th_i}^2)(\beta^2 - \alpha^2) + 2\Omega_p^2 \alpha\beta Y] + i[(\Omega_p^2 X + 3v_{th_i}^2)2\alpha\beta - \Omega_p^2(\beta^2 - \alpha^2)Y] \end{aligned}$$

Si dividimos ahora en parte real e imaginaria nos queda:

$$(Re) \quad \omega^2 = (\Omega_p^2 X + 3v_{th_i}^2)(\beta^2 - \alpha^2) + 2\Omega_p^2 \alpha\beta Y$$

$$\omega^2 = \left(\Omega_p^2 \frac{\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} + 3v_{th_i}^2 \right) (\beta^2 - \alpha^2) + \frac{4\Omega_p^2 \alpha^2 \beta^2}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2}$$

$$(Im) \quad -\omega\nu_i = (\Omega_p^2 X + 3v_{th_i}^2)2\alpha\beta - \Omega_p^2 Y(\beta^2 - \alpha^2)$$

$$-\omega\nu_i = \left(\Omega_p^2 \frac{\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} + 3v_{th_i}^2 \right) 2\alpha\beta - \frac{\Omega_p^2(\beta^2 - \alpha^2)2\alpha\beta}{(\beta^2 - \alpha^2 + k_D^2)^2 + (2\alpha\beta)^2}$$

Como podemos observar, tanto en los casos límite como en el caso general, si el término que produce la atenuación es tan pequeño que podemos despreciar el valor de α frente al de β , o haciendo directamente $\alpha = 0$, con estas relaciones llegaríamos a la expresión anterior que ya hemos estudiado de propagación de ondas iónicas sin atenuación. Para $\alpha \ll \beta$, caso de débil atenuación, las expresiones anteriores se simplificarían notablemente.

4.3.3. Ondas iónicas con campo magnético externo (\perp): $\vec{B} = B_0 \vec{k}$

Suponemos ahora que de nuevo no existe atenuación pero hay un campo magnético externo estacionario y uniforme en el eje z , y buscaremos propagación de ondas iónica en el eje x : $\vec{B} = B_0 \vec{k}$; vector de onda $\vec{k} = k \vec{i}$ y la perturbación eléctrica $\vec{E}_1 = E_1 \vec{i}$. Por último, existirá agitación térmica para los iones: $T_i \neq 0$.

En estas circunstancias ya sabemos que la única ecuación que cambia es la ecuación de Euler en la que debe aparecer una componente magnética nueva en la fuerza de Lorentz debido a la existencia del campo magnético externo B_0 :

(Continuar el desarrollo de este punto como trabajo)

4.4. Ondas electromagnéticas.

Completamos nuestra descripción de ondas en plasmas ilimitados (infinitos) y homogéneos tratando el caso de ondas electromagnéticas. Éstas aparecen cuando consideramos que las oscilaciones

del campo eléctrico inducen un campo magnético que ahora no es el campo magnético externo, \vec{B}_0 , sino el provocado por las ecuaciones de Maxwell. Estas ondas electromagnéticas serán ondas transversales muy diferentes de las ondas electrostáticas (longitudinales) que hemos estudiado hasta ahora. Las ecuaciones de Maxwell relevantes para el problema son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \right] \quad (2)$$

Naturalmente \vec{E} y \vec{B} son las perturbaciones del campo eléctrico y del campo magnético de la onda electromagnética, que encontraremos en general:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \vec{B}_1 \Rightarrow \vec{B}_0 = 0$$

Analicemos previamente y como recordatorio el caso de ondas electromagnéticas en el vacío, en ausencia de cargas eléctricas. Recordaremos brevemente qué ocurre para el vacío con las ondas electromagnéticas, en ausencia de plasma, para luego analizar la propagación en plasmas.

En el vacío $\vec{j} = 0$, por lo que tomando el rotacional de (2) tenemos que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right] = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) \quad (3)$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (1), queda:

$$= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}_1}{\partial t^2} \quad (3)$$

Para ondas planas armónicas propagándose en el eje \vec{r} con vector de onda \vec{k} , buscamos soluciones $\approx e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. Imponiendo estas soluciones, (3) queda como sigue:

$$-i\vec{k} \times (-i\vec{k} \times \widetilde{\vec{B}_1}) = - \left[\underbrace{\vec{k}(\vec{k} \cdot \widetilde{\vec{B}_1})}_{=0} - k^2 \widetilde{\vec{B}_1} \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \widetilde{\vec{B}_1}$$

donde $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$ es el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. El término $\vec{k} \cdot \widetilde{\vec{B}_1}$ es nulo al ser $\vec{k} \perp \widetilde{\vec{B}_1}$, ya que buscamos propagación de ondas transversales. Así:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \widetilde{\vec{B}_1} = k^2 \widetilde{\vec{B}_1} \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 \Rightarrow \omega = ck$$

Esta es la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas en el vacío, medio en el que se propagan sin dispersión: $v_f = v_g = c$. Otra ecuación igual se encuentra para \vec{E}_1 , si tomamos rotacional en (1) en vez de en (2).

4.4.1. Ondas electromagnéticas en plasmas sin atenuación ($\nu_e = 0$) y sin agitación térmica ($T_e = 0$)

Una vez obtenido este resultado, estudiemos la propagación de las ondas electromagnéticas en plasmas fríos ($T_e = 0$) y sin atenuación ($\nu_e = 0$), que en general será un medio dispersivo a esa propagación. En plasmas, la densidad de corriente \vec{j} no es nula sino que vale:

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1 = \vec{j}_1.$$

Ésta es la perturbación en la densidad de corriente eléctrica debido a los electrones que oscilan transversalmente a la dirección de propagación, ya que los iones permanecen inmóviles a las frecuencias tan altas de las ondas electromagnéticas.

La ecuación (2) queda escrita como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{\vec{j}_1}{\epsilon_0} \right] \quad (4)$$

donde $\vec{j}_1 = \vec{j}_{e1}$ es la densidad de corriente para los electrones libres, corriente que una vez linealizada la perturbación vale:

$$\vec{j}_{e1} = -en_{e0}\vec{u}_{e1} \quad (5)$$

Derivemos respecto al tiempo la ecuación (4)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_{e1}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

y tomemos el rotacional de (1)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) - \nabla^2 \vec{E}_1 = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6), resulta

$$= -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \right) \quad (7).$$

Para las soluciones armónicas que buscamos tenemos, después de eliminar las exponenciales, que

$$i^2 \left[\vec{k} \times (\vec{k} \times \widetilde{\vec{E}}_1) \right] = i^2 [\underbrace{\vec{k}(\vec{k} \cdot \widetilde{\vec{E}}_1)}_{=0} - k^2 \widetilde{\vec{E}}_1] = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} i\omega \widetilde{\vec{j}_{e1}} + i^2 \omega^2 \widetilde{\vec{E}}_1 \right) \quad (8)$$

Para solución transversal se tiene que $\vec{k} \cdot \widetilde{\vec{E}}_1 = 0$ y por tanto la ecuación anterior se reduce a

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \widetilde{\vec{E}}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} \widetilde{\vec{j}_{e1}} \quad (9)$$

Usamos ahora la ecuación de Euler para el fluido electrónico oscilante linealizada en la perturbación, en la que despreciamos la agitación térmica de los electrones ($T_e = 0$) de manera que éstos se mueven todos en fase bajo la acción del campo \vec{E}_1 , el término magnético de la fuerza de Lorentz $\vec{u}_{e1} \times \vec{B}_1$ que es de 2º orden en la perturbación, así como no consideraremos el término resistivo o colisional por lo que los electrones en su oscilación no friccionan con el resto del plasma. En estas

circunstancias, la ecuación de movimiento para el fluido electrónico se convierte en la del electrón promedio sometido a la perturbación del campo electromagnético, resultando

$$m_e \frac{\partial \vec{u}_{e_1}}{\partial t} = -e \vec{E}_1 \Rightarrow \widetilde{\vec{u}_{e_1}} = -\frac{e \widetilde{\vec{E}_1}}{im_e \omega} = i \frac{e \widetilde{\vec{E}_1}}{m_e \omega} \quad (10)$$

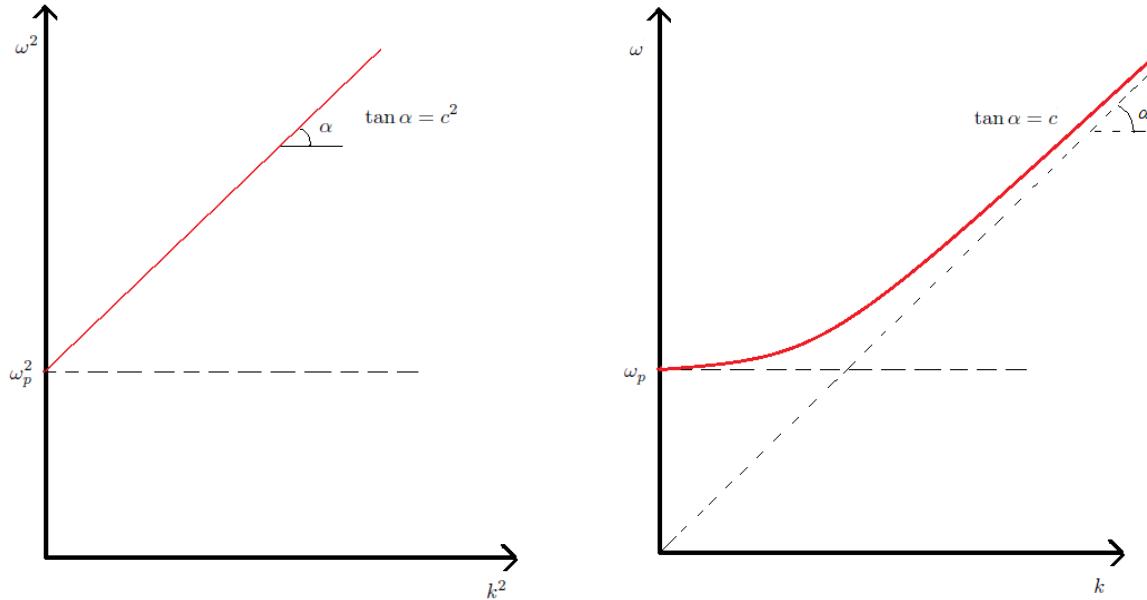
Como $\vec{j}_{e_1} = -en_{e_0} \vec{u}_{e_1}$, de la expresión (10) tenemos que

$$\widetilde{\vec{j}_{e_1}} = en_{e_0} \frac{e \widetilde{\vec{E}_1}}{im_e \omega} = \underbrace{-i \frac{e^2 n_{e_0}}{m_e \omega} \widetilde{\vec{E}_1}}_{\sigma} = \sigma \widetilde{\vec{E}_1} \Rightarrow \boxed{\sigma = -i \frac{n_{e_0} e^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0}{\omega} = -i \omega_p^2 \frac{\varepsilon_0}{\omega}} \quad (11)$$

Esta es la ley de Ohm que relaciona la densidad de corriente eléctrica con el campo eléctrico en la que aparece la conductividad eléctrica σ que resulta imaginaria pura, negativa e inversa a la frecuencia ω . Llevando este resultado a la expresión (9) queda

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \widetilde{\vec{E}_1} = -\frac{i \omega}{\varepsilon_0} i \frac{e^2 n_{e_0}}{m_e \omega} \widetilde{\vec{E}_1} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}$$

Esta es la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas (transversales) propagándose por una plasma homogéneo e isótropo, ilimitado (infinito), sin campo magnético externo, sin agitación térmica de los electrones (frío, $T_e = 0$) y sin fricción o colisiones de éstos con el resto del plasma (plasma no colisional). Esto último hace que durante la propagación las ondas electromagnéticas no sufran atenuación (medio sin pérdidas) por ser σ imaginaria pura.



Analicemos este punto algo más... Como no tenemos término resistivo o de fricción del fluido electrónico con el resto del plasma, la conductividad eléctrica del plasma como medio de propagación de las ondas electromagnéticas es imaginaria pura y con una dependencia inversa de la frecuencia ω . Como consecuencia, la permitividad relativa del plasma es $\varepsilon_r = \varepsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, real pura. Desde el punto de vista electrodinámico, se trata por tanto de un medio sin pérdidas en el que las ondas electromagnéticas no se atenúan durante su propagación. Esta circunstancia cambiará cuando tomemos en consideración el término resistivo en la ecuación de movimiento del electrón

promedio, apareciendo pérdidas resistivas que atenuarán la onda durante su propagación como describiremos a continuación.

A bajas frecuencias (bajos valores de k) siempre por encima de ω_p , el medio es dispersivo con $v_f = \frac{\omega}{k} > c$ y $v_g = \frac{d\omega}{dk} < c$. A frecuencias altas (altos valores de k), el medio es no dispersivo con $v_f = v_g = c$. Siempre se cumple que $v_f v_g = c^2$. De nuevo a bajas frecuencias, el plasma se comporta como un filtro paso alta a la propagación, y la densidad electrónica del plasma es la magnitud que determina tal característica electrodinámica. Para una ω dada, existe una densidad electrónica crítica tal que determina ω_p por debajo de la cual no hay propagación. Esto quiere decir que k se vuelve imaginario y representa soluciones o modos evanescentes de la relación de dispersión. En la zona de propagación, para $\omega > \omega_p$, las ondas electromagnéticas no se atenúan. En lo que sigue, deberemos investigar la influencia de las colisiones de los electrones con el resto de las partículas del plasma, introduciendo el término resistivo en la ecuación de movimiento del electrón promedio que hemos despreciado en el caso anterior. Así mismo, la existencia de agitación térmica ($T_e \neq 0$) en la propagación de las ondas electromagnéticas en plasmas. Finalmente, el efecto que un campo magnético externo \vec{B}_0 provoca en dicha propagación al introducir anisotropías.

4.4.2. Ondas electromagnéticas con atenuación ($\nu_e \neq 0$) y sin agitación térmica ($T_e = 0$)

Vamos a considerar el caso de la propagación de una onda electromagnética atenuada en plasmas fríos. Supondremos también ausencia de campo magnético externo en la ecuación de la fuerza como en el caso anterior.

Comenzamos analizando las ecuaciones de Maxwell correspondientes a las fuentes vectoriales de campo eléctrico y magnético.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\vec{j}_1}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right\} \quad (14)$$

Como es habitual, el subíndice 1 indica que las ecuaciones están linealizadas en la perturbación, ya que los valores de equilibrio son nulos, por la cuasineutralidad y porque partimos del fluido electrónico en reposo.

Ya sabemos que

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_{e_1} = -en_e \vec{u}_e = -e(n_{e_0} + n_{e_1})(\vec{u}_{e_0}^0 + \vec{u}_{e_1}) = -en_{e_0} \vec{u}_{e_1}$$

donde hemos eliminado el producto $[n_{e_1} \vec{u}_{e_1}]$ por ser producto de dos perturbaciones.

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_{e_1}$$

La densidad de corriente \vec{j}_1 es debida exclusivamente al movimiento de los electrones, que son los únicos que oscilan.

Derivamos (14) respecto a t :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_{e_1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \right\}$$

Tomamos el rotacional de (13):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = -\frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial j_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \right\}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) - \nabla^2 \vec{E}_1 = -\frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial j_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} \right\}$$

Imponemos soluciones armónicas del tipo $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, donde los fasores $(\tilde{j}_1, \tilde{\vec{E}}_1)$, llevan la amplitud y la fase inicial. Para la expresión anterior tenemos

$$i^2 [\vec{k} \times (\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}_1)] = i^2 [\vec{k}(\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}_1) - k^2 \tilde{\vec{E}}_1] \xrightarrow[0 \text{ porque } \vec{k} \perp \vec{E}]{} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} i\omega \tilde{j}_{e1} + i^2 \omega^2 \tilde{\vec{E}}_1 \right)$$

que conduce a

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \tilde{\vec{E}}_1 = i \frac{\omega}{\varepsilon_0} \tilde{j}_{e1} \quad (15)$$

Por otra parte, la ecuación de Euler con término colisional o de fricción - que en ausencia de agitación térmica vuelve a ser la ecuación de movimiento del electrón promedio - se escribe ahora como:

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + m_e n_e \nu_e \vec{u}_e = -en_e \vec{E},$$

donde ν_e es la frecuencia de colisión media $\langle \nu_e \rangle$ de los electrones con el resto de las partículas del plasma. Esta ecuación de Euler, linealizando en la perturbación e imponiendo soluciones armónicas, queda como:

$$i\omega m_e \tilde{\vec{u}}_{e1} + m_e \nu_e \tilde{\vec{u}}_{e1} = -e \tilde{\vec{E}}_1$$

El término $m_e \nu_e \tilde{\vec{u}}_{e1}$ es un término colisional de fricción resistiva, que será el encargado de producir la atenuación de la onda. En él intervienen tanto la frecuencia de colisión media de los electrones con el resto de las partículas de plasma, $\langle \nu_e \rangle$, como la perturbación en la velocidad del fluido electrónico $\tilde{\vec{u}}_{e1}$ (salvo los electrones, el plasma está inmóvil durante la oscilación que produce la perturbación):

$$m_e \tilde{\vec{u}}_{e1} (\nu_e + i\omega) = -e \tilde{\vec{E}}_1 \Rightarrow \tilde{\vec{u}}_{e1} = -\frac{e \tilde{\vec{E}}_1}{m_e (\nu_e + i\omega)}$$

Introduciendo esta velocidad del fluido electrónico en la expresión de la densidad de corriente obtenemos

$\tilde{j}_{e1} = -en_{e0} \tilde{\vec{u}}_{e1} = \frac{e^2 n_{e0}}{m_e (\nu_e + i\omega)} \tilde{\vec{E}}_1 \Rightarrow \tilde{j}_{e1} = \sigma \tilde{\vec{E}}_1 \Rightarrow$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> CONDUCTIVIDAD $\sigma = \frac{e^2 n_{e0}}{m_e (\nu_e + i\omega)} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\nu_e + i\omega},$ </div>
---	---

siendo $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ una cantidad compleja. Operando pueden encontrarse las partes real e imaginaria de la conductividad eléctrica del plasma como un simple ejercicio de álgebra compleja

elemental cuyo resultado ya es conocido. Correspondientemente, la permitividad relativa o constante dieléctrica del plasma también será compleja, $\varepsilon_p = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$. Aplicando la relación entre ε_p y σ para un medio con solución armónica para los campos electromagnéticos, $\varepsilon_p = 1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$, podemos encontrar también las expresiones para la parte real e imaginaria de ε_p (se recomienda hacer estos cálculos como ejercicio), expresiones que se reducen al caso anterior al hacer $\nu_e = 0$.

Llevando estos resultados a (15) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2 k^2) \tilde{\vec{E}}'_1 &= \frac{i\omega}{\varepsilon_0} \frac{e^2 n_{e0}}{m_e(\nu_e + i\omega)} \tilde{\vec{E}}'_1 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - c^2 k^2)(\nu_e + i\omega) = i\omega \underbrace{\frac{e^2 n_{e0}}{m_e \varepsilon_0}}_{\omega_p^2} \\ (\omega^2 - c^2 k^2)(\nu_e + i\omega) &= i\omega \omega_p^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - i\omega \nu_e - i\frac{c^2 k^2 \nu_e}{\omega} - c^2 k^2 = \omega_p^2 \\ \boxed{\omega^2 - i\omega \nu_e = \omega_p^2 + c^2 k^2 \left(1 - \frac{i\nu_e}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

Ésta es la relación de dispersión buscada para la propagación de las ondas electromagnéticas con atenuación, que ahora debido a la frecuencia de colisión ν_e resulta compleja. Como en casos anteriores de atenuación de ondas en plasmas, imponemos un número de onda complejo de la forma:

$$k = \beta + i\alpha \quad \Rightarrow \quad k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\beta\alpha$$

La relación de dispersión anterior nos queda como:

$$\omega^2 - i\omega \nu_e = \omega_p^2 + c^2(\beta^2 - \alpha^2 + 2i\beta\alpha) \left(1 - \frac{i\nu_e}{\omega}\right) = \omega_p^2 + c^2(\beta^2 - \alpha^2) + 2c^2\alpha\beta\frac{\nu_e}{\omega} + i \left[2c^2\alpha\beta - c^2(\beta^2 - \alpha^2)\frac{\nu_e}{\omega}\right].$$

Separamos la relación de dispersión en parte real y parte imaginaria:

$$\begin{aligned} (Re) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 &= \omega_p^2 + c^2(\beta^2 - \alpha^2) + 2c^2\alpha\beta\frac{\nu_e}{\omega} \\ (Im) \quad \Rightarrow \quad -\omega \nu_e &= 2c^2\alpha\beta - c^2(\beta^2 - \alpha^2)\frac{\nu_e}{\omega}, \end{aligned}$$

pudiéndose reescribir la parte imaginaria como:

$$(Im) \quad \Rightarrow \quad \nu_e^2 = c^2(\beta^2 - \alpha^2)\frac{\nu_e^2}{\omega^2} - 2c^2\alpha\beta\frac{\nu_e}{\omega}.$$

Resolvemos el sistema anterior para encontrar las expresiones de $\beta^2 - \alpha^2$ y de $2\alpha\beta$ como función de las tres frecuencias de interés en el problema, a saber ω , ω_p y ν_e :

- (i) Para la parte real se obtiene, después de algunas operaciones:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2 + \nu_e^2}{1 + \frac{\nu_e^2}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1 - \frac{\omega_p^2 - \nu_e^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\nu_e^2}{\omega^2}};$$

- (ii) Para la parte imaginaria se obtiene igualmente:

$$2\alpha\beta = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\frac{\nu_e}{\omega}}{1 + \frac{\nu_e^2}{\omega^2}}.$$

Para el caso particular de débil atenuación en que $\alpha \ll \beta$, lo que ocurre cuando $\nu_e \ll \omega$, tenemos como en casos anteriores unas relaciones más simples:

$$\begin{aligned}\beta &\cong \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \\ \alpha &\cong -\frac{\omega \omega_p^2}{c \omega^2} \frac{\frac{\nu_e}{2\omega}}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}\end{aligned}$$

Cuando la frecuencia ω de la onda electromagnética que se propaga está muy alejada (es mucho mayor) que la frecuencia del plasma ω_p , las expresiones anteriores se simplifican aún más, quedando:

$$\begin{aligned}\beta &\cong \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \dots\right) \\ \alpha &\cong -\frac{\omega \omega_p^2}{c \omega^2} \frac{\nu_e}{2\omega} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \dots\right).\end{aligned}$$

4.4.3. Ondas electromagnéticas sin atenuación ($\nu_e = 0$) y con agitación térmica ($T_e \neq 0$)

Debemos modificar de nuevo la ecuación de movimiento del elemento de fluido electrónico de nuestro planteamiento anterior, ecuación que escribiremos ahora como:

$$m_e n_{e_0} \frac{\partial \vec{u}_{e_1}}{\partial t} + m_e n_{e_0} (\vec{u}_{e_1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{e_1} \xrightarrow{0 \text{ (2º orden...)}} = -n_{e_0} e \vec{E}_1 - \vec{\nabla} p_e \quad \text{con} \quad \vec{\nabla} p_e = 3k_B T_{e_0} \vec{\nabla} n_e \quad (\text{movimiento adiabático del fluido electrónico.})$$

donde hemos introducido el término de fuerza debido a la agitación térmica de los electrones. Una vez linealizada en la perturbación y para solución armónica $\sim e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, la ecuación queda:

$$i\omega m_e n_{e_0} \tilde{\vec{u}}_{e_1} = -en_{e_0} \tilde{\vec{E}}_1 - 3k_B T_{e_0} \tilde{n}_{e_1} (-i\vec{k}) \quad (16)$$

Escribimos la ecuación de continuidad linealizada en la perturbación particularizada para solución armónica:

$$\omega \tilde{n}_{e_1} = n_{e_0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{u}}_{e_1} \quad ; \quad \tilde{n}_{e_1} = \frac{n_{e_0}}{\omega} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{u}}_{e_1} \quad (17)$$

Usamos como ecuación (3) la de los campos electromagnéticos ya deducida anteriormente:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \tilde{\vec{E}}_1 = i \frac{\omega}{\varepsilon_0} \tilde{j}_{e_1} = -i \frac{\omega}{\varepsilon_0} en_{e_0} \tilde{\vec{u}}_{e_1} \quad (18)$$

Sustituyendo (17), (16) se escribe:

$$i\omega m_e n_{e_0} \tilde{\vec{u}}_{e_1} = -en_{e_0} \tilde{\vec{E}}_1 + 3ik_B T_{e_0} \frac{n_{e_0}}{\omega} (\vec{k} \cdot \tilde{\vec{u}}_{e_1}) \vec{k},$$

por lo que podemos despejar $\tilde{\vec{u}}_{e_1}$.

Si seguimos buscando solución transversal a la propagación de las ondas electromagnética, $\tilde{\vec{u}}_{e_1}$ debe ser \parallel a $\tilde{\vec{E}}_1$ y ambos \perp a \vec{k} , por lo que $\vec{k} \cdot \tilde{\vec{u}}_{e_1} = 0$ y no hay cambio alguno respecto al caso de $T_e = 0$.

En efecto, con $\vec{k} \cdot \tilde{\vec{u}}_{e_1} = 0$ en (16) es:

$$\tilde{\vec{u}}_{e_1} = -\frac{e\tilde{\vec{E}}_1}{im_e\omega} \Rightarrow \tilde{\vec{j}}_{e_1} = -en_{e_0}\tilde{\vec{u}}_{e_1} = -i\frac{e^2n_{e_0}}{m_e\omega}\tilde{\vec{E}}_1,$$

que llevada a (18) resulta:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \tilde{\vec{E}}_1 = -i^2 \frac{\omega}{\varepsilon_0} \frac{e^2 n_{e_0}}{m_e \omega} \tilde{\vec{E}}_1 \Rightarrow (\omega^2 - c^2 k^2) = \underbrace{\frac{e^2 n_{e_0}}{\varepsilon_0 m_e}}_{\omega_p^2} \Rightarrow \underline{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}$$

Podríamos investigar ahora soluciones longitudinales.

4.4.4. Ondas electromagnéticas transversales con campo magnético externo \vec{B}_0

(Este punto queda como trabajo a realizar dentro de este tema de Oscilaciones y Ondas en Plasmas).

Tema 5

DESCARGAS EN GASES.

5.1. *Introducción.*

Para crear una descarga es necesario crear y mantener partículas cargadas, para ello es necesario suministrar energía al sistema. Esta descarga puede producirse a partir de una reacción química exotérmica, de compresión adiabática, de un calentamiento externo de las paredes que contienen el gas, a partir de una haz de partículas (neutrales o ionizadas) o un láser (fotones).

Una vez conseguido que en el sistema exista una cierta porción de partículas cargadas mediante una variación cíclica del campo magnético que produce compresión adiabática y una calentamiento de las partículas cargadas.

Las descargas en gases consisten en la aplicación de un campo electromagnético al gas neutro. La energía electromagnética se transfiere produciendo y manteniendo partículas cargadas, la mayor parte del plasma de laboratorio, plasmas fríos son creados a partir de una descarga en gases. Una vez que se consigue la respuesta, si se consigue equilibrar la ionización con las pérdidas se consigue el plasma estable. La transferencia de energía para provocar la ruptura puede producirse a partir de una corriente continua (DC), de una corriente alterna a bajas frecuencias (AC) o a partir de radiofrecuencias (RF), ya sea altas o bajas; si se sigue aumentando la frecuencia se llega a las descargas de microondas (μW).

5.2. *Descargas de corriente continua.*

En este tipo de descargas las colisiones que dominan son las que se producen con las partículas neutras. Estas colisiones hacen que las partículas no sean aceleradas indefinidamente, sino que en promedio tendrán una velocidad constante, sin embargo, la velocidad de deriva de los electrones será mayor que la de los iones $\vec{\mu}_e \gg \vec{\mu}_i$ y en primera aproximación puede considerarse que la corriente será debida a los electrones. Esto es:

$$j = en_e \Rightarrow n_e = \frac{\sigma}{en_e} E.$$

Por otro lado: $n_e = \mu_e E = \frac{e}{m_e v_e} E$, de donde se deduce que la conductividad:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_e} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{v_e} \frac{1}{\eta}.$$

La relación entre la conductividad y la movilidad electrónica es:

$$\sigma = en_e \mu_e.$$

Las colisiones electrón-neutro pueden ser de tipo elástico o inelástico y en este caso se da lugar a una ionización o a la emisión de un fotón. En las colisiones elásticas la potencia disipada se escribe:

$$P = \eta j^2 = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2 = \frac{m_e e}{e^2 n_e} j^2 = \frac{e^2 n_e}{m_e v_e} E^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \frac{2}{v_e} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \frac{2 \omega_p^2}{v_e} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v_*,$$

$$\text{siendo } v_* = \frac{2 \omega_p^2}{v_e} = \frac{2 e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e v_e} = \frac{2 \sigma}{\epsilon_0}.$$

Analicemos la características V-I de una descarga en DC:

- *Descarga croma:* Corresponde a la región más baja de intensidad, la energía de las partículas cargadas es tan baja que muy pocas partículas neutras son excitadas. De manera que la emisión de fotones será muy débil.

La descarga croma de Townsend, al seguir aumentando la tensión, aumenta la intensidad por encima de la intensidad de saturación:

$$I = I_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)},$$

siendo α el coeficiente de Townsend y describe la contribución debida a las colisiones ionizantes electrón-neutro, γ es el coeficiente que describe la producción secundaria de electrones, $p = \alpha \gamma$ es el segundo coeficiente de Townsend.

Cuando la corriente secundaria $\gamma(e^{\alpha d} - 1)$ se hace tan grande que tiende a uno, en este punto la corriente tiende a aumentar indefinidamente, la tensión a la que se produce esto es v_B , tensión de ruptura.

- *Descarga luminiscente:* El plasma pasa a ser conductor. La tensión cae bruscamente y la intensidad aumenta. En la desexcitación se emite gran cantidad de fotones, por eso es también de luminiscente.
- *Descarga arco:* A altas intensidades, donde se cuenta con la contribución extra de la emisión termoiónica de electrones. En un primer momento se produce una caída de tensión, los electrones siguen a más temperatura que los neutros, se produce un mínimo donde la intensidad de nuevo aumenta muy ligeramente. En ese punto casi se alcanza un equilibrio térmico entre electrones y partículas pesadas

5.3. Descargas de arco.

5.4. Descargas inductivas y capacitivas de radio frecuencia.

Cuando la frecuencia es suficientemente alta, las variaciones de los campos son tan rápidas que los portadores de carga no son capaces de atravesar la vaina y alcanzar los electrones. En este caso no existen corrientes reales entre los electrodos y el plasma, apareciendo las corrientes de desplazamiento. Estas son las descargas de Radio Frecuencia (RF).

Al no existir corrientes reales no es preciso que los electrodos estén en contacto con el plasma evitando así que se produzca el fenómeno de sputtering en los electrodos, este hecho reduce las impurezas en las descargas, aumenta la vida útil del reactor de plasma así como la reproductibilidad de las condiciones del experimento; estas son las llamadas descargas sin electrodos.

Estas descargas se clasifican según el acoplamiento de la energía del plasma: Se distinguen *descargas capacitivas* (CCD) en que la energía suministra al plasma mediante el campo eléctrico oscilante con el tiempo; *descargas inductivas* (ICD), en este tipo de acoplamiento la energía es transferida al plasma a través de unas corrientes inducidas producidas por el campo magnético variable con el tiempo.

Debido a que la descarga es un medio conductor, los campos penetran en al descarga una distancia:
 $\delta d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$.

Esto puede provocar que los campos solo penetren en el contorno de la descarga, por tanto:

Analicemos el comportamiento del plasma con el campo variable con el tiempo. Consideremos tres situaciones:

- $f < v_e$: En este caso los electrones sufren más de una colisión en cada periodo de oscilación del campo.

$$m_e n_e \frac{d\vec{u}}{dt} = m_e E_0 \sin(\omega t) - m_e n_e v_e \vec{u}.$$

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m_e v_e \frac{dx}{dt} = e E_0 \sin(\omega t) \Rightarrow x = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \Rightarrow x = -\frac{E_0 e}{m_e (\omega^2 + v_e^2)} (\sin(\omega t) + \frac{v_e}{\omega} \cos(\omega t)) \Rightarrow u_x 0 \omega (C_1 \cos(\omega t) - C_2 \sin(\omega t)) = -\frac{e E_0}{m_e (\omega^2 + v_e^2)} (\sin(\omega t) - \frac{v_e}{\omega} \cos(\omega t))$$

Calculemos la potencia instantánea:

$$P(t) = jE = (n_e e \mu_e) E = -\frac{n_e e^2 E_0^2}{m_e (\omega^2 + v_e^2)} (\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \frac{v_e}{\omega} \sin^2(\omega t)).$$

Y la potencia media disipada en la descarga:

$$\langle P \rangle = \frac{n_e e^2 E_0^2}{m_e (\omega^2 + v_e^2)} \left(\frac{1}{2} \frac{v_e}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{n_e e^2 E_0^2}{m_e (\omega^2 + v_e^2)} \frac{v_e}{\omega},$$

comparando con la potencia disipada en DC: $P_{oc} = \frac{e^2 n_e}{m_e v_e} E$, puede definirse un campo equivalente que disipe en continuo la misma potencia media que en alterna:

$$E_{eq}^2 = \frac{E_0^2}{2} \frac{v_e^2}{\omega^2 + v_e^2}.$$

Definamos análogamente a como se hizo en DC, la frecuencia de transferencia de energía:

$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \Rightarrow \langle \omega_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2.$$

y entonces:

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \frac{2 n_e e^2}{m_e} \frac{v_e}{(\omega^2 + v_e^2)} = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 \frac{2 \omega_{pe}^2 v_e}{(\omega^2 + v_e^2)} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 v_*$$

$$\text{done: } v_* = \frac{2 \omega_{pe}^2 v_e}{(\omega^2 + v_e^2)}.$$

- $f > v_e$: En este caso el electrón entre dos oscilaciones consecutivas esta enlazado con el campo:

$$m_e \frac{du}{dt} = e E_0 \sin(\omega t) \Rightarrow u = -\frac{e E_0}{m_e \omega} \cos(\omega t) + cte.$$

Existe un desfase de $\pi/2$ entre la velocidad de los electrones y el campo aplicado. Por existir este desfase:

$$p(t) = F(t) n(t) = cte \sin(\omega t) \cos(\omega t) \Rightarrow \langle p \rangle = 0.$$

De no existir colisiones $\langle p \rangle = 0$, los electrones no ganarían potencial. Es en las colisiones donde se produce un desfase adicional que conduce a una potencia media absorbida distinta de cero. Los electrones absorben energía del campo porque colisionan.

- $f > \omega_{pe} \rightarrow T < T_{pe}$ En este caso el tiempo de variación del campo es menor que el tiempo de respuesta del plasma. Esto hace que una perturbación pueda propagarse por el plasma sin que sufra apantallamiento.

En esta situación, el campo se comporta como un medio dieléctrico, sobre el que se propaga una onda y parte de la energía que transfiere la onda es absorbida por el plasma, situación típica de las descargas de microondas.

5.5. *Descargas producidas por microondas.*

Descargas sobre los que actúan señales de frecuencia superior a los 300 MHz.

Tema 6

DIAGNOSIS DE PLASMAS

6.1. *Introducción.*

Los métodos o técnicas de diagnosis de plasmas nos permiten determinar experimentalmente las principales características de los mismos sobre la base del conocimiento de los valores de sus magnitudes físico-químicas, relativas a su composición, densidades de especies, temperaturas, campos y corrientes. Cada una de ellas se basa en fenómenos físicos que se dan dentro del plasma de forma natural o mediante su interacción desde el exterior con del mismo, y que caracterizan el plasma y su estado.

6.1.1. Plasmas que podemos diagnosticar

De forma general, podemos diagnosticar cualquier tipo de plasma de los que existen de forma natural (plasmas en la Naturaleza) o de los que podemos producir artificialmente (plasmas de laboratorio o con aplicaciones industriales), que se resumen en el gráfico de la Figura 1 en función de su densidad y temperatura electrónica.

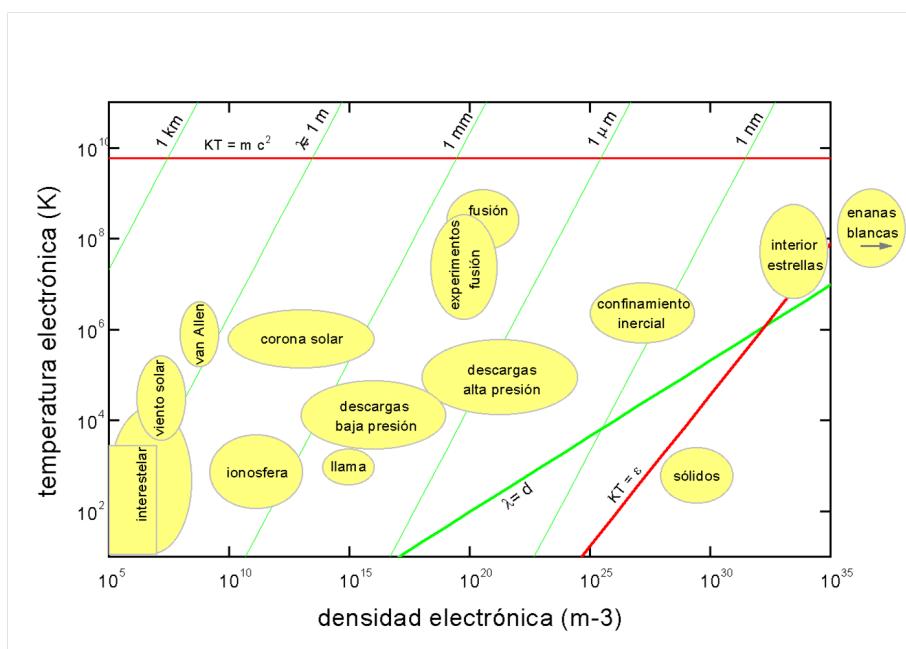


Figura 1. Tipos de plasmas en función de su densidad y temperatura electrónica

6.1.2. Clasificación de las técnicas de diagnosis

Con independencia del tipo de plasma al que se apliquen, existen distintas clasificaciones - atendiendo a distintos criterios - de las técnicas de diagnosis. Históricamente se desarrollaron técnicas de:

- *Diagnosis por sondas*: se incluyen sondas eléctricas estáticas y dinámicas (simples y múltiples), y sondas magnéticas. Las sondas son finísimos conductores inmersos o cercanos al plasma que drenan selectivamente cargas y corrientes del interior del mismo, o de su entorno próximo.
- *Diagnosis electromagnética*: se basan en la interacción del plasma con ondas electromagnéticas que se propagan o son reflejadas por éste, lo hacen oscilar de forma resonante en cavidades o mediante guías de ondas y antenas, ó sufren interferencias en su seno.
- *Diagnosis espectroscópica*: se basan en el análisis espectral de la radiación continua o de línea emitida de forma espontánea o inducida por el plasma, y/o absorbida por éste.
- *Otras técnicas de diagnosis*: se agrupan las que claramente no respondan a las anteriores categorías (*p.e.* uso de espectrómetros de masas).

6.1.3. Características de estas técnicas

Pueden darse de forma no excluyente algunas características generales de las técnicas o métodos de diagnosis que se aplican a los plasmas, pudiendo ser:

- *Experimentales ó Computacionales*, según que use instrumentación y montajes experimentales de medida de magnitudes físicas, ó por el contrario se trate de modelos de física computacional que determinan valores de estas magnitudes en función de parámetros conocidos.
- *Directas ó Indirectas*, según que determinen valores independientemente de hipótesis y modelos, ó que estos valores estén precisamente condicionados o influidos por estas condiciones, a veces fuertemente.
- *Activas ó Pasivas*, según que se estimule de alguna manera al plasma para analizar su respuesta y así realizar la diagnosis, ó que sólo se analice lo que el plasma expulsa de forma natural (partículas, radiación,) sin estimulación alguna.
- *Simples ó Múltiples*, según que se determine sólo una magnitud en la diagnosis, ó más de una de forma simultánea.
- *Locales ó Globales*, según que se determine una propiedad local (en un punto del plasma), ó de todo el plasma en su conjunto.

La mayoría de los diagnósticos gozan de más de una de estas características al mismo tiempo. La *polidiagnosis* es la aplicación simultánea de varias técnicas distintas en un mismo experimento de diagnosis de plasmas.

6.1.4. Para la diagnosis de plasmas ¿qué magnitudes queremos medir?

Las magnitudes características del plasma que fundamentalmente nos interesan en su diagnosis podrían agruparse en tres amplias categorías:

- *Densidades de especies*: se trata de la densidad electrónica n_e , la densidad iónica n_i , la densidad de especies excitadas n_p (atómicas o moleculares) en cualquier nivel excitado p para cualquier estado de ionización de las partículas.

- *Temperaturas de especies*: son la temperatura electrónica T_e , la temperatura iónica T_i , la de neutros T_{gas} (gas plasmógeno), pero también otras temperaturas no cinéticas como de excitación T_{exc} , de ionización T_{ion} , de radiación T_{rad} , rotacional T_{rot} , vibracional T_{vib} ... También, las funciones de distribución de energías de las partículas.
- *Potenciales, campos y corrientes*: potencial del plasma V_p , potencial flotante V_f , campo eléctrico de mantenimiento, campos magnéticos, corrientes de calentamiento,...
- Las *inhomogeneidades e inestabilidades* en el plasma son también de fundamental interés sobre todo en plasmas astrofísicos y en plasmas de fusión.

De forma general podría decirse que conocidas ó determinadas las anteriores magnitudes, puede conocerse prácticamente todo en el plasma. En este tema analizamos por separado cada una de estas técnicas.

6.2. Diagnosis por sondas.

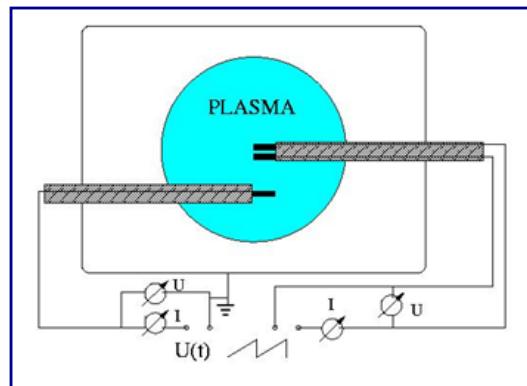
La diagnosis de plasmas por sondas de diversa naturaleza permite la determinación de las principales características del mismo como densidad electrónica n_e , densidad iónica n_i , temperatura electrónica T_e , potenciales de plasma V_p y flotante V_f , función de distribución de energía electrónica (FDEE), corrientes eléctricas así como campos eléctricos y magnéticos en su seno. Históricamente se debe a Langmuir la introducción de estas técnicas.

6.2.1. Tipos de sondas

Existen distintos tipos de sondas para la diagnosis de plasmas, pudiéndose distinguir entre:

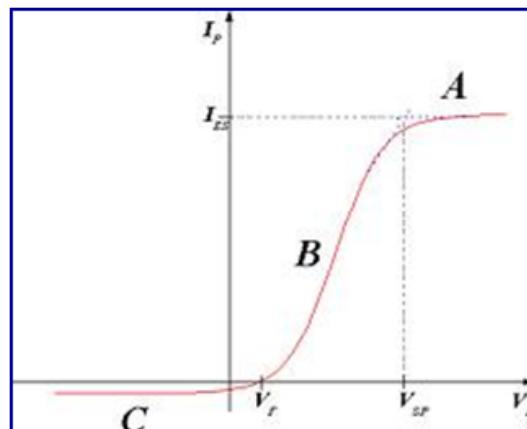
- eléctricas y magnéticas
- simples y dobles
- estáticas y dinámicas

Específicamente para sondas eléctricas, por otra parte las más usadas en diagnosis de plasmas, mediante la curva característica $I-V$ de la sonda puede diagnosticarse, muy localmente y tanto en situaciones estacionarias como transitorias, n_e , n_i , T_e , y así como los potenciales V_p y V_f . Para ello, se utilizan las distintas regiones de dicha curva, en cada una de la cuales dominan o compiten las corrientes electrónicas e iónicas captadas por la sonda (ver Figura 2b para sonda simple). Dicha discriminación se consigue para sonda simple polarizando ésta positiva o negativamente respecto al plasma. En doble sonda, la polarización que se realiza es de una de ellas respecto a la otra, mientras que en las sondas eléctricas dinámicas se superpone una señal de RF a una sonda simple o a una doble sonda pudiéndose analizar las resonancias del sistema sonda-plasma. Dichas resonancias están gobernadas por el valor de n_e a través de la frecuencia del plasma ω_p .



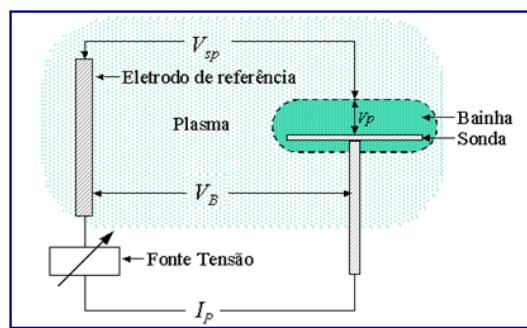
Esquema de diagnosis por sonda simple (izq.)
o doble sonda (dcha.)

Figura 2a. Dispositivo experimental de diagnosis por sondas



Característica $I-V$ de una sonda simple

Figura 2b. Curva característica $I-V$



Esquema simplificado de sonda simple

Figura 2c. Diagnosis por sonda simple

6.2.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis por sonda simple

Tanto en situación estacionaria (plasma estabilizado) como variable con el tiempo o transitoria (procesos de creación o de extinción), se determina la densidad electrónica n_e , la densidad iónica

n_i , la temperatura electrónica T_e y la función de distribución de energía de los electrones (*FDEE*) usando las distintas zonas de la característica $I-V$ de la sonda polarizada respecto al plasma (ver Figuras 2b y 2e):

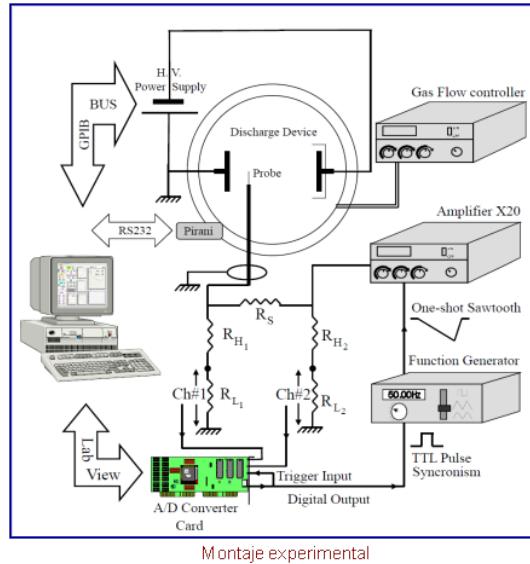
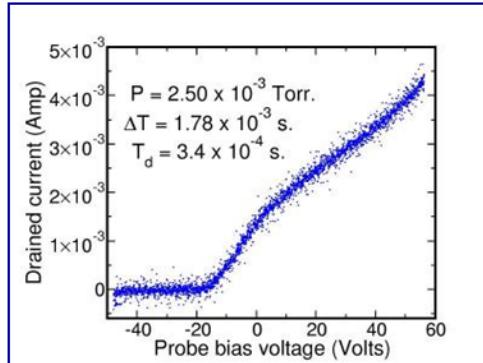
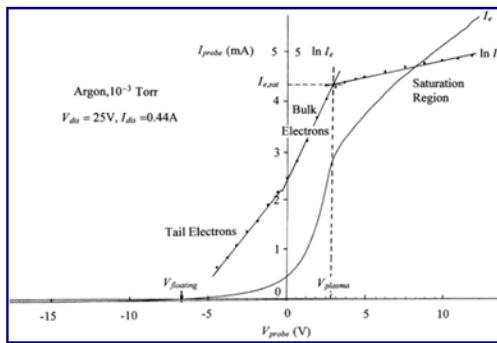


Figura 2d. Dispositivo experimental



Diversas curvas características $I-V$ de sonda simple



Distintas zonas de la característica útiles para la diagnosis

Figura 2e. Distintas características $I-V$ para sonda simple

- en C o zona de saturación iónica: se determina n_i ;
- en $C - B$ o zona de retardo electrónico: se determinan n_e , T_e , $FDEE$;

- en V_f o zona del potencial flotante: se determina n_i ;
- en V_p o zona del potencial del plasma: se determinan n_e ó T_e ;
- en A o zona de saturación electrónica: n_e .

En el estudio de transitorios del plasma (períodos de creación o extinción), las sondas permiten con gran resolución temporal el análisis de la evolución del mismo. Pueden obtenerse los valores instantáneos de las magnitudes características (n_e, T_e, n_i) así como la función de distribución de energía de los electrones *FDEE*.

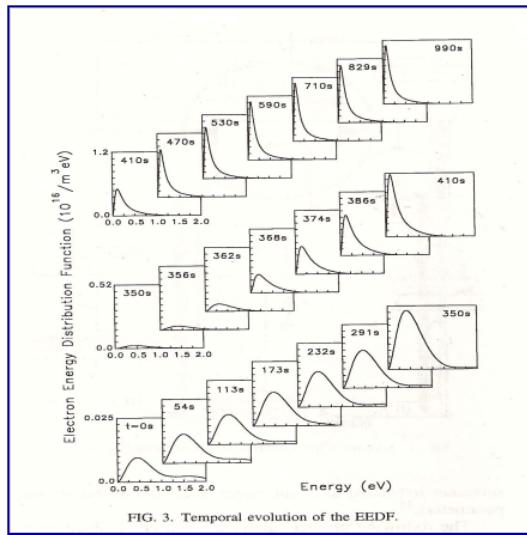


FIG. 3. Temporal evolution of the EEDF.
Series de funciones de distribución de energía de los electrones a distintos tiempos de muestreo

Figura 2f. Evolución temporal de la *FDEE*

6.3. Diagnosis electromagnética.

El estudio de la interacción de ondas electromagnéticas de baja intensidad con plasmas constituye una forma eficaz de obtener información sobre éstos, que en general constituyen el medio de propagación de dichas ondas. Durante esta interacción, las ondas electromagnéticas de frecuencia ω :

- Pueden viajar por el plasma usándolo como medio de propagación de tal manera que las características propagativas de los campos electromagnéticos (número de onda β , coeficiente de atenuación α) quedan ligadas o determinadas por las características constitutivas de dicho medio (composición, densidad, temperatura): determinan las técnicas puramente propagativas;
- Durante esta propagación, las ondas electromagnéticas pueden eventualmente sufrir interferencias entre ellas, reflejarse y/o refractarse en sus contornos así como dispersarse, todo lo cual posibilita la diagnosis al estar los anteriores fenómenos ondulatorios determinados por las condiciones del plasma: determinan las técnicas de interferometría y reflectometría;
- Pero estas ondas también pueden inducir oscilaciones forzadas en los plasmas excitando sus frecuencias de resonancias, relacionadas de una forma u otra con la frecuencia del plasma ω_p . Cavidades resonantes que contienen plasma, guías de onda rectangulares atravesadas por tubos de plasma y antenas

emisoras/receptoras colocadas en las cercanías de éstos son usados al efecto: determinan las técnicas resonantes.

El modelo dieléctrico del plasma en interacción con campos electromagnéticos constituye una aproximación exitosa, que resulta necesario para relacionar las propiedades plasma/onda. En este modelo, la permitividad relativa o constante dieléctrica del plasma ε_p y la conductividad eléctrica del plasma σ son en general cantidades complejas función de ciertas frecuencias de interés en el problema: frecuencia del plasma ω_p , frecuencia de colisión de los electrones ν_e y frecuencia de excitación del campo electromagnético ω . En el contexto de este modelo se demuestra que

$$\varepsilon_p = 1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega},$$

con $\varepsilon_p = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$ y $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, obteniéndose para las partes reales e imaginarias que

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_e^2}; \quad \varepsilon_i = -\frac{\nu_e}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_e^2};$$

$$\sigma_r = \varepsilon_0 \nu_e \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_e^2}; \quad \sigma_i = -\varepsilon_0 \omega \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_e^2}$$

6.3.1. Técnicas puramente propagativas

Pueden diagnosticarse la densidad electrónica n_e y la temperatura electrónica T_e en el plasma mediante el estudio de las características de propagación (constante de fase y atenuación) de ondas electromagnéticas propagándose en su seno. La relación de dispersión liga las propiedades propagativas de la onda electromagnética con las del medio de propagación o plasma, siempre que su frecuencia ω sea superior a la frecuencia del plasma ω_p cuya relación con la densidad electrónica, como sabemos, viene dada por $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$.

A partir del modelo dieléctrico del plasma en interacción con campos electromagnéticos, esta relación de dispersión es una función:

- Real (si $\nu_e = 0$): en ausencia de colisiones (plasmas muy diluidos), no existe atenuación y la relación de dispersión es simplemente $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, puramente real donde el n° de onda es $k = 2\pi/\lambda$ (real);
- Compleja (si $\nu_e \neq 0$): en plasmas densos, las colisiones electrónicas adquieren gran importancia en la propagación y la onda electromagnética se atenúa con n° de onda complejo $k = \beta + i\alpha$ (con $\alpha < 0$) siendo $\beta = 2\pi/\lambda$ como n° de onda real y α el coeficiente de atenuación. En este caso general, la relación de dispersión se divide en dos ecuaciones, una para la propagación y otra para la atenuación de la onda electromagnética:

Propagación (su parte real):

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\nu_e^2}{\omega^2}} \right]$$

Atenuación (su parte imaginaria):

$$2\alpha\beta = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\frac{\nu_e}{\omega}}{1 + \frac{\nu_e^2}{\omega^2}}$$

Una vez determinados experimentalmente los coeficientes β y α durante la propagación, usando las relaciones anteriores se encuentran los valores de ω_p y ν_e : ω_p permite conocer la densidad electrónica n_e y ν_e permite estimar la temperatura electrónica T_e asumiendo un comportamiento Maxwelliano para los electrones. Para el caso particular débilmente colisional, donde $\nu_e \ll \omega$, lo que a su vez implica que $\alpha \ll \beta$, las expresiones anteriores se simplifican notablemente.

6.3.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis electromagnética propagativa

Plasma de argón producido por onda de superficie a baja presión. Una onda electromagnética (a frecuencia de microondas) de potencia suficiente ioniza el gas produciendo la descarga, a la vez propagándose por el plasma al tiempo que lo crea. En este caso particular, la onda electromagnética crea el plasma y permite su diagnosis electromagnética al estar íntimamente ligados las propiedades del medio de propagación con las características de la onda electromagnética. Existen distintos dispositivos que permiten la creación de columnas cilíndricas de plasma como consecuencia de la aplicación de energía de HF (microondas) a la descarga (surfatrón, surfaguía y guía surfatrón, entre otros).

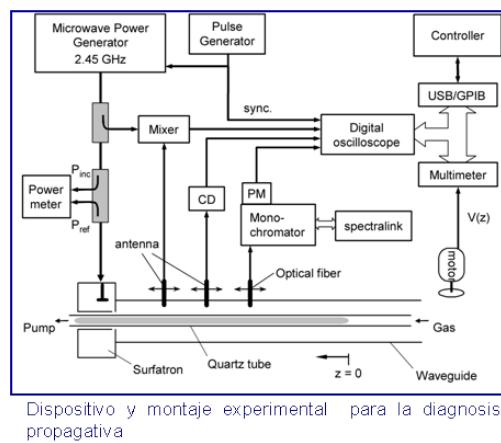


Figura 3a. Esquema para la diagnosis electromagnética propagativa

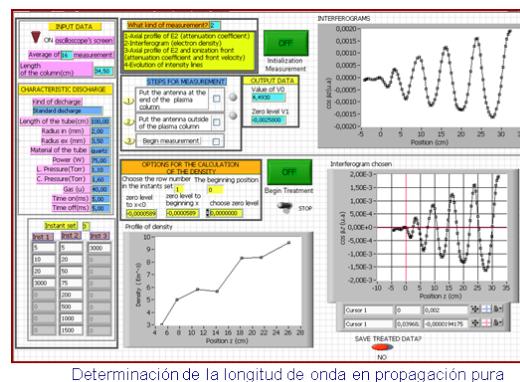


Figura 3b. Registro de la curva de fase en un experimento

La medida de la longitud de onda a lo largo de la columna de plasma durante la propagación permite la determinación de ω_p y por tanto de n_e . Para ello es necesario conocer la relación de dispersión de la onda propagándose por el plasma (curva de fase) que relaciona $\beta = 2\pi/\lambda$ con ω_p .

Puede también estimarse T_e a partir del coeficiente de atenuación α de la onda, proporcional a ν_e , que a su vez es proporcional a las pendientes de los perfiles longitudinales de densidad. Para ello se asume una *FDEE* Maxwelliana para los electrones.

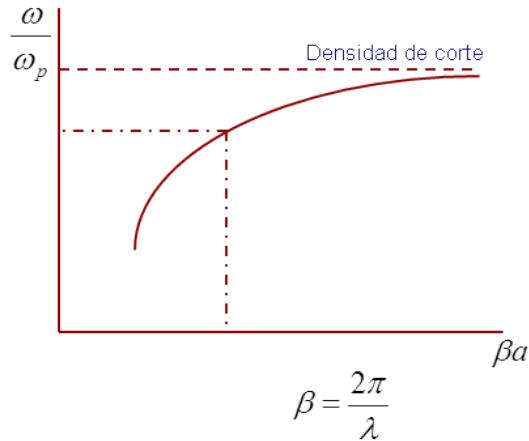


Figura 3c. Relación de dispersión (parte propagativa)

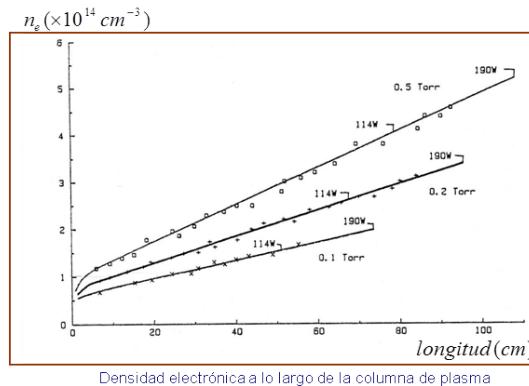


Figura 3d. Perfiles axiales de densidad electrónica n_e en distintas condiciones experimentales

6.3.3. Técnicas interferométricas

Mediante el análisis del patrón de interferencia o interferograma de las ondas electromagnéticas viajando por el plasma, puede hacerse el diagnóstico del mismo. Pueden destacarse la interferometría por láser (óptica) y por microondas:

- Esquemáticamente, una experiencia de diagnóstico interferométrico por láser implica al menos la división de un haz primario en dos, uno de los cuales debe atravesar el plasma a diagnosticar. También pueden usarse dos láseres. Distintos tipos de interferómetros pueden destacarse: Michelson, Mach-Zehnder, de polarización, Fabry-Perot, ... Mediante el modelo dieléctrico, el número de franjas de interferencia observado se relaciona con n_e . En interferometría láser,

$$\omega \gg \omega_p, \nu_e.$$

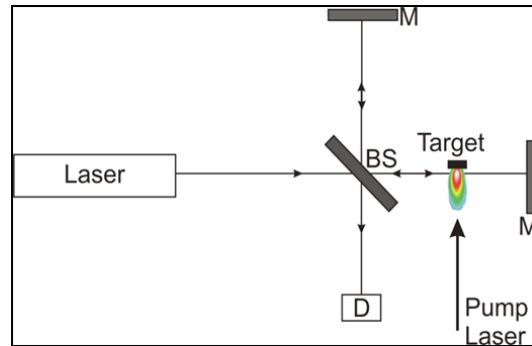


Figura 4a. Esquema experimental de interferometría por láser

- De forma análoga, la interferometría permite también la diagnosis de la densidad electrónica del plasma a frecuencias de microondas mediante dispositivos similares en los que se mide el desfase entre la señal de referencia y la de medida en presencia de plasma. El desfase observado se relaciona con n_e . En interferometría de microondas, $\omega \geq \omega_p$.

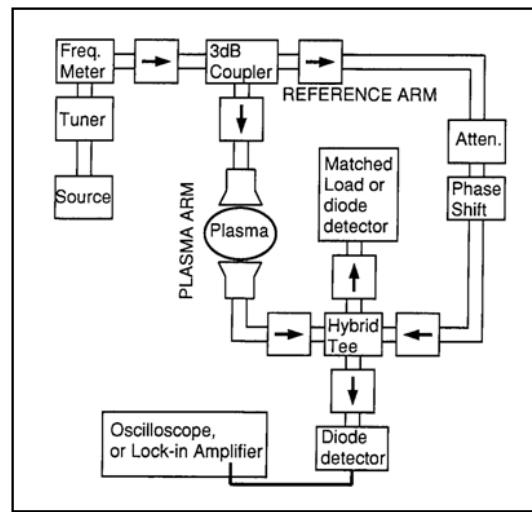


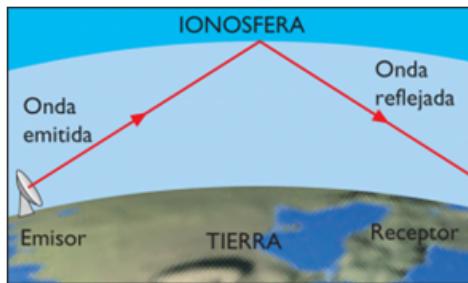
Figura 4b. Esquema experimental de interferometría de microondas

6.3.4. Técnicas por reflectometría

Como caso límite de la propagación, la reflexión de ondas electromagnéticas en los límites del plasma constituye otra forma de diagnosis electromagnética del mismo, complementaria a las anteriores, y se basa en el hecho de que las ondas electromagnéticas no pueden propagarse cuando su frecuencia ω es inferior a la frecuencia del plasma ω_p , lo que generaría un número de onda k imaginario (soluciones o modos evanescentes). La determinación de la frecuencia límite a la propagación en cualquier tipo de plasma permite determinar experimentalmente ω_p y por tanto la densidad electrónica de corte a la propagación n_{ec} . Habitualmente se usan microondas para dicha determinación aunque dependerá de la densidad electrónica en el plasma. El uso de esta técnica permite también la detección y caracterización de inhomogeneidades y turbulencias en plasma de fusión así como de la ionosfera terrestre, lo que permite cierto tipo de comunicaciones.



Figura 5a. Relación de dispersión en forma cuadrática para la propagación de las ondas electromagnéticas en plasmas homogéneos ilimitados. En sombreado, la zona prohibida a dicha propagación



Reflectometría para comunicaciones en la ionosfera

Figura 5b. Recreación artística de la reflexión en la ionosfera terrestre ($\omega < \omega_p$)

6.3.5. Técnicas resonantes

En general, este tipo de técnicas de diagnosis electromagnética de plasmas excitan resonancias en el mismo de forma parecida a las sondas dinámicas pero a frecuencias ω mucho más elevadas. Dichas resonancias permiten encontrar experimentalmente la frecuencia del plasma ω_p y por tanto la densidad electrónica n_e . Analizamos brevemente las que utilizan:

- Cavidad resonante cilíndrica a frecuencias de microondas atravesada por columna de plasma coaxial a la cavidad. Existen otras geometrías no cilíndricas. El corrimiento o desplazamiento en frecuencia de la cavidad resonante en presencia de plasma $\Delta f = f - f_0$ determina la densidad electrónica media de la porción de plasma interior a la cavidad por cambio de su permitividad relativa (parte real) dependiente de ω_p dentro de la cavidad. Se necesita información del campo eléctrico en su interior al menos de forma aproximada para poder hacer algún tipo de promedio espacial y determinar n_e . En primera aproximación, el corrimiento o desplazamiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad $\Delta f = f - f_0$ es proporcional a la densidad electrónica media \bar{n}_e , pudiéndose escribir

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{\bar{\eta}}{1 + (\nu_e/\omega)^2}$$

donde $\bar{\eta} = \epsilon_0 \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{\bar{n}_e e^2}{m_e \omega^2}$, de donde puede obtenerse la densidad electrónica promedio en el interior de la cavidad resonante midiendo experimentalmente

su desplazamiento en frecuencia (si el plasma es poco colisional, el cociente $(\nu_e/\omega)^2$ puede despreciarse por ser $\ll 1$).

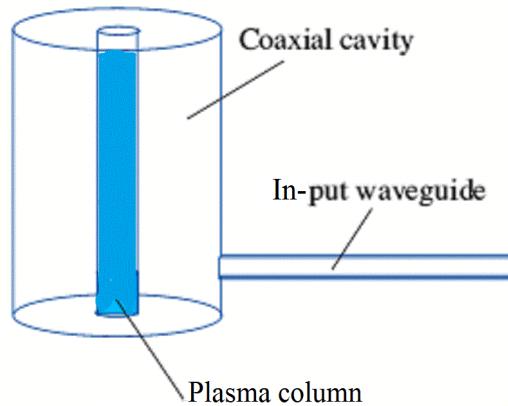


Figura 6a. Cavidad resonante cilíndrica para la diagnosis de n_e en columnas de plasma

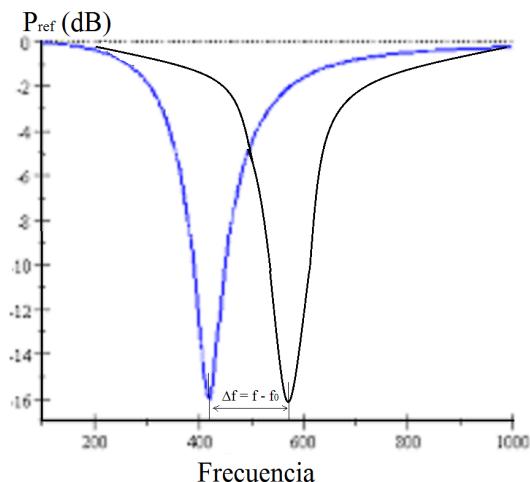


Figura 6b. Respuesta dinámica de la cavidad sin (f_0) y con (f) plasma

- Guía de ondas rectangular atravesada por columna de plasma perpendicular al campo eléctrico del modo guía. El campo eléctrico oscilante del modo guía perpendicular al eje de la columna cilíndrica de plasma excita forzadamente una resonancia electrónica principal (dipolar) y otras secundarias (modos Tonks-Dattner) que están relacionadas con ω_p y por tanto con n_e . Puede demostrarse que la frecuencia de esta resonancia dipolar viene dada por $\omega_{res} \cong \omega_p(1 + \varepsilon_v)^{-1/2}$, de donde la densidad electrónica promedio aproximadamente en el centro de la guía rectangular es

$$\bar{n}_e \cong 4\pi^2 f_{res}^2 (1 + \varepsilon_v) \frac{m_e \varepsilon_0}{e^2}$$

de manera que determinando experimentalmente ω_{res} para el modo resonante dipolar - que simplemente llamaremos ω_0 - podemos diagnosticar la densidad electrónica por resonancia (ε_v es la permitividad relativa o constante dieléctrica del tubo que contiene el plasma). Las resonancias de Tonks-Dattner

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$ pueden también usarse en la diagnosis electromagnética resonante de estas columnas de plasma aunque su estudio es más complejo y no lo abordamos aquí.

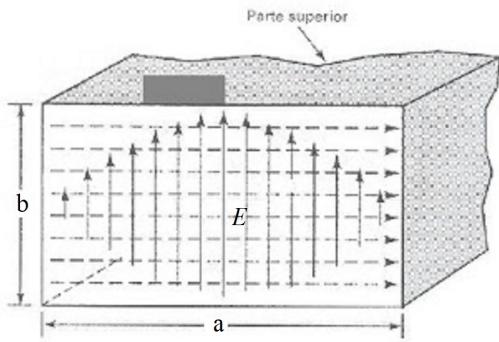


Figura 6c. Distribución del campo eléctrico en el interior de la guía de onda rectangular perpendicular al eje de la columna

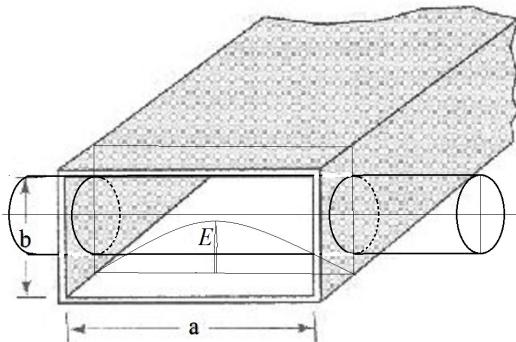


Figura 6d. Columna cilíndrica de plasma atravesando la guía de onda rectangular para producir las resonancias dipolar y de Tonks-Dattner

- Antena emisora muy próxima a la columna de plasma perpendicular a la misma. Genera igual que en el caso anterior las resonancias electrónicas ya mencionadas, tanto la principal o dipolar como las de Tonks-Dattner, relacionadas con ω_p que permiten determinar n_e . Puede usarse una segunda antena para la detección de la resonancia, o la misma antena emisora analizando la reflexión de la señal de excitación. El tratamiento es el mismo que en el caso anterior de guía de onda rectangular y se obtienen los mismos resultados para la diagnóstico de n_e de la columna cilíndrica de plasma.

Las frecuencias usadas en estas técnicas resonantes se encuentran habitualmente en el dominio de las microondas pero son fuertemente dependientes del valor de la densidad electrónica n_e existente en el plasma que se quiere diagnosticar por estos métodos electromagnéticos.

6.4. Diagnosis espectroscópica.

El estudio de la radiación de todo tipo emitida o absorbida por el plasma es el fundamento de la diagnosis espectroscópica. De forma genérica se trata de obtener la intensidad radiante absoluta o

relativa a cada frecuencia de emisión. La espectrometría o espectroscopía es la parte de la física que estudia y usa los espectros, muy frecuentes también en química. Muy simplemente, los espectros son:

- radiación emitida o absorbida por la materia bajo diferentes circunstancias,
- que tiene una fuerte dependencia para cada material con su longitud de onda,
- que se evidencian mediante difracción (prisma, red, ...) de dicha radiación al separarse en sus componentes espectrales
- y que tienen su explicación en la estructura a escala microscópica o de partícula (electrones, protones, núcleos, átomos, moléculas,...) de la materia que los emite, así como en la interacción entre estas partículas y campos electromagnéticos.

El rango de frecuencias de trabajo va desde el infrarrojo hasta la radiación X, pasando por el visible, el ultravioleta, etc. El especlrómetro es el instrumento que permite la medida de la intensidad radiante en función de su frecuencia. Existen diferentes tipos dependiendo de sus características.

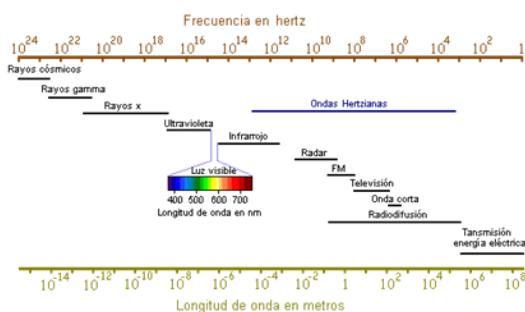


Figura 7a. Espectro completo de las ondas electromagnéticas

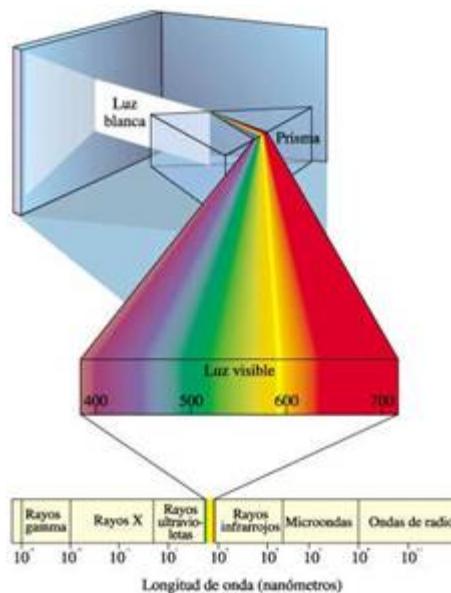


Figura 7b. Dispersión de ondas electromagnética por un prisma: espectro electromagnético

6.4.1. Clasificación de las técnicas espectroscópicas

Además de la clasificación general de las técnicas de diagnosis, aplicada a la diagnosis de plasmas, estas técnicas son:

- de *emisión* ó *absorción*, según que la radiación sea emitida por el plasma y detectada exteriormente ó el plasma sea irradiado desde el exterior y midamos la radiación absorbida por el mismo;
- *atómica* ó *molecular*, según que la radiación estudiada esté mediada por átomos (como ocurre en la espectroscopía atómica de emisión/absorción) ó por el contrario sean moléculas las que intervienen en dicha mediación;
- *discreta* ó *continua*, según que la radiación se corresponda con transiciones cuánticas discretas entre niveles atómico-moleculares entre estados de energías determinadas, o transiciones ligado-ligado, que dan lugar a las líneas espectrales a longitudes de onda definidas, ó por el contrario se corresponda con transiciones libre-ligado ó libre-libre entre estados de energías indeterminadas dando lugar a la radiación de continuo a cualquier longitud de onda (*Bremstrahlung*, recombinación radiativa);
- *absoluta* ó *relativa*, según que la radiación medida se calibre en intensidad con la ayuda de lámparas espectrales de emisividad conocida (p.e. con *ribbon-lamp*) ó sólo se use para comparar dos o más intensidades de longitud de onda parecida.

Existe una amplia cantidad de técnicas espectroscópicas de diagnosis de plasmas basadas en el análisis de la radiación que éstos emiten o absorben. Este análisis se puede realizar una vez identificados los procesos microscópicos o mecanismos en los que las partículas del plasma interactúan con dicha radiación. Las técnicas espectroscópicas de diagnosis de plasmas permiten la determinación de la densidad electrónica n_e , la temperatura electrónica T_e , la temperatura de neutros (gas) T_{gas} , así como una gran variedad de densidades de especies excitadas tanto neutras como iónicas, n_p , n_q^+ ,... En lo que sigue, enumeramos y describimos brevemente las más conocidas.

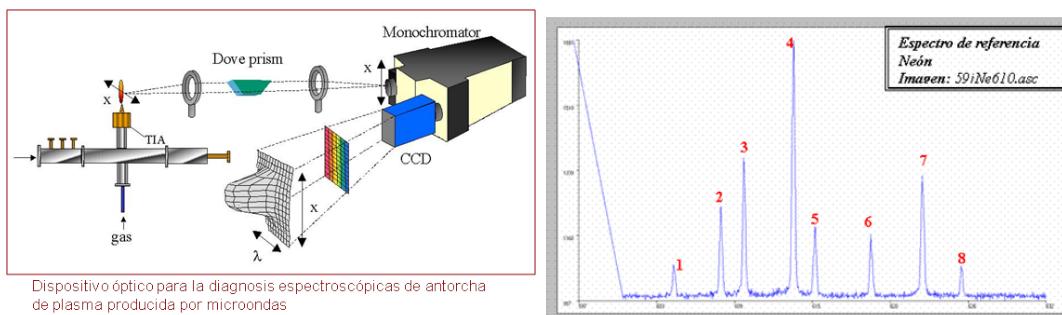


Figura 8. a) Dispositivo experimental para espectroscopía de plasmas y b) Ejemplo de espectro de emisión en plasma de neón

Scattering (o esparcimiento) Thomson

El fundamento de este diagnóstico se basa en la dispersión (esparcimiento) o scattering elástico de fotones (láser) por los electrones libres del plasma y el posterior análisis de la radiación dispersada. De la medida de la intensidad absoluta de la señal Thomson se obtiene n_e y de su ensanchamiento T_e . Es una técnica muy directa y muy local, así como de gran precisión aunque costosa y de difícil implementación.

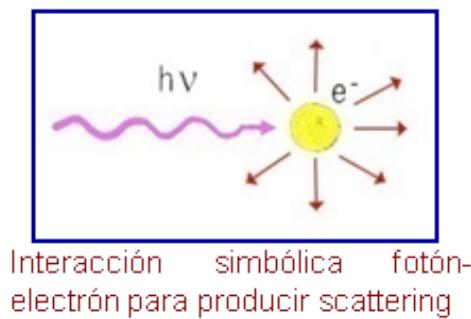


Figura 9a. Recreación artística de la interacción fotón-electrón en Scattering Thomson

Ensanchamiento Stark de líneas espectrales

Según la densidad de partículas cargadas en el plasma (electrones e iones), las líneas espectrales espontáneamente emitidas por éste están más o menos ensanchadas así como desplazadas. Dicho ensanchamiento y desplazamiento de líneas espectrales, denominado Stark por basarse en el efecto del mismo nombre, puede determinarse a partir de ciertos modelos computacionales y su comparación con el ensanchamiento medido experimentalmente permite la diagnosis de una forma indirecta. Para el uso de los resultados computacionales de estos modelos de ensanchamiento de línea es necesario el conocimiento previo de las temperaturas electrónica e iónica. Permite la determinación de la densidad de partículas cargadas, $n_e = n_i$.

Espectroscopía Atómica de Emisión (EAE) y técnicas de equilibrio

La espectroscopía atómica de emisión (EAE) y el estudio de la separación del equilibrio en el plasma implica la determinación experimental y/o a través de modelos computacionales de la densidad de especies excitadas n_p . Las más conocidas son el diagrama de Boltzmann (*Boltzmann – plot*) y el salto Saha (*Saha – jump*) de los estados atómicos excitados que permiten la determinación de las temperaturas de excitación T_{exc} y de ionización T_{ion} . Bajo ciertas restricciones, estas temperaturas asimilan a T_e por lo que ésta puede ser estimada.

Bandas vibro-rotacionales de especies moleculares

En presencia de especies moleculares en el plasma (OH, O_2, N_2, \dots), su espectro de bandas vibro-rotacionales permite bajo ciertas restricciones la determinación de la temperatura rotacional T_{rot} y vibracional T_{vib} asimilables a la temperatura de las partículas pesadas o temperatura del gas, T_{gas} , mediante algún tipo de diagrama de Boltzmann para los estados excitados vibro-rotacionales de las moléculas implicadas.

Ensanchamiento Doppler

La agitación térmica de átomos emisores de línea espectrales provoca en la dirección de observación un ensanchamiento de dichas líneas debido al corrimiento Doppler de la radiación proveniente del emisor en movimiento. En su perfil Gaussiano está la información de la temperatura T_{gas} de estos átomos.

Radiación de continuo

La llamada radiación de continuo - que en contraposición con las líneas espectrales es emitida de forma continua a cualquier frecuencia - tiene su origen en los procesos de recombinación radiativa

y de frenado (*Bremsstrahlung*) entre electrones e iones. Son transiciones electrónicas libre-ligado y libre-libre que contienen información de la agitación térmica de las partículas involucradas así como de sus densidades (a través del factor de Gaunt), en particular de los electrones libres del plasma n_e . Este espectro continuo se superpone al de línea y requiere ciertas precauciones para su uso en diagnosis espectroscópica. Existe la combinación que usa el espectro de línea con el del continuo adyacente como técnica de diagnóstico espectroscópico.

Scattering Rayleigh

La dispersión elástica de fotones por los electrones ligados de átomos permite de forma parecida al scattering Thomson la determinación de la temperatura T_{gas} de éstos. La señal Rayleigh - mucho más intensa y estrecha - se superpone a la señal Thomson, de la que debe ser separada. En plasmas, esta radiación supone un inconveniente para el scattering Thomson.

Scattering Raman

Este scattering puede ser también inelástico en presencia de moléculas excitando trasiciones vibro-rotacionales. Del análisis de la señal Raman puede también obtenerse información de T_{gas} .

... y otras más como:

Laser induced fluorescence (LIF), optogalvanic spectroscopy, resonance absorption, laser holography, laser induced breakdown spectroscopy (LIBS), ... que dejamos para posteriores estudios avanzados.

6.4.2. Ejemplos de resultados de la diagnosis espectroscópica

Determinación de la densidad y temperatura electrónica por Scattering Thomson

Permite la determinación experimental de forma quasi-directa de n_e y T_e simultáneamente de una forma muy local y con gran precisión. Tiene sin embargo bastantes dificultades prácticas (alineamiento, luz difundida, ruido, ...) y es caro en su montaje y mantenimiento.

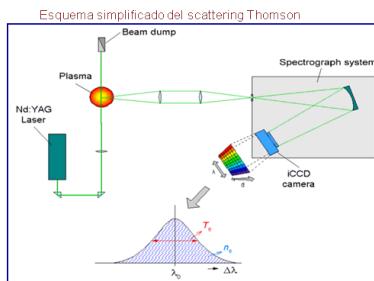
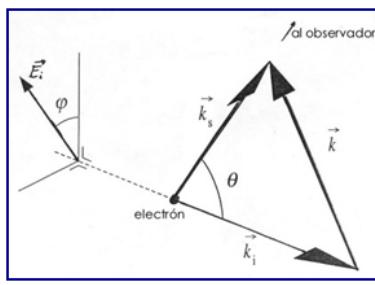


Figura 9b. Esquema simplificado de dispositivo experimental para Scattering Thomson



Geometría del scattering Thomson

Figura 9c. Geometría del Scattering Thomson elástico

- La intensidad de la radiación Thomson integrada en λ , una vez calibrada en intensidad, es proporcional a la densidad electrónica n_e . Para ello el scattering tiene que ser incoherente, durante el cual los fotones sufren de forma no correlacionada un doble corrimiento Doppler al reflejarse en los electrones debido a su caótico movimiento de agitación térmica en la dirección de observación;
- Por otro lado, el perfil Thomson está ensanchado y en su ensanchamiento está la información de dicha agitación, que permite la determinación de la temperatura electrónica T_e .

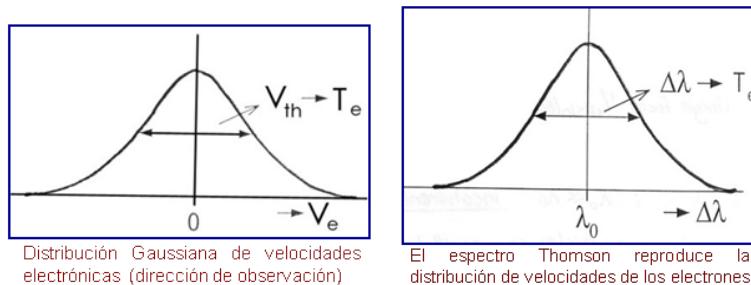
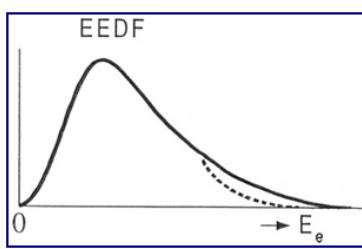


Figura 9. d) Función de distribución de la velocidad de los electrones del plasma y e) señal Thomson producida por Scattering de fotones

Finalmente, se puede inferir información acerca de la función de distribución de energía de los electrones (*FDEE*) a partir de la señal Thomson experimental. En particular puede comprobarse si la población de electrones correspondiente a altas energía sigue el equilibrio Maxwelliano o por el contrario exhibe algún tipo de alejamiento de dicho equilibrio (ver Figura 9f), lo que nos estaría indicando la existencia de procesos microscópicos (mecanismos) colisionales o 'canales' que utilizarían la energía de estos electrones rápidos en dichos procesos (*p.e.* ionización por colisión directa).



Función de distribución de energía de los electrones

Figura 9f. Función de distribución de energía de los electrones (*FDEE*). Eventualmente, la población electrónica para energías altas (línea de puntos) es menor que la de equilibrio Maxwelliano

Ensanchamiento Stark de líneas espectrales para la determinación de la densidad electrónica

Permite la determinación experimental de forma indirecta de la densidad electrónica n_e a partir del ensanchamiento por efecto Stark de ciertas líneas espectrales emitidas desde el plasma. Deben existir buenas teorías y/o modelos computaciones de ensanchamiento de líneas que permitan relacionar la densidad electrónica en el plasma con el ensanchamiento medido. Dicho ensanchamiento depende de n_e pero también de las temperaturas de iones y electrones. Distintos parámetros de ensanchamiento pueden ser utilizados para establecer tal relación. Históricamente, el más utilizado es la anchura total del perfil a mitad de altura (FWHM) pero existen otros parámetros de ensanchamiento alternativos.

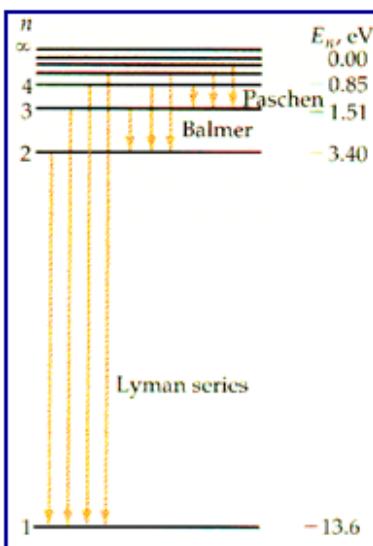


Figura 10a. Niveles de energía del átomo de hidrógeno y series de transiciones radiativas (Lyman, Balmer, Paschen,...)

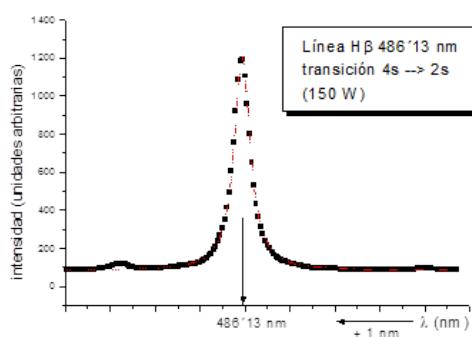


Figura 10b. Línea espectral H_β del hidrógeno para baja resolución espectral

Aunque todas las líneas emitidas por el plasma sufren este ensanchamiento, las de la serie Balmer del hidrógeno ($H_\alpha, H_\beta, H_\gamma\dots$) son muy utilizadas por estar sus ensanchamientos muy bien calculados por los modernos modelos computacionales de ensanchamiento. Usando de forma combinada dos o más espectros ensanchados, puede determinarse al mismo tiempo de forma aceptable n_e y T_e . Es el denominado *SIM* o método de intersección (o de cruce) por ensanchamiento Stark de líneas espectrales (Stark Intersection Method). Las teorías y modelos de ensanchamiento Stark se han ido refinando desde las primeras debidas a Holstmark y Lorenzt, y en la actualidad incorporan una gran cantidad de detalles microscópicos y cinéticos que los hacen cada vez más fiable para la diagnosis de plasmas. Entre ellos cabe destacar los que incorporan distribuciones cinéticas para todas las partículas (no sólo para electrones) así como situaciones alejadas del Equilibrio Termodinámico Local (ETL).

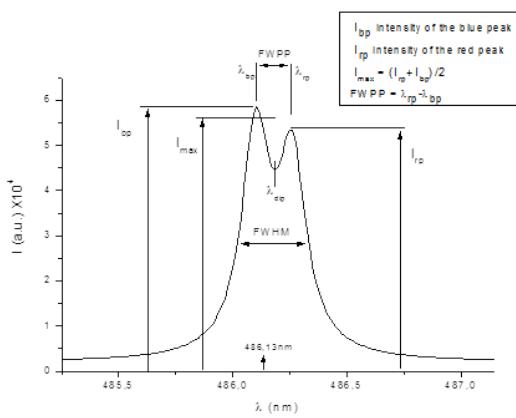


Figura 10c. Detalles espectrales de H_β para alta resolución espectral

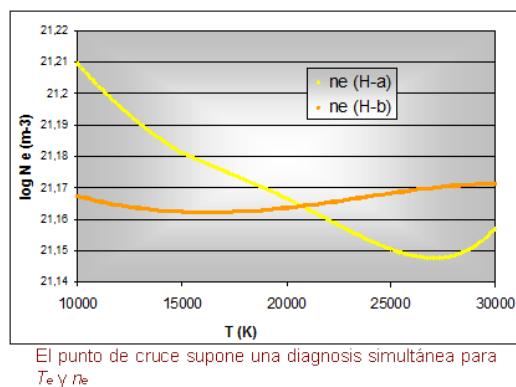


Figura 10d. Ejemplo del método de intersección (*SIM*) usando H_β y H_α

Espectroscopía Atómica de Emisión (EAE) y técnicas de equilibrio

La espectroscopía atómica de emisión (EAE) permite determinar experimentalmente de forma absoluta o relativa las poblaciones de estados atómicos excitados, lo que constituye la función de distribución de estados atómicos (*FDEA*). Conocida ésta, modelos de equilibrio (Boltzmann, Saha) o de situaciones más o menos alejadas del equilibrio (balance de saturación, ley p^{-x}) permiten la diagnosis por comparación entre valores experimentales y calculados a partir de dichos modelos. Dentro de esta categoría, las más conocidas son:

- Diagrama de Boltzmann (*Boltzmann-plot*). Las poblaciones de los estados atómicos excitados se distribuyen en el equilibrio Boltzmann según una exponencial decreciente con la energía de excitación. Una representación logarítmica de dichas poblaciones permite determinar la pendiente, que es inversa a la temperatura de excitación T_{exc} . En plasmas cuya cinética de excitación está dominada por colisiones electrónicas (EEK plasmas), ésta temperatura se asimila a T_e .

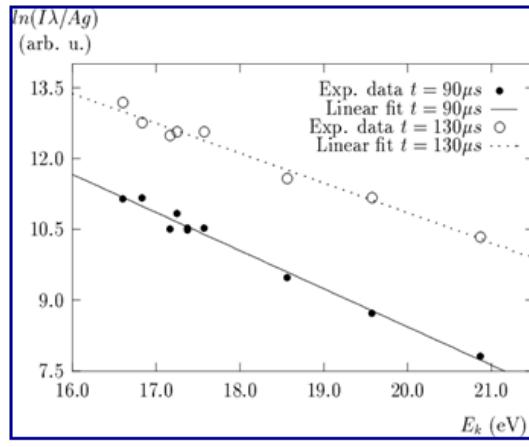


Diagrama de Boltzmann (*Boltzmann-plot*)

Figura 11a. Ejemplo de diagrama de Boltzmann (*Boltzmann – plot*) en el espacio de excitación

- Salto de Saha (*Saha-jump*). En el equilibrio de ionización-recombinación dado por la ley de Saha, las poblaciones de estados excitados del sistema neutro e ionizado se encuentran acopladas. En particular las del límite del continuo y el fundamental ionizado. La amplitud o salto de estas dos poblaciones viene determinado por n_e y T_e , de ahí que pueda usarse para la diagnosis.

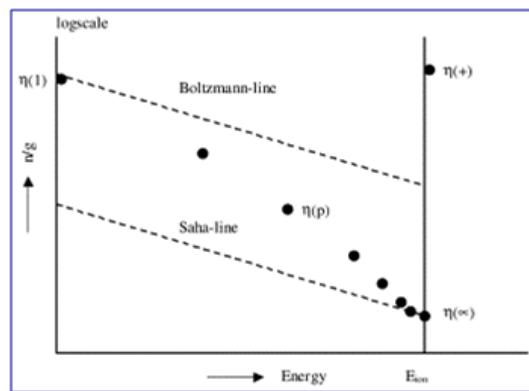


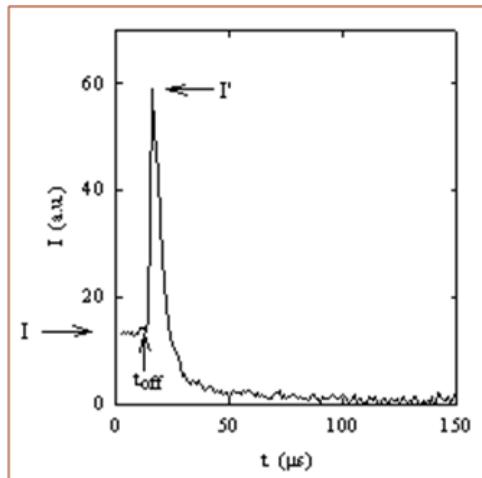
Figura 11b. Ilustración del salto de Saha (*Saha – jump*)

Las técnicas de espectroscopía atómica de emisión se complementan con las de absorción, para lo cual se irradia externamente el plasma midiéndose lo que éste absorbe a cada longitud de onda. Después de calibración, pueden determinarse las poblaciones de las especies absorbentes y así contribuir a su diagnóstico.

6.5. Otras técnicas de diagnosis.

6.5.1. Técnicas de interrupción

Determinan distintas características del plasma basándose en el comportamiento del mismo durante los primeros instantes de su extinción al interrumpirse bruscamente la energía electromagnética que lo mantiene. Al romperse súbitamente el equilibrio de mantenimiento de la descarga, algunos mecanismos o procesos microscópicos se ven desbalanceados en dirección contraria provocando emisiones características útiles para la diagnóstico. Con la ayuda de las técnicas de espectroscopía atómica de emisión, estos procesos pueden evidenciarse y hacerse la diagnosis con ayuda de modelos colisional-radiativos.



Salto de la intensidad de línea emitida por el plasma en la interrupción (t_{off})

Figura 12. Ilustración de la técnica de interrupción

6.5.2. Espectroscopía de masas

Determinan propiedades importantes de las partículas del plasma al ser extraídas del mismo e introducidas en un espectrógrafo de masa: naturaleza, identificación, densidades, energías, etc. Contribuyen notablemente a la diagnosis de los iones en el plasma fundamentalmente.

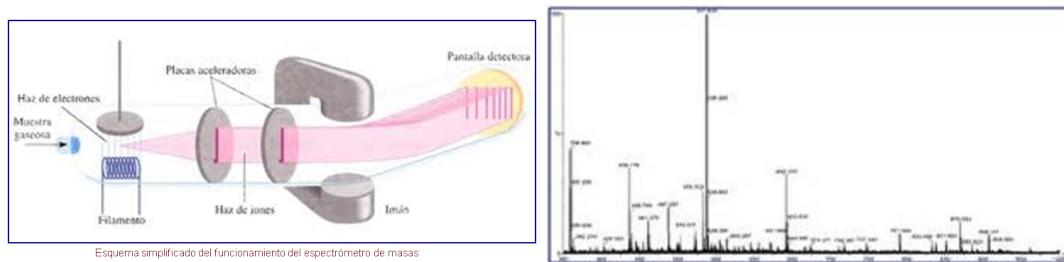


Figura 13. a) Esquema de espectrómetro de masas y b) espectro obtenido

6.6. Conclusiones.

La diagnosis de plasma reúne el conjunto de técnicas que permiten de diferentes formas determinar distintas magnitudes características de los plasmas, que incluyen densidades de especies y tempe-

raturas, potenciales eléctricos y corrientes electrónicas e iónicas, campos eléctricos y magnéticos, etc. La naturaleza de estos diagnósticos depende del tipo de energía/interacción que tengamos con el plasma, lo que permite clasificarlos en diagnósticos por sondas, electromagnéticos y espectroscópicos fundamentalmente.

El hecho de que el plasma sea de baja o alta temperatura condiciona de alguna manera la elección de la técnica de diagnosis aunque es frecuente que un mismo diagnóstico pueda aplicarse a ambos tipos de plasma (*p.e.* scattering Thomson, interferometría de láser o microondas, etc.). La diagnosis de plasmas ha ido históricamente avanzado al mismo tiempo que las teorías y modelos que de éstos se han elaborado, habiendo contribuido notablemente a la tecnología y al desarrollo científico.

Apéndice A

Estudio de las colisiones binarias en la teoría cinética elemental.

La teoría cinética, en cualquiera de sus grados de aproximación y rigor matemático, como teoría microscópica permite la obtención de soluciones para problemas relacionados con sistemas gaseosos que pueden o no encontrarse en equilibrio, tanto en problemas simples como en otros más complejos. Hacemos aquí una breve introducción a la teoría cinética elemental que nos permita entender los procesos colisionales que estudiamos en el Tema 1 de la asignatura Física del Plasma.

A.1. Ecuaciones de supervivencia: frecuencia de colisión y recorrido libre medio.

Para un gas diluido real cuyas partículas (monoatómicas, sin grados internos de libertad) interaccionan según un potencial genérico de corto alcance (r_0) en colisiones por parejas (colisiones binarias no simultáneas) definimos la llamada *probabilidad de supervivencia* $P(t)$ como la probabilidad función del tiempo de que *ninguna* partícula del sistema colisione durante un tiempo t :

$P(t)$: probabilidad de que no se produzcan colisiones durante un intervalo de tiempo t considerado (luego no nos importa qué pase): es una función de probabilidad absoluta instantánea para todo el sistema. Cumple que $P(0) \equiv 1$; $P(\infty) \equiv 0$.

Fijemos nuestra atención en una partícula dada genérica. La probabilidad $P(t)$ no sólo dependerá de la velocidad de esa partícula sino de las de todas las partículas en su conjunto puesto que hace referencia a todo el sistema. Para tratar de determinar $P(t)$, definamos para colisiones binarias no simultáneas:

Adt : probabilidad diferencial de que una partícula en el sistema colisione una vez en el intervalo de tiempo t .

A la constante A , que debe entenderse como una densidad de probabilidad por unidad de tiempo, la consideraremos independiente de t como hipótesis de trabajo. Podemos relacionar $P(t)$ con A ya que la probabilidad de que una partícula no colisione en el sistema durante un intervalo de tiempo $t + dt$ será igual a la probabilidad de que *no lo haga* durante el intervalo t multiplicada por la probabilidad de que *tampoco lo haga* en el dt siguiente, donde aceptamos que ambos sucesos son estadísticamente independientes. Así podemos escribir:

$$P(t + dt) = P(t)(1 - Adt) = P(t) - AP(t)dt.$$

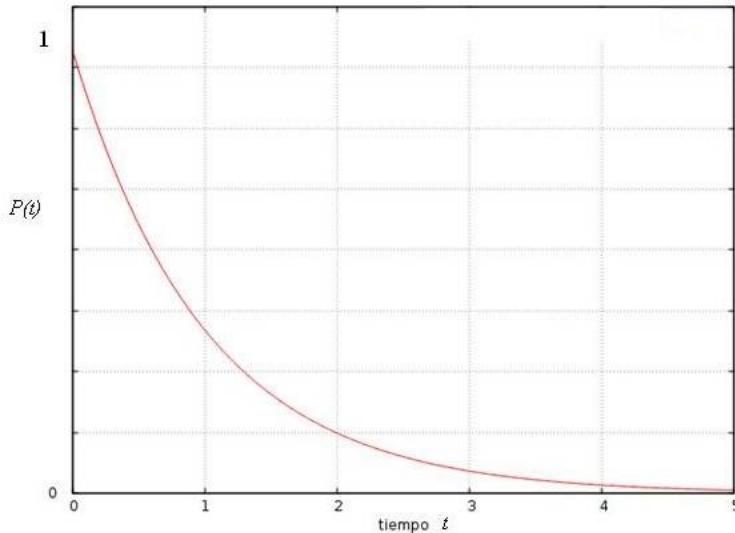
Como por otro lado, siempre que dt sea suficientemente pequeño, podremos escribir que

$$P(t + dt) = P(t) + \frac{\partial P(t)}{\partial t} dt,$$

identificando términos llegamos a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = -AP(t) \Rightarrow \frac{1}{P} \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \frac{\partial \ln P(t)}{\partial t} = -A,$$

que integrada conduce a $P(t) = Cte \cdot e^{-At}$, donde Cte debe ser la unidad dado que en $t = 0$ es seguro que aún no hay colisión ($P(0) = 1$).



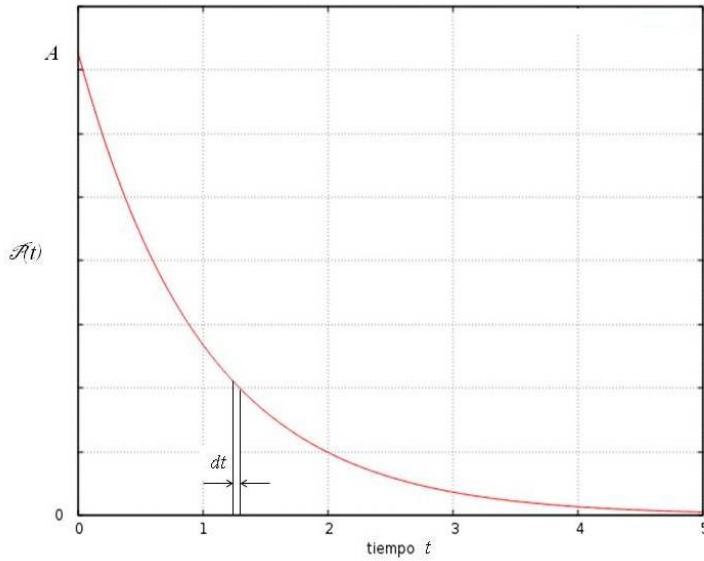
La probabilidad $P(t)$ de que no se produzca una colisión en el sistema (al menos una) disminuye exponencialmente en el tiempo transcurrido desde la última colisión: cuanto más tiempo pasa, mayor probabilidad existe en el sistema de que vuelva a haber una nueva colisión porque la probabilidad *de que no la haya* disminuye. Introduzcamos finalmente una nueva probabilidad como:

$\mathcal{P}(t)dt$: probabilidad de que una partícula esté un tiempo t *sin colisionar* y luego *lo haga* en el intervalo de tiempo dt posterior en el sistema.

Obviamente, en la hipótesis de independencia estadística de sucesos, esta probabilidad vale: $\mathcal{P}(t)dt = P(t) \cdot Adt = A \cdot e^{-At}dt$, ($\mathcal{P}(t)$ es una densidad de probabilidad por intervalo de tiempo). Se cumple:

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(t)dt = \int_0^\infty A \cdot e^{-At}dt = \int_0^\infty e^y \cdot dy = 1,$$

haciendo el cambio de variable $y = At$, lo que indica que las partículas acaban finalmente colisionando (*normalización* en el tiempo de $\mathcal{P}(t)$).



Calculemos con estos elementos simples de probabilidades algunas magnitudes importantes en el sistema de partículas.

i) *Tiempo de colisión*: es el tiempo medio τ transcurrido entre dos colisiones consecutivas o tiempo medio entre colisiones.

$$\tau = \bar{t} = \int_0^\infty t \mathcal{P}(t) dt = \int_0^\infty At \cdot e^{-At} dt = \frac{1}{A} \int_0^\infty At \cdot e^{-At} Adt = \frac{1}{A} \int_0^\infty e^y \cdot y dy = \frac{1}{A},$$

lo que fácilmente puede obtenerse integrando por partes. De esta manera, la cantidad A tiene también el sentido físico de inverso del tiempo de colisión, $A = \tau^{-1}$, que es como se define la *frecuencia de colisión* ν , o número medio de colisiones por unidad de tiempo en el sistema, pudiéndose escribir

$$\mathcal{P}(t)dt = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} dt = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) dt: \text{Ecuación de supervivencia en el tiempo}$$

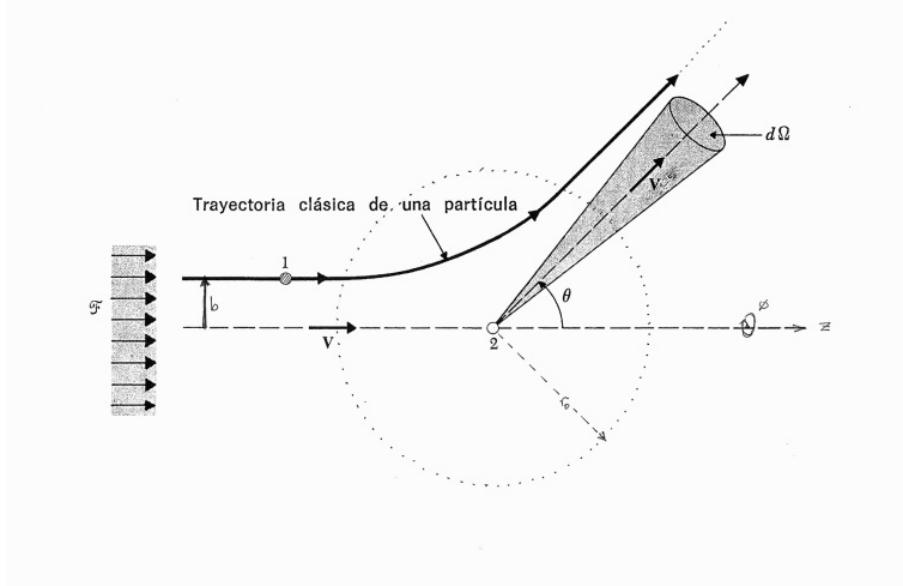
ii) *Recorrido libre medio* o distancia media recorrida por las partículas entre colisiones: es la distancia recorrida por una partícula promedio en el sistema a la velocidad media \bar{v} en cualquier dirección durante el tiempo τ entre dos colisiones consecutivas: $\lambda = \bar{l} = \bar{v}\bar{t} = \bar{v}\tau = \bar{v}\tau = \frac{\bar{v}}{\nu}$. Así pues, la probabilidad de que una partícula en el sistema recorra una distancia l sin colisionar y luego lo haga en el dl siguiente a continuación (con $l = \bar{v}t$) es:

$$\mathcal{P}(l)dl = \frac{1}{\lambda}e^{-l/\lambda} dl = \frac{1}{\lambda} \exp(-l/\lambda) dl: \text{Ecuación de supervivencia en el espacio}$$

En los razonamientos anteriores, *no* siempre los valores medios han sido calculados de una forma rigurosa. No obstante, pretendemos realizar una descripción del problema más cualitativa que cuantitativa. Para ver cómo calcular ν en nuestro gas, recordemos de la mecánica la dispersión de partículas por un centro dispersor, lo que resulta útil en problemas de choques.

iii) *Sección eficaz de dispersión* (o de colisión). Tengamos una partícula *blanco* en reposo en el sistema de referencia del experimento y hagamos incidir sobre ella de izquierda a derecha un haz *monocromático* de partículas *proyectiles*, todas de velocidad relativa $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{12} = \vec{v}_{pb}$ respecto a la partícula blanco (blanco y proyectiles son del mismo tipo de partículas, con el mismo potencial de interacción de pares), haz que está caracterizado por un flujo \mathcal{F} (número de partículas que lleva el haz por unidad de área y tiempo; es monocromático en el sentido de que todas las

partículas del mismo tienen la misma velocidad \vec{V} relativa al blanco). Por otro lado, se desprecia la posible interacción entre las partículas que conforman el haz (ver Figura a continuación).



Como resultado de la interacción del haz de proyectiles con la partícula blanco, algunos de esos proyectiles saldrán dispersados (desviados) por el blanco dentro de un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección en torno a los ángulos θ y φ respecto al eje de movimiento de haz (eje z) tal que $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$. El número de éstos podrá escribirse como algo proporcional a \mathcal{F} , donde la constante de proporcionalidad define la *sección eficaz de dispersión* (o colisión) *diferencial* $d\sigma_0(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi)d\Omega = \sigma(\theta, \varphi)\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$, tal que $dN(d\Omega) = dN(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi) \mathcal{F} d\Omega dt$ (para potencial de interacción central, $\sigma(\theta, \varphi)$ sólo depende de θ). El número total de partículas que en un dt son dispersadas *en cualquier dirección* se obtiene a partir de la expresión anterior integrando θ entre 0 y π , y φ entre 0 y 2π , resultando:

$$dN = \dot{N} dt = dt \mathcal{F} \int_{\forall\Omega} d\Omega \sigma(\theta, \varphi) = \mathcal{F} dt \int_{\forall(\theta, \varphi)} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \sigma(\theta, \varphi) = \mathcal{F} dt \underbrace{2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \sigma(\theta)}_{\sigma_0} = \mathcal{F} \sigma_0 dt,$$

donde $\sigma_0 = \int_{\forall\Omega} d\sigma_0(\theta, \varphi) = \int_{\forall(\theta, \varphi)} d\Omega \sigma(\theta, \varphi) = 2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \sigma(\theta)$ se denomina *sección eficaz de dispersión total* para cuyo cálculo se necesita conocer el detalle del potencial de interacción de pares entre proyectiles y blanco así como su velocidad relativa, aunque es especialmente fácil en el caso de fuerzas centrales de corto alcance r_0 . Sólo aquellas partículas proyectiles del haz de parámetro de impacto $b < r_0$ sufrirán dispersión. Por tanto, el número total de partículas dispersadas por el blanco por unidad de tiempo en cualquier dirección es $\dot{N} = \mathcal{F} \pi r_0^2$, por lo que $\sigma_0 = \pi r_0^2$.

Es fácil relacionar la sección eficaz de colisión total σ_0 con la frecuencia de colisión ν y el recorrido libre medio λ , relación que obtendremos de una forma simplificada. En el gas, el flujo de partículas \mathcal{F} que chocan con una dada es $\mathcal{F} = n\bar{V}$, donde \bar{V} es el valor medio del módulo de la velocidad relativa de dos partículas, que ya calculamos y conocemos para el equilibrio Maxwelliano. Por tanto, el producto de $n\bar{V}$ por σ_0 debe ser el número de colisiones por unidad de tiempo que hemos llamado \dot{N} . Pero esta última cantidad, por definición, también tiene el sentido físico de ν ; es decir, la frecuencia de colisión buscada dado que para que exista dispersión debe haber colisión:

$$\nu = n\bar{V}\sigma_0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{n\bar{V}\sigma_0}.$$

El recorrido libre medio es entonces

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{n\bar{V}\sigma_0} = \frac{1}{n\sigma_0} \frac{\bar{v}}{V},$$

donde debemos estimar el cociente $\frac{\bar{v}}{V}$, con $V = |\vec{V}| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$; se tiene $V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Este cálculo ya lo realizamos para el equilibrio Maxwelliano en Física Estadística, y ahora debemos repetirlo para ausencia de equilibrio. Si seguimos aceptando al menos que se sigue dando isotropía para las velocidades de las partículas (hipótesis del caos molecular) y que todos los ángulos posibles entre \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son igualmente probables aproximadamente, tenemos para los valores medios:

$$\bar{V}^2 = \overline{v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} = 2\bar{v}^2$$

ya que en promedio el valor medio $\overline{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} = 0$. Como orden de magnitud resulta $\bar{V} \cong \sqrt{2\bar{v}}$, y finalmente podemos escribir que $\lambda = \frac{\bar{v}}{n\bar{V}\sigma_0} \cong \frac{1}{\sqrt{2n}\sigma_0}$.

En esta expresión hemos aceptado por simplicidad que la sección eficaz de colisión diferencial es independiente de las velocidades relativas de las partículas, siendo n la densidad de partículas colisionantes en el gas (densidad de proyectiles).

A.2. Hipótesis de la Teoría Cinética elemental.

La descripción sencilla anterior nos permitirá resolver algunos problemas interesantes en gases fuera del equilibrio, pero para ello debemos completarla con algunas hipótesis de trabajo que limitarán algo el rango de aplicación de la teoría. Estas hipótesis son:

1.- El gas diluido real es *suficientemente diluido* como para que el recorrido libre medio λ sea mucho mayor que el alcance del potencial de interacción entre partículas r_0 ($\lambda \gg r_0$). Esto permitirá considerar sólo colisiones binarias no simultáneas y poder así utilizar los resultados obtenidos anteriormente a este respecto.

2.- Al mismo tiempo, el gas diluido real es *suficientemente denso* como para que el recorrido libre medio λ sea muy pequeño comparado con las dimensiones macroscópicas características del sistema o *longitud característica* $L \propto V^{1/3}$ ($\lambda \ll L$), lo que a su vez garantiza que las colisiones entre partículas son más numerosas o frecuentes que las colisiones de éstas con las paredes del sistema.

3.- El cambio de cualquier magnitud intensiva sobre una distancia del orden del recorrido libre medio λ es pequeño comparado con el valor de dicha magnitud en ese intervalo; o sea, hablamos de la existencia de desequilibrios descritos por gradientes moderadamente pequeños en el sistema.

Por último, la cuarta hipótesis - de distinta naturaleza que las anteriores pero con mucho la más importante de todas - es la relativa al equilibrio termodinámico local (*ETL*).

4.- *Equilibrio local*: aunque el sistema en su conjunto no está en equilibrio, admitiremos que sí lo está localmente en el sentido de que la función de distribución en cada punto es la de equilibrio particularizada para los valores de temperatura, densidad, velocidad macroscópica (hidrodinámica),... en ese punto concreto del sistema. Aceptar esta hipótesis implica que el equilibrio lo alcanzan entre sí un conjunto de partículas interaccionando entre ellas en un punto dado del sistema *muchísimo antes* que unas partes del sistema macroscópico lo alcancen respecto a otras partes. De esta forma, desde el punto de vista del proceso más lento, el más rápido es como si fuera instantáneo. Esto último implica el equilibrio microscópico local. Compatibilizamos de esta forma un equilibrio

microscópico local, que conduce a unos campos intensivos estacionarios de temperatura, densidad, etc, con un desequilibrio macroscópico moderado de unos puntos del sistema respecto a otros. La relajación hacia el equilibrio del sistema macroscópico en su totalidad es un proceso infinitamente más lento que la relajación hacia el equilibrio microscópico local.

A.3. Colisiones elásticas en un plasma.

Apliquemos estas ideas elementales a las colisiones binarias en nuestro plasma. Considerando un modelo de plasma simplificado de sólo electrones (e), iones (i) y átomos neutros (a) de densidades de especies n_e , n_i y n_a respectivamente, queremos evaluar la relevancia de la interacciones o colisiones entre estas partículas a partir de los valores de las distintas frecuencias de colisión elástica entre ellas, que en valor medio (promediadas sobre la función de distribución de velocidades de las partículas) son:

- $\bar{\nu}_{ee}$ para la frecuencia de colisión elástica entre electrones;
- $\bar{\nu}_{ii}$ para la frecuencia de colisión elástica entre iones;
- $\bar{\nu}_{ei}$ para la frecuencia de colisión elástica electrón-ión;

en todas estas interacciones, por tratarse de partículas eléctricamente cargadas, el potencial de interacción atractivo o repulsivo es de *largo alcance* (Coulombiano puro si prescindimos del apan-tallamiento de Debye);

- $\bar{\nu}_{ea}$ para la frecuencia de colisión elástica electrón-neutro;
- $\bar{\nu}_{ia}$ para la frecuencia de colisión elástica ión-neutro;

en éstas otras, no hay interacción electrostática directa (Coulombiana) al ser eléctricamente neutra una de las partículas por lo que la interacción es de *corto alcance*.

Para hacer la evaluación que queremos, distinguiremos dos situaciones en el plasma determinadas por su grado de ionización δ . Se establece de forma convencional un valor $\delta \leq 10^{-4}$ para caracterizar a los plasmas débilmente ionizados, siendo plasmas fuertemente ionizados aquellos en los que $\delta \cong 1$. En unos y en otros dominarán un tipo u otro de interacciones entre partículas caracterizadas por la frecuencia de colisión elásticas anteriores.

A) Plasma débilmente ionizado $\delta \leq 10^{-4}$ (y menos aún 10^{-6}):

- al haber poca densidad de partículas cargadas (e, i) frente a partículas neutras (a) - eso es precisamente lo que mide δ -, las frecuencias de colisión elástica entre las primeras deberán ser menores (o mucho menores) que aquellas en las que interviene la segunda al ser $n_e = n_i \ll n_a$;
- las interacciones o colisiones dominantes en el plasma serán por tanto las de corto alcance, teniendo poca o ninguna relevancia las de largo alcance (Coulombianas);
- en las que participan electrones, las frecuencias de colisión elástica son mayores que aquellas en las que no participan al tener éstos una mayor temperatura y por tanto ser mayor su agitación térmica, determinante para las colisiones.

Por todo ello se sigue que $\bar{\nu}_{ee}, \bar{\nu}_{ii}, \bar{\nu}_{ei} \ll \bar{\nu}_{ea}, \bar{\nu}_{ia}$ (dominan las colisiones de corto alcance). Por otro lado, $\bar{\nu}_{ee} \cong \bar{\nu}_{ei} \gg \bar{\nu}_{ii}$ y $\bar{\nu}_{ea} \gg \bar{\nu}_{ia}$.

B) **Plasma con mayor grado de ionización** $\delta > 10^{-4}$ (y más aún $10^{-2} - 1$):

- al haber relativamente mayor densidad de partículas cargadas (e, i) respecto a las neutras (a), las frecuencias de colisión elástica entre las primeras aumentarán considerablemente pudiendo llegar a igualar (o incluso superar en plasma totalmente ionizado $\delta \cong 1$) a las frecuencias de colisión con neutros;
- las interacciones de largo alcance serán muy considerables pudiendo llegar a ser dominantes en casos extremos;
- se sigue cumpliendo que las frecuencias de colisión elástica en las que participan electrones son mayores que aquellas en las que no participan.

Por todo ello se sigue que $\bar{\nu}_{ee}, \bar{\nu}_{ii}, \bar{\nu}_{ei} \geq \bar{\nu}_{ea}, \bar{\nu}_{ia}$ (las colisiones de largo alcance pueden llegar a dominar). Por otro lado, se sigue cumpliendo que $\bar{\nu}_{ee} \cong \bar{\nu}_{ei} \gg \bar{\nu}_{ii}$ y $\bar{\nu}_{ea} \gg \bar{\nu}_{ia}$.

A.4. Colisiones inelásticas en un plasma.

Las ideas elementales anteriores para este esquema de colisiones binarias elásticas, del tipo de interacción por pares, entre proyectil (p) y blanco (b) pueden razonablemente ser utilizadas para aquellos procesos colisionales inelásticos que sigan este patrón de interacción. Así por ejemplo, para el proceso microscópico o mecanismo de ionización por impacto electrónico que simbolizamos por $e + A \rightarrow A^+ + e + e$ debemos considerar que los átomos neutros de densidad n_a son las partículas blanco ($n_a \equiv n_b$) y los electrones de densidad n_e son las partículas proyectil ($n_e \equiv n_p$), no siendo posible aplicar estos razonamientos simples al proceso reverso del anterior; es decir, a la recombinación colisional de tres partículas simbolizada por $A^+ + e + e \rightarrow e + A$ (recombinación 3B). Otros procesos microscópicos o mecanismos colisionales a los que también es aplicable este esquema de razonamiento son la recombinación (colisional) radiativa y la foto-ionización en ambos sentidos ($e + A^+ \Leftrightarrow A + h\nu$), y la excitación-desexcitación por impacto electrónico también en ambos sentidos ($e + A_q \Leftrightarrow e + A_p$), como otros ejemplos. Para cada uno de esos procesos colisionales por parejas en los que los electrones son considerados como partículas proyectil sobre otras partículas blanco será posible definir una sección eficaz de colisión total, una frecuencia de colisión y un recorrido libre medio para ese proceso específico promediando sobre la función de distribución de velocidades de los electrones. Así podemos construir el conjunto de razonamientos que aparecen en el Tema 1 y conducen al establecimiento de las ecuaciones de balance temporal o de ritmo (*rate equations*).

Apéndice B

Método de los momentos de la ecuación de Boltzmann.

A partir de la ecuación de Boltzmann vamos a obtener las ecuaciones de los fluidos, o ecuaciones de la hidrodinámica, (las ecuaciones de continuidad, de Euler y del flujo de calor) usando el método de los momentos de la ecuación de Boltzmann. La ecuación de Boltzmann es una ecuación diferencial en derivadas parciales que describe la evolución temporal de la función de distribución de partículas $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, y ha sido estudiada en Física Estadística donde hemos realizado ya el estudio que ahora resumimos.

La ecuación de Boltzmann se escribe como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{colisiones},$$

y recordemos que la condición de normalización de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ se escribe como

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) = N, \forall t \text{ normalización total en } \vec{r} \text{ y } \vec{v}$$

o como

$$\int d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n(\vec{r}, t), \forall t \text{ normalización parcial sólo en } \vec{v}$$

Hay que indicar que la fuerza \vec{F} que aparece en la ecuación no depende de la velocidad, al menos componente a componente.

$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{total} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{flujo} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{colisiones} \Rightarrow$ suma de cambios temporales parciales de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

debido a flujo y a colisiones de partículas separadamente. El término debido a las colisiones es el más difícil de encontrar mientras que el término de flujo se determina fácilmente.

Para recordar el método de los momentos de la ecuación de Boltzmann, sea v la velocidad de las partículas, su velocidad microscópica, y sea v^α con α entero = 0,1,2,... Hagamos la siguiente integral en el subespacio de velocidades después de multiplicar los dos miembros de la ecuación de Boltzmann por v^α :

$$\int_{\forall \vec{v}} d^3\vec{v} v^\alpha \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\forall \vec{v}} d^3\vec{v} v^\alpha \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \int_{\forall \vec{v}} d^3\vec{v} v^\alpha \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int_{\forall \vec{v}} d^3\vec{v} v^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{colisiones}.$$

- Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ Momento de orden cero de la ecuación de Boltzmann.

- Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ Momento de orden uno de la ecuación de Boltzmann.
- Si $\alpha = 2 \Rightarrow$ Momento de orden dos de la ecuación de Boltzmann.

Estos tres momentos de la ecuación de Boltzmann nos darán las tres ecuaciones de los fluidos que necesitamos.

B.1. Obtención de la ecuación de continuidad a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de orden cero.

Analicemos el momento de orden cero de la ecuación de Boltzmann:

$$\int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{colisiones}}$$

Si las colisiones son elástica el último término, que se refiere al término fuente o sumidero, es cero ya que en este tipo de colisiones ni aparecen ni desaparecen partículas. Pero para una reacción química ocurre lo contrario, siendo este último término no nulo.

Analicemos una a una las tres integrales del primer miembro. La primer integral queda:

$$\int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial n}{\partial t}$$

ya que $\int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}; t) \equiv n(\vec{r}, t)$ (condición de normalización).

Para la segunda integral tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} &= \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (f \vec{v}) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} (f \vec{v}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot n \frac{1}{n} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} (f \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \vec{u}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) \end{aligned}$$

donde:

- $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial r_x} + \frac{\partial v_y}{\partial r_y} + \frac{\partial v_z}{\partial r_z} = 0$, ya que las variables son independientes.
- $\frac{1}{n} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} (f \vec{v}) = \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}$, es el valor medio de las \vec{v} de las partículas o velocidad hidrodinámica.

Analicemos, por último, la tercera integral:

$$\int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{F}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(f \frac{\vec{F}}{m} \right) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\vec{F}}{m}$$

Aceptando que se dan las condiciones necesarias para aplicar la ley de Gauss o de la divergencia en el subespacio de velocidades, y considerando que $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\vec{F}}{m} = 0$, ya que \vec{F} no depende de la velocidad al menos componente a componente, nos queda:

$$= \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(f \frac{\vec{F}}{m} \right) = \oint_{\pi} d \vec{\pi} \cdot f \frac{\vec{F}}{m} = 0,$$

siendo π una superficie cerrada en el subespacio de las velocidades que contiene todas las partículas y que, por tanto, está en el infinito. La integral se anula ya que en el integrando está f que tiende a cero cuando $v_x, v_y, v_z \rightarrow \pm\infty$, es decir, no hay partículas con velocidad infinita.

Reescribiendo tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = 0,$$

donde $\vec{j} = n\vec{u}$ es la densidad de corriente de partículas, pudiendo escribirse la ecuación de continuidad obtenida también como

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

B.2. Obtención de la ecuación de Euler a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de primer orden.

El momento de la ecuación de Boltzmann de primer orden se obtiene para $\alpha = 1$. Lo hacemos para la componente x y luego generalizamos el resultado para las otras componentes. Debemos multiplicar por la masa de las partículas m para que sea realmente la ecuación de balance temporal de la cantidad de movimiento de éstas:

$$\int_{\forall \vec{v}} mv_x \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} + \int_{\forall \vec{v}} mv_x \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3 \vec{v} + \int_{\forall \vec{v}} mv_x \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3 \vec{v} = \underbrace{\int_{\forall \vec{v}} mv_x \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d^3 \vec{v}}_{C_x}$$

De nuevo, analicemos cada una de las integrales. La primera integral queda de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} mv_x \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial t} (mv_x f) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \frac{\partial (mv_x)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} n \left[\frac{1}{n} \int d^3 \vec{v} mv_x f \right] = \frac{\partial}{\partial t} (nm u_x) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x), \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial (mv_x)}{\partial t} = 0$ ya que v_x no depende expresamente de t .

En cambio, la segunda integral tiene la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} mv_x \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (mv_x \vec{v} f) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial (mv_x)}{\partial \vec{r}} \right) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f mv_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \frac{1}{n} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} mv_x \vec{v} f) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho \overline{v_x \vec{v}}), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ y $\frac{\partial (mv_x)}{\partial \vec{r}} = 0$ (independencia entre velocidades y posiciones) y que $n \frac{1}{n} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} mv_x \vec{v} f = nm [\frac{1}{n} \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} v_x \vec{v} f] = \rho \overline{v_x \vec{v}}$.

Consideremos $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{\bar{u}} = \vec{u} - \vec{u} = 0$, donde \vec{u} es la velocidad media y \vec{v} es la velocidad de la partícula. A esta diferencia llamamos velocidad peculiar aunque no es sino la velocidad de la partícula relativa a la velocidad media del elemento de volumen, que es la velocidad del fluido o velocidad hidrodinámica (\vec{v}' también se denota por $\vec{\omega}$). Veamos cuánto vale el valor medio $\overline{v_x \vec{v}}$.

- Para la componente x :

$$\overline{v_x v_x} = \overline{(u_x + v'_x)(u_x + v'_x)} = \overline{u_x u_x} + \overline{v'_x v'_x} + 2\overline{u_x v'_x} = u_x u_x + \overline{v'_x v'_x} + 2u_x \overline{v'_x} \xrightarrow{0} u_x u_x + \overline{v'_x v'_x}$$

- Para la componente y :

$$\overline{v_x v_y} = u_x u_y + \overline{v'_x v'_y}$$

- Para la componente z :

$$\overline{v_x v_z} = u_x u_z + \overline{v'_x v'_z}$$

Analicemos la tercera y última integral:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} mv_x \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(mv_x f \frac{\vec{F}}{m} \right) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f m v_x \frac{\partial(\frac{\vec{F}}{m})}{\partial \vec{v}} - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial(m v_x)}{\partial \vec{v}} = \\ &= \oint_{\forall \pi} d\vec{\pi} \cdot \left(mv_x \frac{\vec{F}}{m} f \right) - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial(m v_x)}{\partial \vec{v}} = - \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f F_x = -F_x \int_{\forall \vec{v}} d^3 \vec{v} f = -n F_x = -mn \frac{F_x}{m} = -\rho \frac{F_x}{m} \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial(\frac{\vec{F}}{m})}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\vec{F}}{m} = 0 \text{ (fuerza independiente de las velocidades)}$$

$$\frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial(m v_x)}{\partial \vec{v}} = \frac{F_x}{m} \frac{\partial(m v_x)}{\partial v_x} + \frac{F_y}{m} \frac{\partial(m v_x)}{\partial v_y} + \frac{F_z}{m} \frac{\partial(m v_x)}{\partial v_z} = \frac{F_x}{m} m = F_x,$$

y la integral cerrada a la superficie $\vec{\pi}$ situada en el infinito se anula al ser $f = 0$.

Llevando este resultado para el eje x a los otros ejes y y z , la ecuación resultante eje a eje es:

- $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho \overline{v'_x v'_x}) + \rho \frac{F_x}{m}$
- $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho u_y \vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho \overline{v'_y v'_y}) + \rho \frac{F_y}{m}$
- $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho u_z \vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho \overline{v'_z v'_z}) + \rho \frac{F_z}{m}$

Y la ecuación total escrita vectorialmente es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{((\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}'))}_{P_{ij} = \rho \overline{v'_i v'_j}} + \rho \frac{\vec{F}}{m},$$

donde \otimes es el producto tensorial extendido. Identificamos en el primer miembro de esta ecuación la suma de la derivada local más la derivada convectiva, que es la derivada total o sustancial, así como las componentes (i, j) del tensor de presiones o tensor de esfuerzos $P_{ij} = \rho \overline{v'_i v'_j}$, pudiéndose escribirse finalmente que

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{u}) = -\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \frac{\vec{F}}{m},$$

o bien

$$\frac{d}{dt} (m n \vec{u}) = -\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{P} + n \vec{F} + \vec{T}_c$$

introduciendo el término de colisión que hasta ahora no habíamos tomado en cuenta y cuyo cálculo debe hacerse para cada tipo de fenómeno colisional específicamente.

B.3. Obtención de la ecuación del flujo de calor a partir de la Ec. de Boltzmann: momento de segundo orden.

El momento de la ecuación de Boltzmann de segundo orden se obtiene para $\alpha = 2$. Lo hacemos para la componente x y luego generalizamos el resultado para las otras componentes. Debemos multiplicar por $1/2$ de la masa de las partículas m para que sea realmente la ecuación de balance temporal de la energía cinética de éstas en la dirección x :

$$\int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} + \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3 \vec{v} + \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3 \vec{v} = \underbrace{\int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d^3 \vec{v}}_{C_x}$$

De nuevo, analicemos cada una de las integrales. La primera integral queda de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 f d^3 \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n m v_x^2 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n m u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n m \overline{v'_x v'_x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_x^2 + \frac{1}{2} P_{xx} \right). \end{aligned}$$

Cuando calculemos esta primera integral para $1/2 m v_y^2$ y $1/2 m v_z^2$, y sumemos las tres contribuciones quedará para la primera integral total:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v^2 \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{1}{2} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} (\vec{P}) \right). \end{aligned}$$

Para la segunda integral tendremos:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \vec{v} f \right) d^3 \vec{v} - \int_{\forall \vec{v}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) \cdot \vec{v} f d^3 \vec{v} \\ &- \int_{\forall \vec{v}} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} \right) \frac{1}{2} m v_x^2 f d^3 \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \vec{v} f d^3 \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} m n \overline{v_x^2 \vec{v}}, \end{aligned}$$

dado que hay independencia entre las variables posiciones y velocidades de las partículas.

Sabiendo que $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' = \vec{u} + \vec{\omega}$, el valor medio que aparece arriba lo escribimos, eje a eje, como:

$$\overline{v_x^2 v_x} = u_x^2 u_x + 3 u_x^2 \overline{v'_x} + \overset{0}{2 u_x \overline{v'_x v'_x}} + u_x \overline{v'^2_x} + \overline{v'^2_x v'_x}$$

$$\overline{v_x^2 v_y} = u_x^2 u_y + 2 u_x \overline{v'_x v'_y} + u_y \overline{v'^2_x} + \overline{v'^2_x v'_y}$$

$$\overline{v_x^2 v_z} = u_x^2 u_z + 2 u_x \overline{v'_x v'_z} + u_z \overline{v'^2_x} + \overline{v'^2_x v'_z}$$

Escribiendo todo junto, esta segunda integral queda como

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} mn \overline{v_x^2} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \rho u_x^2 \vec{u} + \frac{1}{2} \rho \overline{v'_x v'_x} \vec{u}}_{P_{xx}} + u_x \underbrace{(\rho \overline{v'_x v'_x}, \rho \overline{v'_x v'_y}, \rho \overline{v'_x v'_z})}_{\overleftrightarrow{P}|_x} + \frac{1}{2} \underbrace{(\rho \overline{v'^2_x v'_x}, \rho \overline{v'^2_x v'_y}, \rho \overline{v'^2_x v'_z})}_{\overleftrightarrow{Q}||_{xx}} \right],$$

siendo $Q_{ijk} = \rho \overline{v'_i v'_j v'_k}$ las componentes de un nuevo tensor \overleftrightarrow{Q} de orden 3, de 3x3x3 componentes, simétrico, en las que aparecen promedios de productos de tres componentes de velocidad peculiar de las partículas.

Ahora podemos escribir ecuaciones similares para la segunda integral del momento de segundo orden de la ecuación de Boltzmann de $1/2 m v_y^2$ y $1/2 m v_z^2$, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} mn \overline{v_y^2} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \rho u_y^2 \vec{u} + \frac{1}{2} \rho \overline{v'_y v'_y} \vec{u}}_{P_{yy}} + u_y \underbrace{(\rho \overline{v'_y v'_x}, \rho \overline{v'_y v'_y}, \rho \overline{v'_y v'_z})}_{\overleftrightarrow{P}|_y} + \frac{1}{2} \underbrace{(\rho \overline{v'^2_y v'_x}, \rho \overline{v'^2_y v'_y}, \rho \overline{v'^2_y v'_z})}_{\overleftrightarrow{Q}||_{yy}} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} mn \overline{v_z^2} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \rho u_z^2 \vec{u} + \frac{1}{2} \rho \overline{v'_z v'_z} \vec{u}}_{P_{zz}} + u_z \underbrace{(\rho \overline{v'_z v'_x}, \rho \overline{v'_z v'_y}, \rho \overline{v'_z v'_z})}_{\overleftrightarrow{P}|_z} + \frac{1}{2} \underbrace{(\rho \overline{v'^2_z v'_x}, \rho \overline{v'^2_z v'_y}, \rho \overline{v'^2_z v'_z})}_{\overleftrightarrow{Q}||_{zz}} \right].$$

A continuación, podemos sumar estas tres expresiones miembro a miembro, y escribir todo junto de la forma compacta que sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} mn \overline{v^2} \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + \frac{1}{2} (\overbrace{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}^{\text{Tr}(\overleftrightarrow{P})}) \vec{u}}_{\vec{A} = \overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta}} + \vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} (Q_{xxx} + Q_{yyx} + Q_{zzx}, Q_{xxy} + Q_{yyy} + Q_{zzy}, Q_{xxz} + Q_{yyz} + Q_{zzz})}_{\vec{A} = \overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta}} \right], \end{aligned}$$

donde $\overleftrightarrow{\delta}$ es el tensor de orden 2 delta de Kronecker (diagonal unidad), o tensor unidad $\overleftrightarrow{1}$. Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} mn \overline{v^2} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\overleftrightarrow{P}) \vec{u} + \vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P}}_{\vec{A}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta}}_{\vec{A}} \right].$$

Abordamos finalmente la tercera integral:

$$\begin{aligned} \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) d^3 \vec{v} &= \int_{\forall \vec{v}} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(\frac{1}{2} m v_x^2 f \frac{\vec{F}}{m} \right) d^3 \vec{v} \\ &- \int_{\forall \vec{v}} f \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) d^3 \vec{v} - \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v_x^2 f \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\vec{F}}{m} \right) d^3 \vec{v}. \end{aligned}$$

Dado que la fuerza no depende de las velocidades, el último término de la ecuación anterior se anula. Por otro lado, por razonamientos ya usados se aplica el teorema de Gauss en el subespacio de velocidades de las partículas pudiéndose sustituir la integral en volumen de la divergencia por el flujo a través de una superficie $\vec{\pi}$ en el infinito donde debido a la presencia de f dicho flujo se anula, y sólo nos queda la integral

$$\int_{\forall \vec{v}} f \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) d^3 \vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{i} \int_{\forall \vec{v}} m v_x f d^3 \vec{v} = \frac{F_x}{m} m n \bar{v}_x = n F_x u_x.$$

Para las otras contribuciones debidas a los términos correspondientes a energía cinética almacenada en las direcciones y y z , escribiríamos ecuaciones similares y al sumarlas la tercera integral total quedaría escrita de forma compacta como:

$$\int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) d^3 \vec{v} = \int_{\forall \vec{v}} \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) d^3 \vec{v} = n F_x u_x + n F_y u_y + n F_z u_z = n \vec{F} \cdot \vec{u}.$$

Para obtener la ecuación de balance temporal de la energía cinética o ecuación del flujo de calor, sólo nos resta poner juntos todos los resultados anteriores donde no incluimos el término de colisión. Así queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \text{Tr} (\overleftrightarrow{P}) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \text{Tr} (\overleftrightarrow{P}) \vec{u} \right) - n \vec{F} \cdot \vec{u} = \\ = - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta} \right) \end{aligned}$$

o bien, sumando derivadas locales y convectivas para la derivada total o sustancial,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \text{Tr} (\overleftrightarrow{P}) \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta} \right) + n \vec{F} \cdot \vec{u},$$

que es la ecuación buscada (sin término de colisión).

Apéndice C

Obtención de las ecuaciones de la hidrodinámica a partir de la ecuación de Enskog.

Nos centraremos aquí en obtener la ecuación del flujo de calor cuando en la ecuación de Enskog tomamos como variable χ la energía cinética de una partícula, es decir:

$$\chi \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Para facilitar los cálculos obtendremos una solución cuando:

$$\chi \equiv mv_x^2$$

Y veremos cómo a partir de aquí conseguimos obtener nuestro propósito.

La ecuación de Enskog quedaría por tanto como:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(nm\overline{v_x^2} \right)}_{i)} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(nm\overline{v_x^2} \vec{v} \right)}_{ii)} = \underbrace{n \frac{d}{dt} \left(m\overline{v_x^2} \right)}_{iii)}$$

Antes de analizar cada sumando haremos unos cálculos previos:

$$v_x^2 = (u_x + v'_x)^2 = u_x^2 + v'^2_x + 2u_x v'_x$$

Al calcular su valor medio:

$$\overline{v_x^2} = \overline{u_x^2} + \overline{v'^2_x} + \overline{2u_x v'_x} = u_x^2 + \overline{v'^2_x} + 2u_x \overline{v'_x} \stackrel{0}{=} u_x^2 + \overline{v'^2_x}$$

Para el término:

$$v_x^2 v_y = (u_x^2 + v'^2_x + 2u_x v'_x)(u_y + v'_y) = u_x^2 u_y + u_y v'^2_x + 2u_x u_y v'_x + u_x^2 v'_y + v'^2_x v'_y + 2u_x v'_x v'_y$$

Y si calculamos su valor medio obtenemos:

$$\overline{v_x^2 v_y} = u_x^2 u_y + u_y \overline{v'^2_x} + \overline{v'^2_x v'_y} + 2u_x \overline{v'_x v'_y}$$

Análogamente habríamos obtenido para los otros términos al tomar medio que:

$$\overline{v_x^2 v_z} = u_x^2 u_z + u_z \overline{v_x'^2} + \overline{v_x'^2 v_z'} + 2 u_x \overline{v_x' v_z'}$$

y

$$\overline{v_x^2 v_x} = u_x^2 u_x + u_x \overline{v_x'^2} + \overline{v_x'^2 v_x'} + 2 u_x \overline{v_x' v_x'}$$

Luego por tanto ya estamos en condiciones de evaluar cada término en la ecuación de Enskog. Para el primer término:

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(n m \overline{v_x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_x^2 + \rho \overline{v_x'^2} \right), \quad (1)$$

y si recordamos el tensor de presión \overleftrightarrow{P} (de orden 2) definido como:

$$P_{ij} = \rho \overline{v_i' v_j'},$$

podemos observar que el primer término se puede escribir como:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(n m \overline{v_x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_x^2 + P_{xx} \right)$$

Para el tercero de los términos análogamente tendríamos:

$$iii) \quad n \frac{d}{dt} \left(m \overline{v_x^2} \right) = nm \frac{d}{dt} \left(\overline{v_x^2} \right) = nm 2 \overline{v_x} \frac{d \overline{v_x}}{dt} = 2nm \overline{v_x} \frac{F_x}{m} = 2nm u_x \frac{F_x}{m} = 2nu_x F_x$$

En el segundo término tendríamos más ecuaciones por tratarse ahora una magnitud vectorial. Para cada una de las componentes

$$ii)_x \quad nm \overline{v_x^2 v_x} = \rho \left[u_x u_x^2 + u_x \overline{v_x'^2} + \overline{v_x'^2 v_x'} + 2 u_x \overline{v_x' v_x'} \right] = \rho u_x u_x^2 + u_x P_{xx} + \rho \overline{v_x'^2 v_x'} + 2 u_x P_{xx}$$

$$ii)_y \quad nm \overline{v_x^2 v_y} = \rho u_y u_x^2 + u_y P_{xx} + \rho \overline{v_x'^2 v_y'} + 2 u_x P_{xy}$$

$$ii)_z \quad nm \overline{v_x^2 v_z} = \rho u_z u_x^2 + u_z P_{xx} + \rho \overline{v_x'^2 v_z'} + 2 u_x P_{xz}$$

Observemos que estas tres ecuaciones escalares se pueden combinar en una sola ecuación vectorial:

$$nm \overline{v_x^2 \vec{v}} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}}_{\vec{u}} u_x^2 + \underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}}_{\vec{u}} P_{xx} + 2 u_x \begin{pmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{xz} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \overline{v_x'^2 v_x'} \\ \overline{v_x'^2 v_y'} \\ \overline{v_x'^2 v_z'} \end{pmatrix}$$

Llegando a que:

$$nm \overline{v_x^2 \vec{v}} = \rho \vec{u} u_x^2 + \vec{u} P_{xx} + 2 u_x \begin{pmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{xz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{xxx} \\ Q_{xxy} \\ Q_{xxz} \end{pmatrix},$$

donde se ha introducido el nuevo tensor \overleftrightarrow{Q} (de orden 3) cuyas componentes vienen dadas por:

$$Q_{ijk} = \rho \overline{v_i' v_j' v_k'}$$

Obsérvese que este nuevo tensor, al igual que \overleftrightarrow{P} , son simétricos de acuerdo con su propia definición respecto de cualquier permutación de subíndices, es decir:

$$Q_{ijk} = Q_{jik} = Q_{ikj} = Q_{kij}$$

Análogamente a ésta obtendríamos unas ecuaciones de evolución temporal de valores medios para $\chi \equiv mv_y^2$ y para $\chi \equiv mv_z^2$, y puesto que

$$mv^2 = mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2,$$

sumaremos todas las contribuciones obteniendo así que la nueva ecuación de Enskog, más general, es:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(nm\bar{v}^2)}_{1)} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (nm\bar{v}^2\vec{v})}_{2)} = \underbrace{n\frac{d}{dt}(m\bar{v}^2)}_{3)}$$

El primer término de la ecuación de Enskog total quedaría como:

$$1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(nm\bar{v}^2) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] + P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2 + \text{Tr}(\overleftrightarrow{P}))$$

El tercer término, de forma análoga, quedaría:

$$3) \quad n\frac{d}{dt}(m\bar{v}^2) = 2nm\bar{v} \cdot \vec{a} = 2\rho\bar{v} \cdot \overrightarrow{\vec{F}} = 2\rho\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{u} = 2n\vec{F} \cdot \vec{u}$$

Por último, el segundo término se podría escribir como:

$$2) \quad nm\bar{v}^2\vec{v} = \rho\vec{u}[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] + [P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}]\vec{u} + \\ + 2 \left\{ u_x \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{xz} \end{bmatrix} + u_y \begin{bmatrix} P_{yx} \\ P_{yy} \\ P_{yz} \end{bmatrix} + u_z \begin{bmatrix} P_{zx} \\ P_{zy} \\ P_{zz} \end{bmatrix} \right\} + \\ + \overbrace{\begin{pmatrix} Q_{xxx} + Q_{yyx} + Q_{zzx} \\ Q_{xxy} + Q_{yyy} + Q_{yyz} \\ Q_{xxz} + Q_{yyz} + Q_{zzz} \end{pmatrix}}^{\vec{A}}$$

Podemos observar en esta última ecuación que el tercer término del segundo miembro (entre llaves-corchetes), se puede simplificar como $\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P}$, y por tanto nos permitiría escribir:

$$nm\bar{v}^2\vec{v} = \rho u^2\vec{u} + \text{Tr}(\overleftrightarrow{P})\vec{u} + 2\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P} + \vec{A},$$

donde el vector \vec{A} se puede definir a partir de sus componentes como:

$$A_i = \sum_j \sum_k Q_{ijk} \delta_{jk}$$

Podemos escribir ya de forma compacta la ecuación de balance de energía cinética para el fluido sin más que dividir lo anterior por 2, quedando:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2}\rho u^2\vec{u}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\text{Tr}(\overleftrightarrow{P})\right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2}\text{Tr}(\overleftrightarrow{P})\vec{u}\right) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P}) - \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2}\vec{A} + \rho\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{u}$$

Usando que la derivada temporal o sustancial es igual a la suma de la local más la convectiva, $\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (A\vec{u}) \equiv \frac{dA}{dt}\right)$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\overleftrightarrow{P}) \right) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \overleftrightarrow{P}) - \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} (\overleftrightarrow{Q} \cdot \overleftrightarrow{\delta}) + n \vec{F} \cdot \vec{u},$$

al poderse escribir el vector \vec{A} como el producto escalar (contraído) del tensor \overleftrightarrow{Q} (orden 3) por el tensor $\overleftrightarrow{\delta}$ (orden 2).

Para el caso particular de una distribución Maxwelliana, que tiene simetría esférica en las velocidades, el tensor \overleftrightarrow{P} es diagonal de componentes principales P_{xx} , P_{yy} y P_{zz} , y si hay isotropía es igual a la presión escalar P . Por otra parte, para el tensor \overleftrightarrow{Q} todas sus componentes se anulan ya que son funciones impares de las velocidades peculiares de las partículas, quedando simplemente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} P \right) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P + n \vec{F} \cdot \vec{u},$$

que es una forma de la ecuación de Bernouille para los fluidos.