19 / 02 / 21 / Rafael Cabrera Jiménez.

Taller Repaso Primer Parcial

1) $x+y+z=4$
$x+2y+z=6$
$2x+3y+2z=C$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&2&1&6\\2&3&2&C\end{bmatrix}-F_1+F_2$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&2\\2&3&2&C\end{bmatrix}-2F_1+F_3\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&2\\0&1&0&-8+C\end{bmatrix}\Rightarrow -F_2+F_3$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&2\\0&0&0&-12+C\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{aligned}x+y+z&=4\\y&=2\\0&=-12+C\end{aligned}$$

Para que el sistema sea singular $C\neq 12$ y así el sistema no tendría soluciones. O que $C=12$ y así tendría infinitas soluciones.

2) $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&3&1\\-4&1&2\end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{E}_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&3&1\\-4&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&7&9\\-4&1&2\end{bmatrix}\qquad \mathcal{E}_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\\0&7&9\\-4&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&7&9\\0&9&18\end{bmatrix}\qquad \mathcal{E}_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{9}{7}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{9}{7}&1\end{bmatrix}$$

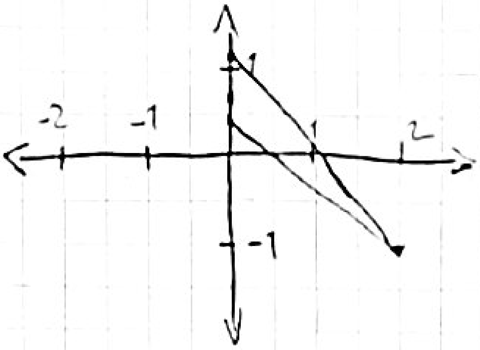
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{9}{7}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\\0&7&9\\0&9&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&7&9\\0&0&\frac{45}{7}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Matriz Triangular superior}$$

3) $2x + 3y = 1$

$10x + 9y = 11$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 9 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + 3y = 1 \\ -6y = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = -1 \\ x = 2 \end{matrix}$$



4) $kx + 3y = 6$

$3x + ky = -6$

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 6 \\ 3 & k & -6 \end{bmatrix}$$

$k = 3 \Rightarrow$ Ninguna solución

$k \neq 3 \Rightarrow$ única solución

Caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} -3F_1 + F_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -30 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Única solución

Caso $k = -2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \tfrac{3}{2}F_1 + F_2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Única solución

5) $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a & a \end{bmatrix}$

Inversa si:
$ad - bc \neq 0$

$aa - 2a = 0$ $\quad a = 0$

$a^2 - 2a = 0$ $\quad a = 2$

$a(a-2) = 0$

Para $a=0$ y $a=2$, la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a & a \end{bmatrix}$ no es invertible.

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad E_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

7) Sea $B=(A^2)^{-1}=(AA)^{-1}=A^{-1}A^{-1}$. Luego, al multiplicar ambos lados de la ecuación por A se tiene: $AB=AA^{-1}A^{-1}=A^{-1}$ dado que $AA^{-1}=I$ por definición de la inversa de A. Y $IA=A$. Por lo tanto, $AB=A^{-1}$.

8) $$A=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\4&3&0&0\\0&0&6&5\\0&0&7&6\end{bmatrix}$$ Por el método Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}3&2&0&0&1&0&0&0\\4&3&0&0&0&1&0&0\\0&0&6&5&0&0&1&0\\0&0&7&6&0&0&0&1\end{array}\right]\tfrac{1}{3}F_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\4&3&0&0&0&1&0&0\\0&0&6&5&0&0&1&0\\0&0&7&6&0&0&0&1\end{array}\right]-4F_1+F_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\0&1/3&0&0&-4/3&1&0&0\\0&0&6&5&0&0&1&0\\0&0&7&6&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ 3F_2\\ \tfrac{1}{6}F_3\\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&5/6&0&0&1/6&0\\0&0&7&6&0&0&0&1\end{array}\right]-7F_3+F_4 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&5/6&0&0&1/6&0\\0&0&0&1/6&0&0&-7/6&1\end{array}\right]6F_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&5/6&0&0&1/6&0\\0&0&0&1&0&0&-7&6\end{array}\right]-\tfrac{5}{6}F_4+F_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2/3&0&0&1/3&0&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&0&0&0&6&-5\\0&0&0&1&0&0&-7&6\end{array}\right]-\tfrac{2}{3}F_2+F_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3&-2&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&0&0&0&6&-5\\0&0&0&1&0&0&-7&6\end{array}\right] \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2&0&0\\-4&3&0&0\\0&0&6&-5\\0&0&-7&6\end{bmatrix}$$

9) Factorización LU para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}F_2+F_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} = U$$

$$\mathcal{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{21}^{-1}\,\mathcal{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$