Texto editado do livro digital Álgebra Linear: Módulo 1 (UFRN-EAD), de J. Ferreira. O texto completo pode ser baixado na biblioteca digital da UFRN ou em nossa biblioteca do Moodle.

Eliminação gaussiana

Esse método de resolução de sistemas de equações lineares é um dos métodos mais utilizados, principalmente por poder ser aplicado a qualquer tipo de sistema.

Ele consiste em um conjunto de procedimentos que visam reduzir a matriz aumentada a ponto de visualizar o resultado. Vejamos o que é a matriz aumentada.

Matriz aumentada

É a matriz dos coeficientes agrupada aos termos independentes. Considere um sistema de m equações e n incógnitas, então, a matriz aumentada Aa é dada por:

$$Aa = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

O objetivo da utilização dessa matriz é que seja obtida uma matriz aumentada equivalente, manipulando com operações elementares até que se aproxime o máximo possível da matriz identidade.

$$Aa \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_m \end{bmatrix}$$

Depois de obter a matriz equivalente, espera-se ler diretamente da matriz os valores das incógnitas, onde em um sistema $AX = B$ teríamos a matriz A igual à matriz identidade e a matriz B conteria os valores das incógnitas. Porém, nem sempre é possível obter a matriz identidade, então, como saber quando parar? Isso veremos mais adiante no tópico “Forma escalonada”.

Exemplo 6

Encontre a solução de $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ usando eliminação Gaussiana.

Primeiro, vamos obter a matriz aumentada: $Aa = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Aplicando operações elementares à matriz aumentada, obtemos uma matriz equivalente (os passos para obtenção dessa matriz serão discutidos em seguida):

$$Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, podemos ler de imediato a solução do sistema, $x_1=1$ e $x_2=3$.

Outra maneira de enxergar a solução é voltar para o sistema de equações com as novas matrizes A e B:

$$AX = B$$

Onde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Quando multiplicarmos as matrizes, teremos: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Atividade 4

Use a eliminação Gaussiana para encontrar a solução do sistema. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

Identificação da forma escalonada

Quando atingimos nosso objetivo com a eliminação Gaussiana, dizemos que obtivemos a forma escalonada, porém, nem todo sistema linear permite que seja obtida na forma final a matriz identidade, sistemas com o número de equações diferente do número de incógnitas, por exemplo. Para identificarmos se uma determinada matriz encontra-se **na forma escalonada por linhas**, devemos identificar as seguintes características:

- o primeiro algarismo não nulo de uma linha não nula é 1, o qual chamamos de líder ou pivô;
- todas as linhas nulas estão na parte inferior;
- considerando duas linhas não nulas, o líder da linha inferior está sempre mais à direita do que o líder da linha superior.

Porém, existe outra nomenclatura que oferece também a solução do sistema, que é a **forma escalonada reduzida por linhas**, ela apresenta como características todas as citadas para a forma escalonada por linhas mais uma, a saber:

- cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas

Exemplo 7

Matrizes na forma escalonada por linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes na forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedimento para obtenção da forma escalonada

A forma escalonada é única para cada matriz, porém, os passos intermediários são livres, o que gera matrizes intermediárias diferentes. Para nortear o escalonamento, vamos estabelecer um procedimento para a obtenção da forma escalonada por linhas.

Passos

1) Identifique a coluna não-nula mais à esquerda.

2) Se necessário, troque linhas para obter um elemento não nulo no topo da coluna a fim de completar o passo 1.

3) Faça divisões ou multiplicações para obter o número 1 no topo da coluna.

4) Some múltiplos da primeira linha às demais para obter zeros nos elementos abaixo do pivô.

5) Ignore a primeira linha e repita os passos anteriores.

Para obter a forma escalonada reduzida por linha, devemos acrescentar: o passo 6:

6) Faça divisões ou multiplicações para reduzir a zero os elementos acima de cada líder na mesma coluna.

IMPORTANTE: O método de eliminação Gaussiana compreende os cinco primeiros passos, porém, o método completo, incluindo o sexto passo, é chamado de método de eliminação de Gauss-Jordan.

Exemplo 8

Obtenha a solução do sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ por meio da forma escalonada reduzida por linhas da matriz associada.

Passando para a forma matricial: $Aa = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Veja abaixo os passos do método que devem ser seguidos.

1) Identifique a coluna não-nula mais à esquerda $\rightarrow$ primeira coluna.

2) Se necessário, troque linhas para obter um elemento não nulo no topo da coluna a fim de completar o passo um $\rightarrow$ não é necessário.

3) Faça divisões ou multiplicações para obter o número 1 no topo da coluna:

$$L1 = L1/2 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4) Some múltiplos da primeira linha às demais para obter zeros nos elementos abaixo do pivô:

$$L2 = L2 - L1 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5) Ignore a primeira linha e repita os passos anteriores:

$$Aa \sim \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-\frac{1}{2}} & \cancel{\frac{1}{2}} & \cancel{-\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1 - Identifique a coluna não-nula mais à esquerda $\rightarrow$ segunda coluna.
2 - Se necessário, troque linhas para obter um elemento não nulo no topo da coluna a fim de completar o passo um $\rightarrow$ não é necessário.
3 - Faça divisões ou multiplicações para obter o número 1 no topo da coluna:

$$L2 = L2(-2) \qquad Aa \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Encontramos a forma escalonada por linhas. Para encontrarmos a forma escalonada reduzida por linhas, devemos aplicar o passo 6.

6) Faça divisões ou multiplicações para reduzir a zero os elementos acima de cada líder na mesma coluna.

$$L1 = L1 + L2(1/2) \qquad Aa \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$ $\rightarrow$Matriz escalonada reduzida por linhas.

Para encontrarmos a solução do sistema, voltaremos para a forma de equações:

$$AX = B \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 + x_3 \end{cases}$$

$$S = \{x_1, x_2, x_3 \in \Re \,/\, x_1 = 1, x_2 = 3 + x_3\}$$

ou $$S \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Considere o sistema do exemplo anterior, $\begin{cases} x+3z=-8 \\ 3x-2y-5z=26 \\ 2x-4y=-4 \end{cases}$

Solução: A matriz ampliada desse sistema é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Logo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right) \to L_{23} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to \left(\frac{1}{2}\right)L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to L_2 = L_2 + (-1)L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to L_3 = 3L_1 - L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 14 & 2 \end{array}\right) \to L_3 = L_2 + L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_1 = 11L_1 - 3L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & -112 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_2 = 11L_2 + 3L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & -112 \\ 0 & -22 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_1 = \frac{L_1}{11}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & -22 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_2 = -\frac{L_2}{11} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_3 = \frac{L_3}{11}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$$

Portanto, pelo método de Gauss-Jordan, a solução do sistema é $x=-\frac{112}{11}$, $y=-\frac{90}{11}$ e $z=\frac{8}{11}$

Observação: Note que a matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$ é a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{cases} 1x+0y+0z=-\frac{112}{11} \\ 0x+1y+0z=-\frac{90}{11} \\ 0x+0y+1z=\frac{8}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{112}{11} \\ y=-\frac{90}{11} \\ z=\frac{8}{11} \end{cases}$$

Atividade 5

Encontre a forma escalonada da matriz resultante do sistema linear: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x-z=-2 \end{cases}$

Posto de uma matriz

O conceito de posto de matrizes está intimamente relacionado com o tipo de solução de sistemas de equações lineares e se aplica a matrizes quadradas ou não.

Posto ou característica de uma matriz é o número de linhas não nulas da matriz quando na forma escalonada por linhas. Outra definição, levando-se em conta os determinantes, diz que o posto de uma matriz A é a ordem da maior submatriz possível com determinante diferente de zero que se consegue obter de A.

Exemplo 9

Encontre o posto de $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Escalonando tem-se:

$$L2 = \frac{1}{2}L2 \qquad F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3 - 2L2 \qquad F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $P(F)=2$, número de linhas não nulas da matriz escalonada.

Teorema de Rouché-Capelli

Considerando um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas, o posto da matriz dos coeficientes (Pc) e o posto da matriz ampliada (Pa), tem-se a relação mostrada na Figura 2:

i) O sistema apresenta solução se, e somente se, $Pc = Pa$.
ii) O sistema tem solução única se $Pc = Pa = n$.
iii) O sistema tem infinitas soluções se $Pc = Pa \prec n$.

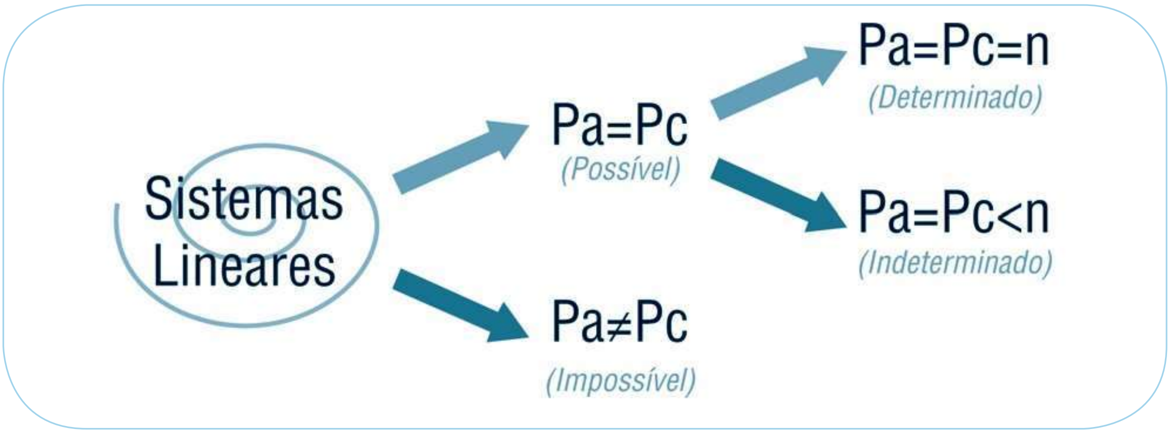

Figura 2 – Classificação de sistemas lineares quanto ao número de soluções baseando-se no posto.

Exemplo 10

Encontre o tipo de solução do sistema linear **a)** $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} a - b + c = 1 \\ b + c = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$

a) Passando para a forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Onde, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $Aa = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Para encontrar Pc vamos usar a definição do determinante. No máximo, o posto de A será 3 se $det(A) \neq 0$. Calculando, temos que $det(A) = 0$, logo o posto de A não é 3. Para que o posto seja 2, basta que encontremos uma submatriz $2x2$ com determinante diferente de zero, o que é facilmente verificado, se pegarmos os elementos $a11$, $a12$, $a21$ e $a22$ teremos o determinante diferente de zero, logo o posto de A é dois, $Pc = 2$.

Encontrando agora o posto da matriz ampliada, temos:

$$L1 \Leftrightarrow L3 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L2 = -L2 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L2 = L2 - L1 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L3 = L3 + L2 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3 - 2L1 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$Pa{=}3 \rightarrow 3$ linhas não nulas.

Como $Pc{\neq}Pa$, então, o sistema é impossível, não admite solução.

b) Passando para a forma matricial: $\begin{cases} a - b + c = 1 \\ b + c = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $Aa = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para encontrar Pc vamos usar a definição do determinante. No máximo, o posto de A será 3 se $det(A){\neq}0$. Calculando, temos que $det(A){=}0$, logo o posto de A não é 3. Para que o posto seja 2, basta que encontremos uma submatriz $2x2$ com determinante diferente de zero, o que é facilmente verificado, se pegarmos os elementos $a11$, $a12$, $a21$ e $a22$ teremos o determinante diferente de zero, logo o posto de A é dois, $Pc{=}2$.

Encontrando agora o posto da matriz ampliada, temos:

$$L3 = L3 - L1 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L3 = L3 + L2 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L1 = L1 + L2 \qquad Aa \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Pa{=}2 \rightarrow 2$ linhas não nulas.

Como $Pc{=}2$ e $Pa{=}2$, temos que o sistema é possível, e como o sistema apresenta $n{=}3$ incógnitas, logo $Pc{=}Pa{\prec}n$, o que caracteriza um sistema possível indeterminado, ou seja, infinitas soluções.

Matriz inversa usando a identidade

Por definição, toda matriz inversível é equivalente à matriz identidade. Então, imagine que podemos realizar operações elementares sobre uma matriz A, até que consigamos obter a matriz identidade como resultado. Caso isso não seja possível, implica dizer que se trata de uma matriz não inversível.

Partindo dessa característica, vamos supor que uma determinada matriz A possua inversa. Se partirmos de A e aplicarmos operações elementares podemos chegar à matriz identidade.

$$A \sim I$$

Para encontrarmos a inversa de A (ordem n) utilizando essa característica, devemos partir não somente de A, mas da composição da matriz A com a matriz identidade.

$$[A \quad I] \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ao manipularmos essa matriz composta com as operações elementares, tomamos como objetivo transformar o lado esquerdo na matriz identidade, dessa forma, obteremos, do lado direito, a matriz inversa de A.

$$[A \,\vdots\, I] \sim [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

Exemplo 3

Encontre a inversa de H usando as operações e a matriz identidade.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primeiro passo é montar a matriz estendida:

$$[H \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O objetivo agora é utilizar as operações elementares para colocar a matriz identidade no lugar da matriz H.

Primeira operação, vamos deixar o número 1 na posição inicial:

$$L1 = L1/2 \qquad [H \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora vamos zerar o elemento abaixo desse 1:

$$L2 = L2 - L1 \qquad [H \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Importante: Os passos não seguem uma ordem específica, pode ser seguida qualquer sequência, porém o resultado sempre deve ser o mesmo, independente do caminho. Outro ponto importante é que a operação escolhida deve ser aplicada à linha toda e não somente na primeira parte.

$$L1 = L1 + L3 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L2 = L2 - 2L3 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L3 = L3 - L2 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1/2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$L3 = -L3/4 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right]$$

$$L1 = L1 + L3 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right]$$

$$L2 = L2 - 3L3 \qquad [H \,\vdots\, I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right]$$

Como obtemos do lado esquerdo a matriz identidade, então, do lado direito, temos a inversa de A.

$$[H \vdots I] \sim [I \vdots H^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right]$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Encontre a inversa de G usando as operações elementares e a matriz identidade.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro passo é montar a matriz estendida:

$$[G \quad I] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O objetivo agora é utilizar as operações elementares para colocar a matriz identidade no lugar da matriz G.

Como na primeira posição temos um zero, vamos fazer uma troca de linhas:

$$L1 \Leftrightarrow L2 \qquad [G \vdots I] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L3 = L3 + L1 \qquad [G \vdots I] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A partir desse momento, dá para perceber que, independente da operação elementar que apliquemos, jamais será possível obter a matriz identidade do lado esquerdo. Isso ocorre porque a matriz G não possui inversa, o que pode ser facilmente constatado calculando-se o seu determinante, que é zero. Se usarmos as propriedades, percebemos que a quarta linha é resultado da soma da segunda com a terceira linha, logo,

$$det(G)=0$$

Por isso, sempre que tivermos que calcular uma inversa de uma matriz, o ideal é que calculemos antes seu determinante para saber se a tal inversa existe ou não, assim poupamos trabalho em alguns casos.

Atividade 2

Use a matriz identidade e as operações elementares para encontrar a inversa de:

a) $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$