Semana 2 - Material de Apoio

1.4 Determinantes

1.4.1 Menor de uma Matriz: M_{ij}

Dada uma matriz quadrada, $A=[a_{ij}]_n$, o menor da matriz A, denotado por M_{ij}, é uma submatriz de ordem $(n-1)$ obtida ao cancelarmos a linha i e a coluna j.

Assim, se:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{ij}=\left[a_{ij}\right]_{(n-1)}.$$

Com:

$$M_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

Se $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

livro
digital Álgebra Linear I (UFSC-EAD),
de Castro Bean e Kozakevich. O texto
completo poder ser baixado na biblioteca
virtual da UFSC ou em nossa biblioteca
do Moodle.

então, o menor M_{34} é obtido ao eliminarmos a linha 3 e a coluna 4, isto é:

$$M_{34} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, ao eliminarmos a linha 1 e a coluna 1, obtemos o menor M_{11}.

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora é com você!

Exercício 15. Verifique que $A = \left[a_{ij}\right]_n$ (com n^2 elementos) possui n^2 menores.

Nessa parte da teoria assumimos que você está familiarizado(a) com o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2 e 3. O valor do determinante de uma matriz A é denotado nas formas $\det(A)$, $\det A$ ou $|A|$. Por exemplo, se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } \det(A) = (0)(0) - (-1)(1) = 1.$$

Similarmente, se:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8) - (3)(5)(7) - (1)(6)(8) - (2)(4)(9) = \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0. \end{aligned}$$

Com esses exemplos, estamos relembrando de forma rápida que o determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado de uma única maneira: o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. E o determinante de uma matriz de ordem 3 é calculado pela Regra de Sarrus.

Para lembrar esta regra pesquise na Internet ou em algum material de matemática do ensino médio.

1.4.2 Cofator de uma Matriz: A_{ij}

O cofator A_{ij} do elemento na posição (i, j) de uma matriz A é dado pelo valor do determinante M_{ij}, multiplicado pelo valor $(-1)^{i+j}$. Isto é:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Ou:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Exemplo 15. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A_{44}, A_{11}, A_{31}, A_{33}, A_{14}, A_{23} e A_{32}.

Solução.

$$A_{44} = (-1)^{4+4} |M_{44}| = (+1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = (+1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 19 - 18 = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = (+1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} |M_{14}| = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\left|M_{32}\right| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(18-14) = -4$$

Observe as mudanças de sinais dos elementos nas posições (i, j), isto é, $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Em geral, para uma matriz de qualquer ordem, as mudanças de sinais dos elementos nas posições (i, j) $\left((-1)^{i+j}\right)$ são:

$$\begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

1.4.3 Determinante de A usando Cofatores

Dada A uma matriz de ordem n, $A = \left[a_{ij}\right]_n$.

Se $n = 2$, os menores e os cofatores da linha um da matriz de ordem dois são dados respectivamente por:

$$M_{11} = [a_{22}],\ A_{11} = a_{22},$$

$$M_{12} = [a_{21}],\ A_{12} = -a_{21}.$$

E o valor do determinante será:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \\ &= a_{11}\,|M_{11}| + a_{12}(-|M_{12}|) \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \end{aligned}$$

Se $n = 3$, o valor do determinante da matriz (colocado em função dos cofatores relativos à primeira linha) será:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) + a_{12}(a_{23}\,a_{31} - a_{33}\,a_{21}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$

$$= a_{11}(+|M_{11}|) + a_{12}(-|M_{12}|) + a_{13}(+|M_{13}|)$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}.$$

Note que calculamos o determinante de A usando cofator onde $i = 1$. Podemos usar qualquer linha da matriz. Por exemplo, com $i = 2$:

$$|A| = a_{21}(-|M_{21}|) + a_{22}(+|M_{22}|) + a_{23}(-|M_{23}|)$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j}$$

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ o determinante usando a segunda linha é dado por:

$$|A| = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23}$$

$$= 4(-|M_{21}|) + 5(+|M_{22}|) + 6(-|M_{23}|)$$

$$= -4(18 - 24) + 5(9 - 21) - 6(8 - 14)$$

$$= 24 - 60 + 36 = 0.$$

No caso geral de uma matriz de ordem n, o cálculo do determinante da matriz referido à linha 1 (ou a qualquer linha k) é dado por:

$$|A| = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + \ldots + a_{1n}\,A_{1n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}\ .$$

Se o desenvolvimento do determinante for referido a qualquer linha k, temos:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj},$$

onde k é um valor fixo.

Por exemplo, na matriz do **Exemplo 14**, calculamos o determinante pelo desenvolvimento de cofatores referido à linha 3 (pois tendo todos seus elementos nulos evitaremos cálculos desnecessários). Assim:

$$|A| = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = 0.$$

Nota. Fica como regra: ao calcular o determinante usando cofatores, escolha a linha (ou coluna) da matriz que tiver o maior número de elementos nulos.

Similarmente, é possível fazer o desenvolvimento por colunas. Veja:

1) Usando a primeira coluna:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

2) Deixamos para você chegar ao seguinte desenvolvimento para uma coluna k qualquer:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

O desenvolvimento dado acima para encontrarmos o valor do determinante (usando linhas ou colunas) é comumente conhecido como o desenvolvimento de Laplace.

Astrônomo e matemático francês, Marquês de Pierre Simon de Laplace (1749-1827) ficou conhecido como o "Newton francês". Sua carreira foi importante por suas contribuições técnicas para as ciências exatas, tanto pelo ponto de vista filosófico que ele desenvolveu durante sua vida, quanto pela parcela que tomou parte na formação das modernas disciplinas científicas.

1.4.4 Definição Geral do Determinante de uma Matriz (leitura opcional)

- **Permutação**

Dados os n números (ou n objetos distintos) uma permutação desses números (ou objetos) consiste em dispô-los em uma determinada ordem.

Exemplo 16. Considere os números 1, 2 e 3, podemos ordená-los de várias formas, por exemplo: (1 2 3), (3 2 1), etc.

O mesmo acontece quando escolhemos 4 números, como 1, 2, 3 e 4. Podemos ordená-los, por exemplo: (1 2 3 4), (2 1 3 4), etc.

Notação. Uma permutação de n números é denotada por $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$.

• Número de Permutações

Dados os números 1 e 2 há duas permutações, (1 2) e (2 1), ou seja, 2! permutações.

No caso dos números 1, 2 e 3 as permutações (1 2 3) e (3 2 1) são dois exemplos, no total existem 3! permutações. Quais são?

Dado n números, $1, 2, \ldots, n$, existem $n!$ permutações.

Agora é com você!

Exercício 16. Calcule o número de permutações possíveis de 4 números.

• Inversão

É o número de mudanças necessárias em uma permutação para voltá-la à sua posição ordenada inicial.

Notação. Uma inversão de n números será denotada por:

$$J = J\,(j_1\, j_2 \ldots j_n).$$

Por exemplo, nas permutações dadas acima:

$$J\,(1\ 2\ 3) = 0,\ J\,(1\ 2\ 3\ 4) = 0\ \text{ e }\ J\,(3\ 2\ 1) = 3.$$

No último caso, embora o número 2 esteja na posição que lhe corresponde, para colocarmos os números 3 e 1 nos seus lugares será necessário fazermos assim:

$$(3\ 2\ 1) \to (2\ 3\ 1) \to (2\ 1\ 3)\ \text{ e por último }\ (1\ 2\ 3).$$

$$\text{Ou }\ (3\ 2\ 1) \to (3\ 1\ 2) \to (1\ 3\ 2)\ \text{ e por último }\ (1\ 2\ 3).$$

Em ambos os casos haverá 3 inversões.

Exemplo 17. Construir uma tabela do número de inversões possíveis de 2 e 3 números.

Solução. Se $n = 2$, considere os números 1 e 2.

Permutação	N° de inversões
12	$J\,(1\ 2) = 0$
21	$J(2\,1) = 1$

Se $n = 3$, considere os números 1, 2 e 3.

Permutação	N° de inversões
123	$J(1\ 2\ 3) = 0$
132	$J(1\ 3\ 2) = 1$
213	$J(2\ 1\ 3) = 1$
231	$J(2\ 3\ 1) = 2$
312	$J(3\ 1\ 2) = 2$
321	$J(3\ 2\ 1) = 3$

Agora é com você!

Exercício 17. Verifique que o número de inversões da permutação J $(4\ 3\ 2\ 1)$ é igual a 6.

Exemplo 18. Construir uma tabela do número de inversões de 4 números.

Solução. Neste caso o número de inversões para cada permutação $(j_1\ \ j_2\ \ j_3\ \ j_4)$ será dado por $J = J(j_1\ \ j_2\ \ j_3\ \ j_4)$. O resultado será colocado na segunda coluna da tabela.

Permutação	N° de inversões
1234	0
1243	1
1324	1
1342	2
1432	3
1423	2
2134	1
2143	:
2314	:
2341	:
2431	:
:	:

Deixamos para você completar a tabela.

• Determinante

Definição. Dada a matriz de ordem n, $A=\left[a_{ij}\right]_n$, o determinante de A é definido por:

$$\det(A)=\sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}.$$

Onde $J=J(j_1\,j_2\dots j_n)$ indica o número de inversões da permutação $(j_1\,j_2\dots j_n)$, ρ indica que o somatório é estendido a todas as $n!$ permutações dos números $1,2,\dots,n$.

Exemplo 19. Verifique o uso da definição nos casos dos determinantes de ordem 2 e 3.

Solução. Na solução deste exemplo serão usados os resultados obtidos no **Exemplo 15.**

Se $n=2$, então $\rho=2$, assim:

$$\det(A)=\sum_{\rho}(-1)^{J(j_1\;j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}=(-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Se $n=3$, $\rho=6$ e, assim:

$$\det(A)=\sum_{\rho}(-1)^{J(j_1\,j_2\,j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$$=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{32}+(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1a_{12}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Agora é com você!

Exercício 18.

a) Obtenha o desenvolvimento para o caso de um determinante de ordem 4.

b) Verifique a relação desse desenvolvimento com o desenvolvimento dos cofatores.

• Propriedades do Determinante

Considere A e B matrizes quadradas. Então, valem as propriedades dos determinantes.

1) Se A possui uma linha (ou colunas) de zeros, então, $\det(A)=0$;

2) Se A possui duas linhas (ou colunas) iguais, então,

$$\det(A) = 0;$$

3) Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha (ou coluna) por um escalar α, então, $\det(B) = \alpha \det(A)$;

4) Se B é obtida por troca das posições relativas de duas linhas (ou colunas) da matriz A, então, $\det(B) = -\det(A)$;

5) Se B é obtida de A, substituindo-se a linha i (ou coluna) por ela somada a um múltiplo escalar de outra linha j (ou coluna) $(j \neq i)$ então, $\det(B) = \det(A)$;

6) $\det(A) = \det(A')$;

7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Observações. Não é objetivo do presente material didático fazer as demonstrações das propriedades anteriores, porém as mesmas podem ser provadas a partir da definição do determinante.

Mais detalhes a respeito dessas demonstrações podem ser encontrados no livro de Álgebra Linear, de Callioli (1993), citado no final deste Capítulo.

Na **Seção 1.4.3**, ao calcularmos o determinante usando cofatores, usamos o desenvolvimento (referentes às linhas) dado por

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki},$$

onde k é a k-ésima linha escolhida.

Podemos enunciar uma oitava propriedade usando desenvolvimentos similares.

8) $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{li} = 0$, $l \neq k$, k, l valores fixos.

Verifiquemos a propriedade com o seguinte exemplo.

Se $k = 1$, $l = 2$ e $n = 2$:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{1i} A_{2i} = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22}.$$

Assim, se

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},$$

então:

$$A_{21}=-2 \text{ e } A_{22}=1,$$

dessa forma:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{1i}A_{2i}=1(-2)+2(1)=0.$$

Também, ao usarmos o desenvolvimento pelas colunas e escolhendo $l=2$, $k=1$, encontramos também que:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{il}A_{ik}=\sum_{i=1}^{2} a_{i2}A_{i1}=2(4)+4(-2)=0.$$

Agora é com você!

Exercício 19. Use as operações elementares e o Método de Laplace para encontrar o determinante das matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ -6 & -1 & -17\end{bmatrix}.$$

Exercício 20. Usando apenas as propriedades dos determinantes mostre que $\det(A)=\det(B)$. Das matrizes,

$$A=\begin{bmatrix}a & c+2a\\ b & d+2b\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}.$$

1.5 Matriz Adjunta: $Adj\,(A)$

Dada $A=\left[a_{ij}\right]_n$, a matriz adjunta de A é dada por

$$Adj\,(A)=\left(Cof\,(A)\right)',$$

onde $Cof\,(A)$ é a matriz cujos elementos são os cofatores A_{ij} da matriz A, ou seja, é a matriz onde cada elemento a_{ij} é igual ao cofator A_{ij} da matriz A. Um exemplo para essa definição é o seguinte:

Se $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, então, os cofatores são:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\det[-4]=-4$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\det[2]=-2$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\det[-2]=2$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\det[1]=1$$

$$Cof(B)=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$Adj(B)=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Exemplo 20. Calcule a matriz adjunta de A dada por:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 5\end{bmatrix}.$$

Solução. A matriz de cofatores de A é dada por:

$$Cof(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19 & 19 & -19\\ -5 & 10 & -11\\ 4 & -8 & 5\end{bmatrix},$$

pois:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=5-24=-19$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}=-(-15-4)=19$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=-18-1=-19$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 5\end{bmatrix}=-(5+0)=-5$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}=10-0=10$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=-(12-1)=-11$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}=4-0=4$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}=-(8-0)=-8$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}=2+3=5$$

Assim,

$$\begin{aligned}Adj\,(A)&=Cof\,(A)'\\ &=\begin{bmatrix}-19 & 19 & -19\\ -5 & 10 & -11\\ 4 & -8 & 5\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-19 & -5 & 4\\ 19 & 10 & -8\\ -19 & -11 & 5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Também, o determinante da matriz A é $\det(A)=-19$, pois

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\ &=2(-19)+1(19)+0(-19)\\ &=-38+19=-19\end{aligned}$$

Observe que $Adj(A)A=\det(A)I_3$; considerando A do exercício anterior, temos:

$$Adj(A)A=\begin{bmatrix}-19 & -5 & 4\\ 19 & 10 & -8\\ -19 & -11 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-19)\cdot 2+(-5)\cdot(-3)+4\cdot 1 & (-19)\cdot 1+(-5)\cdot 1+4\cdot 6 & (-19)\cdot 0+(-5)\cdot 4+4\cdot 5\\ 19\cdot 2+10\cdot(-3)+(-8)\cdot 1 & 19\cdot 1+10\cdot 1+(-8)\cdot 6 & 19\cdot 0+10\cdot 4+(-8)\cdot 5\\ (-19)\cdot 2+(-11)\cdot(-3)+5\cdot 1 & (-19)\cdot 1+(-11)\cdot 1+5\cdot 6 & (-19)\cdot 0+(-11)\cdot 4+5\cdot 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\begin{bmatrix}-19 & 0 & 0\\ 0 & -19 & 0\\ 0 & 0 & -19\end{bmatrix}\\ &=-19\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\det(A)I_3\end{aligned}$$

O próximo teorema mostra que essa afirmação é válida para qualquer matriz quadrada.

Teorema. *Se A é uma matriz de ordem n,*

$$Adj(A)\cdot A = A\cdot Adj(A) = \det(A)\cdot I_n.$$

Demonstração.

$$A\cdot Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{2j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{3j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{3j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{2j} & \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{3j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j}A_{2j} & \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j}A_{3j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j}A_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j}A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{2j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{3j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{bmatrix}$$

Usando a **Propriedade 8** dos determinantes nos elementos fora da diagonal principal, temos:

$$A\cdot Adj(A) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{3j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{bmatrix}$$

Pelo desenvolvimento de Laplace (por linhas) temos o valor do determinante:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \text{ para cada } k = 1, 2, \ldots, n,$$

isto é:

$$A \cdot Adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix},$$

$$= \det(A) I_n.$$

De forma similar, podemos encontrar

$$Adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n.$$

Assim, temos demonstrado que

$$Adj(A) \cdot A = A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

■

1.6 Inversa de uma Matriz

1.6.1 Matriz Singular

Definição. Uma matriz é dita singular se o seu determinante é nulo. Caso contrário, dizemos que a matriz é não singular.

Por exemplo, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz singular, pois

$$\det(B) = 1 \cdot (-4) - [2 \cdot (-2)] = -4 - (-4) = -4 + 4 = 0.$$

Já a matriz identidade de ordem 3 é não singular, pois $\det(I_3) = 1$. Em geral, uma matriz identidade de ordem qualquer é não singular.

Você saberia dizer por quê? Pense a respeito!

1.6.2 Matriz Inversa

Definição. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é inversível se existe uma única matriz B (da mesma ordem) tal que:

$$AB = BA = I_n.$$

B é denominada matriz inversa de A.

Notação. $B = A^{-1}$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, a matriz $B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ é a respectiva matriz inversa, pois:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriedade. Se A é inversível, então, A é não singular.

> **Prova.** Será suficiente encontrar que o $\det(A)$ não é nulo. Demonstrando por absurdo, supomos o contrário, isto é, $\det(A) = 0$, e devemos chegar a uma contradição.

Assim, usando a **Propriedade 7** dos determinantes:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ &= 0 \cdot \det(B) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos por hipótese que A é inversível, então existe B tal que $AB = I$, assim:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(I) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $0 = 1$, impossível, é uma contradição!

Uma vez que a contradição foi encontrada, então o enunciado é verdadeiro. Assim, a propriedade fica demonstrada. Logo, A é não singular.

Geralmente uma contradição é denotada pelo símbolo $\Rightarrow\Leftarrow$.
O mesmo poderá ser usado nas próximas provas.

Conhecendo que $\det(A) \neq 0$, para A inversível, uma forma de verificar a existência da matriz inversa será encontrar o valor do determinante da matriz. Após essa verificação, o passo seguinte será encontrarmos a matriz inversa, A^{-1}. Como exemplo, nos casos das matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que apenas A possui inversa.

Como obtermos A^{-1}?

1.6.3 Cálculo da Matriz Inversa usando a Matriz Adjunta

Sabendo que existe A^{-1}, então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Observe pela propriedade da matriz adjunta que

$$A \cdot \left(\frac{Adj(A)}{\det(A)} \right) = \left(\frac{Adj(A)}{\det(A)} \right) \cdot A = I_n.$$

Assim, a única possibilidade será:

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{\det\,(A)}.$$

Exemplo 21. Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, encontre A^{-1}.

Solução. Encontramos facilmente que $\det\,(A) = -6$, e também a matriz adjunta

$$Adj\,(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{\det\,(A)} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Agora é com você!

Exercício 21. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, verifique se sua matriz inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & \frac{-4}{19} \\ -1 & \frac{-10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & \frac{-5}{19} \end{bmatrix}.$$

1.6.4 Propriedades da Inversa de uma Matriz

Se A e B são inversíveis, então:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;
4) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

- **Prova da Propriedade 1**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Em primeiro lugar, vejamos se existe $(AB)^{-1}$. Calculando $\det(AB)$:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Por hipótese existem as inversas das matrizes A e B $(\exists A^{-1}, \exists B^{-1})$, isto é, $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Assim, $\det(AB) \neq 0$ e com isso $\exists\,(AB)^{-1}$, isto é,

$$(AB)(AB)^{-1} = I. \tag{1}$$

Como:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{e} \quad B \cdot B^{-1} = I.$$

Na segunda parte dessa última relação, multiplicamos em ambos os lados pela inversa de A (pela direita):

$$(B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}.$$

Associando e multiplicando por I, temos

$$B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A^{-1},$$

e multiplicando à esquerda por A:

$$A \cdot \big(B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})\big) = A \cdot A^{-1}.$$

Você também pode considerar os seguintes passos após a expressão (2):

$$(AB)^{-1}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I(AB)^{-1}$$

$$I(B^{-1}A^{-1}) = I(AB)^{-1}$$

$$(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}$$

Associando novamente e, sabendo que $AA^{-1} = I$, temos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I. \qquad (2)$$

Sendo que a existência da matriz inversa é única e comparando as expressões (1) e (2) concluímos que

$$(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1}).$$

Agora é com você!

Exercício 22. Prove as propriedades 2, 3 e 4, justificando o seu procedimento.

Ao calcular a matriz inversa de A, usando a matriz adjunta, vimos que $A^{-1} = \dfrac{Adj\,(A)}{\det(A)}$, e nos exemplos aplicamos essa relação para matrizes de ordem 2 e 3. E se a matriz for de ordem maior ou igual a 4? O procedimento acaba sendo mais trabalhoso nesses casos. Vejamos agora como podemos obter a matriz inversa sem usar a matriz adjunta.