Semana 7 - Material de Apoio

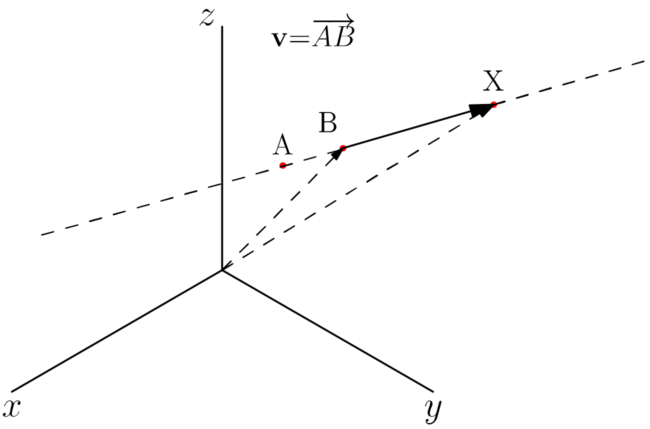
3 RETAS E PLANOS

Texto editado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixado no site da UFABC ou em nossa biblioteca do Moodle.

Dando continuidade ao nosso estudo sobre lugares geométricos e suas equações, vamos nos concentrar agora no estudo de dois elementos geométricos fundamentais da geometria as retas e os planos.

Ressaltamos que em todo este capítulo utilizaremos um sistema de coordenadas cartesiano $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$.

3.1 EQUAÇÕES DA RETA



Um dos postulados da geometria Euclidiana nos diz que, dados dois pontos no espaço existe uma única reta contendo estes pontos. Isso nos leva ao seguinte problema dados dois pontos A e B, determinar a equação da reta r que passa por estes dois pontos.

Para isto, observe que dado um ponto X em r, o vetor $\overrightarrow{AX}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, e portanto existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$. Assim, temos que

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + t\overrightarrow{AB},$$

e considerando $A : (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, vemos que um ponto $X : (x, y, z)$ pertence a reta r se e somente se $\overrightarrow{AX} = \mathbf{v}t$, ou ainda

$$r : X = A + \mathbf{v}t. \tag{3.1}$$

Expandindo obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t, \tag{3.2}$$

ou de forma mais simplificada:

$$r : \begin{cases} x &= a + v_1 t \\ y &= b + v_2 t \\ z &= c + v_3 t \end{cases} \tag{3.3}$$

A equação 3.1 é conhecida como **equação vetorial da reta** r, e nestas condições o ponto A é chamado **ponto inicial** e o vetor $\mathbf{v}$ é dito **vetor diretor** da reta reta r. As equações em 3.3 são chamadas as **equações paramétricas da reta** r.

Heuristicamente, pensando no parâmetro t como tempo, podemos entender esta equação como a trajetória de um ponto que se move no espaço tendo o ponto A como o ponto inicial e o vetor $\mathbf{v}$ como a velocidade, e assim para cada valor de t obtemos um ponto no espaço.

Outra forma de representar a reta r pode ser obtida ao isolarmos o parâmetro t nas equações paramétricas. Assim, se em 3.3 tivermos $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t e obter

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3},$$

chamadas de **equações da reta r na forma simétrica**.

É importante observar que a equação de uma reta, em qualquer uma de suas formas, não é única. De fato, as equações dependem fundamentalmente da escolha do ponto inicial e do vetor diretor, gerando assim uma infinidade de equações para representar um mesma reta. Para entender esta afirmativa, consideremos uma reta $r : X = A + \mathbf{v}t$. Escolhendo um ponto B em r, podemos trocar o ponto inicial por B e assim representar r por $r : X = B + \mathbf{v}t$. Do mesmo modo, trocando o vetor diretor $\mathbf{v}$ por outro vetor $\mathbf{v}'$ paralelo, obtemos que $X = A + \mathbf{v}'t$ é também uma equação vetorial para r.

Exemplo 3.1 Encontre as equações da reta que passa pelos pontos $A : (0, 1, 1)$ e $B : (1, 3, 0)$.

Solução: Escolhendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} : (1, 2, -1)$ como vetor diretor e A como ponto inicial obtemos a equação vetorial

$$r : X = A + \mathbf{v}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

As equações paramétricas ficam então $x = t, y = 1 + 2t, z = 1 - t$.

As equações simétricas para essa reta são obtidas isolando o parâmetro t nas equações anteriores, ou seja,

$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

$\square$

Exemplo 3.2 Dada a reta r de equação paramétricas $r : X = (1,3,2) + (1,1,2)t$.

1. Encontre três pontos pertencentes a essa reta.
2. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o ponto inicial seja distinto.
3. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o vetor diretor seja distinto

Solução:

1. Claramente o ponto $(1,3,2)$ pertence a essa reta. Para obter outros pontos desta reta bastam que escolhamos valores distintos para o parâmetro t. Assim, se $t = 1$ temos que $(1,3,2) + (1,1,2) = (2,4,4)$ pertence a reta. Tomando $t = -2$ temos que $(1,3,2) - 2(1,1,2) = (-1,1,-2)$ pertence a reta.
2. Substituindo o ponto inicial por outro ponto pertencente a reta obtemos equações com as propriedades exigidas. Escolhendo, por exemplo, o ponto $(-1,1,-2)$ obtemos a equação vetorial
$$r : X = (-1,1,-2) + (1,1,2)t.$$
3. Substituindo o vetor diretor por um de seus múltiplos não nulos obtemos equações com as propriedades exigidas. Se, por exemplo, multiplicarmos o vetor diretor por $\frac{1}{2}$ encontramos a equação vetorial
$$r : X = (-1,1,-2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)t.$$

$\square$

Exemplo 3.3 Verifique se os pontos $A : (4,1,5)$ e $B : (0,0,0)$ pertencem a reta $r : (1,1,2) + (1,0,1)t$.

Solução: Para que o ponto A pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(4, 1, 5) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t$$

Ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 4 = 1 + t \\ 1 = 1 + 0t \\ 5 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

O sistema acima possui solução, $t = 3$, e logo o ponto A pertence à reta r.

De modo análogo, para que o ponto B pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0, 0, 0) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t,$$

ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 1 + 0t \\ 0 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

Como sistema acima não possui solução, o ponto B não pertence à reta r.

$\square$

Exemplo 3.4 Identifique o lugar geométrico dado pelas equações

$$\frac{2 - 3x}{7} = \frac{2y - 2}{3} = \frac{5z - 1}{2}$$

Solução: Dividindo os numeradores e os denominadores de cada fração pelo coeficiente das variáveis, obtemos

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{y - 1}{\frac{3}{2}} = \frac{z - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Esta são as equações na forma simétrica de uma reta. E portanto o lugar geométrico é uma reta passando pelo ponto $(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5})$ com vetor diretor $(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})$. $\square$

Exemplo 3.5 Verifique se as retas $r : X = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t$ e $s : X = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t$

se interceptam.

Solução: Para que um ponto P pertença simultaneamente as retas r e s, devem existir números reais t_1 e t_2 tais que

$$P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 \quad \text{e} \quad P = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2.$$

De onde encontramos que

$$(1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2$$

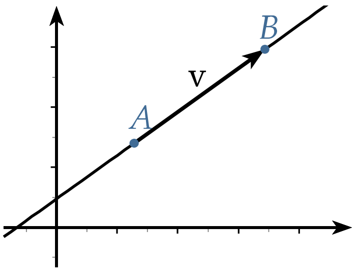
Resolvendo o sistema acima encontramos $t_1 = 2, t_2 = -3$. Como o sistema possui solução, concluímos que as retas r e s se interceptam.

Para determinar o ponto de intersecção substituímos $t \to t_1$ na equação $P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1$ e obtemos

$$P : ((3, 1, 3)).$$

É importante observar que para determinarmos se as retas interceptam, usamos parâmetros distintos para cada reta. Isso é fundamental, pois o ponto P apesar de pertencer a ambas as retas, é descrito em cada conjunto de equações por um valor distinto de t. $\square$

3.1.1 Equações da reta no plano



No caso bidimensional, as equações que descrevem as linhas retas podem ser descritas de modo mais simplificado. Começamos observando que, de modo análogo ao caso tridimensional, escolhidos um ponto inicial A e um vetor diretor $\mathbf{v}$, esta reta pode ser descrita vetorialmente como:

$$r : X = A + \mathbf{v}t \tag{3.4}$$

Nesse caso a expressão em coordenadas fica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t \tag{3.5}$$

Se $v_1, v_2 \neq 0$ podemos escrever a forma simétrica das equações da reta no plano

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2},$$

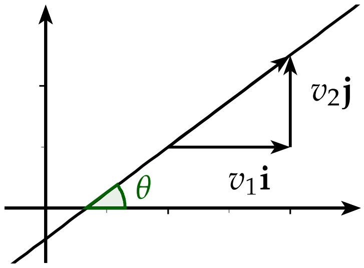
ou ainda,

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x-a).$$

O número real $m = \frac{v_2}{v_1}$ é denominado **coeficiente angular** da reta r, e admite uma interpretação geométrica muito simples: o coeficiente angular é a tangente do ângulo angulo entre a reta e o eixo x. Com essa definição é fácil ver que, para as retas não paralelas ao eixo y, podemos escolher o vetor diretor como $\mathbf{i} + m\mathbf{j}$, e assim obter **equação afim** ou **reduzida** da reta bidimensional

$$y = mx + n,$$

onde $n = b - ma$.



As retas paralelas aos eixos coordenados ($v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$) são especiais. Para as retas paralelas ao eixo y, ou seja, retas com vetor diretor $\mathbf{j}$, o coeficiente angular não está definido já que $m = \frac{v_2}{v_1}$. Para obter uma equação para este tipo de reta, basta observar que todos os pontos possuem a primeira coordenada (coordenada x) iguais. Ou seja, se a reta passa pelo ponto $A : (a, b)$ então todo ponto (x, y) em r é do tipo (a, y), e portanto sua equação será dada por $x = a$.

Do mesmo modo, se a reta é paralela ao eixo x e passa por um ponto $A : (a, b)$, então sua equação é dada por $y = b$.

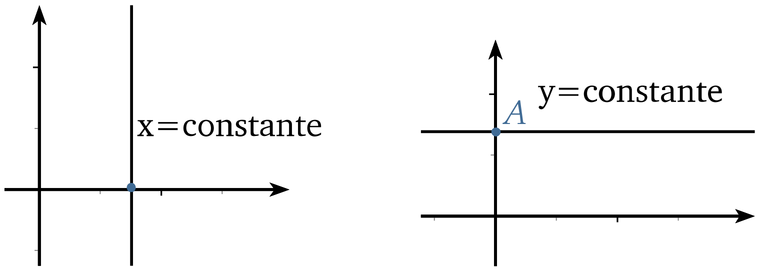


Figura 3.1: Retas paralelas aos eixos coordenados

Observação 3.6 *É fácil ver que a equação de toda reta no plano pode ser escrita na forma:*

$$ax + by + c = 0,$$

*com a, b, c constantes reais. Tal forma é conhecida como **forma canônica** ou **equação cartesiana** da reta no plano.*

A equação na forma canônica é única a menos de uma constante multiplicativa, isto é $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ representam uma mesma reta se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ e $c = \lambda c'$ (Por quê?).

Exemplo 3.7 Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 1)$ e que faz ângulo de

60^o com o eixo x.

Exemplo 3.8 Seja r a reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Mostre que o coeficiente angular da reta r é:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solução: O vetor diretor dessa reta é:

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

E consequentemente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. □

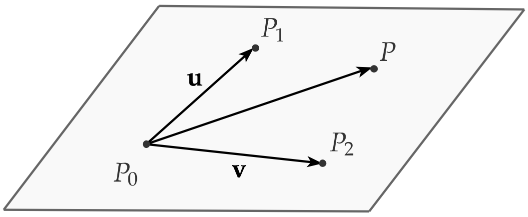
Exemplo 3.9 Mostre que a equação da reta passando pelos pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$, pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solução: Seja $P : (x, y)$ um ponto qualquer. O ponto P pertence a reta determinada pelos pontos A e B se e somente se A, B, P forem colineares, e o resultado segue do critério da proposição 2.28. □

3.2 EQUAÇÕES DO PLANO

3.2.1 Equações Paramétricas e Vetoriais do Plano



Passemos agora a um novo problema: determinar uma equação (ou conjunto de equações) que representem um dado plano no espaço euclidiano. Primeiro, lembremos que dados três pontos P_0, P_1 e P_2 não colineares existe um único plano π passando por esses pontos.

Seguindo então as mesmas ideias utilizadas no caso da reta, para determinar as equações de π utilizaremos um ponto inicial (por exemplo P_0) em conjunto com vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$, determinados pelos pontos escolhidos. Tome agora um ponto P qualquer deste plano, e observe que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao plano π, e portanto coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Como os pontos P_0, P_1 e P_2 são não colineares, concluímos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes, e assim, pelo Teorema da Base, podemos escrever o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, existem escalares $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t,$$

e portanto

$$P = P_0 + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t. \tag{3.6}$$

Assim como no caso das retas, a equação (3.6) é chamada de **equação vetorial do plano**.

Escrevendo $P : (x, y, z)$, $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} : (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 s + v_1 t \\ y &= y_0 + u_2 s + v_2 t \\ z &= z_0 + u_3 s + v_3 t, \end{aligned}$$

encontrando assim **equações paramétricas do plano**. Vale comentar que, assim como no caso das retas, as equações apresentadas acima não são únicas pois dependem do ponto e dos vetores considerados.

Exemplo 3.10 Encontre as equações vetorial e paramétricas do plano π determinado pelos pontos $P_0 : (1,0,1)$, $P_1 : (-1,2,3)$ e $P_2 : (3,1,0)$. **Solução:** Definindo $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} : (-2,2,2)$ e $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_2} : (2,1,-1)$, a equação vetorial de π fica

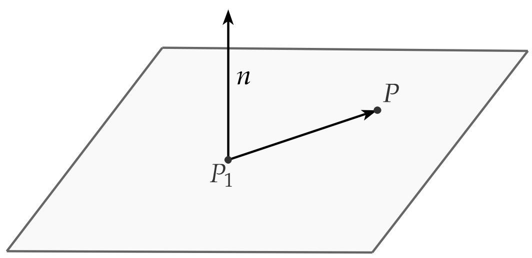
$$\pi : P = (1,0,1) + (-2,2,2)s + (2,1,-1)t.$$

A forma paramétrica é encontrada ao olharmos coordenada por coordenada, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2s + 2t \\ y &= 2s + t \\ z &= 1 + 2s - t. \end{aligned}$$

$\square$

3.2.2 Equação Geral de um Plano



Na seção anterior vimos como encontrar a equação de um plano a partir das coordenadas de três pontos não colineares neste plano. Mas a geometria Euclidiana nos dá uma outra forma de encontrarmos a equação de um plano. Para isso vamos primeiro lembrar que, dada uma reta e um ponto P_1 podemos encontrar um único plano π que contenha o ponto P_1 e que seja ortogonal a reta dada. Observe que, neste resultado, a reta serve apenas para determinar uma direção. Isso nos permite portanto substituir esta reta por um vetor paralelo a ela. Neste sentido, dado um plano π, dizemos que um vetor $\mathbf{n}$ não nulo é normal a π se $\mathbf{n}$ é ortogonal a todos os vetores paralelos a π. É fundamental notar que todo plano possui uma infinidade de vetores normais (veja o exercício 2.3).

Sejam dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x, y, z)$ no plano π. Como o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é perpendicular a $\mathbf{n} : (a, b, c)$, calculando o produto interno, obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

e assim

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

e assim, definindo $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, encontramos que $ax + by + cz = d$ para qualquer ponto $P : (x, y, z)$ pertencente ao plano. Em resumo, determinamos que se um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π, então suas coordenadas satisfazem $ax + by + cz = d$.

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ tomando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ teremos, pela definição de d, que $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ e subtraindo obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Ou seja o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$ e consequentemente paralelo a π.

Observe que, para que o plano fique bem determinado, o vetor $\mathbf{n} : (a, b, c)$ deve ser não nulo, ou seja, é necessário que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

A equação $ax + by + cz = d$ é chamada de **equação geral do plano**, e dada esta equação é fácil recuperarmos um vetor normal ao plano. Mais precisamente teremos $\mathbf{n} : (a, b, c)$.

Exemplo 3.11 Encontre a equação geral do plano passando pelos pontos $A : (2, 1, 0), B :$

$(3, 3, 2)$ e $C : (1, 2, 4)$.

Solução: Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano que queremos, um possível vetor normal a esse plano é dado por $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Calculando obtemos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e logo

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, -6, 3).$$

Segue daí que a equação geral do plano é da forma $6x - 6y + 3z = d$. Para determinar d basta notar que o ponto $A : (2, 1, 0)$ pertence ao plano, e logo deve satisfazer esta equação. Assim obtemos

$$6 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = d$$

e logo a equação geral do plano é $6x - 6y + 3z = 6$. □

Exemplo 3.12 Encontre a equação geral do plano com equação vetorial

$$P = (0, 1, 2) + (3, 1, 2)t + (1, 2, 1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano nesse caso é

$$n = (3, 1, 2) \times (1, 2, 1) = (-3, -1, 5)$$

e logo a equação do plano é da forma $-3x - y + 5z = d$. Como $(0, 1, 2)$ pertence a esse plano, temos que

$$-3 \cdot 0 - 1 + 5 \cdot 2 = d$$

e a equação geral do plano fica $-3x - y + 5z = 9$ $\square$

Exemplo 3.13 Encontre equações paramétricas para o plano cuja equação geral é $2x + 3y + z = 1$.

Solução: Apresentaremos duas soluções possíveis para este problema.

Solução 1: O primeiro modo é encontrar três pontos não colineares do plano. Podemos, por exemplo, fazer $x = 0$ e $y = 0$. Substituindo na equação geral encontramos $z = 1$, e portanto o ponto $A = (0, 0, 1)$ pertence ao plano. De modo análogo, fazendo $x = 0$ e $y = 1$ e depois $x = 2$ e $y = -1$, encontramos que $B = (0, 1, -2)$ e $C = (2, -1, 0)$ pertencem ao plano.

Como $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$ são LI, os pontos A, B, C não são colineares e assim um conjunto possível de equações paramétricas para π é

$$\begin{cases} x = 0 + 2s \\ y = 0 + t - s \\ z = 1 - 3t - s \end{cases}$$

Solução 2: Outro modo, mais eficiente, é o que chamamos de "isolar os parâmetros". Para isso fazemos $x = t$ e $y = s$, e substituindo em $2x + 3y + z = 1$, obtemos que $z = 1 - 3s - 2t$. Assim outro conjunto possível de equações paramétricas para este plano é dada por $(x, y, z) = (t, s, 1 - 3s - 2t)$. $\square$

4 POSIÇÕES RELATIVAS

Nosso objetivo nesta seção é entender a posição relativa entre duas retas, dois planos e ou uma reta e um plano, isto é, se estes se interseccionam, se são paralelos, etc.

4.1 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE RETAS

4.1.1 Posição Relativas entre Retas no Plano

Começaremos com o estudo da posição relativa de duas retas no plano. Lembremos primeiro que duas retas **em um mesmo plano** podem ser:

- coincidentes, i.e., são a mesma reta;
- paralelas;
- concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Tomemos então duas retas dadas em forma vetorial como $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}t$.

Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, temos que as retas r e s são paralelas se seus vetores diretores v e u são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas coincidentes r e s são coincidentes se possuem o mesmo lugar geométrico, isto é, o mesmos pontos. Assim, um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de r (ponto A) pertence à reta s. Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes.

Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas e ou coincidentes elas claramente só podem possuir um ponto em comum.

Resumindo,

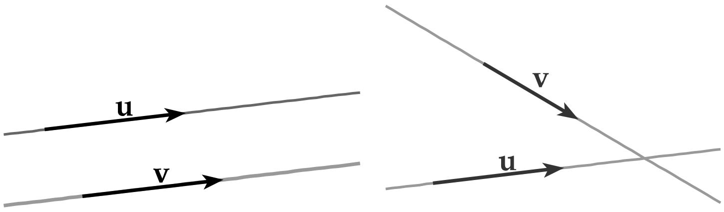
Proposição 4.1 *Duas retas em um mesmo plano são:*

- *Paralelas se e somente se seus vetores diretores são múltiplos um do outro.*

  Neste caso elas podem ser:

  - *Coincidentes: se o lugar geométrico de r e de s são o mesmo. Neste casos as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto. Para verificar se suas retas paralelas são coincidentes é suficiente verificar se elas possuem um ponto em comum. Por exemplo se o ponto B pertence a reta r.*
  - *Paralelas não coincidentes, se não possuem pontos em comum.*

- *Concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.*



Exemplo 4.2 Determine a posição relativa entre as retas:

1. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (4, 1) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})t$
2. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (2, 2) + (1, -\frac{1}{3})t$
3. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (2, 2) + (0, 1)t$

Solução:

1. Coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(4, 1)$ pertence a r.
2. Paralelas não coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(2, 2)$ pertence a r.
3. Concorrente, pois os vetores diretores não são paralelos.

□

As condições acima valem apenas para equações vetoriais, e consequentemente para equações paramétricas. Mas no caso bi-dimensional as equações ficam mais simples e podemos representar uma reta através de uma única equação linear. Seria interessante então que tivéssemos uma maneira de comparar equações nesta forma.

Tome então duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$. Vamos supor por um instante que $b \neq 0$ e $b' \neq 0$ (r e s não são paralelas ao eixo y). Não é difícil se convencer que r e s são paralelas se, e só se, seus coeficientes angulares forem os mesmos. Ou seja, precisamos que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Mas isto é equivalente a dizer que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que se ambas forem paralelas ao eixo y, então $b = b' = 0$ e a mesma condição vale.

Se r e s forem coincidentes então, pela condição dada acima, temos que

$$0 = a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by) + c' = \lambda(ax + by + c) - \lambda c + c' = -\lambda c + c',$$

e portanto $c' = \lambda c$.

Resumindo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3 *Dadas duas retas no plano descritas pelas equações* $r : ax + by + c = 0$ *e* $s : a'x + b'y + c' = 0$*, então:*

1. *Se o vetor* (a, b, c) *é múltiplo de* (a', b', c') *as retas são coincidentes.*
2. *Se o vetor* (a, b) *é múltiplo de* (a', b')*, ou equivalentemente os coeficientes angulares são iguais então as retas são paralelas.*
3. *Se o vetor* (a, b) *não é múltiplo de* (a', b')*, ou equivalentemente os coeficientes angulares são distintos então as retas são paralelas.*

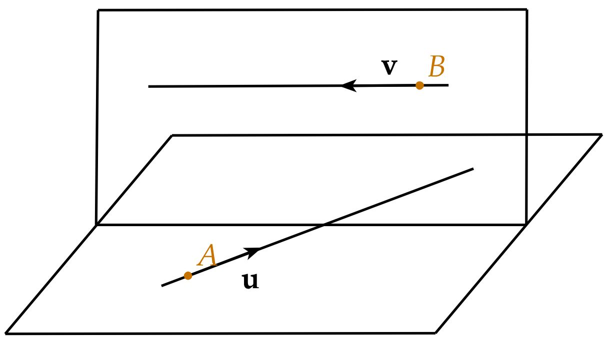


Figura 4.1: Retas Reversas

4.1.2 Posição Relativas entre Retas no Espaço

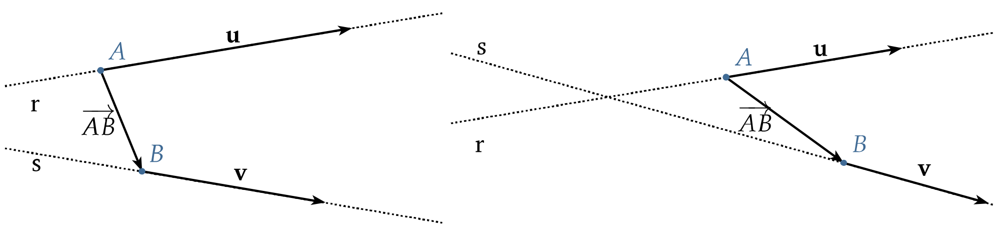
Passemos agora para uma análise espacial. Quando consideramos duas retas no espaço elas podem estar ou não num mesmo plano. Caso elas estejam num um mesmo plano serão ditas **retas coplanares**, e podemos para essas retas aplicar a análise de posição relativa que fizemos na seção anterior. Ressaltamos que se duas retas são paralelas elas são necessariamente coplanares. Por outro lado, retas não coplanares recebem o nome de reversas. Em resumo, duas retas no espaço podem ser

- Reversas, se as duas retas não estiverem contidas num mesmo plano.
- Coplanares, se as duas retas estiverem contidas num mesmo plano. Neste caso, valem as classificações vistas até agora, e as retas podem ser:
  - Coincidentes;
  - Paralelas;
  - Concorrentes.

Precisamos então encontrar um critério para determinar se duas retas são ou não coplanares. Para tanto, considere duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$, com $A \neq B$. Se r e s forem coplanares, então necessariamente o vetor $\overrightarrow{AB}$ deve ser coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes. Do mesmo modo, se $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem coplanares então a reta s está contida no mesmo plano determinado pela reta r e pelo ponto B. Isso nos dá o seguinte resultado.

Teorema 4.4 *Duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$ são coplanares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ forem linearmente dependentes, ou seja se:*

$$\left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right| = 0.$$



Exemplo 4.5 Determine a posição relativa entre as seguintes retas:

a) $r : (1, 2, 0) + t(2, 2, 2)$ e $s : (1, 3, 3) + t(2, 2, 3)$

b) $r : (1, 0, 0) + t(2, 2, 2)$ e $s : (2, 3, 0) + t(1, -1, 2)$

c) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ e $s : (2, 3, 0) + t(1, 1, 1)$

d) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ e $s : (2, 1, 1) + t(1, 1, 1)$

Solução:

a) Para determinar se r e s são coplanares precisamos estudar a dependência linear dos vetores $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ e $(0, 1, 3) = (1, 3, 3) - (1, 2, 0)$. Como o determinante formado pelas coordenadas destes vetores vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluímos que as retas não são coplanares, sendo portanto reversas.

b) Como o determinante formado pelas coordenadas dos vetores $(2, 2, 2)$, $(1, -1, 2)$ e $(1, 3, 0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

as retas são coplanares. Como os vetores diretores não são múltiplos, as retas são concorrentes.

c) As retas acima possuem o mesmo vetor diretor, de onde concluímos que são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ não pertence a s, as retas são paralelas e não coincidentes.

d) Assim como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ pertence a reta s (basta fazer $t = -1$ na equação de s) obtemos que r e s são de fato coincidentes.

□

4.2 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS

Passemos agora para o estudo da posição de uma reta e um plano. Dado um plano π e uma reta r temos três possibilidades:

- a intersecção de r e π é vazia. Nesse caso a reta r é dita paralela a π.
- a intersecção de π e r é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta r é transversal a π
- a intersecção de π e r tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta r pertencem ao plano π e dizemos que a reta r está contida em π.

Não é difícil ver que uma reta r é transversal a π se, e somente se, o vetor diretor dessa reta não é paralelo ao plano π. Ou, equivalentemente, se o vetor diretor dessa reta não é ortogonal ao vetor normal ao plano.

Colocando em coordenadas, obtemos que o plano π de equação geral $ax + by + cz = d$ e a reta r de equação paramétrica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0 + z_0) + (v_1, v_2, v_3)t$$

são transversais se, e somente se,

$$(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3 \neq 0),$$

ou seja, num sistema de coordenadas ortogonais:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0.$$

Reescrevendo esta condição utilizando o vetor normal ao plano $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e o vetor diretor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos o seguinte critério.

Proposição 4.6 *A reta* $r : X = P + \mathbf{v}t$ *é transversal ao plano* π *de vetor normal* $\mathbf{n}$ *se, e somente se,*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0.$$

Caso r não seja transversal à π, nos restam duas opções: ou r é paralela ou está contida em π. Para decidirmos qual é o caso basta tomarmos um ponto qualquer da reta e verificarmos se este pertence ao plano. Se isso ocorrer a reta está contida no plano, caso contrário a reta é paralela.

Exemplo 4.7 Determine a posição relativa entre o plano

$$\pi : X = (1,2,1) + (1,-1,1)t_1 + (0,1,2)t_2$$

e a reta

$$r : X = (1,3,4) + (1,1,1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano é dado por:

$$(1,-1,1) \times (0,1,2) = (-3,-2,1)$$

E como $(-3,-2,1) \cdot (1,1,1) = -4 \neq 0$, a reta é transversal ao plano.

O ponto de intersecção ocorre quando:

$$(1,2,1) + (1,-1,1)t_1 + (0,1,2)t_2 = (1,3,4) + (1,1,1)s$$

cuja solução é $s = \frac{1}{4}, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Substituindo $s = \frac{1}{4}$ na equação da reta obtemos o ponto $(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4})$, que é portanto o ponto de intersecção de r com π. □

4.3 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE PLANOS

Queremos agora estudar a posição de dois planos no espaço. Para começar analisemos quais as possíveis posições relativas, para depois determinar condições algébricas que as determinem. Dados então dois planos π_1 e π_2 temos três possibilidades:

- a intersecção de π_1 e π_2 é vazia. Nesse caso, os planos são ditos **paralelos distintos**.
- a intersecção de π_1 e π_2 é não vazia, e dois sub-casos são possíveis:
  - a intersecção de π_1 e π_2 é uma reta, e os planos são ditos **transversais**.
  - π_1 e π_2 são **coincidentes**.

Assim como no caso reta$\times$plano, para estudar a posição relativa entre dois planos utilizaremos intensamente os vetores normais a estes planos. Para dois planos serem paralelos, por exemplo, precisamos que seus vetores normais sejam paralelos entre si.

A seguinte proposição caracteriza a posição relativa de dois planos. Sua demonstração é simples e fica como exercício para o leitor.

Proposição 4.8 *Sejam π_1 e π_2 dois planos de equações $a_1x + b_1y + c_1 = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ respectivamente. então:*

- *Os planos π_1 e π_2 são paralelos se os seus vetores normais forem paralelos, isto é, se*

$$(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_1, b_1, c_1).$$

  Nesse caso se:

  - *(a_1, b_1, c_1, d_1) for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2), então os planos são coincidentes*
  - *(a_1, b_1, c_1, d_1) não for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2), então os planos são paralelos distintos.*

- *Os planos π_1 e π_2 são transversais se os seus vetores normais não forem paralelos, isto é, se (a_1, b_1, c_1) e (a_1, b_1, c_1) não são proporcionais.*

É interessante observar que se π_1 e π_2 forem transversais, então a reta r determinada pela interseção dos dois planos deve ser perpendicular aos vetores normais $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, e podemos tomar o vetor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ como vetor diretor de r. Assim, escolhendo um ponto P qualquer na interseção de π_1 e π_2, obtemos

$$r : X = P + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)t.$$

Exemplos 4.9

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 6x + 2y + 2x = 3$ são transversais. E assim a sua intersecção, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

determina uma reta.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 2$ são paralelos e não coincidentes. E assim a sua intersecção é o conjunto vazio.Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

não possui soluções.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 10$ são coincidentes. E assim a sua intersecção é o plano $\pi_1 = \pi_2$. Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 4x + 6y + 8x = 10 \end{cases}$$

tem como solução um plano.

Exemplo 4.10 A reta r é dada como intersecção de dois planos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} . \tag{4.1}$$

Escreva as equações paramétricas para essa reta.

Solução: Um modo de escrever as equações paramétricas é escolher uma das variáveis é faze-la igual ao parâmetro t. Assim por exemplo, fazendo $z = t$. A equação $x - z = 1$, nos diz que $x = 1 + t$. Substituindo esse valores na equação $x + y + 2z = 0$, temos $y = -1 - t$. E assim as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Outro modo de escrever a equação vetorial é encontrando dois pontos que satisfazem a equação. Assim por exemplo tomando $z = 0$, o sistema de equações 4.1 fica

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} .$$

Cuja solução é o ponto $(1, -1, 0)$, que pertence a reta determinada pela intersecção dos dois planos. Similarmente tomando $z = -1$, temos que o ponto $(0, 2, -1)$ pertence a reta.

De posse dos pontos podemos escrever a equação vetorial dos planos:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

□