PROBLEMAS DE GRAFOS.

Os adjunto un alista de problemas de grafos, la mayoría resueltos.

Os sugiero que tratéis de hacerlos a mano, o al menos tratéis de entender como están hechos, a continuación utilizad SciLab para resolverlos y comparad resultados.

Si tenéis alguna duda ya sabéis como localizarme.

Felices vacaciones. :)

A.H.

P.D. No todos están en inglés.

Dado el grafo de la figura, obtener sus matrices de Adyacencia e Incidencia

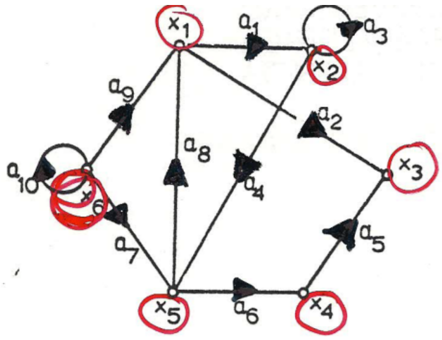


FIG. 1.8.

Given a graph G, its *adjacency* matrix is denoted by $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ and is given by:

$$a_{ij} = 1 \text{ if arc } (x_i, x_j) \text{ exists in } G$$

$$a_{ij} = 0 \text{ if arc } (x_i, x_j) \text{ does not exist in } G.$$

Thus, the adjacency matrix of the graph shown in Fig. 1.8 is:

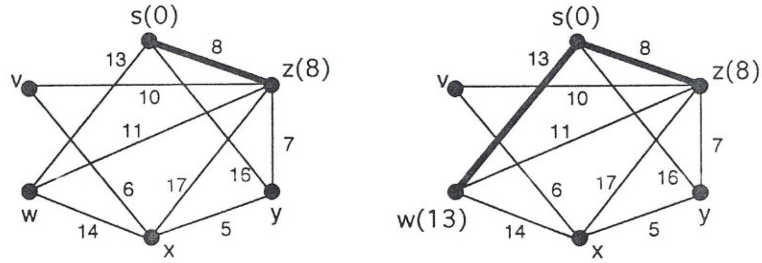
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

For the graph shown in Fig. 1.8, the incidence matrix is:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
x_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

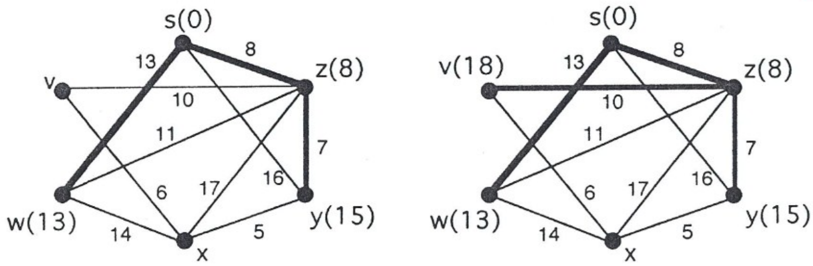
Dado el grafo de la figura, obtener los caminos más cortos de vértice s(0) al resto de vértices aplicando el algoritmo de Dijkstra

Example 4.5.2: Dijkstra's algorithm is illustrated below. The Dijkstra tree at the end of each iteration is drawn in bold. Below each figure are the distances from vertex s computed so far and the set of frontier edges with their P-values. For each tree vertex v, the label $dist[v]$ appears in parentheses.



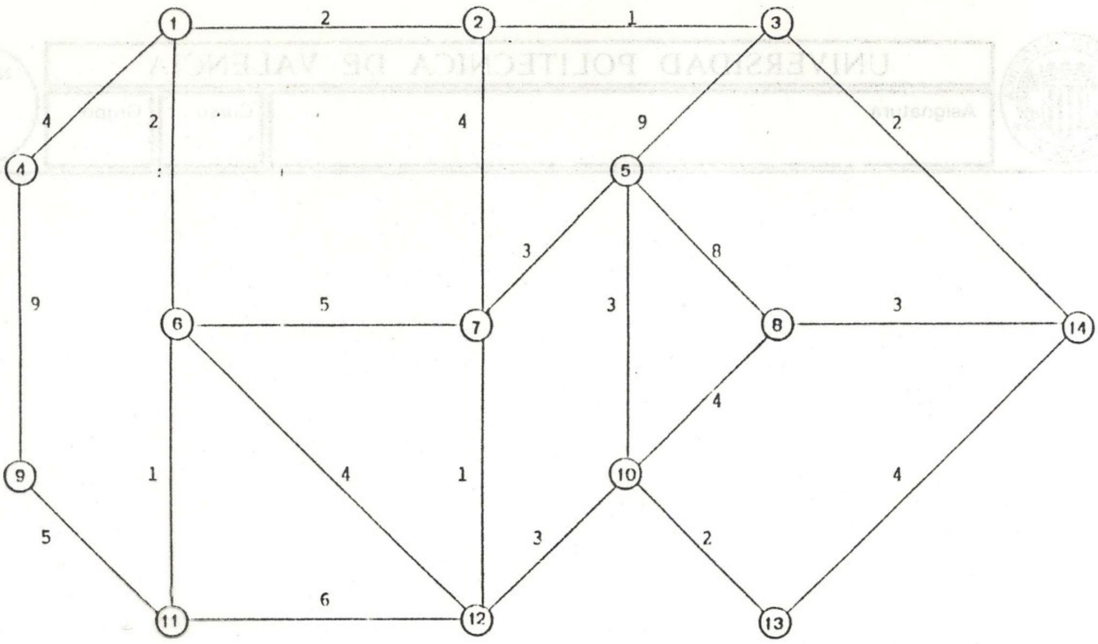
Iteration 1		Iteration 2	
	$P(sw) = 13$		
	$P(zy) = 15$		$P(zy) = 15$
	$P(sy) = 16$		$P(sy) = 16$
	$P(zv) = 18$	$dist[s] = 0$	$P(zv) = 18$
$dist[s] = 0$	$P(zw) = 19$	$dist[z] = 8$	$P(zx) = 25$
$dist[z] = 8$	$P(zx) = 25$	$dist[w] = 13$	$P(wx) = 27$

Figure 4.5.3 Iterations 1 and 2 of Dijkstra's algorithm.



Iteration 3		Iteration 4	
		$dist[s] = 0$	
$dist[s] = 0$	$P(zv) = 18$	$dist[z] = 8$	$P(yx) = 20$
$dist[z] = 8$	$P(yx) = 20$	$dist[w] = 13$	$P(vx) = 24$
$dist[w] = 13$	$P(zx) = 25$	$dist[y] = 15$	$P(zx) = 25$
$dist[y] = 15$	$P(wx) = 27$	$dist[v] = 18$	$P(wx) = 27$

Figure 4.5.4 Iterations 3 and 4 of Dijkstra's algorithm.



DADO EL GRAFO DE LA FIGURA, OBTENER SU ARBOL GENERADOR DE MINIMO PESO
===

Para ello procedmos a ordenar las aristas de menor a mayor peso

Peso 1- (2,3) , (6,11) , (7,12)
Peso 2- (1,2) , (1,6) , (3,14) , (10,13)
Peso 3- (5,7) , (5,10) , (8,14) , (10,12)
Peso 4- (1,4) , (2,7) , (6,12) , (8,10) , (13,14)
Peso 5- (6,7) , (9,11)
Peso 6- (11,12)
Peso 8- (5,8)
Peso 9- (3,5) , (4,8)

Aplicamos el algoritmo de Kruskal:

1ª iteración:

i=1 ; Añadimos la arista (2,3)

2ª iteración:

i=2 ; Añadimos la arista (6,11) puesto que no forma ciclo

3ª iteración

i=2+1=3 ; añadimos la arista (7,12), ya que no forma ciclo

4ª iteración

i=3+1=4 ; añadimos la arista (1,2), ya que no forma ciclo

5ª iteración:

i=4+1=5 Añadimos ña arista (1,6), ya que no forma ciclo

6ª iteración:

i=5+1=6 Añadimos la arista ((3,14) que tampoco forma ciclo

7ª iteración:

i=6+1=7 Añadimos la arista (10,13)

8ª iteración:

i=7+1=8 añadimos la arista (5,7)

9ª iteración:

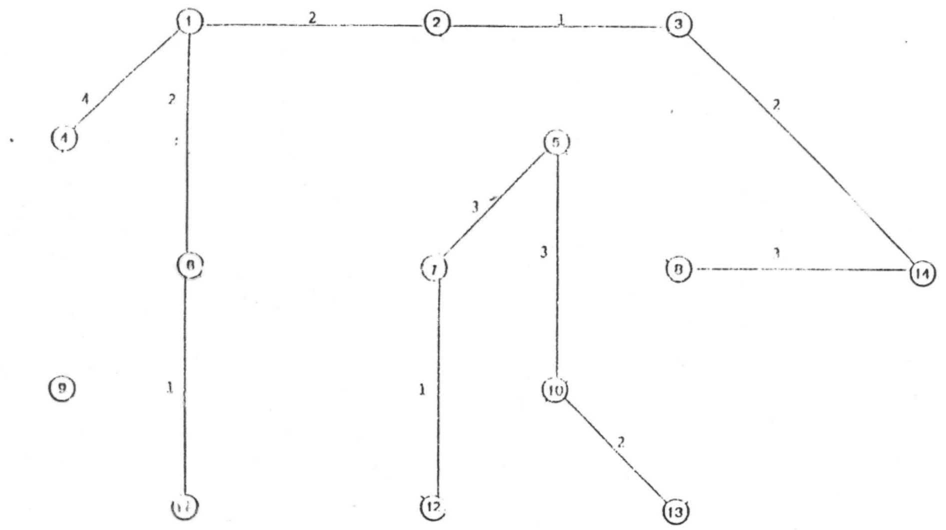
i=8+1=9 Añadimos la arista (5,10), que no forma ciclo

10ª iteración:

i=9+1=10

Añadimos ña arista (8,14), que sigue sin formar ciclo,

Veamos como quedaria el grafo obtenido aplicando Kruskal, después de la decimoprimera iteración:



11ª iteración:

$i=10+1=11\neq 13=n-1$

Obsérvese que no podemos añadir la arista (10,12), puesto que se formaría un ciclo: 5-7-12-10-5

Podemos añadir la arista (1,4)

12ª iteración:

$i=11+1=12\neq n-1$, Añadimos la arista (2,7)

13ª iteración:

$i=12+1=13=n-1$; Esta es la última iteración.

No podemos añadir la arista (6,12), se forma el ciclo 6-12-7-2-1-6

Tampoco la (8,10), se forma el ciclo 8-10-5-7-2-3-14-8

Si se añadiese la (13,14), el ciclo sería más largo :

13-14-3-2-7-5-10-13

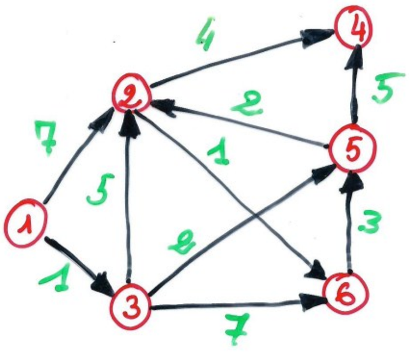
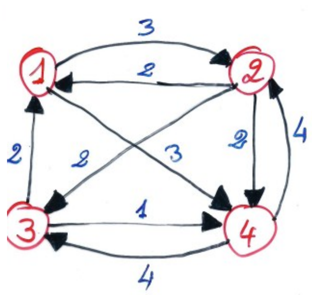
La (6,7) formaría el ciclo 6-7-1-2-7

Añadiendo la (9,11) no se forma ciclo, y hemos llegado al fimal.

El arbol generador aparece en la figura 3, y tiene un peso de 33 unidades,

La figura 3 te la dejamos para que la termines.

Problema: Obtener los caminos más cortos del vértice 1 al resto de vértices para los grafos siguientes:

PREGUNTAS

1-- Un árbol dado tiene tres vértices de grado 2, dos de grado 3, y uno de grado 4. Si los demás vertices tienen todos grado 1, ¿Cuantos vértices tiene el árbol? Justifíquese la respuesta.

2-- Sea $G:=(V,E)$ un grafo, y sea $v \in E$, un vértice de corte de G. Demuéstrese que $d(v)>1$.

3-- Erase una vez un estudiante al que le presentaron dos grafos dirigidos G y H, y se le preguntó si dichos grafos eran isomorfos. En un intento de salir del paso de la situación, respondió que G era isomorfo, pero H no. ¿Que opina de esta respuesta?. Justifique su respuesta (Obviamente la de usted, no la del otro estudiante).

Pregunta nº 1/ Si G es un árbol $\Rightarrow e = n-1$
$\forall$ grafo G $\sum_{v \in V} d(v) = 2e$

$$\left.\begin{array}{l} e = n-1 \\ \sum_{v \in V} d(v) = 2e \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1).$$

Supongamos que el árbol en cuestión tiene k vértices de grado 1. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{v \in V} d(v) = 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4 + k \times 1 = 16 + k \\ 2(n-1) = 2(k+5) = 2k + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 6. \Rightarrow n = 12 \text{ vértices.}$$

Pregunta nº 2/ Si $d(v) = 0 \Rightarrow$ TRIVIAL.
Si $d(v) = 1 \Rightarrow \exists!\, e \in E(G)$ incidente con $v \Rightarrow$

$\Rightarrow G \setminus \{v\} = \{V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}\} \Rightarrow$ Si G es conexo, $G \setminus \{v\}$ es conexo $\Rightarrow v$ no es de corte

Pregunta nº 3/ Recuérdese que dos grafos son isomorfos si existen aplicaciones biyectivas

$$\Theta: V(G) \longrightarrow V(H)$$
$$\varphi: E(G) \longrightarrow E(H)$$

compatibles con las funciones de incidencia.

Por lo tanto siendo las funciones biyectivas G es isomorfo con H si y sólo si H es isomorfo con G.

Aplicar BFS y DFS a los siguientes grafos:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$

B.F.S. (1).

1- X = 1

3- $\cancel{\phi 1}$

5 $\Gamma(1) = 2$ → R(2)=0. → R(2) = 1

6 $\cancel{12}$

11 $\cancel{2} \neq \phi$

5 $\Gamma(2) = 3$ R(3) = 0. → R(3) = 1

6 $\overline{23}$

11 $\overline{3}$

5 $\Gamma(3) = 4$ R(4) = 0 → R(4) = 1.

6 $\overline{3,4}$

11 $\overline{4}$

5 $\Gamma(4) = 5$ R(5) = 0 → R(5) = 1

6 $\overline{45}$

11 $\overline{5}$

. . . .

5 $\Gamma(9) = 10$ R(10) = 0 → R(10) = 1

6 $\overline{9,10}$

11 $\overline{10}$

5 $\Gamma(10) = \phi$

11 $\overline{}$

5 Γ?

6 ϕ

11 ENDIF

Finalización.

MEJOR

D.F.S. (1).

1 - R(1) = 1

2 - DFS(2) → R(2) = 1.

2 DFS(2) → R(3) = 1

2 → DFS(3) → R(4) = 1

→ DFS(4) → R(5) = 1.

- - - .

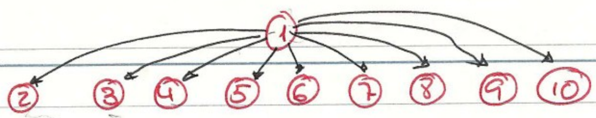
DFS(9) → R(10) = 1

END FOR

END D.F.S.

PEOR

Cuidado con la recursión



B.F.S (1).

1- $x = 1$.

2 $R(1) = 1$

3 $\overline{1}$

5 2

6. $R(2)=0 \rightarrow R(2)=1$

8 $\overline{1\ 2}$

5 3

6 $R(3)=0 \rightarrow R(3)=1$

8 $\overline{1\ 2\ 3}$

5 4

6 $R(4)=0 \rightarrow R(4)=1$.

8 $\overline{1,2,3,4}$

. . . . .

5 9

6 $R(9)=0 \rightarrow R(9)=1$

8 $\overline{1,2,3,4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}$

5 10

6 $R(10)=0 \rightarrow R(10)=1$

8 $\overline{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$

12 $\overline{2,3,4\ \ldots,9,10}$

13 $\Gamma(2)=\emptyset$. 5, 6, 8, 12 $\overline{3\ 4\ \ldots\ 10}$

13 $\Gamma(3)=\emptyset$

⋮

Hasta borrar la cola entera.

Peor

D.F.S.(1)

1 $R(1) = 1$

2 $\Gamma(1) = 2, 3$ —— 9, 10

DFS(2) = ∅

END FOR

DFS(3) = ∅

END FOR

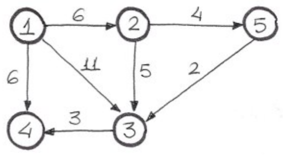
⋮

DFS(10) = ∅

END FOR

END DFS.

Mejor



Caminos más cortos de 1 al resto de vértices.

	ℓ^1	ℓ^2	ℓ^3	ℓ^4	ℓ^5
1	$\boxed{0}$	—	—	—	—
2	∞	6	$\boxed{6}$	—	—
3	∞	11	11	11	$\boxed{11}$
4	∞	$\boxed{6}$	—	—	—
5	∞	∞	∞	$\boxed{10}$	—

si tenemos dos iguales elegimos el que más nos convenga

PASO 1: Inicializamos en la columna ℓ^1. $P = 1$

PASO 2:

$\Gamma(P) = \Gamma(1) = \{2,3,4\}$

$\ell(2) = \min\{\ell(2), \ell(1) + c(1\,2)\} = \min\{\infty, 0+6\} = 6$
$\ell(3) = \min\{\infty, 0+11\} = 11$
$\ell(4) = \min\{\infty, 0+6\} = 6$ Actualizamos ℓ^2

PASO 3: Tenemos dos vértices, 2 y 4 con longitudes mínimas. Elegimos el 4

PASO 4: $P = 4$
PASO 5:

PASO 2: $\Gamma(P) = \Gamma(4) = \emptyset$ y actualizamos ℓ^3
PASO 3: $x_i^* = 2$
PASO 4: $P = 2$
PASO 5:

PASO 2: $\Gamma(P) = \Gamma(2) = \{3,5\}$

$\ell(3) = \min\{11, 6+5\} = 11$
$\ell(5) = \min\{\infty, 6+4\} = 10$ y actualizamos ℓ^4

PASO 3: $x_i^* = 5$
PASO 4: $P = 5$
PASO 5:

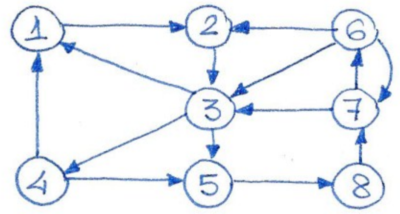
PASO 2: $\Gamma(P) = \Gamma(5) = \{3\}$

$\ell(3) = \min\{11, 10+2\} = 11$ y actualizamos ℓ^5

PASO 3: $x_i^* = 3$
PASO 4: $P = 3$

PASO 5: FIN

51.-

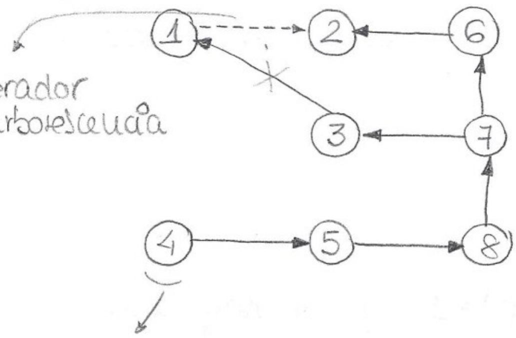


arbol generador

ARBORESCENCIA: Grafo acíclico, y débilmente conexo y además un único vértice con grado de entrada 0.

Aplico el algoritmo de KRUSKAL pero cogiendo las aristas al azar.

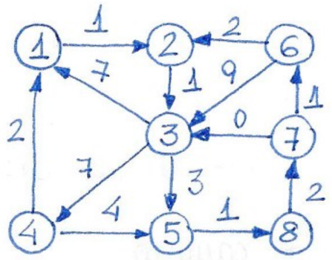
arbol generador pero no arborescencia



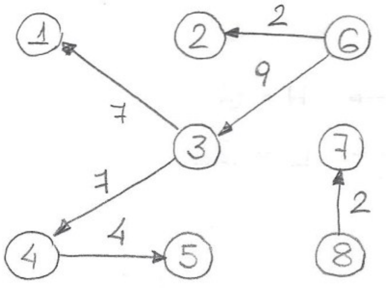
raiz

ARBORESCENCIA GENERADORA

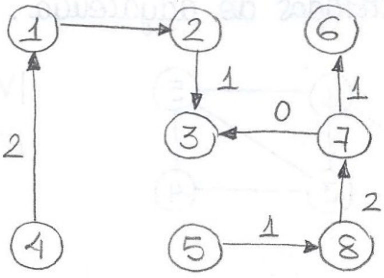
52.-



obtener los árboles generadores de mínimo y máximo peso.

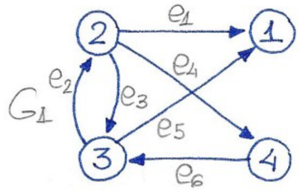


Un árbol generador de máximo peso.



Un árbol generador de mínimo peso.

32.-



Calcular:

- Matriz de adyacencia, incidencia, accesibilidad y acceso.

Establecer el grado de conexión y hallar sus componentes conexas, indicando claramente el método utilizado para ello.

MATRIZ DE ADYACENCIA $\rightarrow A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle i,j \rangle \in E \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

MATRIZ DE INCIDENCIA $\rightarrow IN(i,j) = \begin{cases} -1 & \text{si la arista } j \text{ es incidente desde el vértice } i. \\ 1 & \text{si la arista } j \text{ es incidente hasta } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = A_{G_1} \qquad IN_{G_1} = \begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD $\rightarrow r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \text{ es alcanzable desde } x_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

x_j ES ALCANZABLE DESDE x_i si $\exists\ (x_i, x_j)$ - camino dirigido

MATRIZ DE ACCESO $\rightarrow q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \text{ puede alcanzar a } x_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = R \qquad Q = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Luego $R \otimes Q$ sería:

$$\begin{array}{c|cccc} & ① & ② & ③ & ④ \\ \hline ① & & & & \\ ② & & & & \\ ③ & & & & \\ ④ & & & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R \otimes Q$$

componentes conexas.

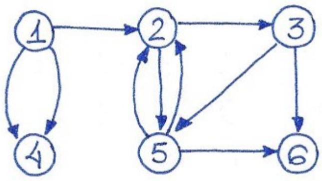
Los vértices ②, ③ y ④ estan fuertemente conectados por lo que es una componente fuertemente conexa de este grafo.

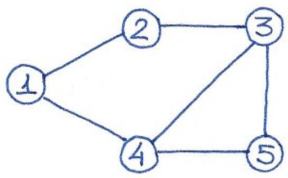
La otra componente fuertemente conexa es el uno porque está conectado con el mismo.

El método utilizado es $R \otimes Q$

34._ Tenemos los siguientes grafos.

G_1





G_2

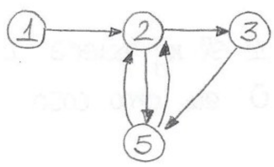
A._ Obtener dos subgrafos generadores de cada uno de ellos.

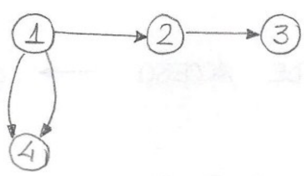
B._ Un grafo simple subayacente.

[redacted]

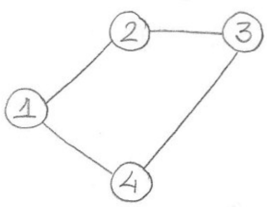
A._ Un subgrafo generador de cada uno.

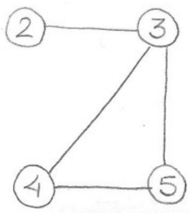
G_1



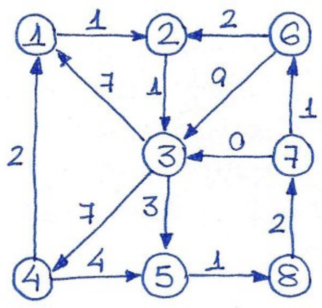


G_2





61.- Camino más corto del 4 al 1.



Estamos en el CASO 1, los pesos son positivos, es decir

$c_{ij} \geq 0 \quad 1 \leq i,j \leq 0$

	ℓ^1	ℓ^2		
1	∞	$\boxed{2}$		
2	∞			
3	∞			
4	$\boxed{0}$			
5	∞	4		
6	∞			
7	∞			
8	∞			

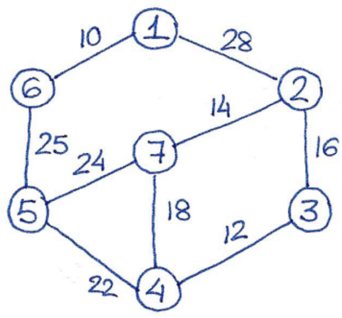
$p = 4$

$\Gamma(p) = \Gamma(4) = \{1, 5\}$

$\ell(1) = \min\{\ell(1), \ell(4) + c_{14}\} = \min\{\infty, 0+2\} = 2$
$\ell(5) = \min\{\ell(5), \ell(4) + c_{15}\} = \min\{\infty, 0+4\} = 4$

$p = 1 \rightarrow$ como $p = t \rightarrow$ fin.

62.- Encontrar el camino más corto del vértice 1 al resto de vértices en el siguiente grafo no dirigido.



Estamos en el caso 1, los pesos son positivos.

	ℓ^1	ℓ^2	ℓ^3	ℓ^4	ℓ^5	ℓ^6	ℓ^7
1	$\boxed{0}$						
2	∞	28	$\boxed{28}$				
3	∞	∞	∞	44	44	$\boxed{44}$	
4	∞	∞	∞	∞	57	57	$\boxed{56}$
5	∞	∞	35	$\boxed{35}$			
6	∞	$\boxed{10}$					
7	∞	∞	∞	42	$\boxed{42}$		

$\rightarrow p = 1$

$\Gamma(p) = \Gamma(1) = \{6, 2\}$

$\ell(6) = \min\{\ell(6), \ell(1) + c_{16}\} = \min\{\infty, 0 + 10\} = 10$
$\ell(2) = \min\{\ell(2), \ell(1) + c_{12}\} = \min\{\infty, 0 + 28\} = 28$

$\rightarrow p = 6$

$\Gamma(p) = \Gamma(6) = \{5\}$

$\ell(5) = \min\{\ell(5), \ell(6) + c_{56}\} = \min\{\infty, 10 + 25\} = 35$

$\rightarrow p = 2$

$\Gamma(p) = \Gamma(2) = \{7, 3\}$

$\ell(7) = \min\{\ell(7), \ell(2) + c_{27}\} = \min\{\infty, 28 + 14\} = 42$
$\ell(3) = \min\{\ell(3), \ell(2) + c_{23}\} = \min\{\infty, 28 + 16\} = 44$

→ $P = \{⑤\}$

$\Gamma(P) = \Gamma(5) = \{4, 7\}$

$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(5) + c_{54}\} = \min\{\infty, 35+22\} = 57$

$\ell(7) = \min\{\ell(7), \ell(5) + c_{75}\} = \min\{42, \underbrace{35+24}_{59}\} = 42$

→ $P = \{⑦\}$

$\Gamma(P) = \Gamma(7) = \{4\}$

$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(7) + c_{74}\} = \min\{57, \underbrace{42+18}_{60}\} = 57$

→ $P = \{③\}$

$\Gamma(P) = \Gamma(3) = \{4\}$

$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(3) + c_{34}\} = \min\{57,, \underbrace{44+12}_{56}\} = 56$

vamos a ver ahora los caminos a cada uno.

→ ① a ②

tomamos ② vértices adyacentes = {①, ⑦, ③}

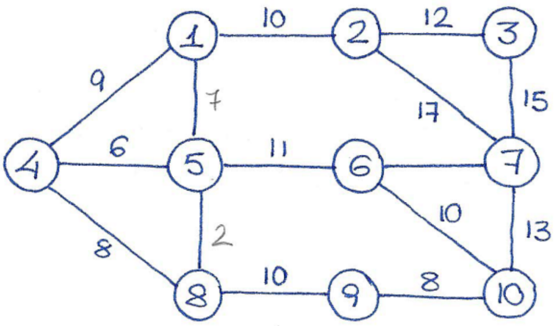
$\ell(2) = 28 \quad c(1,2) = 28 = \ell(2)$ SI
$\ell(2) = 28 \quad c(7,2) = 14 \neq \ell(2)$ NO
$\ell(2) = 28 \quad c(3,2) = 16 \neq \ell(2)$ NO

} → ①②

→ ① a ③ → adyacentes a ③ = {2, 4}

$\ell(3) = 44 \quad c(2,3) = 16 = \ell(3)$,

58.-



A.- Sus componentes conexas.

$$\textcircled{1} \Rightarrow \Gamma^1(1) = \{2,5,4\}$$
$$\Gamma^2(1) = \Gamma^1(\Gamma^1(1)) = \Gamma^1(\{2,5,4\}) = \{3,7,6,8,\}$$
$$\Gamma^3(1) = \Gamma^1(\Gamma^1(\Gamma^1(1))) = \Gamma^1(\Gamma^1(\{2,3,4\}) =$$
$$= \Gamma^1(\{3,7,6,8\}) = \{10,9\}$$

Luego 1 está conectado con $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

sólo hay 1 componente conexa.

B.- El camino más corto del vértice 1 al 7.

Utilizaremos el algoritmo de Dijkstra. (1959)

	ℓ^1	ℓ^2	ℓ^3	ℓ^4	ℓ^5	ℓ^6	ℓ^7	ℓ^8	ℓ^9
1	$\boxed{0}$								
2	∞	10	10	10	$\boxed{10}$				
3	∞	∞	∞	∞	∞	22	22	$\boxed{22}$	
4	∞	9	9	$\boxed{9}$					
5	∞	$\boxed{7}$							
6	∞	∞	18	18	18	$\boxed{18}$			
7	∞	∞	∞	∞	∞	27	27	27	$\boxed{27}$
8	∞	∞	$\boxed{9}$						
9	∞	∞	∞	19	19	19	$\boxed{19}$		
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	28	27	27

PASO 2: Actualización de medidas $\quad \Gamma^1(1) = \{2,5,4\}$

$$\ell(2) = \min\{\ell(2), \ell(1) + c(1,2)\} = \min\{\infty, 0+10\} = 10$$
$$\ell(5) = \min\{\ell(5), \ell(1) + c(1,5)\} = \min\{\infty, 0+7\} = 7$$
$$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(1) + c(1,4)\} = \min\{\infty, 0+9\} = 9$$

$p = 5 \qquad \Gamma(5) = \{4, 8, 6\}$

$$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(5) + c(5,4)\} = \min\{9, 7+6\} = 9$$
$$\ell(8) = \min\{\ell(8), \ell(5) + c(5,8)\} = \min\{\infty, 7+2\} = 9$$
$$\ell(6) = \min\{\ell(6), \ell(5) + c(5,6)\} = \min\{\infty, 7+11\} = 18$$

$p = 8 \qquad \Gamma(8) = \{4, 9\}$

$$\ell(4) = \min\{\ell(4), \ell(8) + c(8,4)\} = \min\{9, 9+8\} = 9$$
$$\ell(9) = \min\{\ell(9), \ell(8) + c(8,9)\} = \min\{\infty, 9+10\} = 19$$

$p = 2 \qquad \Gamma(2) = \{3, 7\}$

$$\ell(3) = \min\{\ell(3), \ell(2) + c(2,3)\} = \min\{\infty, 10+12\} = 22$$
$$\ell(7) = \min\{\ell(7), \ell(2) + c(2,7)\} = \min\{\infty, 10+17\} = 27$$

$p = 6 \qquad \Gamma(6) = \{7, 10\}$

$$\ell(7) = \min\{\ell(7), \ell(6) + c(6,7)\} = \min\{27, 18+10\} = 27$$
$$\ell(10) = \min\{\ell(10), \ell(6) + c(6,10)\} = \min\{\infty, 18+10\} = 28$$

$p = 9 \qquad \Gamma(9) = \{10\}$

$$\ell(10) = \min\{\ell(10), \ell(9) + c(9,10)\} = \min\{28, 19+8\} = 27$$

$p = 3 \qquad \Gamma(3) = \{7\}$

$$\ell(7) = \min\{\ell(7), \ell(3) + c(3,7)\} = \min\{27, 22+15\} = 27$$