Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA
Inteligência Artificial para Robótica Móvel - CT-213
Aluno: Rafael Mello Celente

Relatório do Laboratório 10 - Programação Dinâmica

1. Breve Explicação em Alto Nível da Implementação

A implementação foi realizada baseada na execução de 3 funções principais: *policy_evaluation, value_iteration* e *policy_iteration.*

1.1. Avaliação de Política

A função *policy_evaluation* tinha por objetivo avaliar a função valor v_π para determinada política π. Para isso, deve-se resolver a equação de Bellman, encontrando a tabela que mapeia a política a cada um dos estados e a cada uma das ações.

Utilizando programação dinâmica, pode-se resolver a equação iterativamente. A partir de um chute inicial, um valor v_{k+1} é encontrado para a iteração $k + 1$ a partir do valor de v_k. Com $k \to \infty$, a função tende a convergir para $v_k = v_\pi$.

Definindo uma condição de parada de número de iterações máximo ou de uma diferença máxima entre funções valor consecutivas ϵ, podemos definir um suficientemente próximo para v_π. O pseudocódigo implementado, retirado do livro do Sutton, é demonstrado abaixo.

1. Initialization
   $V(s) \in \mathbb{R}$ and $\pi(s) \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily for all $s \in \mathcal{S}$; $V(terminal) \doteq 0$

2. Policy Evaluation
   Loop:
   $\Delta \leftarrow 0$
   Loop for each $s \in \mathcal{S}$:
   $v \leftarrow V(s)$
   $V(s) \leftarrow \sum_{s',r} p(s', r \mid s, \pi(s))\left[r + \gamma V(s')\right]$
   $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
   until $\Delta < \theta$ (a small positive number determining the accuracy of estimation)

1.2. Iteração de Valor

A iteração de valor, diferentemente da iteração de política, permite que a melhoria da política ocorra juntamente com a avaliação da mesma, em uma passagem só. O algoritmo funciona por tornar a equação a função de otimalidade de Bellman em uma regra de atualização, pegando o valor máximo do estado para cada uma das ações. O pseudocódigo implementado, retirado do livro do Sutton, é demonstrado abaixo.

Algorithm parameter: a small threshold $\theta > 0$ determining accuracy of estimation
Initialize $V(s)$, for all $s \in \mathcal{S}^+$, arbitrarily except that $V(terminal) = 0$

Loop:
| $\Delta \leftarrow 0$
| Loop for each $s \in \mathcal{S}$:
| $v \leftarrow V(s)$
| $V(s) \leftarrow \max_a \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)\left[r + \gamma V(s')\right]$
| $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
until $\Delta < \theta$

Output a deterministic policy, $\pi \approx \pi_*$, such that
$\pi(s) = \arg\max_a \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)\left[r + \gamma V(s')\right]$

1.3. Iteração de Política

A iteração de política é um algoritmo para a identificação da política ótima a partir de uma sequência de melhorias monotônicas. A partir de uma política π pode-se encontrar sua função valor v_π, e essa função pode ser então utilizada para encontrar uma política melhor π' . Isso é garantido pois como uma MDP tem um número finito de políticas determinísticas, esse processo deve convergir para uma política ótima em um número finito de iterações.

O algoritmo funciona em duas etapas: avaliação e melhoria. Na etapa de avaliação, a função valor v_k é identificada a partir de uma política π com método de avaliação de política definido em 1.1. A partir dessa função, a próxima melhor política π' é retirada a partir de uma política gulosa. Essa política π é então usada para encontrar outra função de valor v_{k+1}, repetindo o ciclo. O ciclo é interrompido com uma condição de iterações máximas ou até que $max\,|v_k - v_{k+1}| < \epsilon$. O pseudocódigo implementado, retirado do livro do Sutton, é demonstrado abaixo.

1. Initialization
   $V(s) \in \mathbb{R}$ and $\pi(s) \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily for all $s \in \mathcal{S}$; $V(terminal) \doteq 0$

2. Policy Evaluation
   Loop:
      $\Delta \leftarrow 0$
      Loop for each $s \in \mathcal{S}$:
         $v \leftarrow V(s)$
         $V(s) \leftarrow \sum_{s',r} p(s', r \mid s, \pi(s))\big[r + \gamma V(s')\big]$
         $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
   until $\Delta < \theta$ (a small positive number determining the accuracy of estimation)

3. Policy Improvement
   policy-stable $\leftarrow$ *true*
   For each $s \in \mathcal{S}$:
      old-action $\leftarrow \pi(s)$
      $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
      If *old-action* $\neq \pi(s)$, then *policy-stable* $\leftarrow$ *false*
   If *policy-stable*, then stop and return $V \approx v_*$ and $\pi \approx \pi_*$; else go to 2

2. Tabelas Comprovando Funcionamento do Código

2.1. Caso $p_c = 1,0$ e $\gamma = 1,0$

2.1.1. Avaliação de Política

```
Evaluating random policy, except for the goal state, where policy always executes stop:
Value function:
[  -384.09,  -382.73,  -381.19,    *    ,  -339.93,  -339.93]
[  -380.45,  -377.91,  -374.65,    *    ,  -334.92,  -334.93]
[  -374.34,  -368.82,  -359.85,  -344.88,  -324.92,  -324.93]
[  -368.76,  -358.18,  -346.03,    *    ,  -289.95,  -309.94]
[    *    ,  -344.12,  -315.05,  -250.02,  -229.99,    *    ]
[  -359.12,  -354.12,    *    ,  -200.01,  -145.00,     0.00]
Policy:
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ,    S    ]
----------------------------------------------------------------
```

2.1.2. Iteração de Valor

```
Value iteration:
Value function:
[   -10.00,    -9.00,    -8.00,    *    ,    -6.00,    -7.00]
[    -9.00,    -8.00,    -7.00,    *    ,    -5.00,    -6.00]
[    -8.00,    -7.00,    -6.00,    -5.00,    -4.00,    -5.00]
[    -7.00,    -6.00,    -5.00,    *    ,    -3.00,    -4.00]
[    *    ,    -5.00,    -4.00,    -3.00,    -2.00,    *    ]
[    -7.00,    -6.00,    *    ,    -2.00,    -1.00,     0.00]
Policy:
[    RD   ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    DL   ]
[    RD   ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    DL   ]
[    RD   ,    RD   ,    RD   ,    R    ,    D    ,    DL   ]
[    R    ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    L    ]
[    *    ,    R    ,    R    ,    RD   ,    D    ,    *    ]
[    R    ,    U    ,    *    ,    R    ,    R    ,   SURD  ]
----------------------------------------------------------------
```

2.1.3. Iteração de Política

```
Policy iteration:
Value function:
[   -10.00,    -9.00,    -8.00,    *    ,    -6.00,    -7.00]
[    -9.00,    -8.00,    -7.00,    *    ,    -5.00,    -6.00]
[    -8.00,    -7.00,    -6.00,    -5.00,    -4.00,    -5.00]
[    -7.00,    -6.00,    -5.00,    *    ,    -3.00,    -4.00]
[    *    ,    -5.00,    -4.00,    -3.00,    -2.00,    *    ]
[    -7.00,    -6.00,    *    ,    -2.00,    -1.00,     0.00]
Policy:
[    RD   ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    DL   ]
[    RD   ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    DL   ]
[    RD   ,    RD   ,    RD   ,    R    ,    D    ,    DL   ]
[    R    ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    L    ]
[    *    ,    R    ,    R    ,    RD   ,    D    ,    *    ]
[    R    ,    U    ,    *    ,    R    ,    R    ,   SURD  ]
----------------------------------------------------------------
```

2.2. Caso $p_c = 0,8$ e $\gamma = 0,98$

2.2.1. Avaliação de Política

```
Evaluating random policy, except for the goal state, where policy always executes stop:
Value function:
[   -47.19,   -47.11,   -47.01,    *    ,   -45.13,   -45.15]
[   -46.97,   -46.81,   -46.60,    *    ,   -44.58,   -44.65]
[   -46.58,   -46.21,   -45.62,   -44.79,   -43.40,   -43.63]
[   -46.20,   -45.41,   -44.42,    *    ,   -39.87,   -42.17]
[    *    ,   -44.31,   -41.64,   -35.28,   -32.96,    *    ]
[   -45.73,   -45.28,    *    ,   -29.68,   -21.88,     0.00]
Policy:
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ]
[    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ]
[  SURDL  ,  SURDL  ,    *    ,  SURDL  ,  SURDL  ,    S    ]
----------------------------------------------------------------
```

2.2.2. Iteração de Valor

```
Value iteration:
Value function:
[   -11.65,   -10.78,    -9.86,    *    ,    -7.79,    -8.53]
[   -10.72,    -9.78,    -8.78,    *    ,    -6.67,    -7.52]
[    -9.72,    -8.70,    -7.59,    -6.61,    -5.44,    -6.42]
[    -8.70,    -7.58,    -6.43,    *    ,    -4.09,    -5.30]
[    *    ,    -6.43,    -5.17,    -3.87,    -2.76,    *    ]
[    -8.63,    -7.58,    *    ,    -2.69,    -1.40,     0.00]
Policy:
[    D    ,    D    ,    D    ,    *    ,    D    ,    D    ]
[    D    ,    D    ,    D    ,    *    ,    D    ,    D    ]
[    RD   ,    D    ,    D    ,    R    ,    D    ,    D    ]
[    R    ,    RD   ,    D    ,    *    ,    D    ,    L    ]
[    *    ,    R    ,    R    ,    D    ,    D    ,    *    ]
[    R    ,    U    ,    *    ,    R    ,    R    ,    S    ]
-----------------------------------------------------------------
```

2.2.3. Iteração de Política

```
Policy iteration:
Value function:
[   -11.65,   -10.78,    -9.86,    *    ,    -7.79,    -8.53]
[   -10.72,    -9.78,    -8.78,    *    ,    -6.67,    -7.52]
[    -9.72,    -8.70,    -7.59,    -6.61,    -5.44,    -6.42]
[    -8.70,    -7.58,    -6.43,    *    ,    -4.09,    -5.30]
[    *    ,    -6.43,    -5.17,    -3.87,    -2.76,    *    ]
[    -8.63,    -7.58,    *    ,    -2.69,    -1.40,     0.00]
Policy:
[    D    ,    D    ,    D    ,    *    ,    D    ,    D    ]
[    D    ,    D    ,    D    ,    *    ,    D    ,    D    ]
[    R    ,    D    ,    D    ,    R    ,    D    ,    D    ]
[    R    ,    D    ,    D    ,    *    ,    D    ,    L    ]
[    *    ,    R    ,    R    ,    D    ,    D    ,    *    ]
[    R    ,    U    ,    *    ,    R    ,    R    ,    S    ]
-----------------------------------------------------------------
```

3. Discussão dos Resultados

A partir dos resultados encontrados podemos perceber características interessantes sobre cada um dos testes realizados. Para o teste em que $p_c = 1$ e $\gamma = 1$ percebemos que a função valor foi maximizada em comparação com a função valor com política aleatória. Percebe-se que essa política limita as ações possíveis, encontrando caminhos ótimos a serem percorridos. Percebe-se também que o método de iteração de valor obteve a mesma função de valor final ao método de iteração de política, resultado já esperado.

Já para o teste em que $p_c = 0,8$ e $\gamma = 0,98$, percebe-se uma restrição maior da política com relação às ações possíveis para cada um dos estados. Isso se dá pelo fato de que os parâmetros p_c e γ induzem a iteração da função valor à resultados que favorecem recompensas mais imediatas, fazendo com que menos caminhos possíveis possam ser percorridos.