

# Problema de Mistura de Minério

Rafael Coelho Monte Alto  
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Ouro Preto, Brasil

**Resumo**—Este trabalho tem como objetivo descrever uma abordagem para o problema de mistura de minério usando a heurística de subida da encosta com aceitação tardia (Late Acceptance Hill Climbing). A otimização do modelo será pela minimização do custo de produção do minério resultante.

**Index Terms**—Mistura de minério, problema da mistura, blendagem, método da subida, late acceptance hill climbing

## I. INTRODUÇÃO

### A. O problema da mistura

O problema da mistura de minério se encaixa no problema geral de mistura, também conhecido como problema de blendagem. Muito abordado na literatura, o problema da mistura possui inúmeras aplicações em processos operacionais.

Groisaird (2010) referencia o problema da seguinte maneira: *O problema da mistura é fundamental para os filósofos da Antiguidade porque a mistura permite articular unidade e multiplicidade ao criar uma passagem possível entre uma pluralidade de elementos e um composto único que deles resulta e pode eventualmente neles se decompor novamente.*

Aplicável para a mistura de metal, óleo, alimentos, etc, esse clássico problema de otimização é muito recorrente na literatura e na pesquisa científica. No exemplo da mistura de óleo, uma empresa petrolífera fabrica diferentes tipos de gasolina misturando diferentes tipos de petróleo bruto (IBM, 2021). Cada mistura deve atender as demandas de qualidade do cliente, almejando minimizar os custos de produção.

A mistura de minério se assemelha muito ao exemplo da mistura de petróleo, tendo como diferença o tipo de material bruto utilizado, assim como o produto final desejado. As restrições de qualidade, custo por matéria prima e minimização do custo da solução continuarão como características fundamentais do problema.

### B. A indústria do minério

A indústria da mineração é uma das maiores do país, tendo impacto significativo na economia do Brasil (PEREIRA, 2012). Por exemplo, a terceira maior reserva mundial de minério de ferro está no território brasileiro (NASCIMENTO, 2021), tornando o ferro uma mercadoria muito valiosa. Consequentemente, todos processos que o envolvem são extremamente lucrativos. Dados divulgados em 2020 pelas Estatísticas do Comércio Exterior Brasileiro (COMEX STAT) apontam que o mineral teve uma participação de 11,6% nas exportações totais mundiais e de 51,6% na indústria extrativa.

*O Brasil possui uma das maiores reservas minerais do mundo, sendo um dos principais produtores e exportadores*

*mundiais de minério de ferro. Neste contexto, o desenvolvimento de tecnologias que permitam melhorar atividades relacionadas à extração, transporte ou venda de minérios é de grande interesse no cenário nacional.* (TOFFOLO, 2009)

### C. A mineração do Ferro

Partindo para uma análise mais específica do mercado, vamos tomar o exemplo do minério de ferro.

*Industrialmente, a única forma pela qual se obtém o ferro (Fe) é a partir de substâncias minerais. O metal é o quarto elemento mais abundante da crosta terrestre, de cuja composição participa com 4,5% em massa, superado apenas pelo oxigênio, o silício e o alumínio.* (CARVALHO, 2014)

O processo da mineração do ferro acontece em várias etapas, começando pela lavra, ou extração do material bruto. Instrumentos de grande porte, como cavadeiras, são utilizados para recolher o produto do solo, onde o minério é abundante. O próximo passo é a transportação do minério até as usinas para o processo de beneficiamento. É durante esse processo que o rejeito é retirado e os minerais desejados são concentrados (SANTOS e EUZÉBIO, 2018).

Toffolo (2009) apontou: "Após o beneficiamento, pode-se considerar que as características físicas e químicas dos minérios já são bem conhecidas".

A próxima etapa do processo é a estocagem, onde quantidades grandes de minério são armazenadas em pilhas específicas em um pátio de estocagem. Essas pilhas serão utilizadas para compor os produtos finais no processo de blendagem.

*O processo de blendagem consiste na mistura dos minérios beneficiados, chamados de produtos primários, em teores pré-determinados de maneira que, ao serem blendados, atendam às especificações de qualidade e quantidade pré-definidas.* (MARTINS et al., 2020)

Por fim, o produto pode ser transportado para portos de exportação ou para siderúrgicas para obtenção do ferro metálico.

Carvalho (2014) separou o custo na indústria do minério de ferro em quatro áreas, sendo elas: custos de mina, custos do negócio, custos corporativos e custos econômicos. O custo de mina seria determinado pelos processos desde a extração do minério, o beneficiamento e o carregamento em navios. São custos bastante determinantes para a competitividade do mercado mundial, por isso a importância de manter o menor gasto com os processos.

A otimização do processo da mistura do minério terá como objetivo minimização do custo de mina descrito anteriormente.

## II. MODELAGEM DO PROBLEMA

### A. Variáveis e parâmetros

A entrada do problema será as informações das características físicas e químicas dos minérios (TOFFOLO, 2009), assim como as demandas de qualidade do cliente.

O problema é modelado seguindo a notação:

$P$	Conjunto de $n$ pilhas;
$E$	Conjunto de $m$ elementos químicos analisados;
$C$	Porcentagem da concentração do elemento químico $i$ na pilha $j$ ;
$custo$	Conjunto de valores do custo de retirar uma unidade de massa de minério de cada pilha;
$qtd$	Massa disponível na pilha $i$ , em quilos;
$massa$	Valor da massa que o produto final deve possuir;
$Tmin$	Teor mínimo admissível para o composto químico $j$ no produto final (%);
$Tmax$	Teor máximo admissível para o composto químico $j$ no produto final (%);
$Tmeta$	Teor desejável para o composto químico $j$ no produto final (%);

### B. Representação da solução

A solução do problema estará em um formato de vetor  $s$ . Cada posição  $i$  do vetor representa, em quilos, a quantidade de minério a ser retirada da pilha  $i$  para formar o produto final.

A soma de todos os valores no vetor  $s$  deve ser igual a  $massa$  especificada pela demanda do cliente.

### C. Restrições

1) *Teor de concentração*: O produto resultante da blendagem deverá atender a teores de concentração dos elementos químicos no produto final. Os valores deverão estar dentro dos intervalos de limite superior e inferior dos compostos químicos.

Para fazer a verificação, são calculadas as concentrações de cada elemento no produto resultando, combinando os valores de entrada conhecidos de cada pilha com a solução. O valor de concentração é relativo para a massa final do produto.

$$concentracoes = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_i * C_{ij} / massa$$

O teor encontrado deve ser maior que o mínimo especificado, e menor que o máximo. Se esse for o caso, a solução é válida.

$$Tmin_i \leq concentracoes_i \leq Tmax_i \forall i \in E$$

2) *Massa das pilhas*: A soma dos valores de retirada de cada pilha deverá somar a uma  $massa$  específica da demanda do cliente. Além disso, pode ser retirada, de cada pilha  $i$ , 0 ou a quantidade máxima disponível de  $i$ .

$$\sum_{i=1}^n s_i = massa$$

### D. Função Objetivo

A função objetivo ( $fo$ ) será a minimização do custo de produção da solução final. Cada pilha  $i$  tem um custo  $c[i]$  por quilo retirado.

$$\min \sum_{i=1}^n c_i * s_i$$

### E. Vizinhança

Afim de explorar o espaço de busca, uma estrutura de vizinhança é definida. Essa estrutura  $V$  considera uma solução, duas pilhas  $i$  e  $j$ , e uma quantidade de  $x$  quilos de minério. A pilha  $i$  da solução deve conter mais que  $x$  quilos

$$s[i] \geq x$$

e a pilha  $j$  deve ter capacidade para atender a adição do valor  $x$

$$s[j] + x \leq qtd[j]$$

Basicamente,  $x$  quilos serão retirados da solução em  $i$  e adicionados em  $j$ .

## III. METODOLOGIA

A fim de resolver o problema de otimização apresentado, o método da subida da encosta é proposto. Uma abordagem de aceitação tardia é combinada como forma de encontrar soluções melhores. Essas características descrevem a heurística Late Acceptance Hill Climbing.

### A. LAHC

1) *Origem*: O método conhecido como Late Acceptance Hill Climbing, ou LAHC, foi proposto por Burke e Bykov, em 2008, em seu trabalho sobre tratamento do problema de agendamento de exames.

É descrito inicialmente em comparação à Busca Tabu que possui, assim como o LAHC, uma lista  $F$  de tamanho  $L$ . Enquanto a *Busca Tabu* guarda informações de movimentos proibidos, essa variação do Método da Subida armazena um histórico de valores de últimas funções objetivo.

Originalmente foi proposto da seguinte maneira: a cada iteração, um custo candidato é comparado com o último elemento da lista  $F$ . A solução é aceita seguindo o método da subida (*hill-climbing*).

Após a comparação e o método de aceitação, a nova solução corrente é inserida no início da lista para comparação futura e, correspondentemente, o último elemento de  $F$  é removido (BURKE e BYKOV, 2008, tradução nossa).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>No original: After the comparison and the acceptance procedure, the new current cost (...) is inserted into the beginning of the list (for later comparison), and correspondingly, the last element is removed from the list.

2) *Hill-Climbing*: Também conhecido como método da subida, ou subida na encosta, o Hill-Climbing tem como foco otimizar uma função objetivo. A subida local descreve o procedimento de aceitar uma nova solução se ela apresenta um valor de função objetivo melhor.

Busca local gulosa é uma forma de busca por método da subida onde é selecionado o movimento local que leva a uma maior melhora na função objetivo (SELMAN e Gomes, 2006, tradução nossa).<sup>2</sup>

Chatterjee (2020, tradução nossa) aponta que, devido a essa abordagem gulosa, o *Hill-Climbing* geralmente fica preso em ótimos locais. Para superar isso, o LAHC é proposto.<sup>3</sup>

3) *Funcionamento*: O *Late Acceptance Hill Climbing*, como seu nome já diz, propõe uma aceitação tardia da solução. Não estamos mais apenas comparando a solução vizinha com a solução corrente. O LAHC, por comparar com a *fo* de  $p$  iterações anteriores, tem a capacidade de aceitar soluções piores e, consequentemente, escapar de ótimos locais a procura de resultados ainda melhores.

O LAHC é um método iterativo que produz, a cada iteração, um candidato a ser comparado com a função objetivo presente na posição  $p$  da lista  $F$ . Os candidatos serão soluções geradas a partir de uma mutação, ou um movimento aleatório.

#### B. Construção inicial

O *Late Acceptance Hill Climbing* começa trabalhando em cima de uma solução inicial. O método de geração de solução escolhido foi de natureza aleatória.

---

#### Algorithm 1 Construção Aleatória de Solução

---

**Require:** massa requerida, *offset* e *range*

```

0: while  $i < nropilhas$  do
0:    $S_i \leftarrow 0$ 
0: end while
0: soma  $\leftarrow$  resto  $\leftarrow 0$ ;
0: while soma  $\leq$  massa do
0:    $p \leftarrow rand(nropilhas)$ 
0:   random  $\leftarrow rand(offset, range)$ 
0:   if  $S_p + random > qtd_p$  then
0:     go back
0:   else
0:     if soma + random  $>$  massa then
0:       resto = massa - soma
0:        $s_p \leftarrow s_p + resto$ 
0:       break
0:     end if
0:   end if
0:    $s_p \leftarrow s_p + random$ 
0:   soma  $\leftarrow$  soma + random
0: end while=0

```

---

<sup>2</sup>Greedy local search is a form of hill-climbing search where we select the local move that leads to the largest improvement of the objective function. Traditionally, one would terminate hill-climbing and greedy search methods when no local move could further improve the objective function.

<sup>3</sup>Because of this greedy approach, Hill climbing often gets stuck in local optima. To overcome this, LAHC is proposed.

Um valor de retirada aleatório era gerado a cada iteração com o auxílio de duas variáveis: *offset* e *range*. A primeira variável, *offset*, determina o limite inferior do número aleatório. A segunda variável, *range*, aponta o limite positivo que o número poderá atingir.

A cada iteração, uma pilha  $p$  é escolhida aleatoriamente e o valor de retirada *random* era somado no vetor de solução  $s$ . A restrição de quantidade de material disponível na pilha era verificada a cada atribuição. A construção chegava ao fim quando se atingia a massa desejada para o produto final.

#### C. LAHC

---

#### Algorithm 2 Late Acceptance Hill Climbing

---

**Require:** Solução inicial  $S$  e tamanho da lista  $l$

```

0:  $S^* \leftarrow S$ ;
0:  $S^* \leftarrow S$ ;
0:  $p \leftarrow r \leftarrow 0$ ;
0: while  $r \leq m$  do
0:    $S' \leftarrow vizinho\_aleatorio(S)$ ;
0:   if  $S'$  is not valid then
0:     go back
0:   end if
0:   if  $f(S') \leq f(S)$  ou  $f(S') \leq F_p$  then
0:     if  $f(S') \leq f(S)$  then
0:        $r \leftarrow 0$ 
0:     end if
0:      $S \leftarrow S'$ 
0:     if  $f(S) \leq f(S^*)$  then
0:        $S^* \leftarrow S$ 
0:     end if
0:   end if
0:    $F_p \leftarrow f(S)$ 
0:    $p \leftarrow (p + 1) \bmod l$ 
0:    $r \leftarrow p + 1$ 
0: end while=0

```

---

Dada a solução inicial, o LAHC age. Uma primeira passada pela lista  $F$  preenche todas as posições com o valor *fo* da função objetiva da solução gerada. O valor de distância até a meta aplicado o multiplicador foi adicionado à função objetivo.

O laço de repetição acontece até a variável  $r$  chegar ao valor da variável  $m$ . A cada iteração geramos um vizinho aleatório  $s'$  e as concentrações dos compostos químicos são calculadas em cima da solução encontrada. Se essa solução vizinha não infringir as restrições de teor inferior e superior de concentração, ela pode seguir com a análise. Sua função objetivo *fo'* é calculada, somada com a distância até a meta com o multiplicador *alpha*.

#### D. Avaliação da solução

Se *fo'* for melhor que o valor da função objetiva da solução corrente ou que o valor armazenado na posição  $p$  de  $F$ , houve alguma melhora. Se essa for a melhor solução encontrada até

o momento, ela é armazenada em  $s^*$  e o iterador  $r$  volta ao valor 0.

Avançamos no espaço de busca para a solução  $s'$  e armazenamos o valor da função objetivo encontrada na posição  $p$  de  $F$ . A variável  $r$  é incrementada, assim como  $p$ . A lista tem aspecto circular, ou seja, quando chega ao seu fim, retorna ao início. Isso faz com que a lista  $F$  possa ser atravessada diversas vezes.

Ao final do algoritmo, ou seja, ao final de  $m$  iterações sem atualização, a melhor solução encontrada  $s^*$  é retornada.

#### IV. EXPERIMENTOS

Para testar a aplicação do método proposto no problema de mistura de minério, dados de entrada foram retirados do material didático do professor Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza.

Tabela I  
DEMANDAS DE QUALIDADE

Elemento Químico(%)	Teor Mínimo Permitido	Meta	Teor Mínimo Permitido
Fe	44.5	47.0	49.5
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.27	0.32	0.37
P)	0.035	0.040	0.043
PPC	2.05	2.35	2.65
He	38	40	50

Tabela II  
CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E QUÍMICAS

Pilha	Fe (%)	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	Massa kg	Custo R\$/kg
01	52,64	0,52	0,084	4,48	45	1500	10,50
02	39,92	0,18	0,029	0,65	97	2000	12,50
03	47,19	0,50	0,050	2,52	52	1700	12,00
04	49,36	0,22	0,039	1,74	78	1450	10,00
05	43,94	0,46	0,032	2,36	41	1250	11,50
06	48,97	0,54	0,057	4,34	90	1890	11,00
07	47,46	0,20	0,047	5,07	9	1640	10,80
08	46,52	0,32	0,039	3,51	4	1124	11,20
09	56,09	0,95	0,059	4,10	80	1990	10,40
10	46,00	0,26	0,031	2,51	21	900	12,00
11	49,09	0,22	0,040	4,20	12	1540	10,30
12	49,77	0,20	0,047	4,81	12	1630	11,90
13	53,03	0,24	0,047	4,17	1	1320	12,30
14	52,96	0,29	0,052	4,81	1	1245	11,10
15	42,09	0,17	0,031	1,38	47	1859	12,10

#### V. CONCLUSÃO

A saída do método Late Acceptance Hill Climbing proposto é uma solução válida para o problema de mistura. A solução encontrada, representando a quantidade de minério retirada de cada pilha, é gravada em um arquivo texto.

A função objetivo final também é calculada e escrita no arquivo, junto com o valor da distância relativa até a meta desejada das concentrações dos compostos químicos.

Durante o procedimento LAHC, uma saída é gravada em um arquivo texto com o seguinte modelo:

Através dos experimentos podemos ver o LAHC aceitando soluções de piora e escapando ótimos locais. Rodando por um

Tabela III  
EXEMPLO DE SAÍDA

Pilha <i>i</i>	Solução <i>s</i>
1	70
2	0
3	300
...	...
m	s[m]

Tabela IV  
EXEMPLO DE SAÍDA

Tempo segundos	Iterador <i>r</i>	Função Objetivo <i>f<sub>o</sub></i>	Distância da meta
0.00000	1	76587.13	8.59
0.00000	2	76587.13	9.64
0.00000	3	76853.86	8.73
1.00000	1	76310.97	8.46
1.00000	2	76310.97	9.97
1.00000	3	76310.97	11.17
1.00000	4	77400.96	9.73
1.00000	1	76737.09	9.12

grande número de iterações, o algoritmo consegue vasculhar bem o espaço de busca em um período curto de tempo.

#### VI. REFERÊNCIAS

- [TOFFOLO, 2009] TOFFOLO, Tulio Angelo Machado. Otimização do fluxo de produtos de uma empresa mineradora. 2009. Acesso em: 18 de outubro de 2022.
- [IBM, 2021] IBM. IBM: Blending problems, 2021. Disponível em: <https://www.ibm.com/docs/en/icos/12.8.0.0?topic=programming-blending-problems>. Acesso em: 26 de outubro de 2022.
- [GROISARD, 2010] GROISARD, Jocelyn. Plotino e o problema da mistura. Archai. Brasília, DF, 2010. Acesso em: 18 de outubro de 2022.
- [PEREIRA, 2012] PEREIRA, Suzana de Avila Cortes. O mercado de minério de ferro. 2012. Acesso em: 26 de outubro de 2022.
- [NASCIMENTO, 2021] NASCIMENTO, Marília Gabriela Lemos. A Dinâmica do mercado do minério de ferro no comércio internacional. 2021. Acesso em: 26 de outubro de 2022.
- [CARVALHO, 2014] CARVALHO, P. S. L. de, et al. Minério de ferro. BNDES Setorial, Rio de Janeiro, n. 39, p. 197-233, mar. 2014. Acesso em: 18 de outubro de 2022.
- [SANTOS, EUZÉBIO, 2018] SANTOS, Mário Sérgio; EUZÉBIO, Thiago Antonio Melo. OTIMIZAÇÃO EM TEMPO REAL NA MINERAÇÃO DE FERRO: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E POSSÍVEIS APLICAÇÕES. Acesso em: 26 de outubro de 2022. Acesso em: 26 de outubro de 2022.
- [MARTINS, MILAGRES, BARCELLOS, 2020]
- [SELMAN, GOMES, 2006] SELMAN, Bart; GOMES, Carla P. Hill-climbing search. Encyclopedia of cognitive science, v. 81, p. 82, 2006. Acesso em: 18 de outubro de 2022.

[CHATTERJEE, 2020] B. Chatterjee, T. Bhattacharyya, K. K. Ghosh, P. K. Singh, Z. W. Geem and R. Sarkar, "Late Acceptance Hill Climbing Based Social Ski Driver Algorithm for Feature Selection," in IEEE Access, vol. 8, pp. 75393-75408, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.2988157. Acesso em: 18 de outubro de 2022.

[BURKE, 2008] BURKE, Edmund K. et al. A late acceptance strategy in hill-climbing for exam timetabling problems. In: PATAT 2008 Conference, Montreal, Canada. 2008. p. 1. Acesso em: 18 de outubro de 2022.

[WILKE, REIMER, 1977] Optimizing the short term production schedule for an open pit iron ore mining operation. Acesso em: 18 de outubro de 2022.

[CHANDA, DAGDELEN, 1995] Optimal blending of mine production using goal programming and interactive graphics systems. Acesso em: 18 de outubro de 2022.

[COSTA, 2005] Aplicações de técnicas de otimização a problemas de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto. Acesso em: 18 de outubro de 2022.