ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Fórmulas de Integração Numérica de Gauss

Exercício Programa 2 - MAP3121

Rafael Agra de Castro Motta	N° USP: 11807192
Thaís dos Santos Ferreira	N° USP: 11820513

SÃO PAULO

2022

SUMÁRIO

1. O PROBLEMA ESTUDADO

Esse exercício programa tem o intuito de calcular integrais duplas em regiões R do plano por fórmulas iteradas. Para isso, foi utilizado a fórmula de Gauss com n nós para a integração numérica.

Para realizar os testes, foram utilizados $n = 6,\ 8\ e\ 10$, os nós e os pesos fornecidos para o intervalo $[-\ 1, 1]$, que serão apresentados logo em seguida, e, para os demais intervalos, foi necessário realizar uma mudança de variável, detalhada a posteriori.

1.1. Fórmulas de Gauss

A fórmula geral de integração numérica para se aproximar a integral de uma função f de a até b é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j) + E_n(f)$$

Nas Fórmulas de Gauss os nós $x_j \in [a, b]$ e os pesos ω_j são determinados de modo que o erro $E(f) = 0$.

1.2. Mudança de Variável

É possível obter as fórmulas de Gauss para qualquer intervalo $[a, b]$, conhecendo as fórmulas de Gauss para o intervalo $[-\ 1, 1]$, usando mudança de variável. Sendo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Para realizar a mudança de variável, os pesos devem ser multiplicados por um fator de escala e os nós devem ser transportados do intervalo $[-\ 1, 1]$ para o intervalo $[a, b]$, resultando em :

$$x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Sendo assim, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

1.3. Integrais Duplas

Deseja-se calcular, em uma região R do plano, a integral:

$$I = \iint_R f(x, y)dx\, dy$$

Sendo que R:

$$\{(x, y) | a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}\ ou\ \{(x, y) | c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

Isso permite que a integral seja calculada por fórmulas interativas, como mostrado abaixo:

$$I = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

Usando fórmulas de Gauss com n nós, o valor acima pode ser aproximado como:

$$I = \sum_{i=1}^{n} u_i F(x_i)$$

sendo:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f(x_i, y_{ij})$$

sendo x_i e u_i são os nós e os pesos no intervalo $[a, b]$ e y_{ij} e v_{ij} são os nós e os pesos nos intervalos $[c(x_i), d(x_i)]$.

2. DADOS

Foram oferecidos, para cada n, os seguintes nós (x_j) e pesos (ω_j):

Para $n = 6$:

x_j	ω_j
0.2386191860831969086305017	0.4679139345726910473898703
0.6612093864662645136613996	0.3607615730481386075698335
0.9324695142031520278123016	0.1713244923791703450402961

Para $n = 8$:

x_j	ω_j
0.1834346424956498049394761	0.3626837833783619829651504
0.5255324099163289858177390	0.3137066458778872873379622
0.7966664774136267395915539	0.2223810344533744705443560
0.9602898564975362316835609	0.1012285362903762591525314

Por fim, para $n = 10$:

x_j	ω_j
0.1488743389816312108848260	0.2955242247147528701738930
0.4333953941292471907992659	0.2692667193099963550912269
0.6794095682990244062343274	0.2190863625159820439955349
0.8650633666889845107320967	0.1494513491505805931457763
0.9739065285171717200779640	0.0666713443086881375935688

Tais dados são verdadeiros para o intervalo $[-1, 1]$, de modo que os nós são simétricos em torno da origem e cada par de nós simétricos $(-x_j, x_j)$ tem o mesmo peso ω_j.

No exercício programa foi utilizada a função np.polynomial.legendre.legauss() do numpy para obter esses dados.

3. EXEMPLOS

Foram propostos 4 exemplos e deve-se imprimir, para cada n, o valor de n e os valores calculados das integrais.

3.1. Exemplo 1

No primeiro teste, foram calculados os volumes de um cubo de arestas 1 e de um tetraedro de vértices (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1), com resultados exatos, exceto por erros de arredondamento.

Os volumes foram calculados da seguinte forma:

a. Tetraedro

Sabendo que o tetraedro possui vértices A(0,0,0), B(0,0,0), C(0,0,0) e D (0,0,0), primeiro, para encontrar z em função de (x,y), foi necessário encontrar a equação do plano ABC, para isso foi realizado o seguinte cálculo:

$$\overline{AB} = (0, 1, -\ 1)$$

$$\overline{AC} = (1, 0, -\ 1)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

resultando em = (1,1,1).

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

sendo $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e $(x_0, y_0, z_0) = A$

$$d = 1$$

Logo, a equação que satisfaz o plano ABC é:

$$x + y + z = 1$$

Sendo assim, tem-se que:

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

Com isso, agora podemos encontrar o intervalo que satisfaz R. Sabendo que em R, z=0, temos que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1 - x$

Chegando em:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y\, dydx$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 1 - x - y\, dy \right] dx$$

$$\int_0^{1-x} 1 - x - y\, dy = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(x - 1)^2 dx$$

De posse disso, agora para calcular o volume, utilizando Fórmulas de Gauss, é necessário fazer a mudança de variável. Sendo assim:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left[\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1\right]^2 dt$$

Agora, para obter o volume, basta apenas calcular as Fórmulas de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i F(x_i)$$

Resultando, no programa, em:

Quando $n = 6$: 0.16666666666666663

Quando $n = 8$: 0.16666666666666669

Quando $n = 10$: 0.1666666666666666

b. Cubo

O volume do cubo foi calculado de maneira semelhante. Sendo os pontos no plano ABC, A = (1,1,1), B = (1,0,1), C = (0,1,1), tem-se que:

$$\overline{AB} = (0, -1, 0)$$

$$\overline{AC} = (-1, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

resultando em (0,0,1).

Sendo assim, temos que $z = f(x, y) = 1$

Chegando em:

$$\int_0^1 \int_0^1 1\, dydx$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 1dy \right] dx$$

$$\int_0^1 1\, dy \ = 1$$

$$\int_0^1 1\, dx$$

De posse disso, agora para calcular o volume, utilizando Fórmulas de Gauss é necessário fazer a mudança de variável. Sendo assim:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2} dt$$

Agora, para obter o volume, basta apenas calcular as Fórmulas de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i F(x_i)$$

Resultando,no programa, em:

Quando $n = 6$: 1

Quando $n = 8$: 1

Quando $n = 10$: 1

3.2. Exemplo 2

Já no segundo exemplo, foi dito que a área A da região no primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela curva $y = 1 - x^2$ pode ser obtida por:

$$A = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \right] dy = \frac{1}{2}.$$

De posse disso, ambas integrais foram calculadas numericamente da seguinte forma:

$$\int_{0}^{1-x^2} (\sqrt{1 - y})\, dy = \frac{-2x^3-2}{3} \Rightarrow \int_{0}^{1} (\frac{-2x^3-2}{3})\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\sqrt{1-y}} (\sqrt{1 - y})\, dx = -\frac{2(1-\sqrt{1-x}\,)^{\frac{2}{3}}-2}{3} \Rightarrow \int_{0}^{1} -\frac{2(1-\sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}-2}{3}\, dy = \frac{1}{2}$$

Pelo programa, temos:

Quando $n = 6$:

$1°\, integral = 0.6666666666666666$

$2°\, integral = 0.6670464379156138$

Quando $n = 8$:

$1°\, integral = 0.6666666666666665$

$2°\, integral = 0.6668355801001763$

Quando $n = 10$:

$1°\, integral = 0.6666666666666666$

$2°\, integral = 0.6667560429365088$

3.3. Exemplo 3

Considere a superfície descrita por $z = e^{\frac{y}{x}}$, $0.1 \le x \le 0.5$, $x^3 \le y \le x^2$. Calcule a sua área e o volume da região abaixo dela (a área de uma superfície descrita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in R$ é igual a:

$$\int\int_{R} \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dxdy$$

sendo:

$$f_x(x, y) = \frac{\delta}{\delta x} (e^{\frac{y}{x}}) = -\frac{y}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\delta}{\delta y} (e^{\frac{y}{x}}) = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}}$$

Temos que, a área é:

$$\int_{0,1}^{0,5} \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{(-\frac{y}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}})^2 + (\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}})^2 + 1} \, dxdy$$

Sendo assim, a área é calculada da seguinte forma:

$$\int_{0,1}^{0,5} \left[\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{(-\frac{y}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}})^2 + (\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}})^2 + 1} \, dx \right] dy$$

Resultando, no programa, em:

Quando $n = 6: 0.1054978824004979$

Quando $n = 8: 0.1054978824005199$

Quando $n = 10: 0.10549788240051994$

Já, para calcular o volume, temos:

$$\int_{0.5}^{0.1} \int_{x^2}^{x^3} e^{\frac{y}{x}} dydx$$

$$\int_{0.5}^{0.1} \left[\int_{x^2}^{x^3} e^{\frac{y}{x}} dy \right] dx$$

$$\int_{x^2}^{x^3} e^{\frac{y}{x}} dy = (e^{x} - e^{x^2}) \cdot x$$

$$\int_{0.5}^{0.1} (e^{x} - e^{x^2}) \cdot x \, dx$$

Aplicando a mudança de variável, temos:

$$\int_{-1}^{1} (e^{0.2t+0.3} - e^{0.04t+0.09}) \cdot (0.2t + 0.3) \cdot 0.2 \, dt$$

Agora, para obter o volume, basta apenas calcular as Fórmulas de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i F(x_i)$$

Resultando, no programa, em:

Quando $n = 6: 0.03330556611623718$

Quando $n = 8:\ 0.03330556611623206$

Quando $n = 10:\ 0.033305566116232074$

3.4. Exemplo 4

Por fim, no último exemplo, considerando uma região fechada R do plano xy e uma reta γ no mesmo plano que não intercepta o interior de R e sendo o volume V do sólido de revolução obtido da rotação da região R em torno de γ é igual a:

$$V = 2\pi \int\int_R d_\gamma(x, y)dxdy$$

onde $d_\gamma(x, y)$ é a distância do ponto (x, y) à reta γ. Sabendo disso, esta expressão foi utilizada para calcular o volume da calota esférica de altura $\frac{1}{4}$ da esfera de raio 1, e o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região, em torno do eixo y, delimitada por $x = 0$, $x = e^{-y^2}$, $y =- 1\ e\ y = 1$.

a. Calota esférica

Para calcular o volume da calota, primeiramente foi necessário projetar a calota no eixo xy, para encontrarmos a equação da circunferência, sendo essa:

$x^2 + (y + 0,75)^2 = 1$

Podendo assim definir os limites de integração, sendo esses:

$0 \leq x \leq \sqrt{1 - (y + 0,75)^2},\ 0 \leq y \leq 0,25$

Por fim, para definirmos nossa função $f(x, y)$, foi necessário encontrar a distância de qualquer ponto ao eixo y, resultando em x.

Sendo assim, temos a seguinte integral para calcular o volume da calota:

$$V = 2\pi \cdot \int_0^{0,25} \int_0^{\sqrt{(1-(y+0,75)^2}} x\ dxdy$$

$$V = 2\pi \cdot \int_{0}^{0,25} \left[\int_{0}^{\sqrt{(1-(y+0,75)^2}} x\,dx \right] dy$$

$$V = 2\pi \cdot \int_{0}^{0,25} -\ 0,5y^2 -\ 0,75y\ +\ 0,21875\ dy$$

Para calcularmos o volume é necessário realizar uma mudança de variável, essa mudança foi feita da seguinte forma:

$$\int_{-1}^{1} -\ 0.5\ \cdot\ (\frac{0.25t}{2} + \frac{0.25}{2})^2\ -\ 0.75\ \cdot\ (\frac{0.25t}{2} + \frac{0.25}{2})\ +\ 0.21875\ \ \cdot \frac{0.25}{2}\ dt$$

Agora, para obter o volume, basta apenas calcular as Fórmulas de Gauss:

$$V = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega_i F(x_i)$$

Resultando, no programa, em:

Quando $n = 6$: 0.1799870791119152

Quando $n = 8$: 0.17998707911191517

Quando $n = 10$: 0.1799870791119152

b. Sólido de revolução

Para o sólido de revolução, sabemos que o volume pode ser obtido pela seguinte integral:

$$V = 2\pi \int\int_{R} d_{\gamma}(x, y) dx dy$$

e está definido no intervalo $-\ 1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq e^{-y^2}$, temos:

$$V = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \left[\int_{0}^{e^{-y^2}} x\,dx \right] dy$$

$$\int_{0}^{e^{-y^2}} x\,dx = \frac{e^2 y^2}{2}$$

$$V = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \frac{e^{2}y^{2}}{2} dy$$

Agora, para obter o volume, basta apenas calcular as Fórmulas de Gauss:

$$V = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \omega_i F(x_i)$$

Resultando, no programa, em:

Quando $n = 6$: 3.7581650328967116

Quando $n = 8$: 3.7582492624394357

Quando $n = 10$: 3.7582496332093878

4. CONCLUSÃO

Esse exercício programa possibilitou o entendimento de Fórmulas de Integração Numérica de Gauss na prática e de forma computadorizada. Para a dupla, tal exercício foi extremamente enriquecedor para o aprendizado, uma vez que é crucial, para efetivar o conhecimento, aplicar, conforme demanda o cotidiano, o conteúdo visto em sala de aula.

O sucesso do programa efetiva o aprendizado da dupla sobre o tema, a qual teve que aprimorar tanto o conhecimento teórico quanto o conhecimento de programação para obter os resultados desejados.