Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Física Estatística Computacional

Projeto 2

Equações de Ondas - I

Rafael Fernando Gigante - **NºUSP** 12610500

15 de abril de 2023

INTRODUÇÃO

Consideremos a equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

no caso de uma corda. Temos que y é o deslocamento da corda em relação à sua forma em equilíbrio, x é a distância medida ao longo da corda, t é o tempo e c é uma constante que define a velocidade que a onda se propaga na corda.

Para discretizar a equação tratamos x e t como variáveis discretas com $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t$ $(i, n = 0, 1, 2, ...)$. Assim, escrevemos o deslocamento da corda como função de i e n na forma $y(i, n) \equiv y(x = i\Delta x, t = n\Delta t)$. Inserindo na equação (1), obtemos

$$\frac{y(i, n+1) + y(i, n-1) - 2y(i, n)}{(\Delta t)^2} \approx c^2 \left[\frac{y(i+1, n) + y(i-1, n) - 2y(i, n)}{(\Delta x)^2}\right] \tag{2}$$

De forma que podemos rearranjar (2) de forma a expressar $y(i, n+1)$ em termos dos valores de y em passos de tempo anteriores

$$y(i, n+1) = 2[1 - r^2]y(i, n) - y(i, n-1) + r^2[y(i+1, n) + y(i-1, n)] \tag{3}$$

onde $r \equiv c\Delta t/\Delta x$. Portanto, se conhecemos a configuração da corda em dois intervalos de tempo consecutivos $n - 1$ e n podemos calcular sua configuração no próximo intervalo $n + 1$. Nesse projeto assumimos que a configuração da corda em $t = 0$ é conhecida e denotada por $y_0(x)$, assumimos também que a corda é mantida nessa mesma configuração em tempos anteriores a $t = 0$. Para a realização dos cálculos temos que especificar as condições de contorno, neste projeto as extremidades da corda são tratadas como fixas, de modo que em uma corda de comprimento L temos $y(0, n) \equiv y(L/\Delta x, n) \equiv 0$.

1 TAREFA 1

Será feito um programa que calcule a propagação de ondas de velocidade c em um meio não dissipativo ou dispersivo de comprimento L o qual possui suas fronteiras fixas. Consideramos $L = 1m$, $c = 300m/s$ e a forma inicial da onda dada por

$$y(x, 0) = y_0(x) = exp[-(x - x_0)^2/\sigma^2] \tag{4}$$

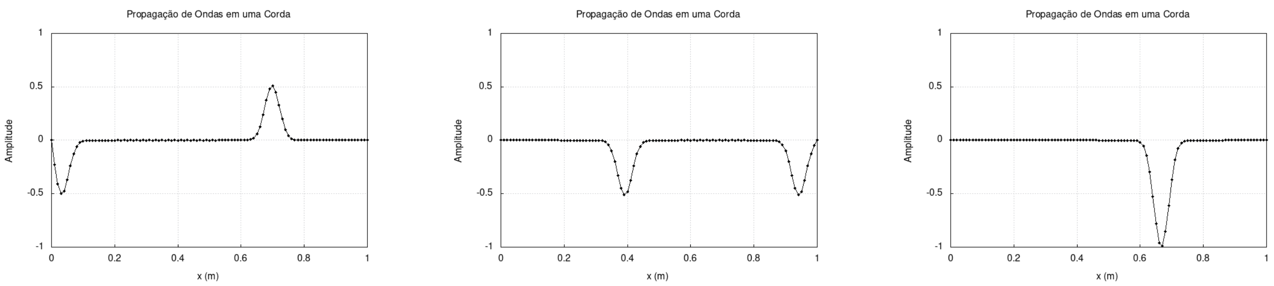
com $x_0 = L/3$ e $\sigma = L/30$.

(a) Caso r = 1

Para a realização da simulação o valor de Δt foi escolhido tal que $\Delta t = \Delta x/c$, já o valor de Δx foi escolhido foi $\Delta x = 0.01m$, pois com esse valor já é possível obter uma ótima precisão. Porém, caso quiséssemos obter uma melhor precisão, basta diminuir o valor de Δx cada vez mais. Para estes valores temos que o valor da constante r fica igual a 1, fazendo com que alguns termos da equação (3) se cancelem, dessa forma o erro propagado ao realizar os cálculos é minimizado. Dadas essas circunstâncias, temos que o pacote Gaussiano inicial mantém sua forma durante toda a simulação, sem ocorrer deformações durante a sua propagação pela corda.

Após os primeiros instantes de tempo, vemos que o pacote Gaussiano se divide em dois pulsos de mesmo formato que se propagam em direções opostas ao longo da corda. Ao alcançar uma das extremidades da corda vemos que o pulso é refletido, porém o processo de reflexão inverte o pulso de modo que a amplitude dos deslocamentos se torna negativa. Após cada onda se deslocar uma distância L, vemos que as duas ondas invertidas se encontram em $x = L/2$ e se sobrepõem, restaurando o pulso original com a amplitude invertida.

Se o pacote Gaussiano se restaura com a amplitude invertida após os pulsos se deslocarem uma distância L, então após um deslocamento de uma distância 2L teremos novamente a configuração inicial. Temos que $\Delta t = r\Delta x/c$, para a onda restaurar a sua posição inicial ela leva um tempo $n\Delta t = 2L/c$, então $nr\Delta x/c = 2L/c \Rightarrow n = 2L/r\Delta x$, como $r = 1$, $\Delta x = 0.01m$ e $L = 1m$ chegamos em $n = 200$. Portanto, após 200 iterações no tempo teremos novamente nossa configuração inicial. Na figura 1 é possível observar a configuração da corda para alguns instantes de tempo, além disso na pasta de entrega do trabalho pode ser encontrado um arquivo chamado ”tarefa-1-r=1.gif”, o qual é uma animação da propagação da onda para 200 passos temporais.



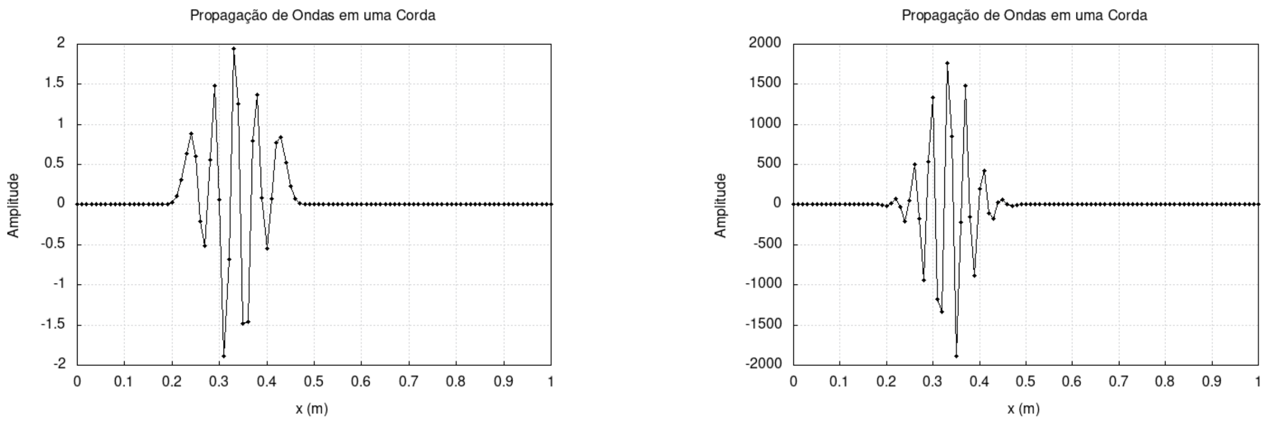
(a) $n = 36$ (b) $n = 72$ (c) $n = 100$

Figura 1: Propagação de uma onda em uma corda em diferentes instantes de tempo para r = 1

(b) Caso r = 2

Mantendo o valor de $\Delta x = 0.01m$, para obter um valor de $r = 2$ temos que dobrar o tempo do caso anterior, portanto $\Delta t = 2\Delta x/c$. Para esse caso o nosso algoritmo é instável, pois nele o pacote Gaussiano cresce rapidamente com o tempo, fazendo com que o deslocamento da corda divirja. Tal comportamento ocorre pois nosso algoritmo é incapaz de propagar adequadamente uma perturbação que se mova mais rápido do que um elemento espacial por elemento de passo temporal e nesse caso temos que $\Delta x/\Delta t < c$.

Na figura 2 é possível observar o comportamento discutido para dois instantes de tempo. Pode ser encontrado uma animação que ilustra o comportamento aqui discutido com o nome ”tarefa-1-r=2.gif”.



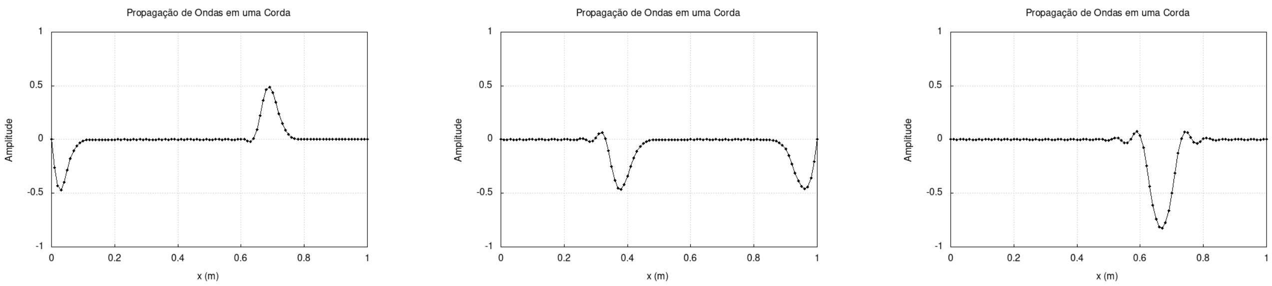
(a) $n = 4$ (b) $n = 8$

Figura 2: Propagação de uma onda em uma corda em diferentes instantes de tempo para r = 2

(c) Caso r = 0.25

Mantendo o valor de $\Delta x = 0.01m$, para obter um valor de $r = 0.25$ teremos um valor de tempo 4 vezes menor do que no caso (a), portanto $\Delta t = \Delta x/4c$. Neste caso o algoritmo permanece estável, porém temos que os termos que se cancelavam quando $r = 1$ agora são considerados para o cálculo. Com isso, nosso algoritmo ainda consegue transmitir e refletir os pulsos nas extremidades da corda, porém com o passar das iterações conseguimos ver algumas pontinhas surgindo na corda devido aos erros numéricos. Além disso, é possível notar que a onda se propaga bem mais devagar na corda. Podemos ver isso pensando que ao invés de dividirmos o tempo Δt do caso (a) por 4, mantemos ele fixo e escrevemos $c = \Delta x/4\Delta t \Rightarrow c = 300/4 = 75m/s$, ou seja, chegamos que a velocidade de propagação da onda deve ser quatro vezes menor, por isso ela se propaga mais lentamente. Porém, pode-se também pensar que pelo intervalo de tempo ser menor é preciso um número maior de iterações no tempo para se obter o mesmo deslocamento.

Na figura 3 podemos ver que para obter-se as mesmas configurações que na figura 1 precisamos de um n quatro vezes maior. Também pode-se observar as pontinhas originadas de erros numéricos crescerem conforme o número de iterações no tempo. A animação desse caso pode ser vista no arquivo ”tarefa-1-r=025.gif”



(a) $n = 144$ (b) $n = 288$ (c) $n = 400$

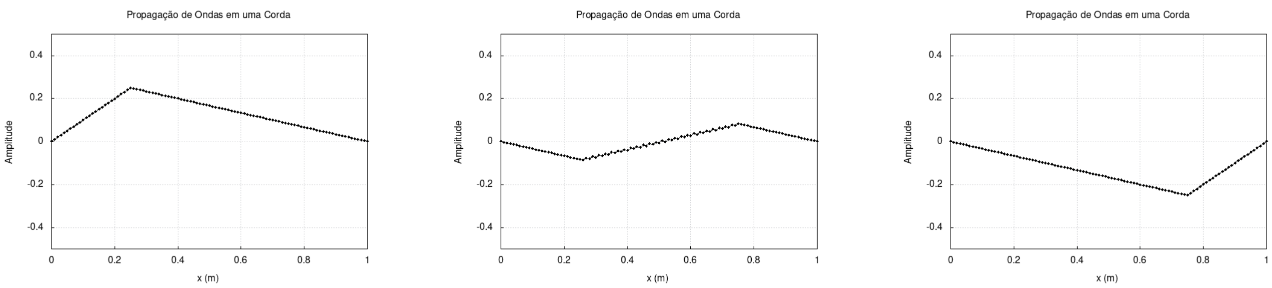
Figura 3: Propagação de uma onda em uma corda em diferentes instantes de tempo para r = 0.25

2 TAREFA 2

Nesta tarefa realizaremos o mesmo procedimento que na anterior, no entanto agora o perfil da onda inicial é descrito por uma corda de violão dedilhada, que pode ser escrito como a seguinte função

$$y(x,0) = y_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq L/4 \\ L/3 - (L/3)x & \text{se } L/4 < x \leq L \end{cases} \tag{5}$$

Vemos que essa onda se propaga seguindo o envelope formado pelo paralelogramo formado pela forma inicial da onda e pela sua imagem espelhada invertida (Figura 4). Como utilizamos $r = 1$ não há deformações no formato da onda. A onda nesse caso não se divide, portanto não há interferências.



(a) $n = 0$ (b) $n = 50$ (c) $n = 100$

Figura 4: Propagação de uma onda em uma corda de violão dedilhada