

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Física Estatística Computacional

Projeto 3

Equações de Ondas II - Análise de Fourier

Rafael Fernando Gigante - **NºUSP** 12610500

27 de abril de 2023

ANÁLISE ESPECTRAL

(a) Pacote Gaussiano inicial em $x_0 = L/2$

Inicialmente, consideremos a mesma corda do Projeto 2 com as extremidades fixas. Consideremos também o seguinte pacote gaussiano inicial, localizado no meio da corda.

$$y(x, 0) = y_0(x) = \exp[-(x - x_0)^2/\sigma^2], \quad \sigma = L/30. \quad (1)$$

Utilizando o programa de propagação realizado também no projeto 2, armazenamos o resultado de $y(L/4, t)$ para a propagação do pacote descrito acima para vários instantes de tempos, de modo que o resultado é o gráfico ilustrado na figura 1 (a). Nós vemos uma sequência de pulsos com sinais alternados devido a inversão da onda ao ser refletida por uma das extremidades.

O sinal obtido pode ser decomposto em suas componentes de Fourier calculando-se devidamente sua transformada utilizando o código elaborado no projeto 1. Uma forma de visualizar os resultados é considerar o espectro de potências, ou seja, para cada frequência associamos a soma dos quadrados das componentes de Fourier e plotamos este valor em função da frequência. O espectro de potências calculado para o sinal mencionado pode ser visualizado na figura 1 (b).

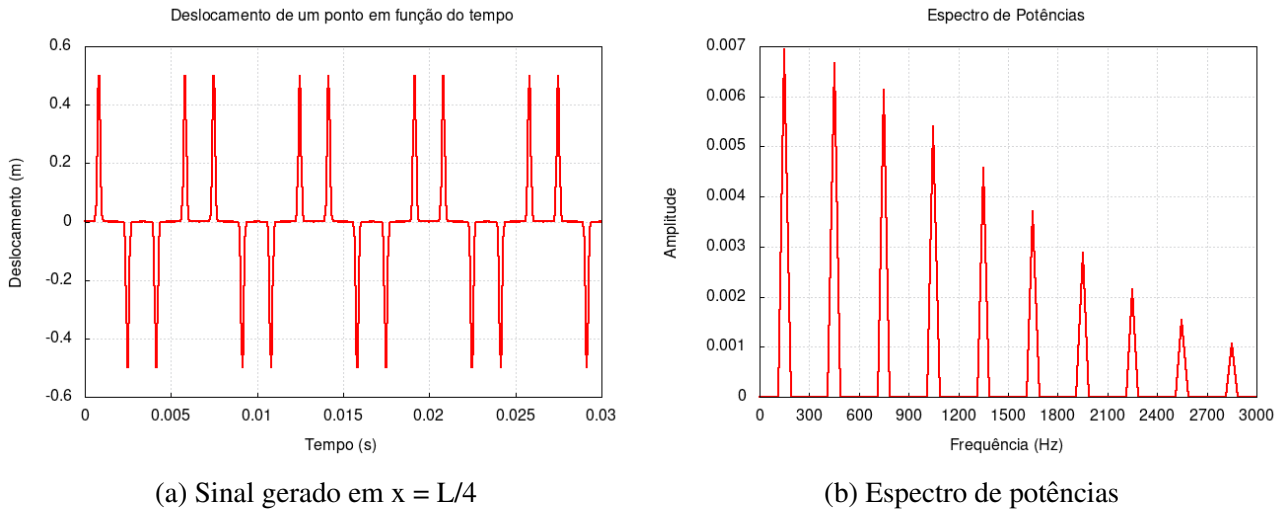


Figura 1: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/2$

Os picos observados podem ser entendidos em termos das ondas estacionárias em uma corda com as extremidades fixas. Os padrões de ondas estacionárias em uma corda só podem ser observados em determinadas frequências de vibração, que se relacionam com o comprimento de onda por $f = c/\lambda$. Os comprimentos de onda que nos permitem obter ondas estacionárias são dados por $\lambda_n = 2L/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, de modo que as possíveis frequências são dadas por $f_n = nc/2L$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Na figura 2 é possível observar algumas dessas frequências para uma corda, onde o movi-

mento de cada modo é descrito por

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Os modos normais podem ser considerados componentes espaciais de Fourier do movimento de uma corda. Dessa forma, qualquer movimento na corda pode ser descrito como a soma desses modos, inclusive o pacote gaussiano inicial.

Para os parâmetros da simulação, os valores das frequências que geram ondas estacionárias são $f_n = n(300)/2(1) = 150n \text{ Hz}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, portanto os picos observados no espectro de potências devem ser múltiplos de 150. Conseguimos ver picos em frequências de 150, 450, 750 Hz, etc., no entanto as frequências de 300, 600, 900 Hz, etc. não possuem nenhum pico. Isso ocorre pela forma que definimos nosso pacote gaussiano, consideramos que ele se inicia no meio da corda e então se propaga. Assim, os únicos modos normais que devem contribuir para a sua formação são aqueles que não se anulam no meio da corda. Aplicando $x = L/2$ na equação (2) obtemos $y_n(L/2) = \sin(n\pi/2)$, portanto para valores de n pares existe um nó no centro da corda, ou seja, a amplitude deste ponto é nula durante todo o movimento. Com isso, percebemos que os picos ausentes na figura 1 (b) são justamente aqueles que são múltiplos pares de nossa frequência fundamental $f_1 = 150 \text{ Hz}$. Dessa forma, as únicas ondas estacionárias que contribuem para a formação do pacote gaussiano inicial centrado no meio da corda são aquelas cujo o índice n é ímpar.

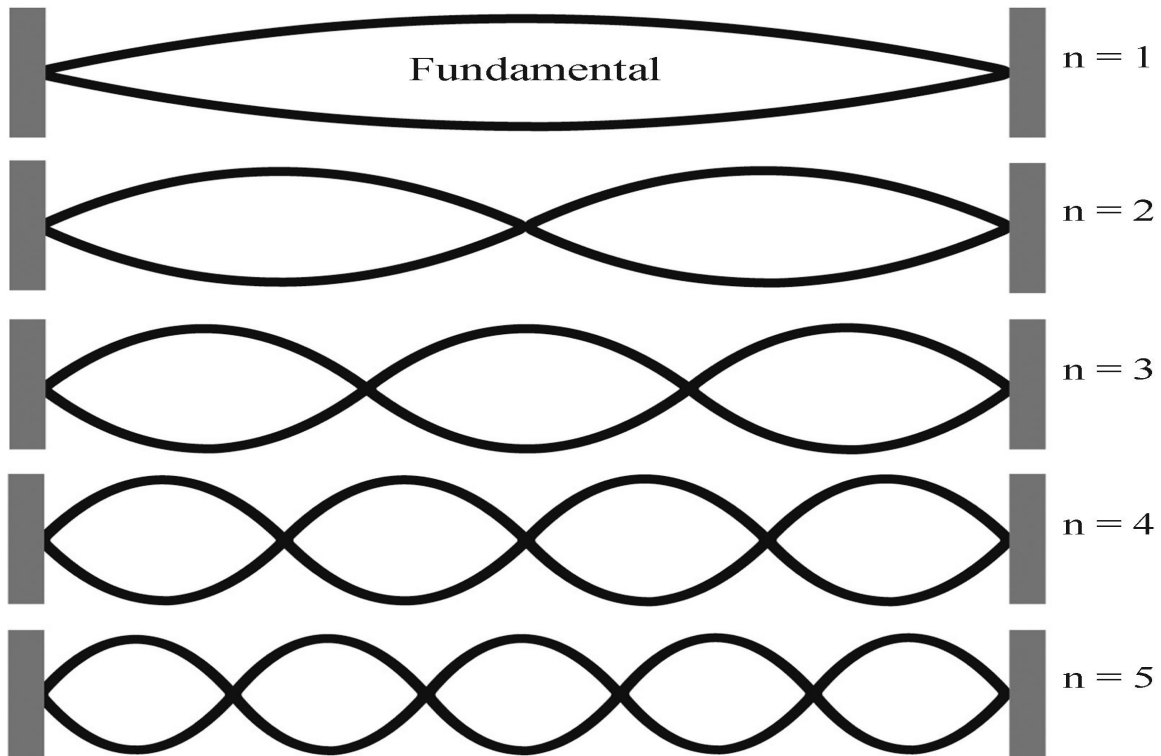


Figura 2: Modos normais de vibração de uma corda com extremidades fixas.

(b) Pacote Gaussiano inicial em $x_0 = L/4$

Neste caso temos o pacote gaussiano deslocado para o ponto $x_0 = L/4$ da corda. Como nenhum outro parâmetro do programa foi alterado, as frequências fundamentais devem permanecer as mesmas, resta agora apenas analisar quais modos são diferentes de zero no ponto em questão.

Pela equação (2), vemos que o movimento dos modos normais para $x = L/4$ são dados por $y_n(L/4) = \sin(n\pi/4)$. Vemos que os modos cujo índice n é múltiplo de 4 possuem um nó no ponto que estamos analisando, portanto suas amplitudes no espectro de potências devem ser nulas.

Pelo gráfico da figura 3 (b) vemos exatamente o comportamento previsto, havendo picos nas frequências 150, 300, 450, 750 Hz, etc. e uma amplitude nula nas frequências 600, 1200, 1600 Hz, etc..

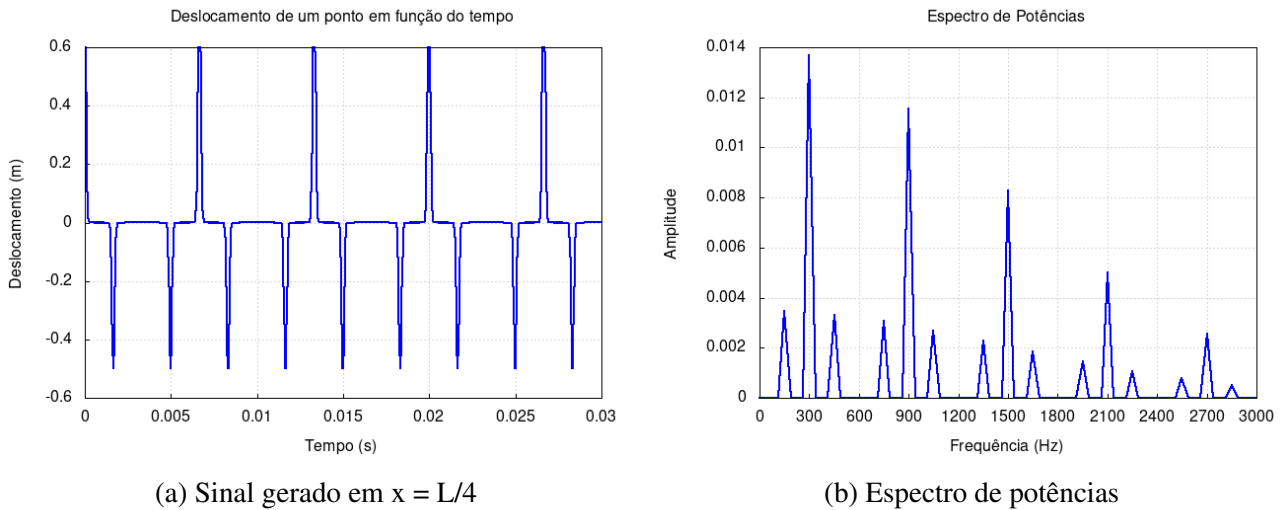


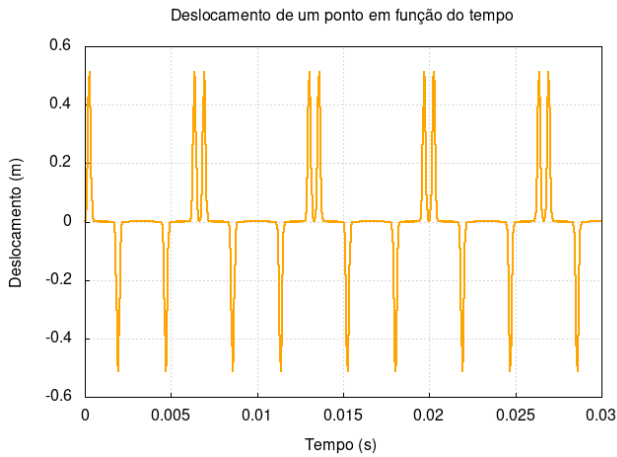
Figura 3: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/4$

(c) Pacote Gaussiano inicial em $x_0 = L/3$

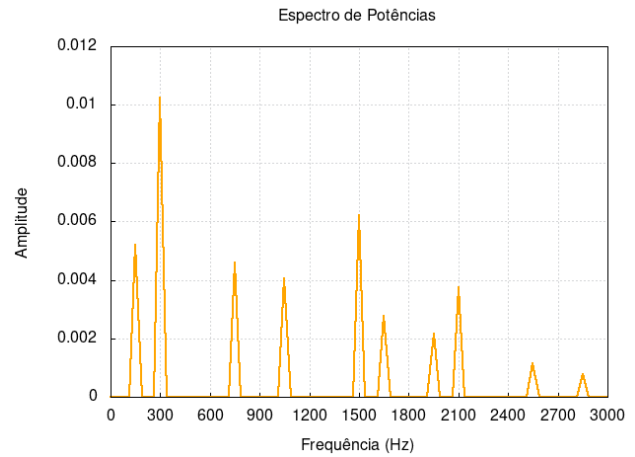
Para este caso temos o pacote gaussiano deslocado para o ponto $x_0 = L/3$ da corda. Novamente, as frequências fundamentais devem permanecer as mesmas, restando apenas analisar quais modos são diferentes de zero no ponto a ser analisado.

Pela equação (2), vemos que o movimento dos modos normais para $x = L/3$ são dados por $y_n(L/3) = \sin(n\pi/3)$. Portanto, os modos nos quais o índice n é múltiplo de 3 são nós e devem ter amplitude nula.

De fato, observamos a ausência de picos nas frequências 450, 900, 1350 Hz, etc., porém notamos também a ausência dos modos múltiplos de 4, como 600, 1200, 1800 Hz, etc. Então, nossa teoria está errada? Não, pois existe mais um detalhe que até o momento passou despercebido, não estávamos considerando a posição na qual coletamos o sinal. Tomamos o ponto $x = L/4$ como referência para



(a) Sinal gerado em $x = L/4$



(b) Espectro de potências

Figura 4: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/3$

coletar o sinal gerado pela propagação da onda, então ao analisar o espectro de potências devemos levar isso em conta.

Temos que os modos normais cujo índice n é múltiplo de 3 realmente não fazem parte da formação do pacote gaussiano em $x = L/3$. E quanto aos modos múltiplos de 4? Bem, eles estão lá, porém no ponto em que estamos recebendo o sinal é justamente um nó dessas ondas. Então é óbvio que as amplitudes desses modos devem ser nulas se estamos posicionados justamente em um nó. Podemos ver isso ao mudamos o ponto em que estamos recebendo o sinal para $x = L/3$, coincidindo com o pacote gaussiano. Ainda vemos a ausência dos picos em 450, 900, 1350 Hz, etc., porém os picos em 600, 1200, 1800 Hz, etc., antes desaparecidos, agora estão presentes em nosso espectro.

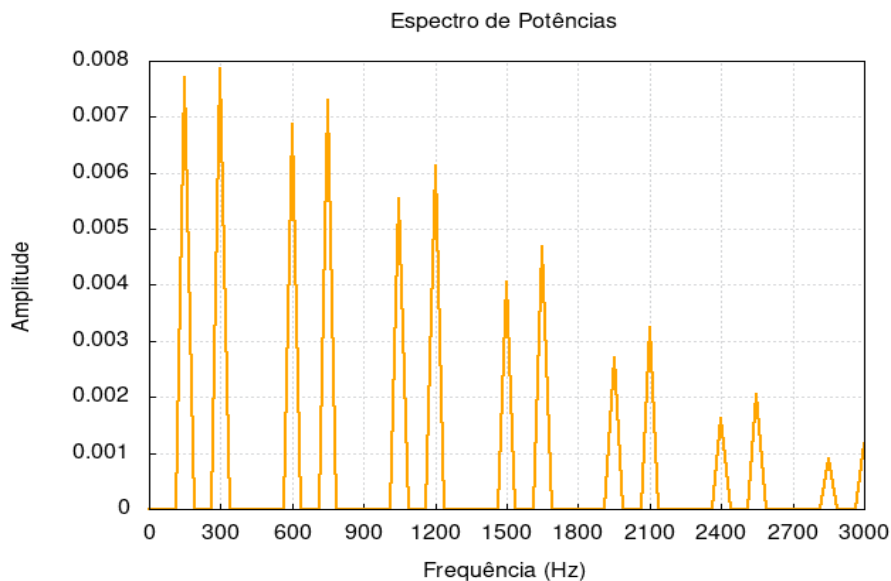


Figura 5: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/3$ analisando o ponto $x = L/3$

(d) Pacote Gaussiano inicial em $x_0 = L/20$

Deslocando o pacote gaussiano para o ponto $x_0 = L/20$ da corda e observando o sinal recebido em $y(L/4, t)$ temos que, pela equação (2), os modos normais que possuem um nó na mesma posição que o pacote gaussiano são aqueles cujo n é múltiplo de 20. Portanto, as frequências 3000, 6000 Hz, etc. estarão ausentes. Porém, como discutido no item anterior, os modos normais que possuem um nó no ponto que estamos observando ($x = L/4$) também estarão ausentes.

Portanto, nesse caso os modos normais múltiplos de 4 e de 20 deverão ter amplitudes nulas, conforme observado no espectro de potências.

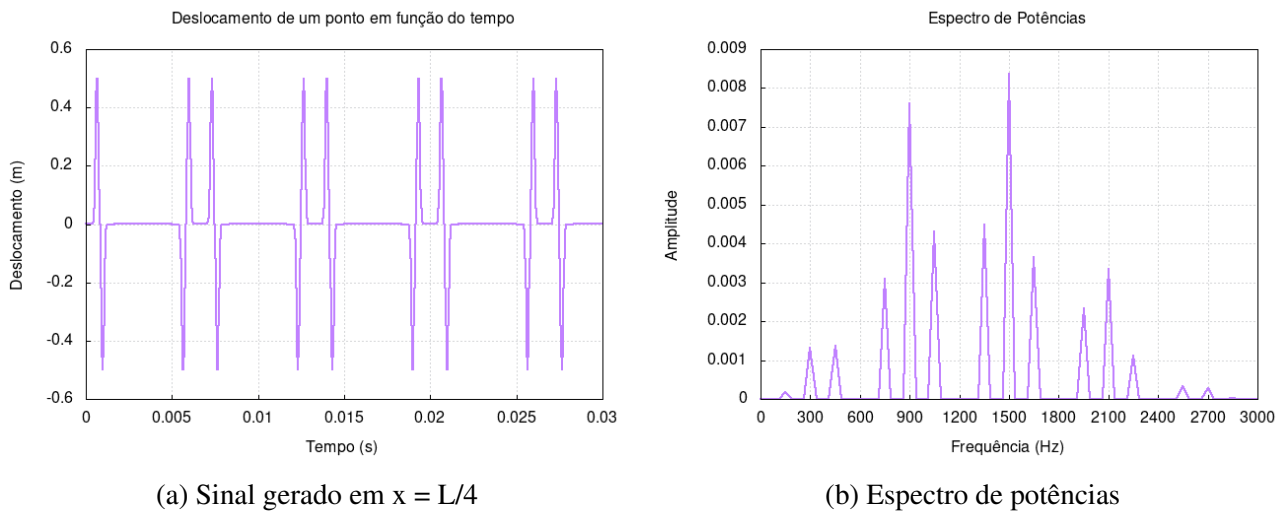


Figura 6: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/20$

CORDA COM UMA EXTREMIDADE LIVRE

Nesta tarefa retornamos ao problema do projeto 2 para a propagação de ondas em uma corda, porém agora mudaremos as condições de contorno, onde uma extremidade é mantida fixa ($x = 0$) enquanto a outra ($x = L$) é livre. Para isso as condições que aplicamos são $y(0, t) = 0$ e $y(L, t) = y((i - 1)dx, t)$, $\forall t$. O restante dos parâmetros permanecem constantes. Na figura 7 é possível observar a propagação de um pacote gaussiano localizado no centro da corda neste caso.

Agora, para a realização do espectro de potências tomaremos novamente o ponto $y(L/4, t)$ como referência para obter o sinal. O sinal e o seu respectivo espectro de potências podem ser visualizados na figura 8.

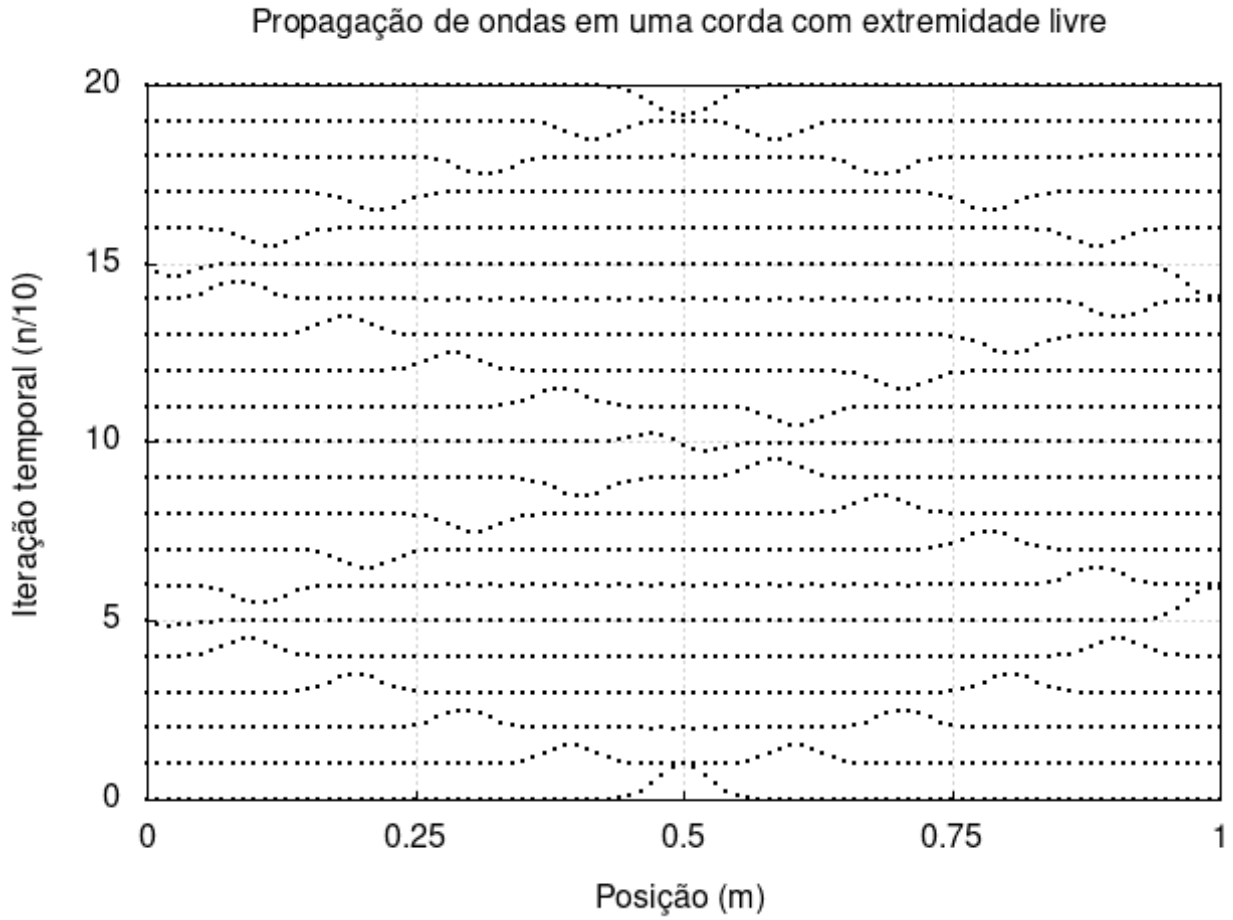


Figura 7: Evolução da onda em uma corda com uma extremidade livre com tempo.

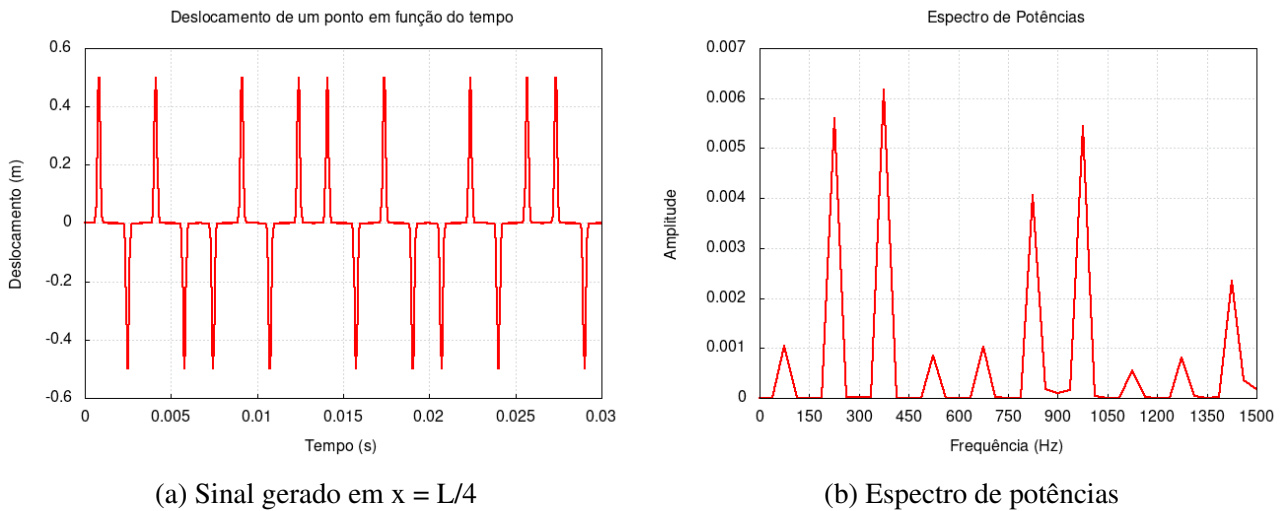


Figura 8: Análise espectral para o pacote gaussiano em $x_0 = L/2$

Aqui, para realizarmos a análise desse caso precisamos fazer um adendo. Não podemos utilizar as mesmas ondas estacionárias citadas anteriormente na equação (2) com $\lambda_n = 2L/n$, isso pois

estas não satisfazem a nova condição de contorno imposta em $x = L$. Para que possamos utilizar ondas estacionárias para descrever o pacote gaussiano elas precisam satisfazer que em $x = L$ elas tenham valor ± 1 . Os comprimentos de onda que satisfazem essa condição são dados por $\lambda_n = 4L/n$, $n = 1, 3, 5, \dots$, notando que os n pares não aparecem, pois estes nos fazem retornar ao λ_n anterior que possui um nó no ponto L . Dessa forma, o movimento desses modos são descritos pela seguinte equação

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3)$$

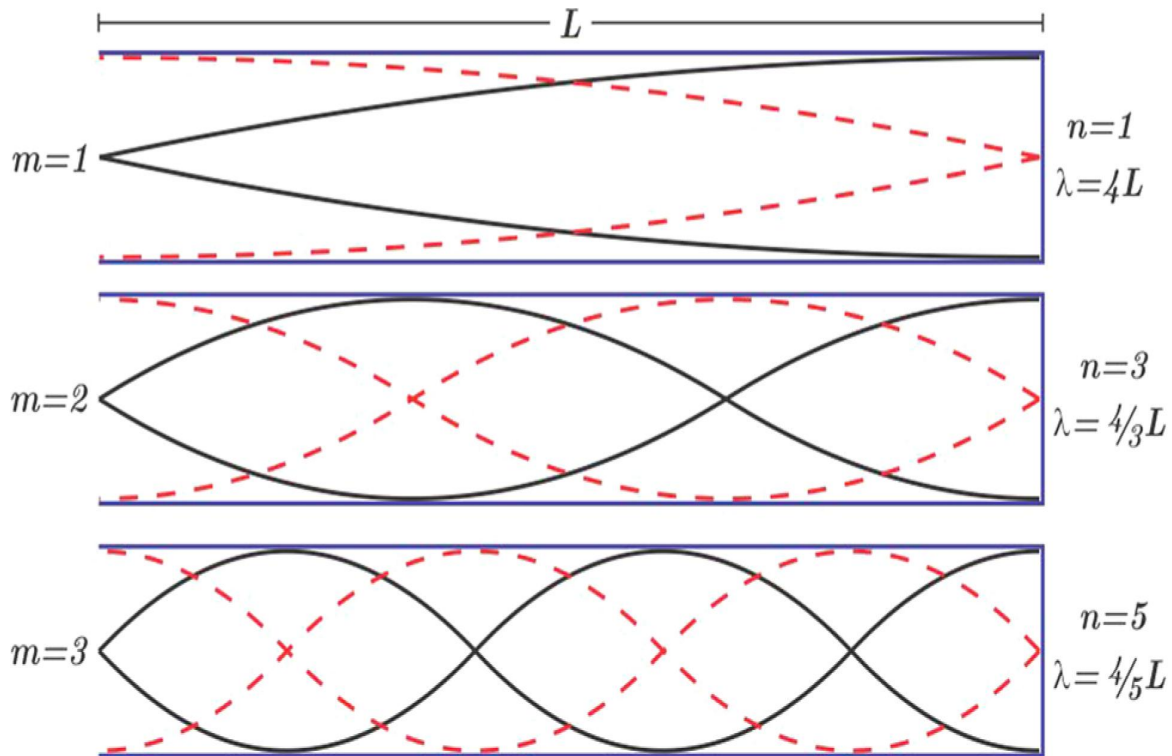


Figura 9: Modos normais de vibração de uma corda com uma extremidade livre (Análogo à um tubo com uma extremidade fechada).

Com esta adaptação podemos, finalmente, analisar o espectro de potências obtido. As frequências fundamentais são dadas por $f_n = c/\lambda_n = nc/4L$, $n = 1, 3, 5$, de forma que ao aplicarmos os parâmetros do nosso problema obtemos que as frequências são $f_n = 75n \text{ Hz}$, $n = 1, 3, 5$. Observando o espectro de potências (Figura 8 (b)) conseguimos observar justamente que as frequências fundamentais possuem picos expressivos, enquanto as frequências que estariam relacionadas a um n par são nulas ou estão praticamente suprimidas.

Para testar nossas conclusões, soltaremos o pacote gaussiano agora no ponto $x = 2L/5$ onde, pela equação (3), esse é um ponto de nó para os modos que são múltiplos de 5. Portanto, não deverá ser surpresa para nós se estiverem faltando as frequências 375, 750, 1125 Hz, etc. De fato, ao observar o espectro de potências (Figura 10) para esse caso obtemos exatamente o comportamento esperado.

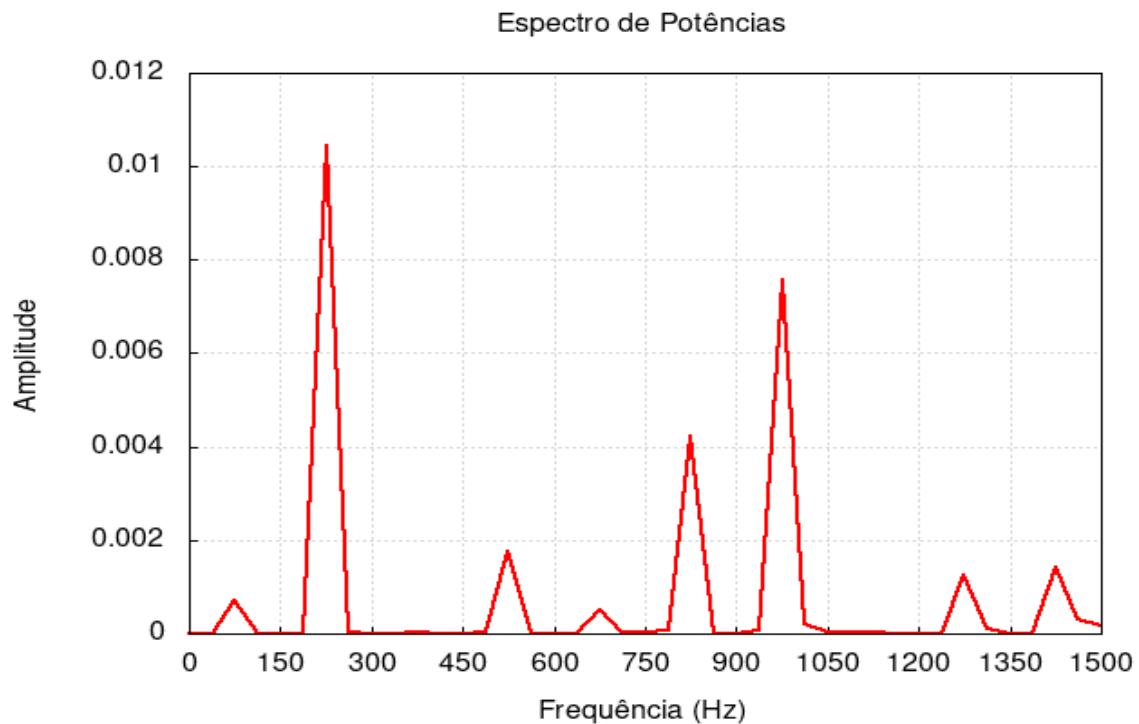


Figura 10: Espectro de potências para o pacote iniciado em $x_0 = 2L/5$.

APÊNDICE

(a) Código para coletar os resultados da propagação da onda em um ponto

```

1 program corda_extremidades_fixas
2     implicit none
3     integer :: i, j, x, xo
4     real(8), parameter :: dx = 0.01, c = 300.d0, L = 1.d0
5     real(8) :: dt, r
6     real(8), dimension(0:int(L/dx)) :: yp, yc, yn, Yo !previous, current and
next
7
8     open(1, file='sinal.out')
9
10    dt = (dx / c)
11    r = c / (dx / dt)
12
13    write(*,*) "Posi  o na corda para pegar o sinal (0 a 100) // Posi  o do
pacote gaussiano (0 a 100)"
14    read(*,*) x, xo
15
16
17    !Pacote gaussiano

```

```

18  do i = 0, int(L / dx)
19      if (i == 0 .or. i == int(L / dx)) then
20          Yo(i) = 0
21      else
22          Yo(i) = exp(- ((i * dx - real(xo/100.d0)) ** 2) / (L / 30) ** 2)
23      end if
24  end do
25
26  write(1,*) 0, Yo(x)
27
28  yp = Yo
29  yc = Yo
30
31  do j = 1, 1000
32      do i = 0, int(L / dx)
33          if (i == 0 .or. i == int(L / dx)) then
34              yn(i) = 0
35          else
36              yn(i) = (2 * (1 - (r ** 2)) * yc(i)) + ((r ** 2) * (yc(i + 1) + yc(i
- 1))) - yp(i)
37          end if
38      end do
39      yp = yc
40      yc = yn
41      write(1,*) (j * dt), yn(x)
42  end do
43 end program corda_extremidades_fixas

```

(b) Código para fazer o espectro de potências do sinal recebido

```

1 program transformada_de_fourier
2     implicit none
3     integer :: N, j, k
4     real(8) :: pi = acos(-1.0d0), dt, aux
5     complex(8) :: i = (0.0d0, 1.0d0), yy
6     complex(8), dimension(0:800) :: Y_k
7     real(8), dimension(0:800) :: y_j
8
9     N = 800
10    dt = 0.01d0 / 300.d0
11
12    open(1, file='sinal.out', status='old')
13    open(4, file='espectro.out')
14
15    read(1,*) (aux, y_j(j), j=0, (N-1))
16

```

```

17 !Espectro de pot ncias
18 do k=0, (N/2 -1)
19     yy = 0.d0
20     do j=0, (N-1)
21         yy = yy + y_j(j) * exp((2.0d0 * pi * i * j * k) / N)
22     end do
23     Y_k(k) = yy * 2.d0/N
24     write(4,*) (k / (N * dt)), ((real(Y_k(k)) ** 2) + (aimag(Y_k(k)) ** 2))
25 end do
26 end program transformada_de_fourier

```

(c) Código para coletar os resultados da propagação da onda em um ponto para o caso da corda com extremidade livre

```

1 program corda_extremidade_livre
2     implicit none
3     integer :: i, j, x, xo
4     real(8), parameter :: dx = 0.01, c = 300.d0, L = 1.d0
5     real(8) :: dt, r
6     real(8), dimension(0:int(L/dx)) :: yp, yc, yn, Yo !previous, current and
next
7
8     open(1, file='sinal.out')
9
10    dt = (dx / c)
11    r = c / (dx / dt)
12
13    write(*,*) "Posi o na corda para pegar o sinal (0 a 100) // Posi o do
pacote gaussiano (0 a 100)"
14    read(*,*) x, xo
15
16
17    !Pacote gaussiano
18    do i = 0, int(L / dx)
19        if (i == 0) then
20            Yo(i) = 0
21        else if (i == int(L/dx) ) then
22            Yo(i) = Yo(i - 1)
23        else
24            Yo(i) = exp(- ((i * dx - real(xo/100.d0)) ** 2) / (L / 30) ** 2)
25        end if
26    end do
27
28    write(1,*) 0, Yo(x)
29
30    yp = Yo

```

```

31  yc = Yo
32
33  do j = 1, 1000
34      do i = 0, int(L / dx)
35          if (i == 0) then
36              yn(i) = 0
37          else if (i == int(L/dx) ) then
38              yn(i) = yn(i-1)
39          else
40              yn(i) = (2 * (1 - (r ** 2)) * yc(i)) + ((r ** 2) * (yc(i + 1) + yc(i
- 1))) - yp(i)
41          end if
42      end do
43      yp = yc
44      yc = yn
45      write(1,*) (j * dt), yn(x)
46  end do
47 end program corda_extremidade_livre

```