

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Rafael Fernando Gigante

Relatório parcial do Programa Unificado de Bolsas (PUB)
2023-2024

São Carlos
2024

RAFAEL FERNANDO GIGANTE

Tendências e modas: a abordagem de modelos baseados em
agentes

Relatório apresentado à Universidade de São
Paulo referente ao Programa Unificado de Bol-
sas (PUB-USP).

Código do Projeto: 3116

Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

São Carlos

2024

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	OBJETIVOS	4
3	METODOLOGIA	5
4	DESENVOLVIMENTO DO PROJETO	6
4.1	Um modelo para Cascatas Informacionais	6
4.1.1	Formulando o modelo	6
4.1.2	Tomadas de decisões sequenciais e Cascatas Informacionais	8
4.1.3	Conclusões sobre as Cascatas Informacionais	10
4.2	Um modelo para a dinâmica de tendências e modas	11
4.2.1	Definição do modelo	11
4.2.2	Características globais do modelo	13
4.2.3	Variação dos parâmetros iniciais	15
5	CONCLUSÃO	19
	REFERÊNCIAS	20

1 INTRODUÇÃO

O filósofo Machiavelli (2005) escreveu: "Os homens trilham quase sempre estradas já percorridas. Um homem prudente deve assim escolher os caminhos já percorridos pelos grandes homens e imitá-los". Essa propensão a imitar é presumivelmente um mecanismo evolutivo profundamente enraizado, o qual promoveu a sobrevivência de milhares gerações ao permitir que indivíduos tomem vantagem do conhecimento já adquirido por outros.

A causa mais simples desse comportamento convergente é que indivíduos frequentemente enfrentam problemas de decisões semelhantes, nos quais as pessoas possuem informações semelhantes e precisam tomar decisões similares. Nesse caso, os indivíduos tomam como base as ações daqueles ao seu redor para realizarem decisões semelhantes. Independente se essa é uma boa ou má estratégia, pelo menos é garantido que o indivíduo não irá performar pior do que a maioria daqueles que o cerca.

Esse processo de adoção generalizada de uma determinada decisão é referido como uma cascata informacional (BIKHCHANDANI; HIRSHLEIFER; WELCH, 1992; BIKHCHANDANI; HIRSHLEIFER; WELCH, 1998). Nesse caso, é ótimo para um indivíduo ignorar sua própria informação e copiar a ação de seus predecessores, causando o espalhamento de uma decisão por toda uma população de forma brusca. O fenômeno de cascata informacional está fortemente ligado ao conformismo social, que decorre da necessidade fundamental das pessoas de se encaixarem como parte de um grupo social. O conformismo leva ao pensamento de grupo, que ocorre quando todos os indivíduos pertencentes à um grupo começam a pensar igual. No entanto, em oposto a tendência à conformidade, ainda existe uma pressão humana igualmente universal de singularidade, a necessidade de se distinguir dos demais.

Nesse relatório será primeiramente abordado o conceito de cascata informacional, juntamente com um modelo para descrever esse fenômeno, seguindo Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1992). Então, será investigado como os conflitos entre as pressões por conformidade e singularidade podem levar à ciclos de formação e decaimento de tendências e modas em uma população, conforme o modelo proposto por Bettencourt (2002). Para isso será utilizado uma simulação baseada em agentes, na qual cada agente é programado para seguir um conjunto de regras e comportamentos que são ditados pelo seu ambiente e por outros agentes. Além disso, busca-se conectar os fenômenos observados no modelo com conceitos fundamentais da mecânica estatística.

2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste relatório consiste em implementar simulações baseadas em agentes com o intuito de descrever a dinâmica de tendências e modas, seguindo o modelo apresentado por Bettencourt (2002). Nesse modelo, considera-se a população homogênea, de modo que não há nenhuma restrição nas interações entre os agentes. Assim sendo, a intenção inicial é replicar os resultados desse estudo utilizando a linguagem de programação *Python*, para posteriormente migrar para uma linguagem mais eficaz, visando descrever populações maiores. Nesse contexto, optou-se pela utilização da linguagem *Fortran*.

3 METODOLOGIA

Na realização desse relatório, a fim de se realizar os objetivos propostos, algumas etapas foram cumpridas, nas quais o aluno:

- Estudou a teoria de tendências e modas através da leitura dos artigos Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1992), Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1998);
- Realizou a leitura do artigo de Bettencourt (2002) e reproduziu os resultados nele apresentados, desenvolvendo códigos nas linguagens *Python* e *Fortran*; e
- Familiarizou-se com conceitos de Mecânica Estatística como a entropia de Shannon e Percolação (STAUFFER; AHARONY, 2018), para maior caracterizar a dinâmica de tendências através desses conceitos.

4 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

4.1 Um modelo para Cascatas Informacionais

4.1.1 Formulando o modelo

Considere um grupo de indivíduos (numerados 1, 2, ...) que irão tomar decisões sequencialmente. A decisão a ser tomada é descrita como uma escolha entre aceitar ou rejeitar uma opção, como, por exemplo, aderir à uma nova moda, adotar uma nova tecnologia, comer em um restaurante novo ou votar em um determinado candidato político.

Primeiramente, antes de qualquer indivíduo tomar uma decisão, assume-se que o mundo é colocado aleatoriamente em um de dois possíveis estados: em um dos estados a opção é realmente uma boa ideia e no outro ela é uma má ideia. Imagina-se que o estado do mundo é determinado por algum evento aleatório inicial que os indivíduos não podem observar, mas eles irão tentar utilizar toda informação disponível para fazerem inferências sobre esse estado.

Denota-se os dois possíveis estados do mundo como G , representando o estado no qual a opção é uma boa ideia, e B , representando o estado no qual a opção é uma má ideia. Os indivíduos sabem que o evento inicial aleatório colocou o mundo em um estado G com probabilidade p e no estado B com probabilidade $1 - p$. Estas são as probabilidades anteriores de G e B .

Os indivíduos recebem uma recompensa, indicada por V , baseada em sua decisão de aceitar ou rejeitar a opção. Se o indivíduo escolher rejeitar a opção, então sua recompensa é $V = 0$. A recompensa de aceitar depende se a opção é uma boa ou uma má ideia. Supondo que a opção é uma boa ideia, então a recompensa obtida ao adotá-la é $V = 1$. Caso a opção seja uma má ideia, então a recompensa é $V = -1$. Impõe-se que a recompensa esperada, $E[V]$, de aceitar a opção na ausência de qualquer outra informação seja igual à zero, ou seja, $E[V] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 0 \Rightarrow p = 1/2$. Tal condição implica que os estados do mundo, bom ou ruim, sejam equiprováveis. Isso significa que na ausência de novas informações ambas as alternativas são igualmente desejáveis.

Cada indivíduo, antes de tomar uma decisão, recebe um sinal privado que fornece informação sobre o estado em que o mundo foi colocado, além do conhecimento prévio da probabilidade p de aceitar a opção ser uma boa ideia. Esse sinal privado não fornece uma informação perfeita sobre o que fazer, mas comunica uma informação útil. Especificamente, existem dois sinais possíveis: um sinal alto (denotado por H), sugerindo que aceitar a opção é uma boa ideia; e um sinal baixo (denotado por L), sugerindo que aceitar a opção é uma má ideia. De forma mais precisa, se o mundo foi colocado no estado G , então sinais altos são mais frequentes do que sinais baixos: $Pr(H|G) = q > 1/2$, enquanto que $Pr(L|G) = 1 - q < 1/2$. De modo similar, se o mundo foi colocado no estado B , então sinais baixos serão mais frequentes. Estas relações são resumidas na tabela 1.

		Probabilidade dos Sinais	
		$Pr(H V)$	$Pr(L V)$
Estados	$G \ (V = 1)$	q	$1 - q$
	$B \ (V = -1)$	$1 - q$	q

Tabela 1 – A probabilidade de receber um sinal alto ou baixo, como função dos dois possíveis estados do mundo.

Então, primeiramente consideremos o caso em que um indivíduo deve tomar a decisão de aceitar ou rejeitar baseado em apenas um único sinal privado. Depois, consideremos o efeito do indivíduo ter observado uma sequência S de sinais gerados independentemente.

Suponha que um indivíduo receba um sinal alto. Isso faz com que a sua recompensa esperada se altere de $E[V] = 1 \cdot Pr(G) + (-1) \cdot Pr(B) = 0$ para $E[V] = 1 \cdot Pr(G|H) + (-1) \cdot Pr(B|H)$. Para determinar essas novas probabilidades, utiliza-se o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 Pr(G|H) &= \frac{Pr(G) \cdot Pr(H|G)}{Pr(H)} \\
 &= \frac{Pr(G) \cdot Pr(H|G)}{Pr(G) \cdot Pr(H|G) + Pr(B) \cdot Pr(H|B)} \\
 &= \frac{pq}{pq + (1-p)(1-q)} \\
 &> p,
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi utilizado que $pq + (1-p)(1-q) < pq + (1-p)q = q$ no denominador.

Este resultado faz sentido: é mais provável receber um sinal alto se a opção é boa do que se ela é ruim, então ao se observar um sinal alto a estimativa da probabilidade de a opção ser de fato boa é elevada. Portanto, a recompensa esperada se altera de 0 para um valor positivo, fazendo com que o indivíduo aceite a opção. De forma similar, se o indivíduo receber um sinal baixo ele deve rejeitar a opção.

Agora, consideremos o caso em que um indivíduo recebe uma sequência S de sinais gerados de forma independente, consistindo de a sinais altos e b sinais baixos, intercalados de alguma forma. Novamente, para calcular a probabilidade posterior de que a opção seja boa dado a sequência de sinais, $Pr(G|S)$, basta utilizar o Teorema de Bayes:

$$Pr(G|S) = \frac{Pr(G) \cdot Pr(S|G)}{Pr(S)}.$$

Para calcular o termo $Pr(S|G)$ do numerador, deve-se utilizar o fato de que os sinais são gerados de forma independente, portanto basta multiplicar as suas probabilidades. Assim, obtém-se a fatores de q e b fatores de $1 - q$, de modo que $Pr(S|G) = q^a(1 - q)^b$.

Já o termo $Pr(S)$ é calculado considerando que a sequência S pode surgir tanto se a opção for uma boa ideia ou uma má ideia, logo

$$\begin{aligned} Pr(S) &= Pr(G) \cdot Pr(S|G) + Pr(B) \cdot Pr(S|B) \\ &= pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b. \end{aligned}$$

Finalmente, colocando esses termos de volta na equação original, tem-se que

$$Pr(G|S) = \frac{pq^a(1-q)^b}{pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b}. \quad (4.1)$$

Deseja-se saber como essa expressão se compara com p . Assim, se o segundo termo do denominador for substituído por $(1-p)q^a(1-q)^b$, então o denominador se tornaria $pq^a(1-q)^b + (1-p)q^a(1-q)^b = q^a(1-q)^b$ e a expressão inteira ficaria

$$\frac{pq^a(1-q)^b}{q^a(1-q)^b} = p.$$

Agora, como essa substituição altera o valor do denominador? Consideremos os três casos:

- (i) Se $a > b$, então essa substituição faz o denominador se tornar maior, dado que agora haverão mais fatores de q e menos fatores de $1-q$. Assim, da desigualdade $pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b < q^a(1-q)^b$, chega-se que $Pr(G|S) > p$ e o indivíduo aceita a opção.
- (ii) Se $a < b$, então o argumento é simétrico ao caso anterior: essa substituição faz com que o denominador fique menor, de modo que a desigualdade fique $pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b > q^a(1-q)^b$. Logo, $Pr(G|S) < p$ e o indivíduo rejeita a opção.
- (iii) Finalmente, se $a = b$, essa substituição não altera o valor do denominador, portanto $Pr(G|S) = p$ e o indivíduo é indiferente.

Como resultado, os indivíduos devem aceitar a opção quando eles recebem mais sinais altos do que sinais baixos e rejeitar quando eles recebem mais sinais baixos do que sinais altos. Caso eles recebam igualmente ambos os sinais, então eles são indiferentes.

4.1.2 Tomadas de decisões sequenciais e Cascatas Informacionais

Agora, com o modelo descrito anteriormente, imaginemos uma situação onde temos indivíduos tomando decisões sequencialmente. Cada indivíduo antes de tomar uma decisão recebe um sinal privado. Além disso, os indivíduos podem observar as ações de seus predecessores, mas não o seu sinal privado. Assim, um indivíduo deve considerar o seu sinal e as ações observadas de seus predecessores para fazer uma inferência sobre o estado que o mundo foi colocado (G ou B).

Então, comecemos o raciocínio sobre a decisão que cada indivíduo, se comportando de forma completamente racional, deve tomar.

- O indivíduo 1 sempre irá seguir o seu sinal privado, conforme discutido anteriormente.
- O indivíduo 2 sabe que a decisão tomada pelo indivíduo 1 revela o sinal privado dela, assim é como se indivíduo 2 recebesse dois sinais. Se ambos os sinais são o mesmo, o indivíduo 2 realiza a mesma escolha que o indivíduo 1. Se os sinais são diferentes, então, pela equação (4.1), tem-se que $Pr(G|H, L) = Pr(G|L, H) = p = 1/2$. Assim, o indivíduo 2 é indiferente entre aceitar e rejeitar. Nesse caso, assume-se que ele irá sempre seguir o seu próprio sinal. Então, de qualquer forma, o indivíduo 2 também sempre irá seguir o seu sinal privado.
- Como resultado, o indivíduo 3 sabe que ambos os seus predecessores agiram de acordo com os seus sinais privados, então é como se ele tivesse recebido três sinais independentes. Pelos resultados da seção anterior, sabe-se que o indivíduo 3 irá seguir a maioria dos sinais ao escolher entre aceitar ou rejeitar.

Isso significa que se o indivíduo 1 e o indivíduo 2 fizeram decisões opostas, então o indivíduo 3 usará o seu próprio sinal para desempatar, de forma que é como se ele estivesse na mesma posição que o indivíduo 1. Desse modo, os próximos indivíduos saberão que a decisão do indivíduo 3 foi baseada completamente em seu próprio sinal e usarão essa informação na sua decisão.

Por outro lado, se ambos indivíduos 1 e 2 fizeram a mesma escolha, então o indivíduo 3 irá seguir essa escolha e ignorar o seu próprio sinal. Assim, os próximos indivíduos sabem que a decisão do indivíduo 3 não comunica nenhuma informação sobre o seu sinal, de modo que todas elas estarão na mesma situação que o indivíduo 3 e também realizarão a mesma escolha. Nesse caso, diz-se que uma cascata se iniciou, ou seja, tem-se uma situação na qual é ótimo para um indivíduo ignorar a sua própria informação e seguir a decisão de seus predecessores.

Baseada nessa análise com os três primeiros indivíduos e os resultados obtidos na seção anterior é fácil generalizar o processo de decisão para os indivíduos além do terceiro.

Assim, pode-se resumir a regra de decisão ótima de um indivíduo da seguinte forma. Defini-se a quantidade d como a diferença entre o número de predecessores que aceitaram e o número que predecessores que rejeitaram. Se $d > 1$, então o indivíduo deve adotar independente do seu sinal privado. Se $d = 1$ ou $d = 0$, então o indivíduo deve seguir o seu sinal privado. As decisões para $d = -1$ e $d < -1$ são simétricas. Tal processo pode ser visualizado conforme ilustrado na Figura 1. Tem-se que a diferença de aceitações e rejeições evolui de forma aleatória, até que em algum momento ela atinge a barreira de $+2$ e é iniciada uma Cascata para cima. De modo simétrico, ao atingir a barreira de -2 é iniciada uma Cascata para baixo.

Finalmente, é muito difícil que essa diferença permaneça em um intervalo tão estreito (entre -1 e 1) para sempre. Por exemplo, basta que três indivíduos obtenham consecutiva-

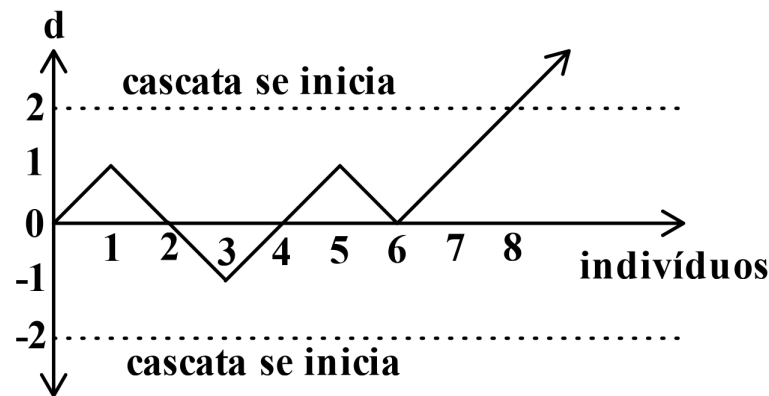


Figura 1 – Uma cascata se inicia quando a diferença do número de aceitações e rejeições chega à dois.

mente o mesmo sinal para que uma cascata se inicie definitivamente. A probabilidade de encontrar três sinais iguais consecutivos converge para 1 conforme o número de indivíduos N tende a infinito. Para ver isso, primeiro imagine que esses N indivíduos são divididos em blocos de três. Então, a probabilidade de que qualquer bloco receba sinais idênticos é dada por $q^3 + (1 - q)^3$. Consequentemente, a probabilidade que nenhum desses blocos consista de três sinais idênticos é $(1 - q^3 - (1 - q)^3)^{N/3}$. Com N tendendo ao infinito essa quantidade tende à 0, então a probabilidade de uma cascata se iniciar converge para 1. Portanto, nesse limite, uma cascata irá ocorrer nesse modelo quase que certamente.

Baseado nessa discussão, tem-se uma conclusão geral sobre esse modelo: quando os indivíduos podem ver o que os outros estão fazendo, mas não o que eles sabem, existe um período inicial no qual eles confiam em sua própria informação, mas com o passar do tempo a população eventualmente chega em um situação na qual é benéfico para os indivíduos ignorarem a sua própria informação e seguir a multidão.

4.1.3 Conclusões sobre as Cascatas Informacionais

- (i) *Cascatas podem estar erradas.* Se, por exemplo, aceitar a opção é de fato uma má ideia, mas os dois primeiros indivíduos acabam recebendo sinais altos e aceitando a opção, então uma cascata de aceitações irá se iniciar imediatamente, mesmo sendo a escolha errada para a população.
- (ii) *Cascatas podem ser baseadas em muita pouca informação.* Dado que as pessoas ignoram sua informação privada uma vez que uma cascata se iniciou, somente a informação pré-cascata influencia o comportamento da população. Isso significa que se uma cascata se inicia relativamente cedo em uma grande população, a maioria da informação privada obtida pela população não é utilizada e a informação coletiva para de se acumular.

- (iii) *Cascatas são frágeis.* Cascatas são fáceis de se iniciar, mas também são fáceis de serem paradas. Basta que alguma informação pública seja liberada para a população (um sinal que todos os indivíduos podem ver) ou que algum indivíduo receba uma informação levemente superior (como, por exemplo, receber dois sinais seguidos) para que uma cascata seja parada.

4.2 Um modelo para a dinâmica de tendências e modas

4.2.1 Definição do modelo

Consideremos um sistema que representa uma população de N agentes e L tendências (ou modas). Cada agente é caracterizado por uma única tendência a cada instante de tempo, indicando o grupo ao qual ele pertence naquele momento. Na perspectiva de cada agente isolado, todas as tendências são igualmente boas, de modo que, na ausência de qualquer informação adicional, não há um viés por nenhuma das tendências.

Cada uma das tendências é atrelada a um número que representa a sua taxa de crescimento (ou momento). Por exemplo, o momento de uma tendência i no instante de tempo t é dada por $p_i(t) = \Delta N_i(t)$, onde $N_i(t)$ é o número de agentes na tendência i no tempo t e $\Delta N_i(t) = N_i(t) - N_i(t-1)$.

Os agentes podem alterar suas tendências ao interagirem com outros agentes. Por exemplo, em um dado instante de tempo o agente i entra em contato com o agente j , ambos escolhidos de forma aleatória, e compara o momento de suas respectivas tendências p_i e p_j . Se o momento de sua tendência p_i for menor do que p_j , então o agente i abandona sua tendência e adota a tendência do agente j . Esse processo de imitação corresponde à pressão do conformismo. Caso contrário, se p_i for maior do que p_j , então o agente i mantém a sua tendência. Após N interações desse tipo, tem-se um passo temporal e os momentos das tendências são recalculados.

Além disso, se o agente não alterar sua tendência ele deve verificar se o momento dela se encontra abaixo de um certo limiar p_{crit} . Se o momento de sua tendência for menor do que p_{crit} , então o agente a abandona e procura por uma nova na qual nenhum outro agente na população esteja exibindo-a naquele instante. Tal processo caracteriza a pressão por singularidade, onde ficar em uma tendência que não está crescendo o suficiente é pior do que assumir o risco de procurar uma nova. Assume-se que esse parâmetro possui o mesmo valor compartilhado entre todos os agentes.

Na Figura 2 é exemplificado uma evolução característica do sistema descrito, na qual os histogramas representam a ocupação de indivíduos em cada uma das tendências. É possível observar um comportamento cíclico do sistema, no qual ele alterna entre um estado extremamente ordenado com uma tendência dominando as outras e um estado desordenado que há a coexistência de várias tendências pequenas. De forma qualitativa,

pode-se interpretar o fenômeno espontâneo de formação de uma tendência grande como uma cascata informacional, devido à sua rápida disseminação pela população.

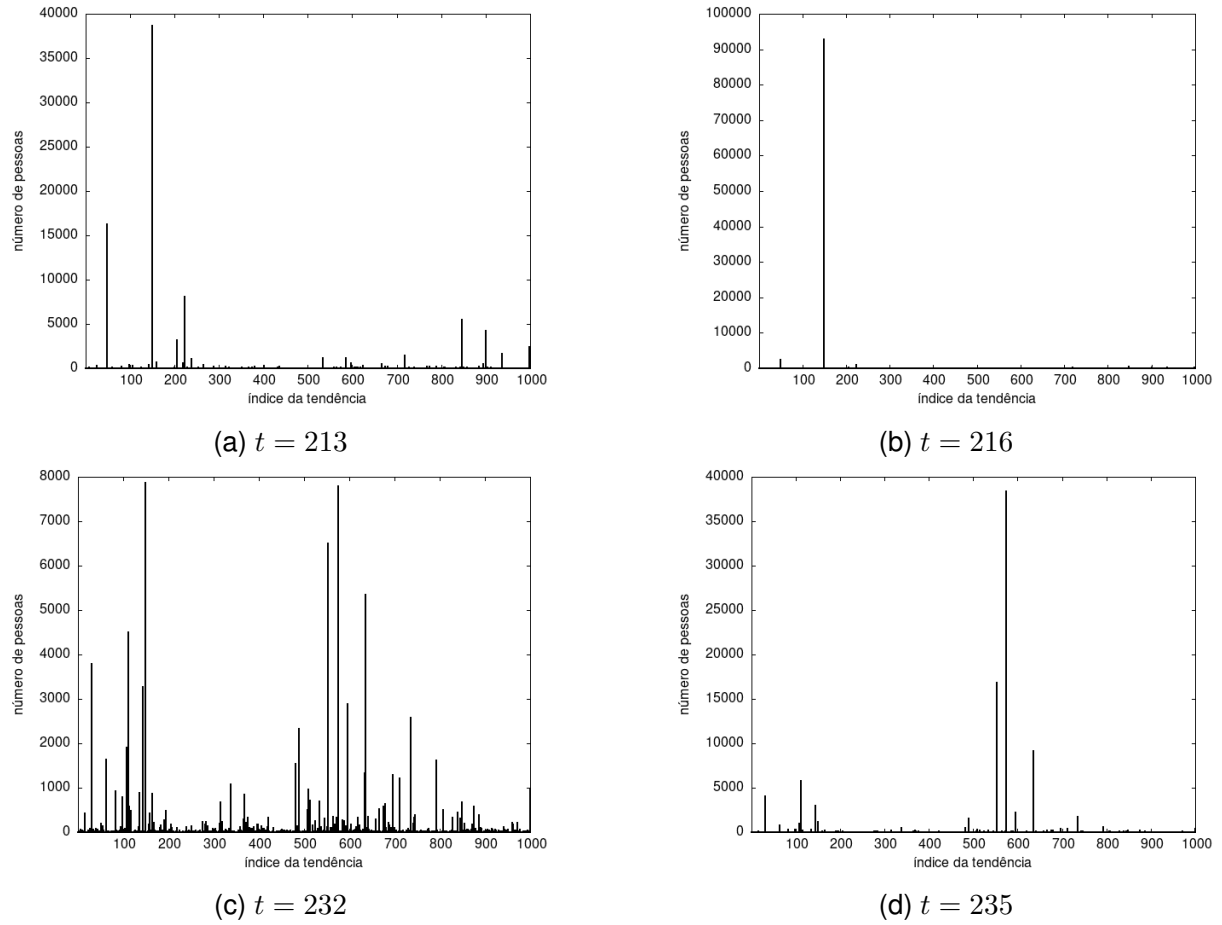


Figura 2 – Histogramas da evolução da ocupação das tendências para os parâmetros $N = 10^5$, $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$. Tem-se ilustrado em (a) e (b) a dominância de poucas tendências, caracterizando um estado mais ordenado do sistema. Então o seu decaimento em (c), com a competição de várias tendências pequenas. Por fim há a emergência de uma nova tendência dominante em (d) e o ciclo irá se repetir novamente.

O comportamento periódico do sistema pode ser melhor visualizado ao plotarmos a taxa de ocupação da tendência dominante $(N_{dom}(t)/N)$, onde o índice *dom* é usado para indicar que estamos considerando apenas a tendência com maior número de indivíduos) contra o tempo, conforme ilustrado na Figura 3. Uma medida interessante é o intervalo de tempo T entre a formação de tendências dominantes, ou seja, dado que o sistema se encontra em um estado ordenando com apenas uma tendência, quantos passos temporais são necessários para que o sistema atinja novamente esse estado? O intervalo de tempo entre esses máximos permanece relativamente constante, onde nesse caso o valor médio do período é $\langle T \rangle = 23.62$.

Finalmente, devido a dinâmica do sistema descrito não há pontos fixos estáveis globais. Um ponto fixo ocorre nesse sistema quando $p_i = p_j = p$, o que implica que $p_i = p = 0$, $\forall i$,

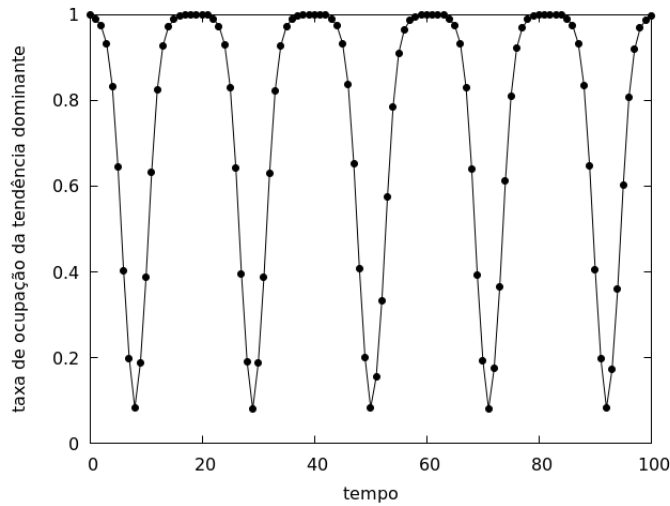


Figura 3 – Gráfico contendo a evolução da taxa de ocupação da maior tendência em função do tempo, no qual os parâmetros utilizados foram $N = 10^5$, $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$.

para que haja a conservação geral de indivíduos. Esse caso corresponde a distribuição plana, na qual cada tendência terá ocupação $N_i = N/L$, $\forall i$, sendo este o estado mais desordenado possível do sistema. Claramente este ponto fixo é instável à qualquer perturbação, bastando um indivíduo mudar sua tendência para que haja uma tendência com momento positivo e outra com momento negativo, fazendo com que o restante dos indivíduos se juntem à primeira e abandonem a última.

Além disso, o valor de p_{crit} afeta a estabilidade quando sua configuração está extremamente ordenada com todos os indivíduos em apenas uma tendência. Nesse caso, para que o ponto seja instável, basta que $p_{crit} > 0$. Já sua condição de estabilidade é que $p_{crit} \leq 0$, o que faz com que os agentes não abandonem uma tendência que esteja estática ou decaindo. Desse modo, na ausência de outras tendências com maior crescimento, o sistema irá se estabilizar quando houver a formação da primeira tendência dominante.

4.2.2 Características globais do modelo

Agora, deseja-se caracterizar os ciclos de formação e colapso de tendências vistos anteriormente, utilizando quantidades globais análogas as da Mecânica Estatística para capturar essas propriedades do sistema.

Primeiramente, define-se a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente pertença à uma tendência i como

$$n_i = \frac{N_i}{N}, \quad (4.2)$$

onde $0 \leq n_i \leq 1$. Além disso, tem-se que $\sum_{i=1}^L n_i = 1$.

Assim, como a configuração da população alterna entre estados de ordem (apenas uma tendência dominante) e estados de desordem (coexistências de muitas tendências pequenas), pode-se definir a entropia de Shannon, S , para capturar essa propriedade.

Portanto, dado um conjunto discreto de tendências, a entropia de Shannon é dada por

$$S = - \sum_{i=1}^L n_i \ln n_i. \quad (4.3)$$

A configuração do sistema que leva ao menor valor de entropia é a de uma única tendência contendo a população inteira, fazendo com que $S_{min} = 0$. Por outro lado, como comentado anteriormente, a distribuição plana é a que leva à maior desordem do sistema, que escrita como n_i fica

$$n_i = \frac{1}{L}, \quad \forall i.$$

Portanto, decorre que o valor de entropia máximo, S_{max} , é dado por

$$S_{max} = - \sum_{i=1}^L \frac{1}{L} \ln \frac{1}{L} = \ln(L).$$

Desse modo, dado o comportamento periódico do modelo descrito, a entropia do sistema oscila entre esses dois estados assintóticos durante os ciclos de formação e decaimento das tendências, conforme mostrado na Figura 4.

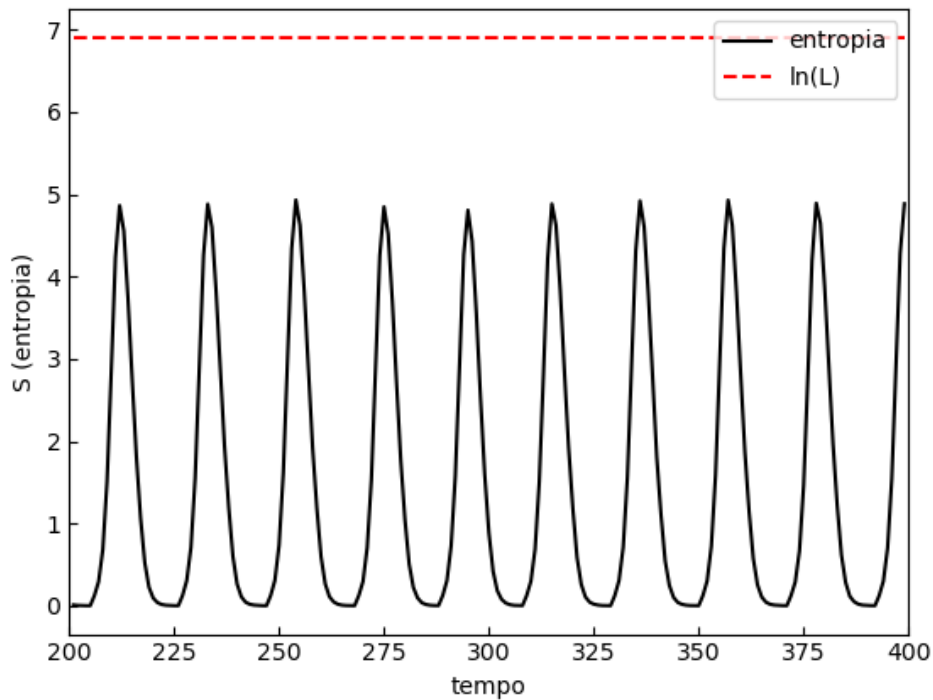


Figura 4 – Comportamento oscilatório da entropia total em função do tempo, para uma população com $N = 10^5$ agentes, $L = 10^3$ tendências e $p_{crit} = 1$, onde a linha preta representa a evolução da entropia e a linha tracejada representa a entropia máxima $S_{max} = \ln(L) \simeq 6.91$.

O comportamento observado da dinâmica descrita demonstra um certo tipo de criticidade auto-organizada, que pode ser medida através de cumulantes análogos aos usados para estudar percolação. Distribuições estatísticas nas proximidades do ponto crítico podem

ser definidas por dois expoentes. Para percolação, esses expoentes são a força de percolação P_c , que é o tamanho do maior grupo, e a susceptibilidade de percolação S_c , definida como a soma dos quadrados do tamanho de todos os grupos com o maior grupo subtraído. A criticalidade do sistema é o início da formação de um aglomerado abrangente, que é associado à um aumento acentuado da força de percolação P_c e um pico na susceptibilidade S_c .

No contexto da dinâmica de tendências, tem-se, então, que a força de percolação P_c é definida como a fração da população na maior tendência, ou seja,

$$P_c = \frac{\max(N_i)}{N}, \quad (4.4)$$

enquanto que a susceptibilidade de percolação S_c é definida como

$$S_c = \frac{\left(\sum_{i=1}^L N_i^2\right) - P_c^2}{N^2}. \quad (4.5)$$

A Figura 5 ilustra a evolução de P_c e S_c para o mesmo caso da Figura 4. Pode-se observar que P_c oscila entre estados de máxima ocupação $P_c = 1$ e estados de ocupação bem baixas. Enquanto isso, durante o estado intermediário de P_c , tem-se um ponto de máximo em S_c , sinalizando o comportamento crítico.

4.2.3 Variação dos parâmetros iniciais

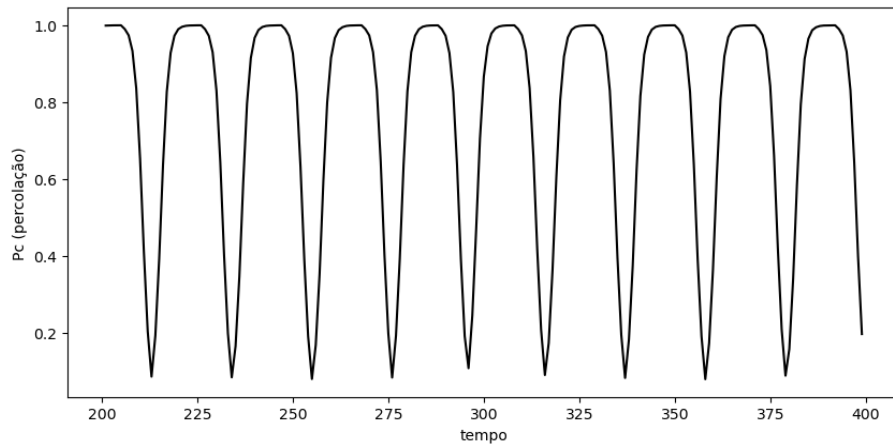
Nesta seção será estudado o que ocorre com o comportamento do sistema ao serem alterados os parâmetros iniciais N , L e p_{crit} .

Primeiramente, comecemos estudando o momento crítico p_{crit} . Tem-se que para valores de $p_{crit} \leq 0$ não há oscilações no sistema e ele se estabiliza ao haver a formação da primeira tendência dominante. Agora, para valores de $p_{crit} > 0$, nota-se que os períodos de oscilação diminuem conforme p_{crit} aumenta. Os resultados obtidos estão sumarizados na Tabela 2. Essa variação de período se torna evidente ao ser plotado a taxa de ocupação da maior tendência para valores de p_{crit} diferentes no mesmo gráfico, conforme ilustrado na Figura 6.

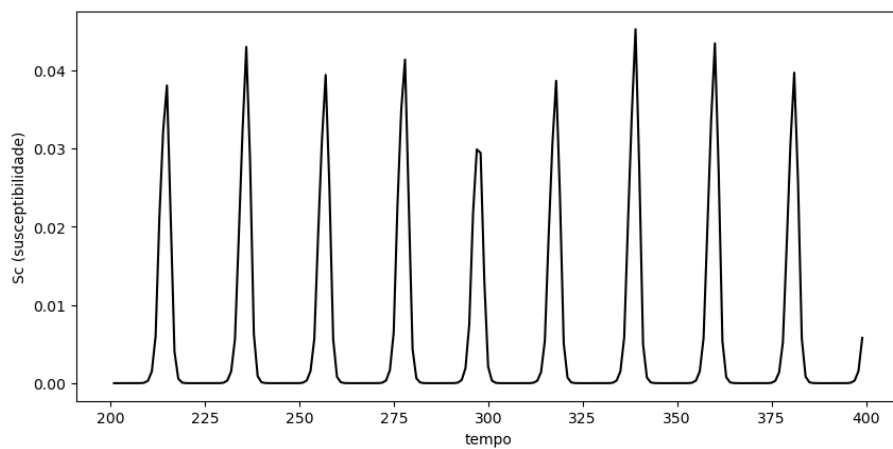
p_{crit}	T
1	24
10	21
10^2	18
10^3	15

Tabela 2 – Resultados aproximados do período obtidos ao variar p_{crit}

Além disso, é interessante considerar a distribuição dos tamanhos médios das tendências para ambos os valores de p_{crit} . Na Figura 7, para $p_{crit} = 10^3$ é possível notar que o tamanho médio máximo das tendências diminui e o tamanho médio mínimo cresce ao



(a)



(b)

Figura 5 – (a) Evolução da força de percolação P_c e (b) Evolução da susceptibilidade de percolação, onde ambos os gráficos foram feitos para uma população de $N = 10^5$ agentes, $L = 10^3$ tendências e $p_{crit} = 1$.

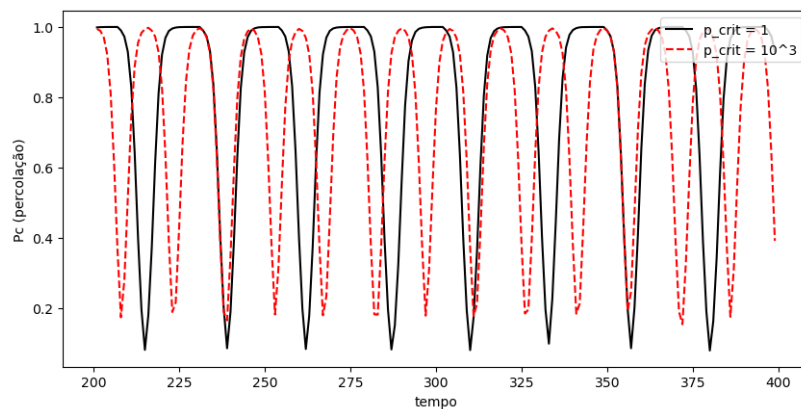


Figura 6 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar p_{crit} , onde os parâmetros $N = 10^5$ e $L = 10^3$ foram mantidos constantes.

comparar com o caso $p_{crit} = 1$. Tal comportamento é explicado pelo fato de as tendências dominantes permanecem por menos tempos em sua ocupação máxima e o seu mínimo de

ocupação ser maior ao ser utilizado $p_{crit} = 10^3$.

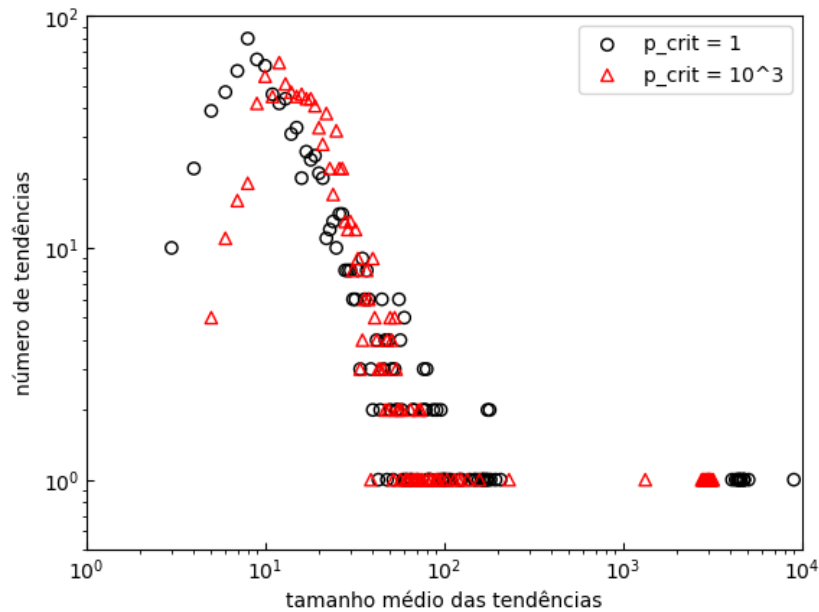


Figura 7 – Distribuição do tamanho médio das tendências para $N = 10^5$, $L = 10^3$ e dois valores de $p_{crit} = 1, 10^3$.

Ao variar o número de tendências L mantendo o restante dos parâmetros fixos, tem-se que o período de oscilação permanece constante. No entanto, percebe-se que a taxa de ocupação da maior tendência permanece menos tempo em seu máximo e mais tempo em seu mínimo. Esse comportamento é esperado, pois com um número maior de tendências a probabilidade de um agente encontrar uma vazia ao abandonar a tendência dominante é maior. Desse modo, obtém-se os resultados da Figura 8, onde o período aproximado de ambos os casos é $\langle T \rangle \simeq 25$.

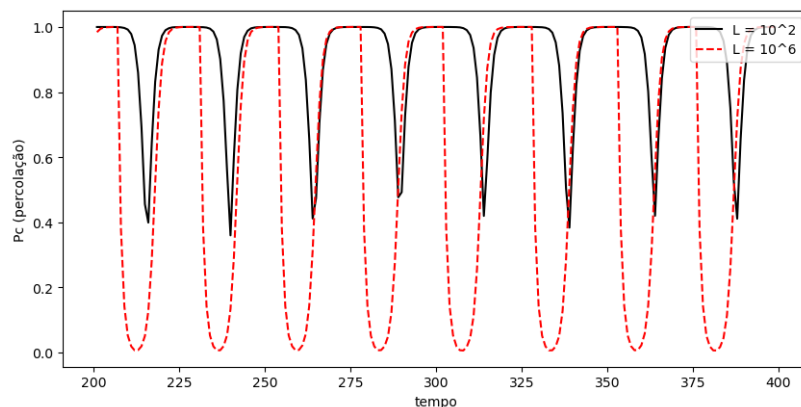


Figura 8 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar L , onde os parâmetros $N = 10^5$ e $p_{crit} = 1$ foram mantidos constantes.

Finalmente, ao variar o número de agente N mantendo os parâmetros L e p_{crit} fixos, é possível notar uma alteração nos períodos de oscilação. Nesse caso, evidentemente o

período aumenta conforme o número de agentes cresce, conforme sumarizado na Tabela 3. Pode-se perceber na Figura 9 que para N pequeno as oscilações são rápidas, enquanto que para N grande elas são lentas e o sistema permanece por um tempo maior com a tendência dominante em seu máximo.

N	T
10^2	11
10^3	15
10^4	19
10^5	24
10^6	28

Tabela 3 – Resultados aproximados do período obtidos ao variar N

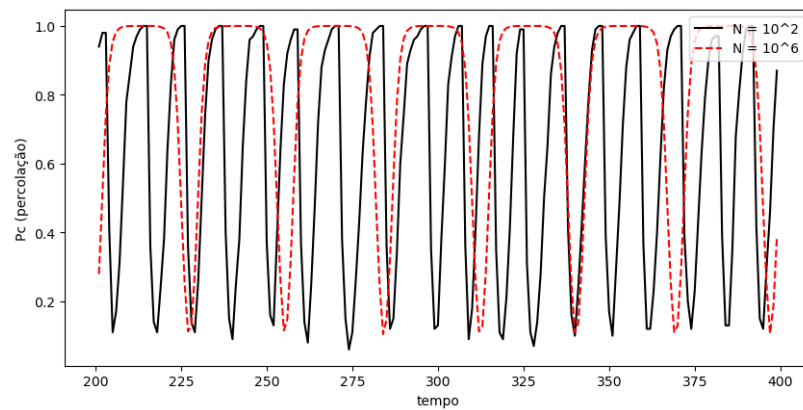


Figura 9 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar N , onde os parâmetros $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$ foram mantidos constantes.

5 CONCLUSÃO

Como resultado final deste relatório parcial, o estudante foi capaz de concluir de forma bem sucedida os objetivos propostos no cronograma deste projeto. Como consequência, o estudante ganhou grande familiaridade com a teoria de tendências e modas e produziu códigos nas linguagens de *Python* e *Fortran* que reproduzem os resultados de Bettencourt (2002).

REFERÊNCIAS

BETTENCOURT, L. From boom to bust and back again: the complex dynamics of trends and fashions. *arXiv preprint cond-mat/0212267*, 2002.

BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D.; WELCH, I. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 100, n. 5, p. 992–1026, 1992.

BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D.; WELCH, I. Learning from the behavior of others: Conformity, fads, and informational cascades. *Journal of economic perspectives*, American Economic Association, v. 12, n. 3, p. 151–170, 1998.

MACHIAVELLI, N. *The Prince*. Oxford: Oxford University Press, 2005. Original Date: 1513.

STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.