

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Rafael Fernando Gigante

Relatório final do Programa Unificado de Bolsas (PUB)
2023-2024

São Carlos
2024

RAFAEL FERNANDO GIGANTE

Tendências e modas: a abordagem de modelos baseados em
agentes

Relatório apresentado à Universidade de São
Paulo referente ao Programa Unificado de Bol-
sas (PUB-USP).

Código do Projeto: 3116

Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

São Carlos

2024

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	OBJETIVOS	4
2.1	Objetivo geral	4
2.2	Objetivos específicos	4
3	MÉTODOS E RESULTADOS	5
3.1	Um modelo para Cascatas Informacionais	5
3.1.1	Formulando o modelo	5
3.1.2	Tomadas de decisões sequenciais e Cascatas Informacionais	7
3.1.3	Conclusões sobre as Cascatas Informacionais	9
3.2	Um modelo para a dinâmica de tendências e modas	10
3.2.1	Definição do modelo	10
3.2.2	Características globais do modelo	12
3.2.3	Variação dos parâmetros iniciais	15
3.3	Modelos probabilísticos para a dinâmica de tendências	16
3.3.1	Modelo 1	16
3.3.2	Modelo 2	19
3.3.3	Modelo 3	21
3.4	Conceitos básicos de Redes Complexas	26
3.4.1	Terminologia e métricas	26
3.4.2	Modelos de redes	27
3.4.2.1	Grafos aleatórios - modelo de Erdős–Rényi	27
3.4.2.2	Redes de mundo pequeno - modelo de Watts-Strogatz	28
3.4.2.3	Redes livres de escala - modelo de Barabási-Albert	29
3.5	Modelo de redes complexas para a dinâmica de tendências	29
3.5.1	Modelo de Erdős–Rényi	30
3.5.2	Modelo de Watts-Strogatz	30
3.5.3	Modelo de Barabási-Albert	31
4	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

O filósofo Machiavelli (2005) escreveu: “Os homens trilham quase sempre estradas já percorridas. Um homem prudente deve assim escolher os caminhos já percorridos pelos grandes homens e imitá-los”. Essa propensão a imitar é presumivelmente um mecanismo evolutivo profundamente enraizado nos seres humanos, o qual promoveu a sobrevivência de milhares de gerações ao permitir que indivíduos tomem vantagem do conhecimento já adquirido por outros.

A causa mais simples desse comportamento convergente é que indivíduos frequentemente enfrentam problemas de decisões semelhantes, nos quais eles possuem informações semelhantes e precisam tomar decisões similares. Nesse caso, os indivíduos se baseiam nas ações daqueles ao seu redor para tomarem decisões semelhantes. Independente se essa é uma boa ou má estratégia, pelo menos é garantido que o indivíduo não irá performar pior do que a maioria daqueles que o cerca.

Esse processo de adoção generalizada de uma determinada decisão é referido na literatura como uma cascata informacional (BIKHCHANDANI; HIRSHLEIFER; WELCH, 1992; BIKHCHANDANI; HIRSHLEIFER; WELCH, 1998). Nesse caso, é ótimo para um indivíduo ignorar sua própria informação e copiar a ação de seus predecessores, causando o espalhamento de uma decisão por toda uma população de forma brusca. O fenômeno de cascata informacional está fortemente ligado ao conformismo social, que decorre da necessidade fundamental das pessoas de se encaixarem como parte de um grupo social. O conformismo leva ao pensamento de grupo, que ocorre quando todos os indivíduos pertencentes à um grupo começam a pensar igual. No entanto, em oposto a tendência à conformidade, ainda existe uma pressão humana igualmente universal de singularidade, a necessidade de se distinguir dos demais.

Nesse relatório, primeiramente será abordado o conceito de cascata informacional, juntamente com um modelo para descrever esse fenômeno, seguindo Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1992), Easley, Kleinberg et al. (2012). Então, será investigado como o conflito entre as pressões por conformidade e singularidade podem levar à ciclos de formação e decaimento de tendências e modas em uma população, conforme o modelo proposto por Bettencourt (2002). Para isso será utilizado simulações baseada em agentes, na qual cada agente é programado para seguir um conjunto de regras e comportamentos que são ditados pelo seu contexto e por outros agentes. Busca-se relacionar os fenômenos observados no modelo com conceitos fundamentais da mecânica estatística. Em seguida, serão apresentados resultados obtidos ao introduzir uma probabilidade de mudança de tendência no modelo de Bettencourt. Por fim, será feita uma breve revisão sobre a teoria de redes complexas, tomando como base os artigos de Strogatz (2001), Albert e Barabási (2002), Newman (2003) e serão apresentados alguns resultados obtidos ao implementar o modelo de Bettencourt com as interações entre os agentes determinadas por redes complexas.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste relatório consiste em implementar simulações baseadas em agentes com o intuito de descrever a dinâmica de tendências e modas, seguindo o modelo apresentado por Bettencourt (2002). Nesse modelo, considera-se a população homogênea, de modo que não há nenhuma restrição nas interações entre os agentes. Assim, será feita a reimplementação do modelo na linguagem de programação *Python*, visando a reprodução dos resultados apresentados no artigo original. Após essa parte, o modelo será implementado em uma outra linguagem mais eficiente, buscando simular populações grandes. Nesse caso, a linguagem escolhida foi *Julia*, pela sua eficiência e sua semelhança com o *Python*. Por fim, busca-se implementar o modelo de Bettencourt utilizando a teoria de redes complexas para ditar a interação entre os agentes, de modo a verificar como a topologia da rede de influência mútua entre os agentes afeta a dinâmica de formação e colapso das tendências e modas.

2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal, a estratégia proposta é atingir primeiro alguns objetivos específicos preliminares, na seguinte ordem:

1. Estudar a teoria de tendências e modas através da leitura dos artigos Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1992), Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1998);
2. Estudar o modelo proposto por Bettencourt (2002) e realizar sua reimplementação em *Python*;
3. Reimplementar o modelo em *Julia*;
4. Familiarizar-se com conceitos de Mecânica Estatística, como a entropia de Shannon e Percolação (STAUFFER; AHARONY, 2018), para melhor caracterizar a dinâmica de tendências através desses conceitos.
5. Estudar a teoria de redes complexas através dos artigos de Strogatz (2001), Albert e Barabási (2002), Newman (2003) e implementá-la no modelo de Bettencourt (2002).

3 MÉTODOS E RESULTADOS

3.1 Um modelo para Cascatas Informacionais

3.1.1 Formulando o modelo

Considere um grupo de indivíduos (numerados 1, 2, ...) que irão tomar decisões sequencialmente. A decisão a ser tomada é descrita como uma escolha entre aceitar ou rejeitar uma opção, como, por exemplo, aderir à uma nova moda, adotar uma nova tecnologia, comer em um restaurante novo ou votar em um determinado candidato político.

Primeiramente, antes de qualquer indivíduo tomar uma decisão, assume-se que o mundo é colocado aleatoriamente em um de dois possíveis estados: em um dos estados a opção é realmente uma boa ideia e no outro ela é uma má ideia. Imagina-se que o estado do mundo é determinado por algum evento aleatório inicial que os indivíduos não podem observar, mas eles irão tentar utilizar toda informação disponível para fazerem inferências sobre esse estado.

Denota-se os dois possíveis estados do mundo como G , representando o estado no qual a opção é uma boa ideia, e B , representando o estado no qual a opção é uma má ideia. Os indivíduos sabem que o evento inicial aleatório colocou o mundo em um estado G com probabilidade p e no estado B com probabilidade $1 - p$. Estas são as probabilidades anteriores de G e B .

Os indivíduos recebem uma recompensa, indicada por V , baseada em sua decisão de aceitar ou rejeitar a opção. Se o indivíduo escolher rejeitar a opção, então sua recompensa é $V = 0$. A recompensa de aceitar depende se a opção é uma boa ou uma má ideia. Supondo que a opção é uma boa ideia, então a recompensa obtida ao adotá-la é $V = 1$. Caso a opção seja uma má ideia, então a recompensa é $V = -1$. Impõe-se que a recompensa esperada, $E[V]$, de aceitar a opção na ausência de qualquer outra informação seja igual à zero, ou seja, $E[V] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 0 \Rightarrow p = 1/2$. Tal condição implica que os estados do mundo, bom ou ruim, sejam equiprováveis. Isso significa que na ausência de novas informações ambas as alternativas são igualmente desejáveis.

Cada indivíduo, antes de tomar uma decisão, recebe um sinal privado que fornece informação sobre o estado em que o mundo foi colocado, além do conhecimento prévio da probabilidade p de aceitar a opção ser uma boa ideia. Esse sinal privado não fornece uma informação perfeita sobre o que fazer, mas comunica uma informação útil. Especificamente, existem dois sinais possíveis: um sinal alto (denotado por H), sugerindo que aceitar a opção é uma boa ideia; e um sinal baixo (denotado por L), sugerindo que aceitar a opção é uma má ideia. De forma mais precisa, se o mundo foi colocado no estado G , então sinais altos são mais frequentes do que sinais baixos: $Pr(H|G) = q > 1/2$, enquanto que $Pr(L|G) = 1 - q < 1/2$. De modo similar, se o mundo foi colocado no estado B , então sinais baixos serão mais frequentes. Estas relações são resumidas na tabela 1.

		Probabilidade dos Sinais	
		$Pr(H V)$	$Pr(L V)$
Estados	$G \ (V = 1)$	q	$1 - q$
	$B \ (V = -1)$	$1 - q$	q

Tabela 1 – A probabilidade de receber um sinal alto ou baixo, como função dos dois possíveis estados do mundo.

Então, primeiramente consideremos o caso em que um indivíduo deve tomar a decisão de aceitar ou rejeitar baseado em apenas um único sinal privado. Depois, consideremos o efeito do indivíduo ter observado uma sequência S de sinais gerados independentemente.

Suponha que um indivíduo receba um sinal alto. Isso faz com que a sua recompensa esperada se altere de $E[V] = 1 \cdot Pr(G) + (-1) \cdot Pr(B) = 0$ para $E[V] = 1 \cdot Pr(G|H) + (-1) \cdot Pr(B|H)$. Para determinar essas novas probabilidades, utiliza-se o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 Pr(G|H) &= \frac{Pr(G) \cdot Pr(H|G)}{Pr(H)} \\
 &= \frac{Pr(G) \cdot Pr(H|G)}{Pr(G) \cdot Pr(H|G) + Pr(B) \cdot Pr(H|B)} \\
 &= \frac{pq}{pq + (1 - p)(1 - q)} \\
 &> p,
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi utilizado que $pq + (1 - p)(1 - q) < pq + (1 - p)q = q$ no denominador.

Este resultado faz sentido: é mais provável receber um sinal alto se a opção é boa do que se ela é ruim, então ao se observar um sinal alto a estimativa da probabilidade de a opção ser de fato boa é elevada. Portanto, a recompensa esperada se altera de 0 para um valor positivo, fazendo com que o indivíduo aceite a opção. De forma similar, se o indivíduo receber um sinal baixo ele deve rejeitar a opção.

Agora, consideremos o caso em que um indivíduo recebe uma sequência S de sinais gerados de forma independente, consistindo de a sinais altos e b sinais baixos, intercalados de alguma forma. Novamente, para calcular a probabilidade posterior de que a opção seja boa dado a sequência de sinais, $Pr(G|S)$, basta utilizar o Teorema de Bayes:

$$Pr(G|S) = \frac{Pr(G) \cdot Pr(S|G)}{Pr(S)}.$$

Para calcular o termo $Pr(S|G)$ do numerador, deve-se utilizar o fato de que os sinais são gerados de forma independente, portanto basta multiplicar as suas probabilidades. Assim, obtém-se a fatores de q e b fatores de $1 - q$, de modo que $Pr(S|G) = q^a(1 - q)^b$.

Já o termo $Pr(S)$ é calculado considerando que a sequência S pode surgir tanto se a

opção for uma boa ideia ou uma má ideia, logo

$$\begin{aligned} Pr(S) &= Pr(G) \cdot Pr(S|G) + Pr(B) \cdot Pr(S|B) \\ &= pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b. \end{aligned}$$

Finalmente, colocando esses termos de volta na equação original, tem-se que

$$Pr(G|S) = \frac{pq^a(1-q)^b}{pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b}. \quad (3.1)$$

Deseja-se saber como essa expressão se compara com p . Assim, se o segundo termo do denominador for substituído por $(1-p)q^a(1-q)^b$, então o denominador se tornaria $pq^a(1-q)^b + (1-p)q^a(1-q)^b = q^a(1-q)^b$ e a expressão inteira ficaria

$$\frac{pq^a(1-q)^b}{q^a(1-q)^b} = p.$$

Agora, como essa substituição altera o valor do denominador? Consideremos os três casos:

- (i) Se $a > b$, então essa substituição faz o denominador se tornar maior, dado que agora haverão mais fatores de q e menos fatores de $1-q$. Assim, da desigualdade $pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b < q^a(1-q)^b$, chega-se que $Pr(G|S) > p$ e o indivíduo aceita a opção.
- (ii) Se $a < b$, então o argumento é simétrico ao caso anterior: essa substituição faz com que o denominador fique menor, de modo que a desigualdade fique $pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b > q^a(1-q)^b$. Logo, $Pr(G|S) < p$ e o indivíduo rejeita a opção.
- (iii) Finalmente, se $a = b$, essa substituição não altera o valor do denominador, portanto $Pr(G|S) = p$ e o indivíduo é indiferente.

Como resultado, os indivíduos devem aceitar a opção quando eles recebem mais sinais altos do que sinais baixos e rejeitar quando eles recebem mais sinais baixos do que sinais altos. Caso eles recebam igualmente ambos os sinais, então eles são indiferentes.

3.1.2 Tomadas de decisões sequenciais e Cascatas Informacionais

Agora, com o modelo descrito anteriormente, imaginemos uma situação onde temos indivíduos tomando decisões sequencialmente. Cada indivíduo antes de tomar uma decisão recebe um sinal privado. Além disso, os indivíduos podem observar as ações de seus predecessores, mas não o seu sinal privado. Assim, um indivíduo deve considerar o seu sinal e as ações observadas de seus predecessores para fazer uma inferência sobre o estado que o mundo foi colocado (G ou B).

Então, comecemos o raciocínio sobre a decisão que cada indivíduo, se comportando de forma completamente racional, deve tomar.

- O indivíduo 1 sempre irá seguir o seu sinal privado, conforme discutido anteriormente.
- O indivíduo 2 sabe que a decisão tomada pelo indivíduo 1 revela o sinal privado dela, assim é como se indivíduo 2 recebesse dois sinais. Se ambos os sinais são o mesmo, o indivíduo 2 realiza a mesma escolha que o indivíduo 1. Se os sinais são diferentes, então, pela equação (3.1), tem-se que $Pr(G|H, L) = Pr(G|L, H) = p = 1/2$. Assim, o indivíduo 2 é indiferente entre aceitar e rejeitar. Nesse caso, assume-se que ele irá sempre seguir o seu próprio sinal. Então, de qualquer forma, o comportamento do indivíduo 2 revela o seu sinal privado.
- Como resultado, o indivíduo 3 sabe que ambos os seus predecessores agiram de acordo com os seus sinais privados, então é como se ele tivesse recebido três sinais independentes. Pelos resultados da seção anterior, sabe-se que o indivíduo 3 irá seguir a maioria dos sinais ao escolher entre aceitar ou rejeitar.

Isso significa que se o indivíduo 1 e o indivíduo 2 fizeram decisões opostas, então o indivíduo 3 usará o seu próprio sinal para desempatar, de forma que é como se ele estivesse na mesma posição que o indivíduo 1. Desse modo, os próximos indivíduos saberão que a decisão do indivíduo 3 foi baseada completamente em seu próprio sinal e usarão essa informação na sua decisão.

Por outro lado, se ambos indivíduos 1 e 2 fizeram a mesma escolha, então o indivíduo 3 irá seguir essa escolha e ignorar o seu próprio sinal. Assim, os próximos indivíduos sabem que a decisão do indivíduo 3 não comunica nenhuma informação sobre o seu sinal, de modo que todas elas estarão na mesma situação que o indivíduo 3 e também realizarão a mesma escolha. Nesse caso, diz-se que uma cascata se iniciou, ou seja, tem-se uma situação na qual é ótimo para um indivíduo ignorar a sua própria informação e seguir a decisão de seus predecessores.

Baseada nessa análise com os três primeiros indivíduos e os resultados obtidos na seção anterior é fácil generalizar o processo de decisão para os indivíduos além do terceiro.

Assim, pode-se resumir a regra de decisão ótima de um indivíduo da seguinte forma. Defini-se a quantidade d como a diferença entre o número de predecessores que aceitaram e o número de predecessores que rejeitaram. Se $d > 1$, então o indivíduo deve adotar independente do seu sinal privado. Se $d = 1$ ou $d = 0$, então o indivíduo deve seguir o seu sinal privado. As decisões para $d = -1$ e $d < -1$ são simétricas. Tal processo pode ser visualizado conforme ilustrado na Figura 1. Tem-se que a diferença de aceitações e rejeições evolui de forma aleatória, até que em algum momento ela atinge a barreira de $+2$ e é iniciada uma Cascata para cima. De modo simétrico, ao atingir a barreira de -2 é iniciada uma Cascata para baixo.

Finalmente, é muito difícil que essa diferença permaneça em um intervalo tão estreito (entre -1 e 1) para sempre. Por exemplo, basta que três indivíduos obtenham consecutiva-

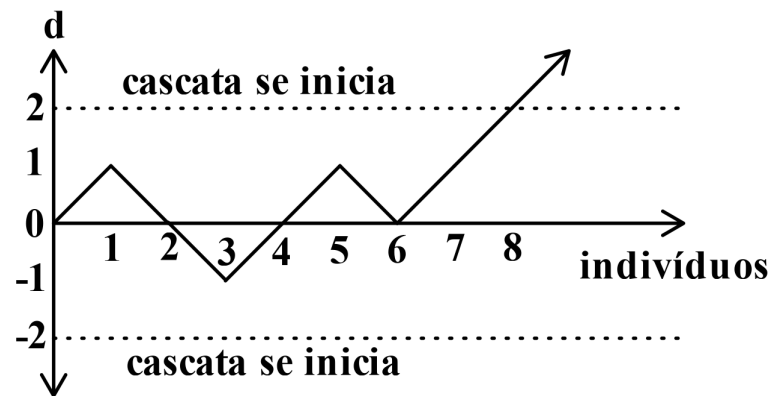


Figura 1 – Uma cascata se inicia quando a diferença do número de aceitações e rejeições chega à dois.

mente o mesmo sinal para que uma cascata se inicie definitivamente. A probabilidade de encontrar três sinais iguais consecutivos converge para 1 conforme o número de indivíduos N tende a infinito. Para ver isso, primeiro imagine que esses N indivíduos são divididos em blocos de três. Então, a probabilidade de que qualquer bloco receba sinais idênticos é dada por $q^3 + (1 - q)^3$. Consequentemente, a probabilidade que nenhum desses blocos consista de três sinais idênticos é $(1 - q^3 - (1 - q)^3)^{N/3}$. Com N tendendo ao infinito essa quantidade tende à 0, então a probabilidade de uma cascata se iniciar converge para 1. Portanto, nesse limite, uma cascata irá ocorrer nesse modelo quase que certamente.

Baseado nessa discussão, tem-se uma conclusão geral sobre esse modelo: quando os indivíduos podem ver o que os outros estão fazendo, mas não o que eles sabem, existe um período inicial no qual eles confiam em sua própria informação, mas com o passar do tempo a população eventualmente chega em um situação na qual é benéfico para os indivíduos ignorarem a sua própria informação e seguir a multidão.

3.1.3 Conclusões sobre as Cascatas Informacionais

- (i) *Cascatas podem estar erradas.* Se, por exemplo, aceitar a opção é de fato uma má ideia, mas os dois primeiros indivíduos acabarem recebendo sinais altos e aceitando a opção, então uma cascata de aceitações irá se iniciar imediatamente, mesmo sendo a escolha errada para a população.
- (ii) *Cascatas podem ser baseadas em muita pouca informação.* Dado que as pessoas ignoram sua informação privada uma vez que uma cascata se iniciou, somente a informação pré-cascata influencia o comportamento da população. Isso significa que se uma cascata se inicia relativamente cedo em uma grande população, a maioria da informação privada obtida pela população não é utilizada e a informação coletiva para de se acumular.

- (iii) *Cascatas são frágeis.* Cascatas são fáceis de se iniciar, mas também são fáceis de serem paradas. Basta que alguma informação pública seja liberada para a população (um sinal que todos os indivíduos podem ver) ou que algum indivíduo receba uma informação levemente superior (como, por exemplo, receber dois sinais seguidos) para que uma cascata seja parada.

3.2 Um modelo para a dinâmica de tendências e modas

3.2.1 Definição do modelo

Consideremos um sistema que representa uma população de N agentes e L tendências (ou modas). Cada agente é caracterizado por uma única tendência a cada instante de tempo, indicando o grupo ao qual ele pertence naquele momento. Na perspectiva de cada agente isolado, todas as tendências são igualmente boas, de modo que, na ausência de qualquer informação adicional, não há um viés por nenhuma das tendências.

Cada uma das tendências é associada a um número que representa a sua taxa de crescimento (ou momento). Por exemplo, o momento de uma tendência i no instante de tempo t é dada por $p_i(t) = \Delta N_i(t)$, onde $N_i(t)$ é o número de agentes na tendência i no tempo t e $\Delta N_i(t) = N_i(t) - N_i(t-1)$.

Os agentes podem alterar suas tendências ao interagirem com outros agentes. Por exemplo, em um dado instante de tempo o agente i entra em contato com o agente j , ambos escolhidos de forma aleatória, e compara o momento de suas respectivas tendências p_i e p_j . Se o momento de sua tendência p_i for menor do que p_j , então o agente i abandona sua tendência e adota a tendência do agente j . Esse processo de imitação corresponde à pressão do conformismo. Caso contrário, se p_i for maior do que p_j , então o agente i mantém a sua tendência. Após N interações desse tipo, tem-se um passo temporal e os momentos das tendências são recalculados.

Além disso, se durante a interação o agente não alterar sua tendência, então ele deve verificar se o momento dela se encontra abaixo de um certo limiar p_{crit} . Se o momento de sua tendência for menor do que p_{crit} , então o agente a abandona e procura por uma nova, se a tendência estiver desocupada ele a assume, caso contrário se mantém na que estava anteriormente. Tal processo caracteriza a pressão por singularidade, onde ficar em uma tendência que não está crescendo o suficiente é pior do que assumir o risco de procurar uma nova. Assume-se que esse parâmetro possui o mesmo valor compartilhado entre todos os agentes.

Na Figura 2 é exemplificado uma evolução característica do sistema descrito, na qual os histogramas representam a ocupação de indivíduos em cada uma das tendências. É possível observar um comportamento cíclico do sistema, no qual ele alterna entre um estado extremamente ordenado com uma tendência dominando as outras e um estado desordenado que há a coexistência de várias pequenas tendências. De forma qualitativa,

pode-se interpretar o fenômeno espontâneo de formação de uma tendência grande como uma cascata informacional, devido à sua rápida disseminação pela população.

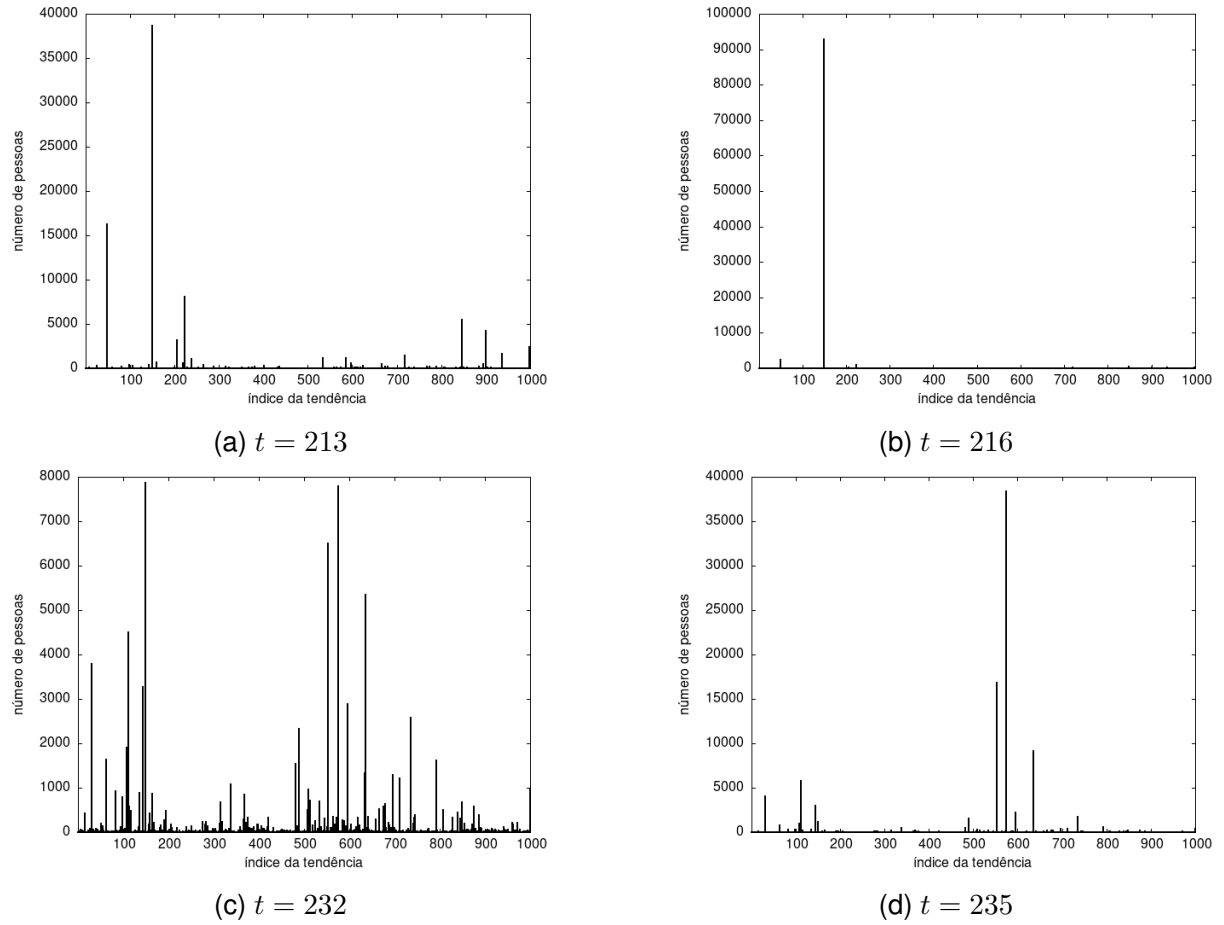


Figura 2 – Histogramas da evolução da ocupação das tendências para os parâmetros $N = 10^5$, $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$. Tem-se ilustrado em (a) e (b) a dominância de poucas tendências, caracterizando um estado mais ordenado do sistema. Então o seu decaimento em (c), com a competição de várias tendências pequenas. Por fim há a emergência de uma nova tendência dominante em (d) e o ciclo irá se repetir novamente.

O comportamento periódico do sistema pode ser melhor visualizado ao plotarmos a taxa de ocupação da tendência dominante $(N_{dom}(t)/N)$, onde o índice *dom* é usado para indicar que estamos considerando apenas a tendência com maior número de indivíduos) contra o tempo, conforme ilustrado na Figura 3. Uma medida interessante é o intervalo de tempo T entre a formação de tendências dominantes, ou seja, dado que o sistema se encontra em um estado ordenando com apenas uma tendência, quantos passos temporais são necessários para que o sistema atinja novamente esse estado? O intervalo de tempo entre esses máximos permanece relativamente constante, onde nesse caso o valor médio do período é $\langle T \rangle = 23.62$.

Finalmente, devido a dinâmica do sistema descrito não há pontos fixos estáveis globais. Um ponto fixo ocorre nesse sistema quando $p_i = p_j = p$, o que implica que $p_i = p = 0$, $\forall i$,

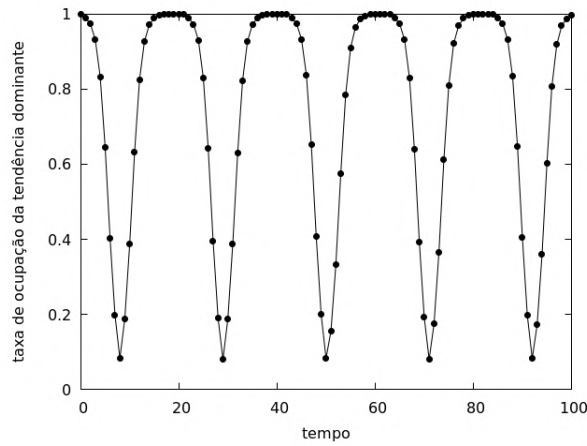


Figura 3 – Gráfico contendo a evolução da taxa de ocupação da maior tendência em função do tempo, no qual os parâmetros utilizados foram $N = 10^5$, $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$.

para que haja a conservação geral de indivíduos. Esse caso corresponde a distribuição plana, na qual cada tendência terá ocupação $N_i = N/L$, $\forall i$, sendo este o estado mais desordenado possível do sistema. Claramente este ponto fixo é instável à qualquer perturbação, bastando um indivíduo mudar sua tendência para que haja uma tendência com momento positivo e outra com momento negativo, fazendo com que o restante dos indivíduos se juntem à primeira e abandonem a última.

Além disso, o valor de p_{crit} afeta a estabilidade quando sua configuração está extremamente ordenada com todos os indivíduos em apenas uma tendência. Nesse caso, para que o ponto seja instável, basta que $p_{crit} > 0$. Já sua condição de estabilidade é que $p_{crit} \leq 0$, o que faz com que os agentes não abandonem uma tendência que esteja estática ou decaindo. Desse modo, na ausência de outras tendências com maior crescimento, o sistema irá se estabilizar quando houver a formação da primeira tendência dominante.

3.2.2 Características globais do modelo

Agora, deseja-se caracterizar os ciclos de formação e colapso de tendências vistos anteriormente, utilizando quantidades globais análogas as da Mecânica Estatística para capturar essas propriedades do sistema.

Primeiramente, define-se a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente pertença à uma tendência i como

$$n_i = \frac{N_i}{N}, \quad (3.2)$$

onde $0 \leq n_i \leq 1$. Além disso, tem-se que pela conservação do número de agentes $\sum_{i=1}^L n_i = 1$ para todo instante de tempo.

Assim, como a configuração da população alterna entre estados de ordem (apenas uma tendência dominante) e estados de desordem (coexistências de muitas tendências pequenas), pode-se definir a entropia de Shannon, S , para capturar essa propriedade.

Portanto, dado um conjunto discreto de tendências, a entropia de Shannon é dada por

$$S = - \sum_{i=1}^L n_i \ln n_i. \quad (3.3)$$

A configuração do sistema que leva ao menor valor de entropia é a de uma única tendência contendo a população inteira, fazendo com que $S_{min} = 0$. Por outro lado, como comentado anteriormente, a distribuição plana é a que leva à maior desordem do sistema, que escrita em termos de n_i fica

$$n_i = \frac{1}{L}, \quad \forall i.$$

Portanto, decorre que o valor de entropia máximo, S_{max} , é dado por

$$S_{max} = - \sum_{i=1}^L \frac{1}{L} \ln \frac{1}{L} = \ln(L).$$

Desse modo, dado o comportamento periódico do modelo descrito, a entropia do sistema oscila entre esses dois estados assintóticos durante os ciclos de formação e decaimento das tendências, conforme mostrado na Figura 4.

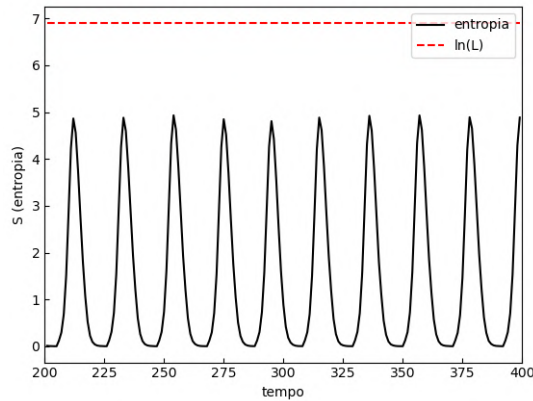


Figura 4 – Comportamento oscilatório da entropia total em função do tempo, para uma população com $N = 10^5$ agentes, $L = 10^3$ tendências e $p_{crit} = 1$, onde a linha preta representa a evolução da entropia e a linha tracejada representa a entropia máxima $S_{max} = \ln(L) \simeq 6.91$.

O comportamento observado da dinâmica descrita demonstra um certo tipo de criticalidade auto-organizada, que pode ser medida através de cumulantes análogos aos usados para estudar percolação. Distribuições estatísticas nas proximidades do ponto crítico podem ser definidas por dois expoentes. Para percolação, esses expoentes são a força de percolação P_c , que é o tamanho do maior grupo, e a susceptibilidade de percolação S_c , definida como a soma dos quadrados do tamanho de todos os grupos com o maior grupo subtraído. A criticalidade do sistema é o início da formação de um aglomerado abrangente, que é associado a um aumento acentuado da força de percolação P_c e um pico na susceptibilidade S_c .

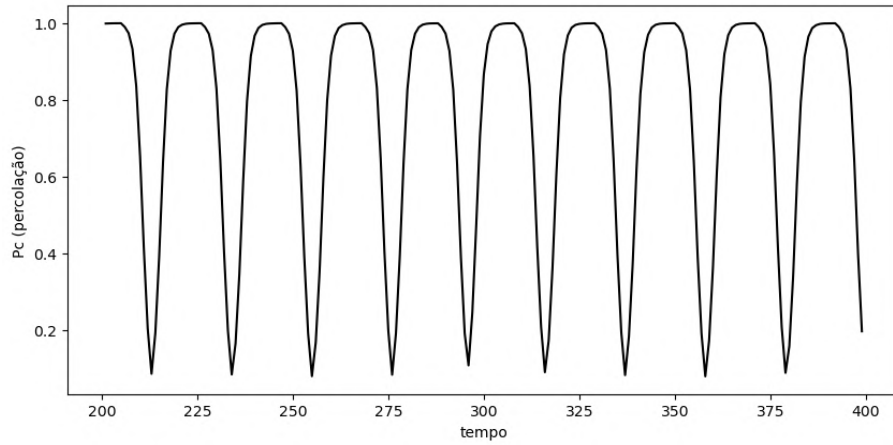
No contexto da dinâmica de tendências, tem-se, então, que a força de percolação P_c é definida como a fração da população na maior tendência, ou seja,

$$P_c = \frac{\max(N_i)}{N}, \quad (3.4)$$

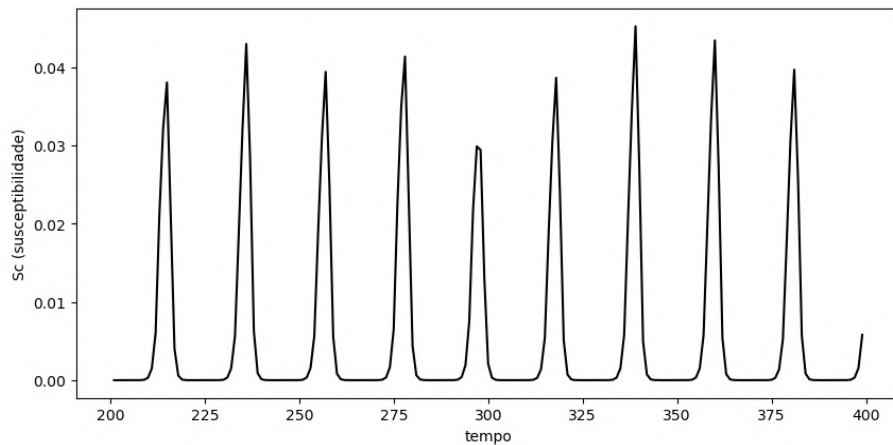
enquanto que a susceptibilidade de percolação S_c é definida como

$$S_c = \frac{\left(\sum_{i=1}^L N_i^2\right) - P_c^2}{N^2}. \quad (3.5)$$

A Figura 5 ilustra a evolução de P_c e S_c para o mesmo caso da Figura 4. Pode-se observar que P_c oscila entre estados de máxima ocupação $P_c = 1$ e estados de ocupação bem baixas. Enquanto isso, durante o estado intermediário de P_c , tem-se um ponto de máximo em S_c , sinalizando o comportamento crítico.



(a)



(b)

Figura 5 – (a) Evolução da força de percolação P_c e (b) Evolução da susceptibilidade de percolação, onde ambos os gráficos foram feitos para uma população de $N = 10^5$ agentes, $L = 10^3$ tendências e $p_{crit} = 1$.

3.2.3 Variação dos parâmetros iniciais

Nesta seção será estudado o que ocorre com o comportamento do sistema ao serem alterados os parâmetros iniciais N , L e p_{crit} .

Primeiramente, comecemos estudando o momento crítico p_{crit} . Tem-se que para valores de $p_{crit} \leq 0$ não há oscilações no sistema e ele se estabiliza ao haver a formação da primeira tendência dominante. Agora, para valores de $p_{crit} > 0$, nota-se que os períodos de oscilação diminuem conforme p_{crit} aumenta. Os resultados obtidos estão sumarizados na Tabela 2. Essa variação de período se torna evidente ao ser plotado a taxa de ocupação da maior tendência para valores de p_{crit} diferentes no mesmo gráfico, conforme ilustrado na Figura 6.

p_{crit}	$\langle T \rangle$
1	24
10	21
10^2	18
10^3	15

Tabela 2 – Resultados aproximados do período médio obtidos ao variar p_{crit}

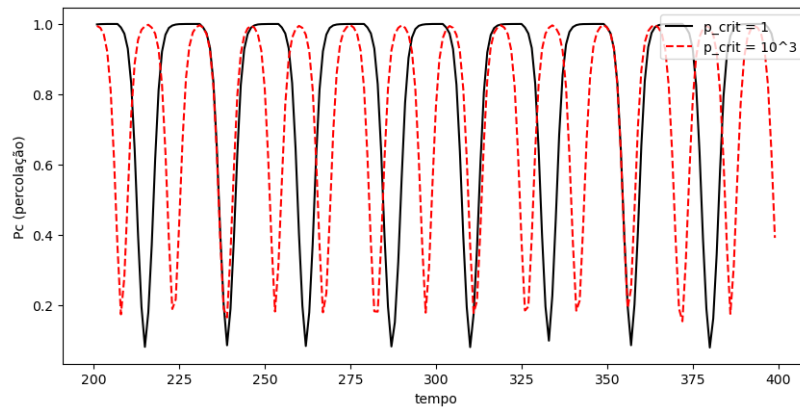


Figura 6 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar p_{crit} , onde os parâmetros $N = 10^5$ e $L = 10^3$ foram mantidos constantes.

Além disso, é interessante considerar a distribuição dos tamanhos médios das tendências para ambos os valores de p_{crit} . Na Figura 7, para $p_{crit} = 10^3$ é possível notar que o tamanho médio máximo das tendências diminui e o tamanho médio mínimo cresce ao comparar com o caso $p_{crit} = 1$. Tal comportamento é explicado pelo fato de as tendências dominantes permanecem por menos tempos em sua ocupação máxima e o seu mínimo de ocupação ser maior ao ser utilizado $p_{crit} = 10^3$.

Ao variar o número de tendências L mantendo o restante dos parâmetros fixos, tem-se que o período de oscilação permanece constante. No entanto, percebe-se que a taxa de ocupação da maior tendência permanece menos tempo em seu máximo e os agentes se distribuem de forma mais uniforme em seu mínimo. Esse comportamento é esperado, pois

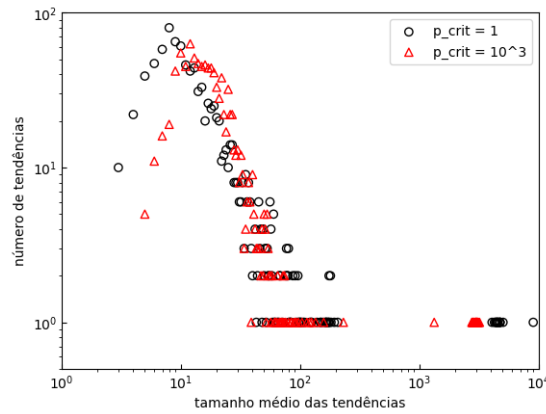


Figura 7 – Distribuição do tamanho médio das tendências para $N = 10^5$, $L = 10^3$ e dois valores de $p_{crit} = 1, 10^3$.

com um número maior de tendências a probabilidade de um agente encontrar uma vazia ao abandonar a tendência dominante é maior. Desse modo, obtém-se os resultados da Figura 8, onde o período aproximado de ambos os casos é $\langle T \rangle \simeq 25$.

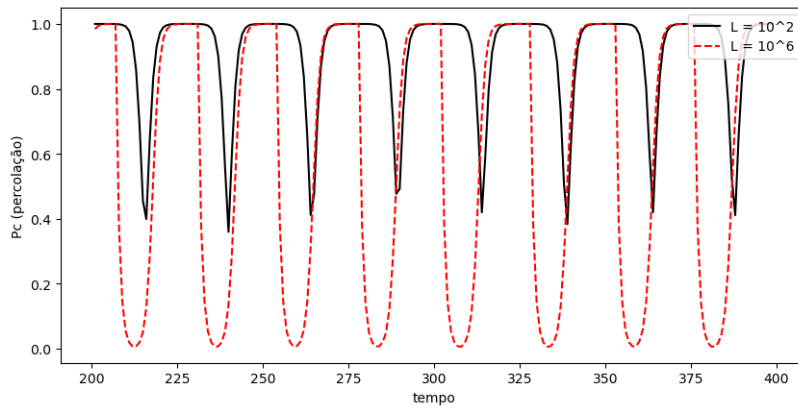


Figura 8 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar L , onde os parâmetros $N = 10^5$ e $p_{crit} = 1$ foram mantidos constantes.

Finalmente, ao variar o número de agente N mantendo os parâmetros L e p_{crit} fixos, é possível notar uma alteração nos períodos de oscilação. Nesse caso, evidentemente o período aumenta conforme o número de agentes cresce, conforme sumarizado na Tabela 3. Pode-se perceber na Figura 9 que para N pequeno as oscilações são rápidas, enquanto que para N grande elas são lentas e o sistema permanece por um tempo maior com a tendência dominante em seu máximo.

3.3 Modelos probabilísticos para a dinâmica de tendências

3.3.1 Modelo 1

Considere uma população contendo N agentes e L tendências. Cada um dos agentes é caracterizado por uma das tendências, podendo ela ser alterada ao longo da dinâmica. Na

N	$\langle T \rangle$
10^2	11
10^3	15
10^4	19
10^5	24
10^6	28

Tabela 3 – Resultados aproximados do período médio obtidos ao variar N

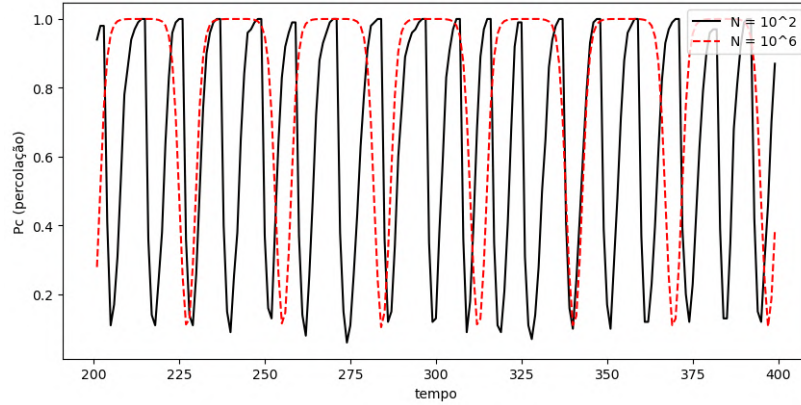


Figura 9 – Evolução da taxa de ocupação da maior tendência (P_c) ao variar N , onde os parâmetros $L = 10^3$ e $p_{crit} = 1$ foram mantidos constantes.

perspectiva de um único agente isolado todas as tendências são igualmente boas, assim, na ausência de informações adicionais, não há preferência por nenhuma tendência específica. Denotamos o número de agentes em uma tendência em um dado instante de tempo t por $N_i(t)$, para $i = 1, 2, \dots, L$.

Nesse modelo, considera-se inicialmente os agentes distribuídos de forma aleatória entre as tendências. Então, a dinâmica ocorre da seguinte forma:

1. Escolha um agente i de forma aleatória. Este é o agente focal.
2. Escolha um outro agente j . Este é o agente modelo.
3. Se o número de agentes na tendência do agente j for maior do que o número de agentes na tendência do agente i (i.e. $N_j > N_i$), então o agente i mudará para a tendência do agente j com probabilidade dada por

$$q_{ij}(t) = \frac{N_j(t) - N_i(t)}{N - 2}. \quad (3.6)$$

Caso contrário, nada acontece. A tendência dos agentes é atualizada de forma assíncrona com passo de tempo $1/N$.

4. Após esse processo ser repetido N vezes, é dito que foi feita uma iteração e o tempo é atualizado $t \rightarrow t + 1$.

Para analisar o modelo serão utilizadas as mesmas medidas apresentadas na Seção 3.2.2. Além dessas medidas, também será considerado o tempo médio necessário para que uma tendência se torne dominante. Para isso, serão feitas as simulações para M ensembles criados a partir dos mesmos parâmetros e mede-se o tempo de fixação, t_{fix} , necessário para que uma das tendências se torne dominante em cada um deles. Assim, o tempo médio de fixação, denotado por τ , é definido como

$$\tau = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M t_{fix}^{(i)} \quad (3.7)$$

Para realizar as simulações desse modelo, foram considerados os seguintes parâmetros: $N \in [10^2, 10^3, 10^4, 10^5]$ e $L \in [10, 10^2, 10^3, 10^4]$ e um conjunto de $M = 10$ ensembles. Os resultados característicos do modelo podem ser visualizados na Figura 10 para um dos possíveis conjuntos de parâmetros, onde cada uma das linhas representa um dos ensembles. No gráfico da entropia, nota-se que quanto maior o número de agentes mais desordenado e próximo de $\log(L)$ o sistema se encontra inicialmente. O sistema permanece próximo desse estado inicial até que eventualmente haja uma quebra de simetria entre as tendências, fazendo com que uma delas cresça rapidamente e atraia todos os agentes. Esse comportamento é refletido nos gráficos de P_c e S_c , onde é possível observar a tendência dominante sendo completamente ocupada e picos na susceptibilidade justamente nos mesmos instantes que a entropia diminui.

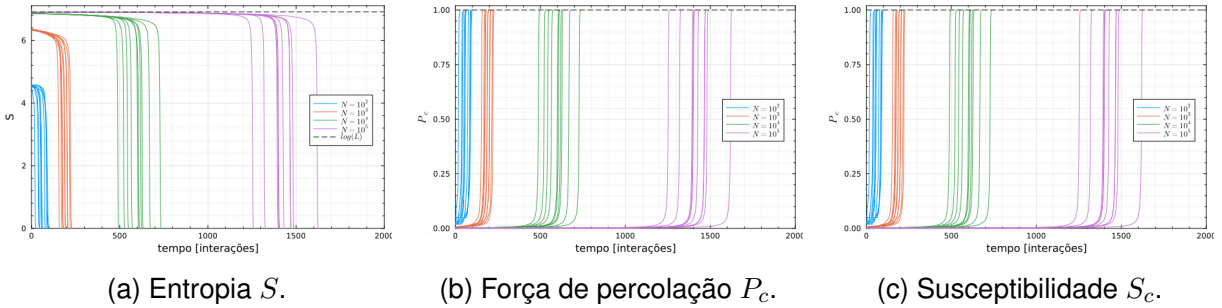


Figura 10 – Resultados obtidos para uma simulação de 10 ensembles utilizando o modelo 1, onde os parâmetros utilizados foram: $N \in [10^2, 10^3, 10^4, 10^5]$ e $L = 10^3$.

Pelo gráfico da força de percolação na Figura 10b, percebe-se que o tempo necessário para que uma das tendências se fixe cresce de forma considerável com N , sugerindo uma possível dependência do valor de τ com o número de agentes. Tomando o logaritmo dessas medidas e fazendo o gráfico de $\log(\tau)$ versus $\log(N)$ (Figura 11a) é possível ver esse crescimento. Supondo que o crescimento é dado por uma função linear do tipo $y(x) = a + bx$, foram feitos ajustes lineares para cada conjunto de pontos, no qual os resultados podem ser visualizados na legenda do gráfico. A partir desses dados, nota-se que também há uma dependência de τ com o número de tendências L , então foi feita uma análise semelhante em um gráfico de $\log(\tau)$ versus $\log(L)$, conforme ilustrado na Figura 11b.

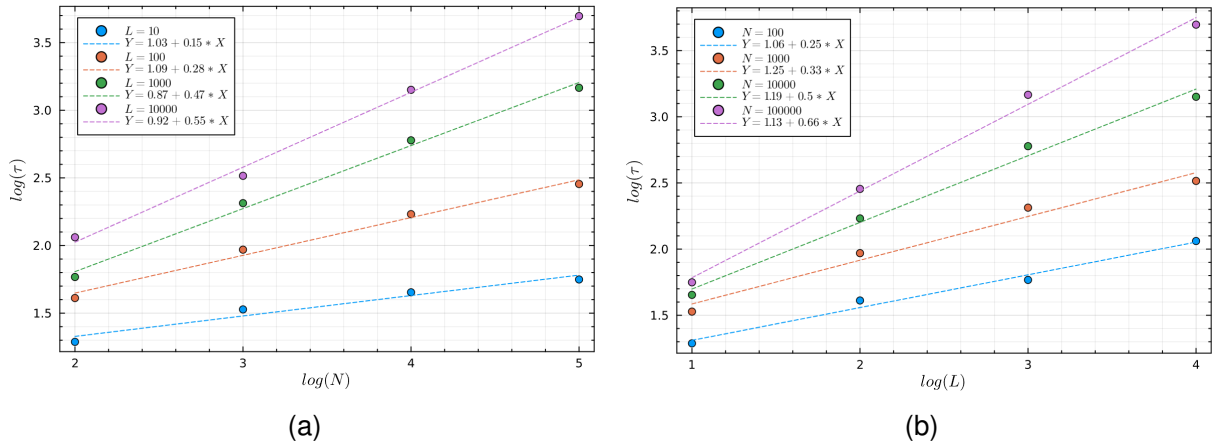


Figura 11 – Análise do tempo médio de fixação em função de (a) N e (b) de L .

Para tentar resumir os resultados do modelo, supõe-se que a dependência de $\log(\tau)$ é dada pelo produto $\log(N) \log(L)$. Então, agrupando o conjunto de dados e realizando um ajuste linear, obtém-se os resultados da Figura 12. Portanto, é possível concluir que a curva descrita pelo tempo de fixação médio τ é dada por

$$\tau(N, L) = 10^a N^b \log(L),$$

com os parâmetros de ajuste $a = 1.1$ e $b = 0.13$.

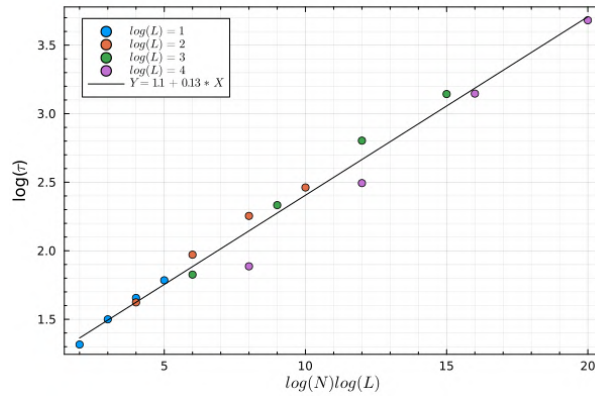


Figura 12 – Análise da dependência do tempo médio de fixação em função de ambos parâmetros do sistema.

3.3.2 Modelo 2

Nesse modelo, além do que já foi descrito no modelo anterior, é associado a cada uma das tendências $i = 1, \dots, L$ um valor que é dado pelo fluxo de indivíduos naquela tendência durante uma iteração. Assim, definimos esse fluxo como

$$\phi_i(t+1) = N_i(t+1) - N_i(t), \quad (3.8)$$

ou seja, ele é dado pela diferença na ocupação da tendência após a movimentação de em média N agentes.

Portanto, o algoritmo desse modelo é dado da seguinte forma:

1. Escolha um agente i de forma aleatória, seu *payoff* é ϕ_i . Este é o agente focal.
2. Escolha um outro agente j , seu *payoff* é ϕ_j . Este é o agente modelo.
3. Se o *payoff* do agente j for maior do que o *payoff* do agente i (i.e. $\phi_j > \phi_i$), então o agente i mudará de tendência com probabilidade

$$q_{ij}(t) = (\phi_j(t) - \phi_i(t))/2N. \quad (3.9)$$

Além disso, se o *payoff* dos dois agentes forem iguais (i.e. $\phi_j = \phi_i$), então o agente i irá mudar de tendência. Caso contrário, nada acontece. A tendência dos agentes é atualizada de forma assíncrona com passo de tempo $1/N$.

4. Após esse processo ser repetido N vezes, dizemos que foi feita uma iteração e atualizamos o tempo $t \rightarrow t + 1$.

A condição de que o agente focal sempre irá mudar de tendência quando os *payoffs* forem os mesmos é necessária para que a simulação não congele nas primeiras iterações. Como foi visto no modelo anterior, nas primeiras iterações não há nenhuma tendência que se sobressaia em relação as outras, assim não há grandes movimentações de agentes no começo. Como consequência, o fluxo de todas as tendências tende rapidamente à zero antes que possa haver a dominância de qualquer uma das tendências. Por causa dessa condição, o modelo não se torna tão coerente com o que está tentando se modelar, porém mesmo assim será feita uma análise de seus resultados.

Para realizar as simulações, foram considerados os seguintes conjuntos de parâmetros: $N \in [10, 31, 10^2, 316, 10^3]$, $L \in [10, 10^2, 10^3, 10^4]$ e 20 ensembles. A evolução da tendência dominante de cada um dos ensembles pode ser observada na Figura 13 para um dos alguns dos conjuntos de parâmetros.

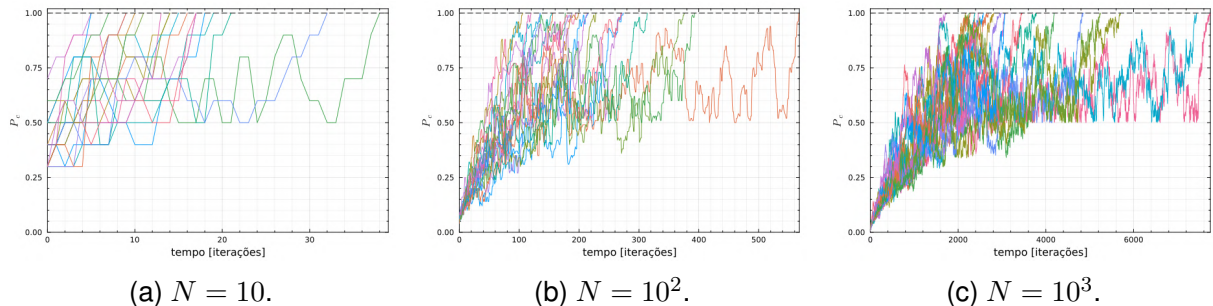


Figura 13 – Resultados obtidos ao medir a taxa de ocupação da tendência dominante para uma simulação de 20 ensembles utilizando o modelo 2 com os seguintes parâmetros: $N \in [10, 10^2, 10^3]$ e $L = 10^3$.

Ao refazer a análise do tempo médio de fixação em função dos parâmetros do sistema é possível obter os resultados apresentados na Figura 14. A partir desse conjunto de

dados, conclui-se que τ depende de N , mas não de L , dado que todas as retas possuem coeficiente angular semelhante. Portanto, o crescimento de τ nesse modelo é dado pela equação

$$\tau(N) = 10^a N^b,$$

onde os parâmetros obtidos são aproximadamente $a \approx 0.1$ e $b \approx 1.14$.

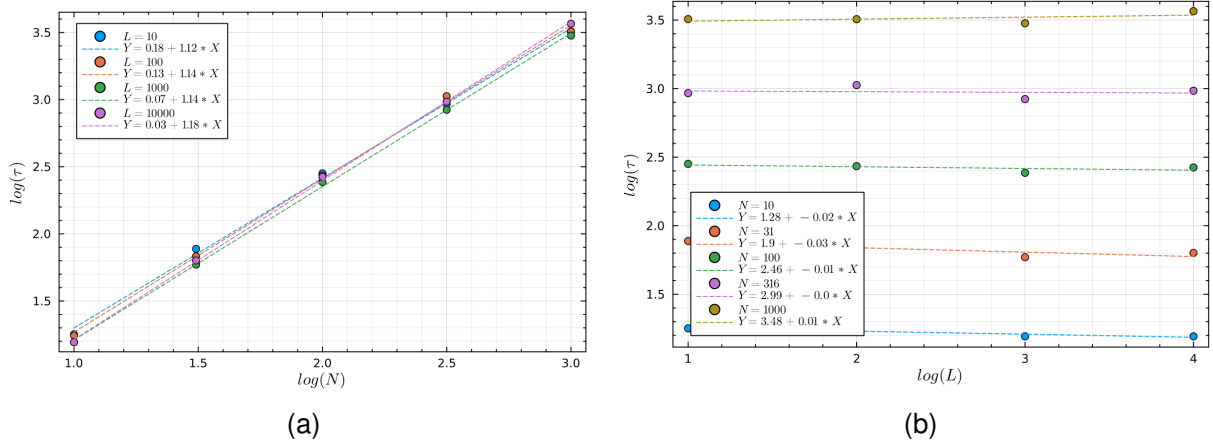


Figura 14 – Análise do tempo médio de fixação em função de (a) N e (b) de L .

3.3.3 Modelo 3

Neste modelo, a dinâmica é a mesma do modelo anterior, porém agora a probabilidade de um agente i mudar para a tendência de um agente j é dada pela função de Fermi-Dirac, ou seja,

$$q_{ij}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\phi_j(t) - \phi_i(t))/2N}}, \quad (3.10)$$

onde β é uma constante que depende da temperatura do sistema. Porém, nesse caso, não há nenhuma restrição nos valores de ϕ_j e de ϕ_i , e a função q_{ij} sempre será utilizada para determinar a probabilidade do agente mudar de tendência.

Definindo $x(t) \equiv (\phi_j(t) - \phi_i(t))/2N$, a equação 3.10 se torna

$$q_{ij}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x(t)}}, \quad (3.11)$$

onde os valores dessa nova variável estão no intervalo $-1 \leq x(t) \leq 1$. A forma dessa função pode ser visualizada na Figura 15, nota-se que o comportamento dessa função é adequado com o que está sendo modelado. Nesse caso, para valores de x negativos (i.e. $\phi_j < \phi_i$) a probabilidade de o agente mudar de tendência tende a ser menor. O contrário também é verdade, para x positivo a probabilidade tende a ser maior. Para $x = 0$ o agente é indiferente. Assim, o parâmetro β é utilizado para modular essa probabilidade. Para β muito grande (temperatura baixa), o sistema se comporta de modo semelhante ao modelo determinista, pois o agente sempre irá mudar quando $x > 0$, não fará nada caso $x < 0$

e mudará com probabilidade $1/2$ quando $x = 0$. Já para valores de β muito pequenos (temperatura alta), então os agentes se tornam indiferentes em todos os casos e mudarão com probabilidade $1/2$.

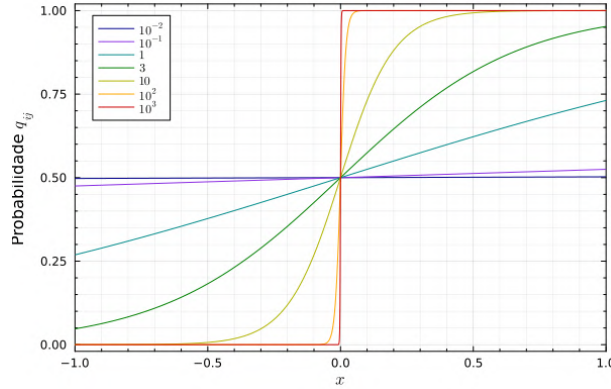


Figura 15 – Função de Fermi-Dirac para diferentes valores de β .

Inicialmente, para realizar as simulações foram utilizados os seguintes parâmetros $N \in [10, 31, 10^2, 316, 10^3]$, $L \in [10, 10^2, 10^3, 10^4]$ e $\beta \in [10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2]$, onde para cada conjunto de parâmetros foram gerados 100 ensembles. Na Figura 16, tem-se ilustrado os resultados obtidos ao medir a taxa de ocupação da tendência dominante de 10 ensembles para diferentes valores de β na simulação, mantendo-se N e L fixos. Para valores de β pequenos, tem-se que a evolução da tendência dominante é dada praticamente de forma aleatória, levando à um grande número de iterações para atingir sua ocupação máxima. Porém, conforme β cresce as curvas ficam menos aleatórias e se fixam mais rapidamente. Nota-se o surgimento de algumas oscilações antes de sua fixação nessas curvas, que ocorrem devido à uma competição entre as tendência dominante com as outras tendências mais populosas.

Agora, para realizar a análise do tempo médio de fixação é necessário manter um dos parâmetros fixos e variar o restante. Primeiramente, é considerado o comportamento de $\log(\tau)$ versus $\log(N)$ variando os valores de β e fixando o valor de L . Os resultados obtidos podem ser visualizados na Figura 17. A partir dos gráficos apresentados, observa-se que as curvas com os valores de $\beta \leq 1$ coincidem, indicando um limite inferior do valor de β . Além disso, nota-se que o coeficiente angular das curvas diminui conforme β cresce. Ao refazer essa mesma análise para o caso em que os valores de L variam e β é mantido fixo, chega-se nos resultados apresentados na Figura 18. Nesse caso, conclui-se que o tempo médio de fixação não depende explicitamente do parâmetro L , visto que todas as curvas apresentam coeficientes angulares semelhantes.

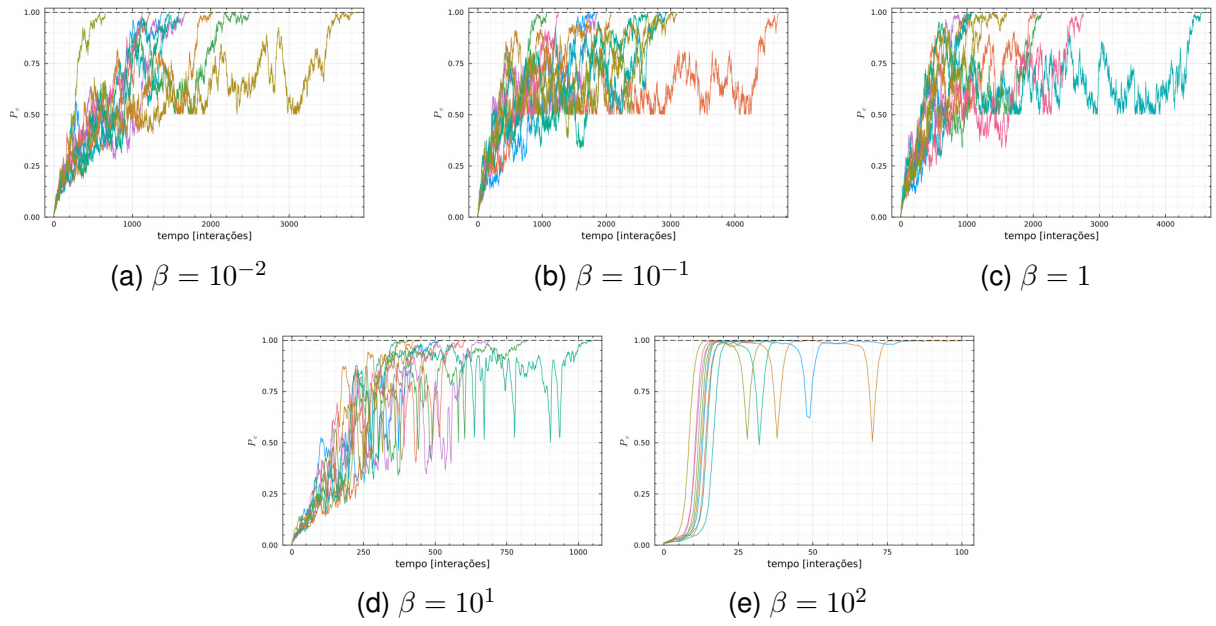


Figura 16 – Evolução da taxa de ocupação da tendência dominante para $N = 10^3$ e $L = 10^3$ fixos e diferentes valores de β .

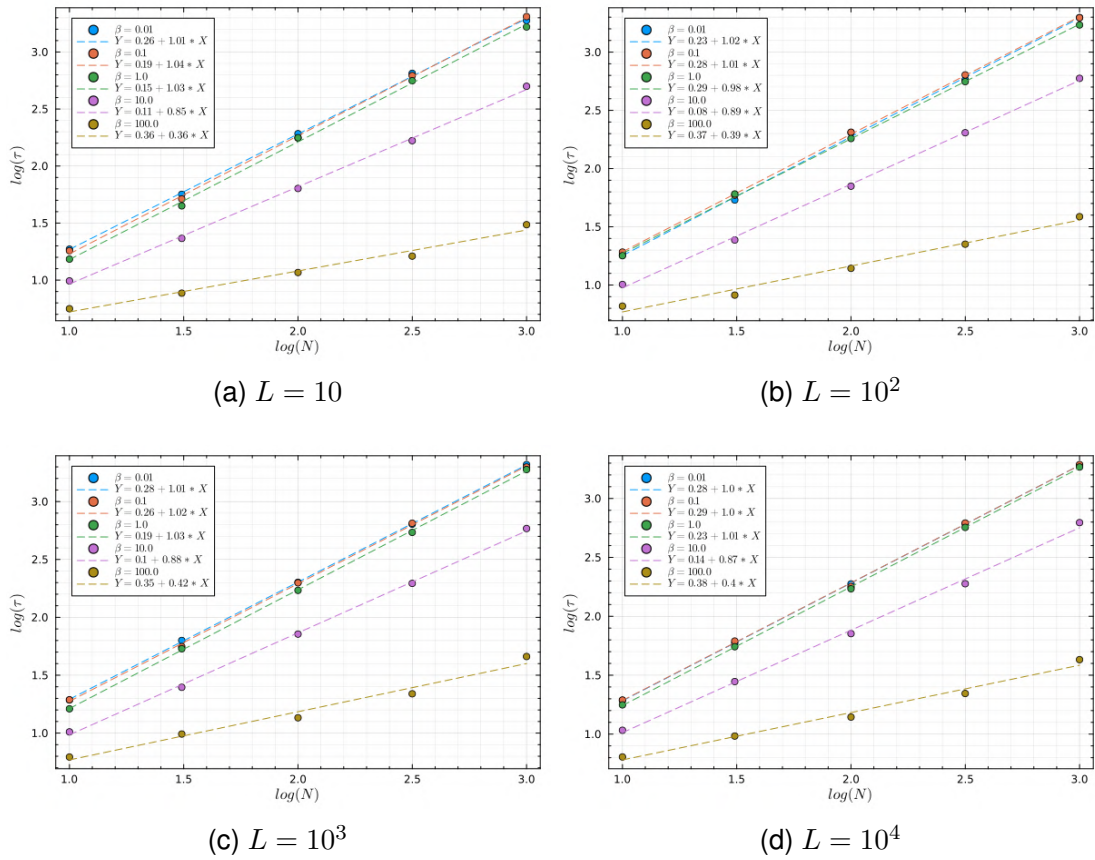


Figura 17 – Análise do tempo médio de fixação em função de N ao variar β e mantendo L fixo.

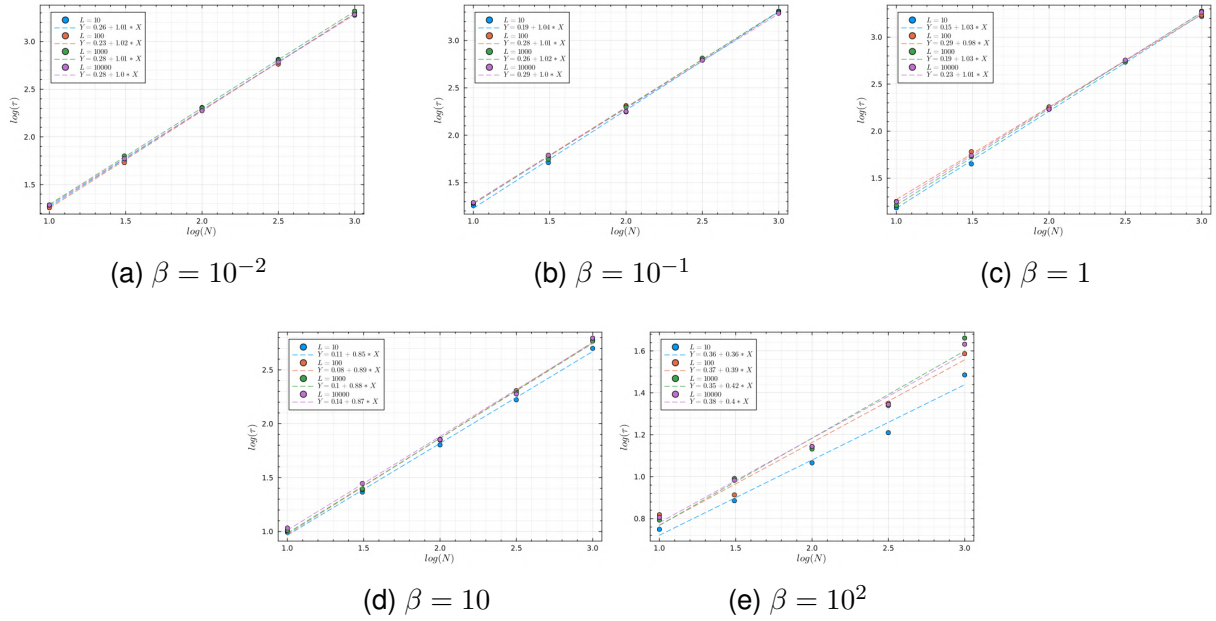


Figura 18 – Análise do tempo médio de fixação em função de N ao variar L e mantendo β fixo.

Finalmente, a análise do tempo médio de fixação em função de N e β foi refeita com outro conjunto de valores para a temperatura, conforme pode ser observado na Figura 19. Nesse caso, foi explorado o comportamento da curva para $\beta \rightarrow \infty$, que nesse caso foi utilizado simplesmente um valor muito grande de $\beta = 10^{300}$. Com base nesses resultados, chega-se que o comportamento desse modelo é dado por dois regimes: um para $\beta < 1$ e outro para $\beta > 1$. No primeiro regime, verificou-se que para valores de $\beta \in (0, 5]$ o valor do coeficiente angular da reta é aproximadamente $b \sim 1$ e não depende do valor de β . Dessa forma, conclui-se que o crescimento de τ é linear em função de N , com a equação dada por

$$\tau(N) = 10^a N, \text{ para } \beta \in (0, 5].$$

No segundo regime, para $\beta \in (5, \infty)$, os valores dos coeficientes angulares diminuem conforme β cresce. Desse modo, tem-se sempre que nesse regime $b(\beta) < 1$, e a equação do tempo médio de fixação é dada por

$$\tau(N, \beta) = 10^a N^{b(\beta)}, \text{ onde } b(\beta) < 1 \text{ para } \beta \in (5, \infty).$$

Portanto, de forma análoga à Mecânica Estatística, ao considerar o tempo médio de fixação por agente (τ/N) e tomar o limite termodinâmico de $N \rightarrow \infty$ chega-se que no primeiro regime

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau/N = \lim_{N \rightarrow \infty} 10^a \rightarrow cte,$$

e no segundo regime

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau/N = \lim_{N \rightarrow \infty} 10^a N^{b(\beta)-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{10^a}{N^{1-b(\beta)}} \rightarrow 0.$$

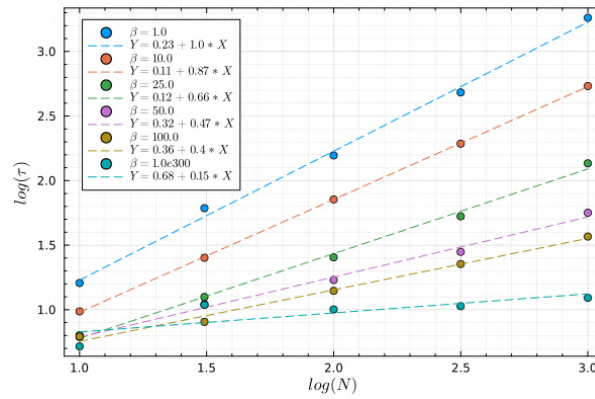
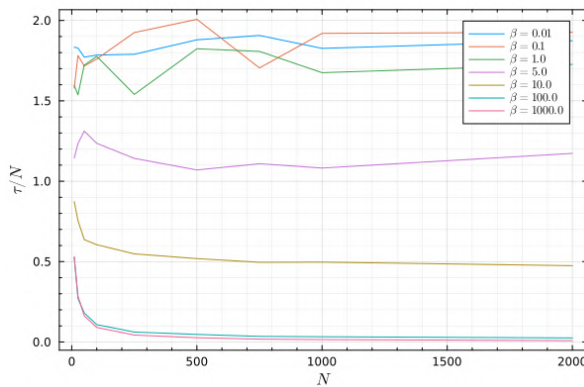
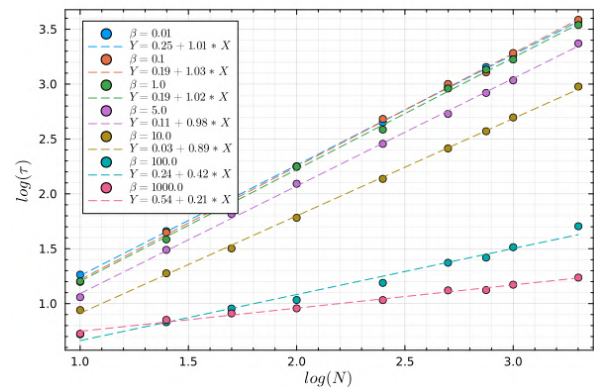


Figura 19 – Análise do tempo médio de fixação em função de N ao variarmos β com $L = 10^2$. As retas de $\beta = 1$ e $\beta \rightarrow \infty$ representam o comportamento do sistema em seus dois extremos.

Para verificar esses resultados, tem-se ilustrado o gráfico de τ/N versus N na Figura 20a e ao lado na Figura 20b as respectivas retas de cada valor de β . Observa-se que as curvas para valores de β no primeiro regime tendem para uma constante. Da mesma forma, as curvas para valores de β altos no segundo regime tendem rapidamente à zero. Porém, para a curva de $\beta = 10$ (um valor no segundo regime, mas ainda próximo do primeiro) não foi possível observá-la tender à zero com os valores utilizados na simulação, pois o valor de seu coeficiente angular ainda está próximo de 1, fazendo com o que seu decaimento seja lento. Mesmo assim, certamente para valores maiores de N essa curva tenderia à zero, dado que $\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N^{1-0.89} \rightarrow 0$, mostrando consistência com a discussão realizada anteriormente.



(a)



(b)

Figura 20 – Análise do limite termodinâmico de τ/N .

3.4 Conceitos básicos de Redes Complexas

3.4.1 Terminologia e métricas

Uma rede é um conjunto de itens, chamados de **vértices**, que possuem conexões entre eles, chamadas de **arestas**, conforme exemplificado na Figura 21. Nós e conexões são termos frequentemente utilizados como sinônimos de vértices e arestas, respectivamente. Além disso, na matemática é comum utilizar o termo grafo para se referir à uma rede. Cada vértice é numerado por $i \in \{1, \dots, N\}$, onde N é o número total de vértices. Além disso, N também será referido como o tamanho da rede.

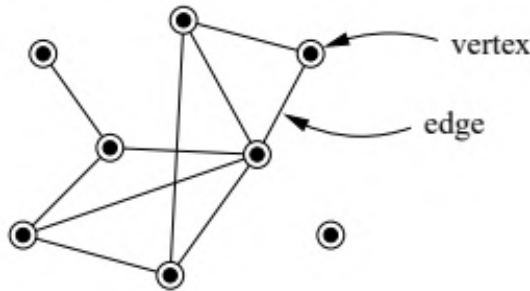


Figura 21 – Um exemplo de uma pequena rede com oito vértices e dez arestas.

Uma forma conveniente de representar uma rede é em termos de sua matriz de adjacência A , cujo elementos são definidos como

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } i \text{ e } j \text{ são conectados por uma aresta,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Se não há auto-conexões na rede, então todos os elementos da diagonal principal são zero. Além disso, se a matriz de adjacência for simétrica dizemos que a rede é não-direcionada. Se os elementos da matriz de adjacência possuírem valores diferentes de 0 e 1, então dizemos que a rede é ponderada, ou seja, suas conexões possuem pesos diferentes.

O número de arestas conectados à um dado vértice é chamado de **grau** e é expresso como

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (3.13)$$

Em uma rede não direcionada, podemos determinar o número total de arestas M ao somarmos o grau de todos os vértices e dividindo esse valor por dois, notando que cada conexão é contada duas vezes. Portanto, temos

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (3.14)$$

Como consequência da definição 3.13, o **grau médio** de uma rede é dado por

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (3.15)$$

Uma quantidade importante relacionada à caracterização estatística das redes é a **distribuição de grau** $P(k)$, que mensura a probabilidade de que um vértice escolhido aleatoriamente tenha grau k . Além disso, o n -ésimo momento da distribuição de grau é definido como

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k). \quad (3.16)$$

Uma propriedade comumente utilizada na teoria de redes é o *clustering*, que denota a propensão para que os vizinhos de um determinado vértice sejam também vizinhos de si próprios. Uma forma direta de mensurar essa quantidade é calculando o coeficiente de *clustering* local, que nada mais é do que a probabilidade que dois vértices j e k estejam conectados dado que ambos estão conectados com i formando um triângulo:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\text{número de triângulos conectados ao vértice } i}{\text{número total de possíveis triângulos intermediados pelo vértice } i} \\ &= \frac{\sum_{k>j} A_{ij} A_{ik} A_{jk}}{k_i(k_i - 1)/2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Em uma escala global, o coeficiente de *clustering* de uma rede pode ser mensurada pela média de c_i ou pela **transitividade** da rede, dada por

$$\mathcal{T} = \frac{3 \times (\text{número de triângulos na rede})}{(\text{número de triplas conectadas})} = \frac{3N_{\Delta}}{N_3}, \quad (3.18)$$

onde uma tripla é definida como uma sequência de três vértices $\{i, j, k\}$ conectados por duas arestas.

Outro conceito fundamental no estudo das redes é o tamanho do caminho geodésico d_{ij} , que é o número mínimo de vértices que um andarilho deve atravessar para chegar ao vértice j partindo de i . A média de todos os caminhos geodésicos é referida como o **tamanho médio do caminho mais curto** e é dado por

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}. \quad (3.19)$$

3.4.2 Modelos de redes

Na teoria de redes, um modelo é um conjunto de regras utilizado para gerar um ensemble de grafos, usualmente com o objetivo de reproduzir alguns aspectos encontrados em sistemas reais. Nessa seção revisaremos alguns dos modelos geradores de redes mais estudados e que serão mencionados futuramente.

3.4.2.1 Grafos aleatórios - modelo de Erdős–Rényi

As redes estudadas pelos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi (ER) entre 1950s e 1960s são geradas pelo seguinte mecanismo: Inicia-se com N vértices desconectados, então arestas são colocadas entre pares de vértices com probabilidade p . O conjunto de

todas as possíveis redes criadas ao repetir esse processo é chamado de ensemble $G_{N,p}$. As amostras deste ensemble são chamadas de redes ER.

Dado que cada vértice é conectado com o restante $N - 1$ vértices com probabilidade p , o grau médio é dado por $\langle k \rangle = p(N - 1)$. Além disso, pode-se mostrar que no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$ a distribuição de grau converge para

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}, \quad (3.20)$$

e que o tamanho médio mais curto escala com

$$\ell = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}. \quad (3.21)$$

O processo de gerar conexões em redes criadas pelo modelo ER é completamente aleatório, em contraste com o que é observado em redes reais, onde normalmente regras internas é o principal fator que influencia as conexões. Apesar disso, o valor estimado de ℓ coincide com valores observados em algumas redes sociais.

3.4.2.2 Redes de mundo pequeno - modelo de Watts-Strogatz

Em 1998, Watts e Strogatz (WS) introduziram uma nova classe de modelo de grafo aleatório conhecida como rede de mundo pequeno (ou modelo WS). Seu objetivo era desenvolver uma estrutura de rede que poderia ser alternar entre um estado completamente aleatório e um estado completamente organizado ao ajustar um único parâmetro. O algoritmo utilizado para construir essas redes é o seguinte:

1. Coloque os vértices em um anel unidimensional com condições periódicas de contorno.
2. Conecte cada vértice com os seus respectivos k vizinhos mais próximos em ambas direções, de modo que $k_i = 2k, \forall i$.
3. Reconecte cada vértice com probabilidade p .

Para $p = 0$ o modelo gera o anel inicial completamente ordenando, enquanto que para $p = 1$ ele gera uma rede completamente aleatória similar ao modelo ER. A propriedade distinta gerada pelo modelo WS ocorre para os valores intermediários de p . Mais precisamente, para $p \in [0.01, 0.05]$ as redes geradas pertencem ao regime de mundo pequeno, que é caracterizado pela coexistência de altos valores de \mathcal{T} com distâncias da ordem $\ell \sim \log N$. Apesar de o modelo conseguir gerar redes com medidas similares aquelas observadas na natureza em diferentes domínios (social, tecnológica e biológica), ele gera distribuições de grau muito estreitas. Isso consiste em uma grande discrepância ao descrever distribuições de grau reais, especialmente após a descoberta da topologia altamente heterogênea das redes livres de escala.

3.4.2.3 Redes livres de escala - modelo de Barabási-Albert

Muitas evidências empíricas sugeriram que a distribuição de conexões em redes reais desviavam grandemente das distribuições com apenas um pico geradas pelos modelos ER e WS. Esses estudos mostravam que os sistemas como a *World Wide Web* e as redes de citações científicas possuíam distribuições de grau altamente enviesadas que seguiam uma lei de potência como

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (3.22)$$

Redes que seguem essa distribuição de grau 3.22 são chamadas de redes livres de escala, denotando a invariância de escala do argumento da função. Essa propriedade implica fortemente na organização topológica dos vértices. Para redes ER, a distribuição de grau é altamente concentrada em torno da média $\langle k \rangle$, assim para uma distribuição de Poisson de $P(k)$ temos que o desvio padrão é dado por $\sigma_k = \sqrt{k}$, portanto quase toda a rede possui seu grau no intervalo $k = \langle k \rangle \pm \sqrt{\langle k \rangle}$. Ou seja, $\langle k \rangle$ é uma escala bem definida do sistema. O mesmo ocorre para o modelo WS. Já para redes livres de escala com $\gamma < 3$, temos que o segundo momento da distribuição de grau é divergente conforme $N \rightarrow \infty$, significando que flutuações em torno da média podem ser arbitrariamente grandes. Dessa forma, ao escolher um vértice de forma aleatória, qualquer resultado para o seu grau pode ser esperado. Nesse sentido, o grau médio não passa nenhuma informação útil.

O primeiro modelo criado com a intenção de reproduzir a propriedade livre de escala das redes reais foi proposto por Barabási e Albert (BA). O modelo se baseia em duas suposições básicas: Primeiro, as redes não são tratadas como estáticas, ao invés disso elas são consideradas como um organismo vivo, com novos vértices sendo constantemente adicionados a cada etapa do processo; e segundo, novos vértices tendem a se conectar preferencialmente com outros vértices altamente conectados. A reprodução da propriedade livre de escala observada em redes reais pelos mecanismos de crescimento e fixação preferencial representaram uma grande inovação na teoria de redes. Apesar disso, o modelo BA é restrito à criação de redes com um único expoente de lei de potência, sendo ele $\gamma = 3$.

3.5 Modelo de redes complexas para a dinâmica de tendências

O objetivo desta seção é de reimplementar o modelo de Bettencourt com as interações entre os agentes dadas por uma rede complexa. A descrição do modelo é semelhante, é considerada uma população com N agentes e L tendências, cada agente é associado à uma tendência e cada tendência é associada a um momento $p_i(t) = N(t) - N(t-1)$. Inicialmente, um grafo é gerado com N vértices, com cada vértice representando um agente. Para gerar esses grafos serão utilizados os modelos apresentados anteriormente, com os grafos sendo do tipo mais simples possível, ou seja, sem direção e pesos nas conexões,

sem auto-conexões e apenas a maior componente gerada é considerada. Assim, a dinâmica ocorre do seguinte modo:

1. Escolha um agente i de forma aleatória. O momento de sua tendência é p_i . Este é o agente focal.
2. Escolha um segundo agente j que seja vizinho de i , ou seja, i está conectado com j . O momento de sua tendência é p_j . Este é o agente modelo.
3. Se o momento da tendência do agente j for maior do que o momento da tendência do agente i (i.e. $p_j > p_i$), então o agente i mudará de tendência e copiará o agente j . Caso contrário, o agente i verifica se o momento de sua tendência é menor do que o valor limiar do momento ($p_i < p_{crit}$), em caso positivo ele escolhe uma tendência aleatória e verifica se ela está vazia, adotando-a caso esteja. A tendência dos agentes é atualizada de forma assíncrona com passo de tempo $1/N$.
4. Após esse processo ser repetido N vezes, dizemos que foi feita uma iteração e atualizamos o tempo $t \rightarrow t + 1$.

Para estudar o modelo descrito, serão realizadas animações da evolução da rede gerada durante as iterações, onde os vértices terão cores associadas à tendência que o agente correspondente está exibindo no momento. Assim, espera-se, pelo menos inicialmente, determinar se o modelo é capaz de gerar resultados semelhantes aos que foram reproduzidos na Seção 3.2 e se a topologia da rede influencia esses resultados.

3.5.1 Modelo de Erdős–Rényi

Para criar um grafo utilizando o modelo ER é necessário especificar o número de vértices N e a probabilidade p de criar conexões. Evidentemente, o número de vértices considerado é igual ao número de agentes da simulação. Já para a probabilidade de criação de conexões foi utilizado $p = 0.1$. Então, a evolução do modelo de tendências em uma rede ER é dada na Figura 22, onde é possível observar os ciclos característicos de formação (todos os vértices exibindo a mesma tendência) e declínio (vértices exibindo diferentes tendências) que foram observados no modelo original. A animação de onde foram retirados os *frames* ilustrados pode ser visualizada neste [link](#).

3.5.2 Modelo de Watts-Strogatz

Uma rede do modelo WS é gerada a partir de um número de vértices N , um número de vizinhos k os quais cada vértice é conectado em uma topologia de anel inicialmente e uma probabilidade p de cada vértice gerar novas conexões. Dessa forma, a evolução da rede para o modelo de WS é ilustrada na Figura 23 e a animação correspondente pode ser visualizada neste [link](#).

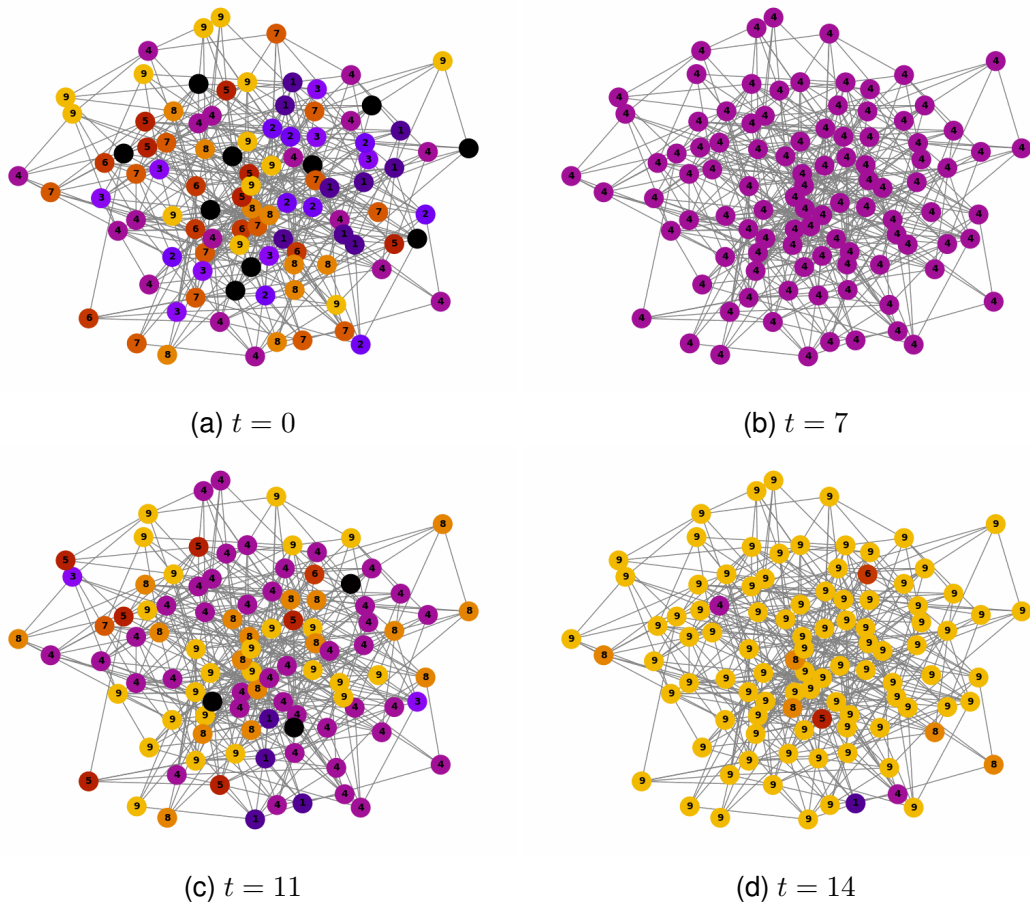


Figura 22 – Evolução das tendências exibidas pelos agentes em uma rede de ER com $N = 100$ vértices, $L = 10$ tendências, $p_{crit} = 1$ e probabilidade $p = 0.1$ de criação de conexões.

3.5.3 Modelo de Barabási-Albert

As redes do modelo de BA precisam do número de vértices N e o número M de conexões que os novos vértices irão realizar com os vértices já existentes para serem geradas. Assim, a evolução de uma rede gerada pelo modelo de BA é ilustrada na Figura 24, com a animação correspondente que pode ser visualizada neste [link](#).

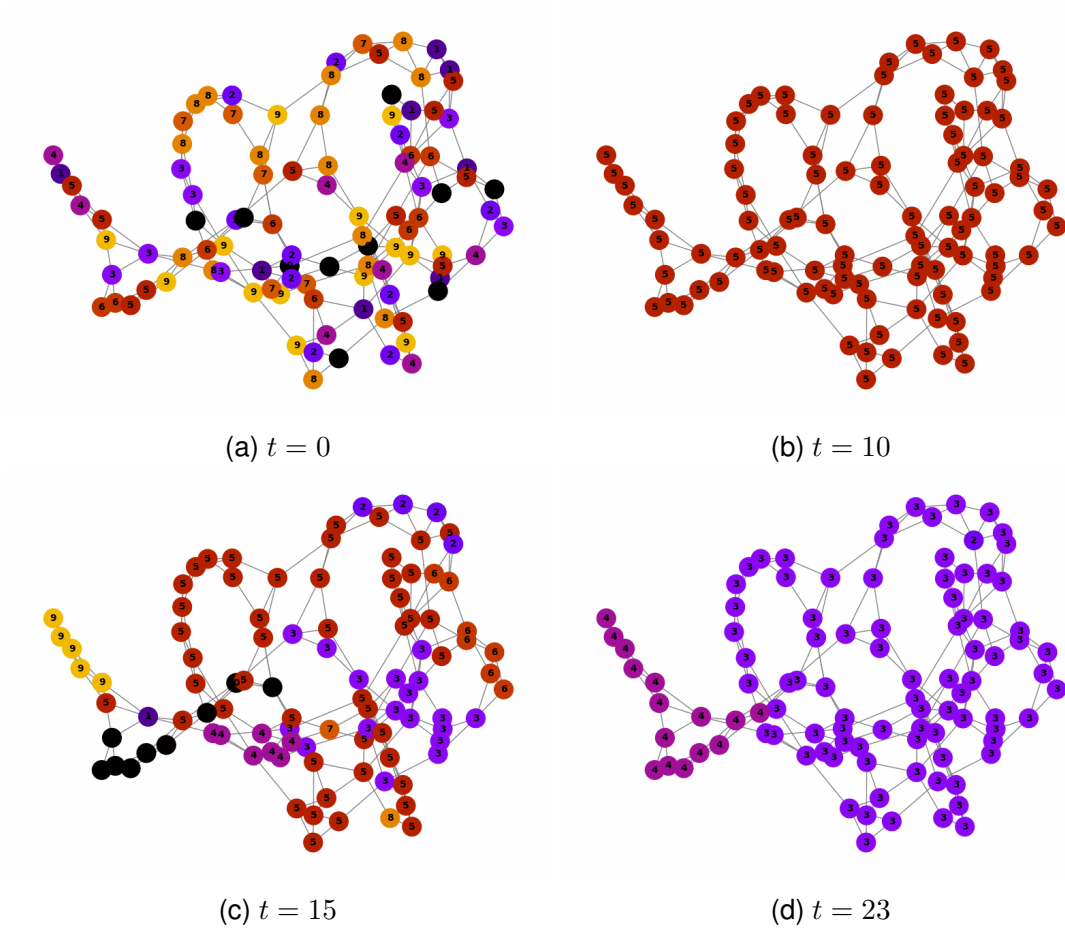


Figura 23 – Evolução das tendências exibidas pelos agentes em uma rede de WS com $N = 100$ vértices, $L = 10$ tendências, $p_{crit} = 1$, vizinhos iniciais $k = 4$ e probabilidade $p = 0.1$ de reconexões.

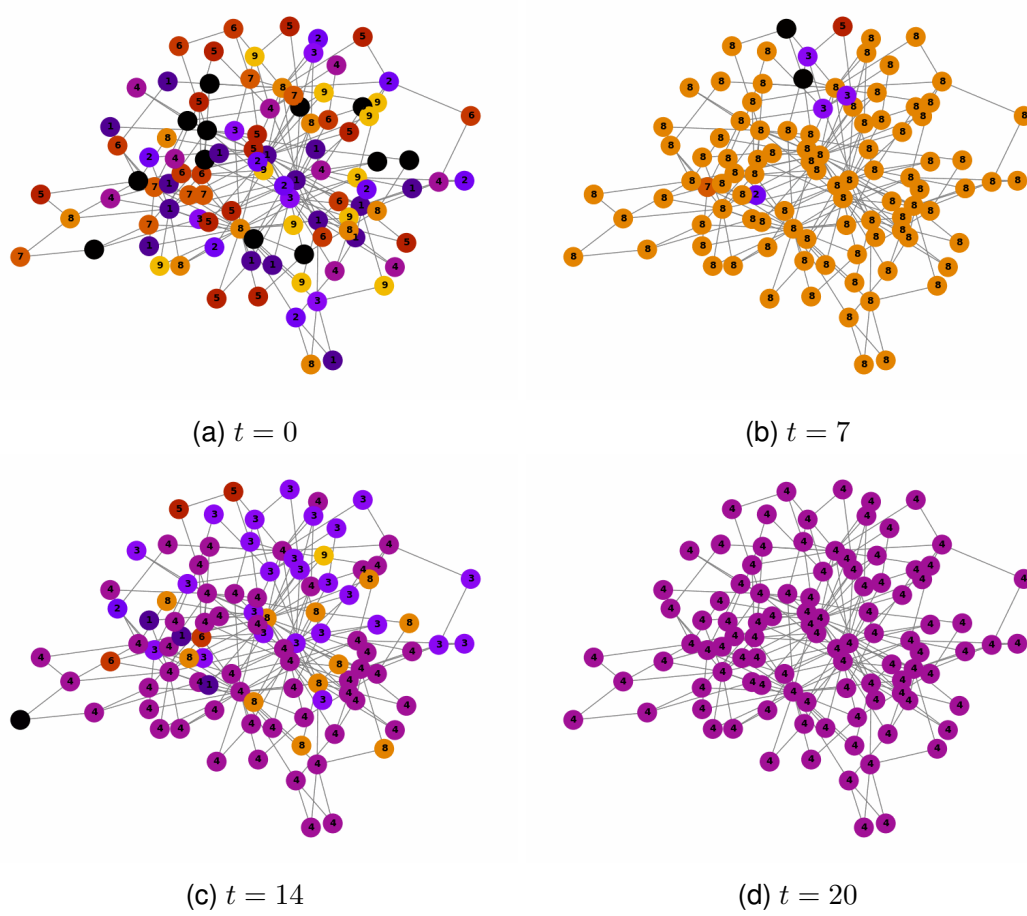


Figura 24 – Evolução das tendências exibidas pelos agentes em uma rede de BA com $N = 100$ vértices, $L = 10$ tendências, $p_{crit} = 1$, vizinhos iniciais $k = 4$ e probabilidade $p = 0.1$ de reconexões.

4 CONCLUSÃO

A participação do bolsista nesse projeto foi de grande relevância para sua formação acadêmica. Durante o projeto, o estudante desenvolveu suas habilidades de programação com a linguagem *Python*, principalmente através da utilização das bibliotecas *matplotlib* e *networkx*, e também aprendeu a linguagem *Julia* durante a elaboração dos programas. Além disso, foi construída uma grande base de conhecimento de mecânica estatística, redes complexas e da teoria de tendências e modas.

Durante o período do projeto, o estudante participou do evento "*Workshop on Dynamical Process on Complex Networks*", organizado pelo *ICTP-SAIFR* entre os dias 13-17 de Maio de 2024 (certificado), no qual ele teve contato com diversas linhas de pesquisa na área de redes complexas. Finalmente, os programas desenvolvidos podem ser encontrados no seguinte repositório do *Git Hub*: <https://github.com/rafael-gigante/Trends-and-Fashions/tree/main>.

Portanto, de modo geral, o estudante foi capaz de concluir de forma bem sucedida os objetivos propostos no início deste projeto. A respeito do modelo de tendências e modas com redes complexas, a discussão e os resultados apresentados ainda são bem prematuros e estão longe de terem esgotado o assunto, de modo que ainda existem muitas formas de aprofundamento do tema em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, APS, v. 74, n. 1, p. 47, 2002.
- BETTENCOURT, L. From boom to bust and back again: the complex dynamics of trends and fashions. *arXiv preprint cond-mat/0212267*, 2002.
- BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D.; WELCH, I. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 100, n. 5, p. 992–1026, 1992.
- BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D.; WELCH, I. Learning from the behavior of others: Conformity, fads, and informational cascades. *Journal of economic perspectives*, American Economic Association, v. 12, n. 3, p. 151–170, 1998.
- EASLEY, D.; KLEINBERG, J. et al. Networks, crowds, and markets. *Cambridge Books*, Cambridge university press, 2012.
- MACHIAVELLI, N. *The Prince*. Oxford: Oxford University Press, 2005. Original Date: 1513.
- NEWMAN, M. E. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, SIAM, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003.
- STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 410, n. 6825, p. 268–276, 2001.