

# Algoritmos e Estruturas de Dados III

3º Período Engenharia da Computação

Prof. Edwaldo Soares Rodrigues

Email: [edwaldo.rodrigues@uemg.br](mailto:edwaldo.rodrigues@uemg.br)

Material adaptado do prof. Alexandre P.

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

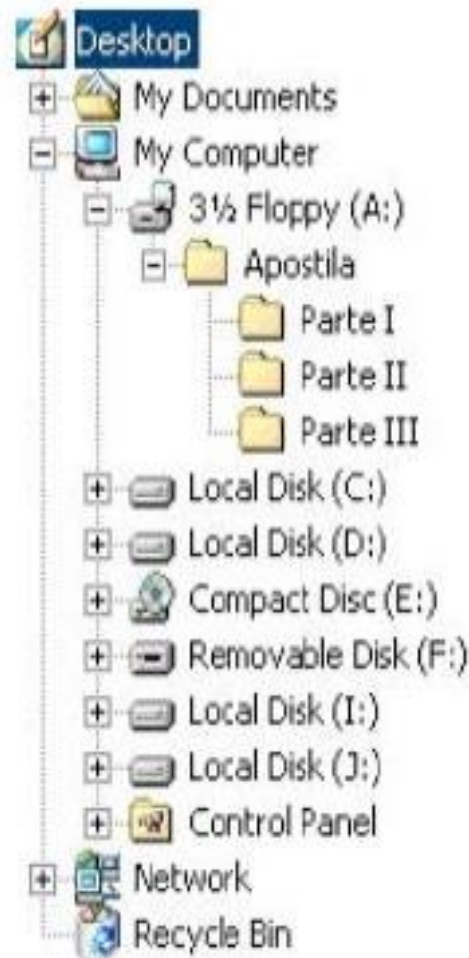
- Contextualização;
- Árvores;
- Árvores Binárias;
- Árvores Binárias de Busca;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Contextualização:
  - Importância de estruturas unidimensionais ou lineares (vetores e listas) é inegável;
  - Contudo, elas não são adequadas para representar dados que devem ser dispostos de maneira hierárquica;
  - Por exemplo, diretórios criados em um computador;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Exemplo de estrutura hierárquica:



Um exemplo de estrutura de diretório do Windows 2000

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

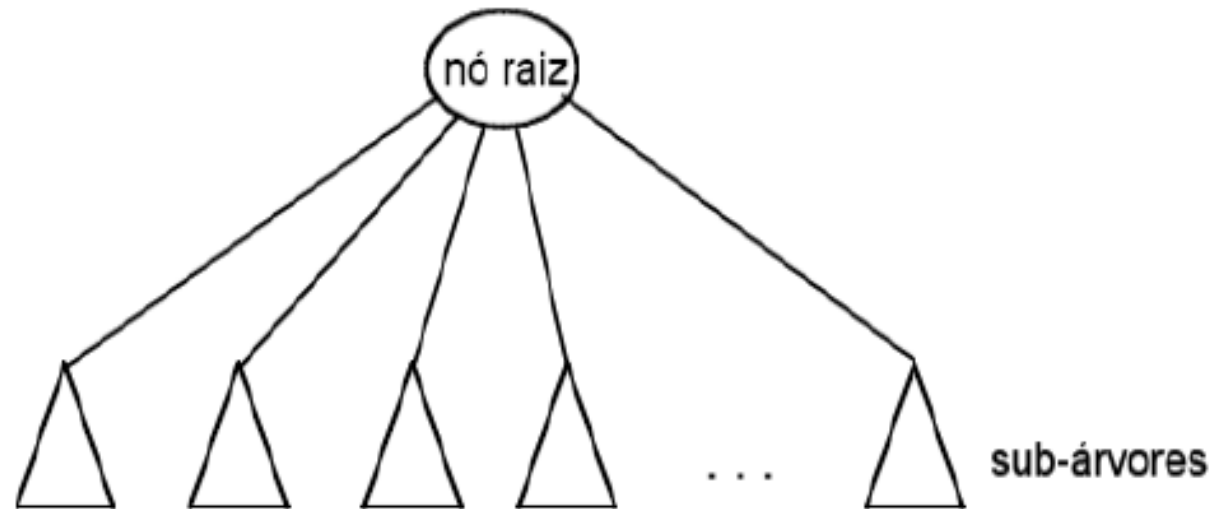
- Árvores:
  - Árvore é uma estrutura de dados adequada para representar hierarquias;
  - Forma mais natural de definirmos uma estrutura de árvore é usando recursividade;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore: Definições:
  - Uma Árvore é composta de um conjunto finitos de nós;
  - Desse conjunto há um nó  $r$  denominado de raiz, que contém 0 ou mais sub-árvores cujas raízes são ligadas diretamente a  $r$ ;
  - Esses nós raízes das sub-árvores são ditos filhos do nó pai  $r$ ;
  - Nós com filhos são comumente chamados de nós internos;
  - Nós que não tem filhos são chamados de nós externos (folhas);
  - Altura ou profundidade de uma árvore: é o máximo nível de seus nós;
  - Grau de um nó: é o número de filhos do nó;

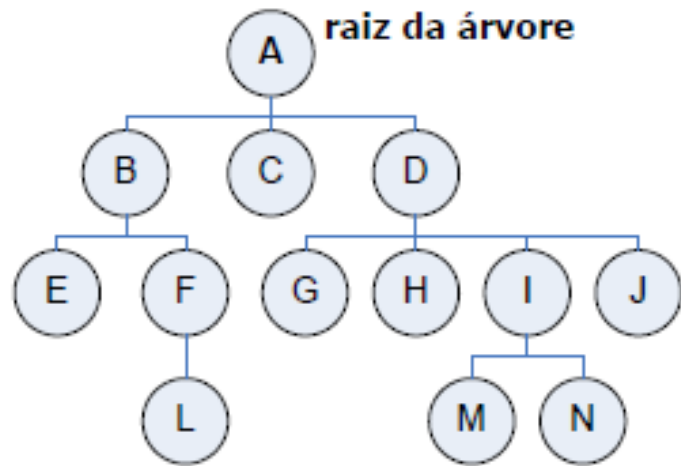
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Estrutura de Árvores:



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Exemplos de Árvores:

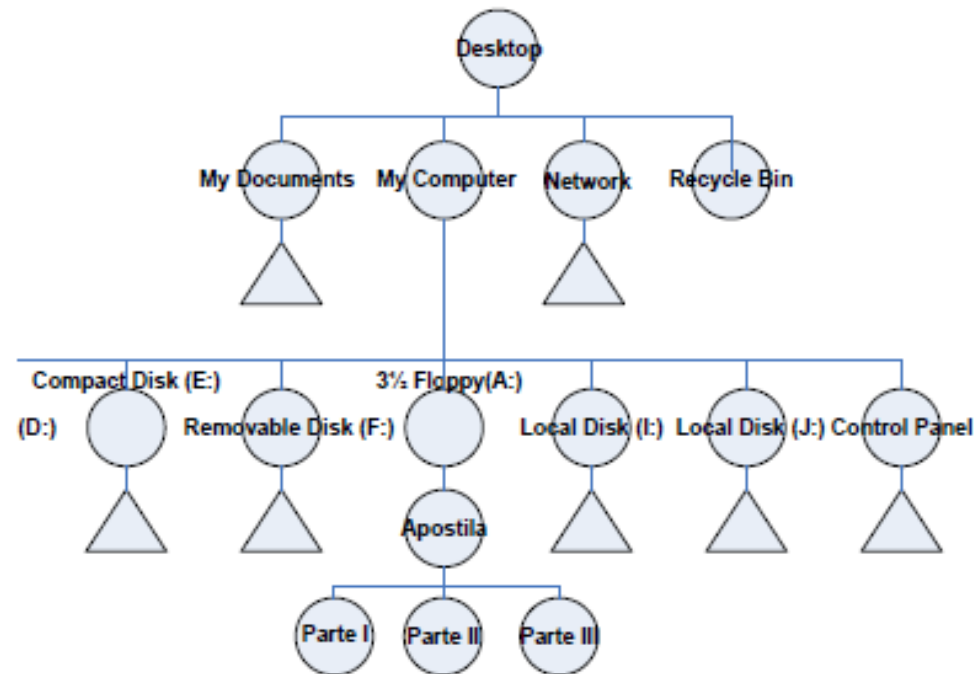
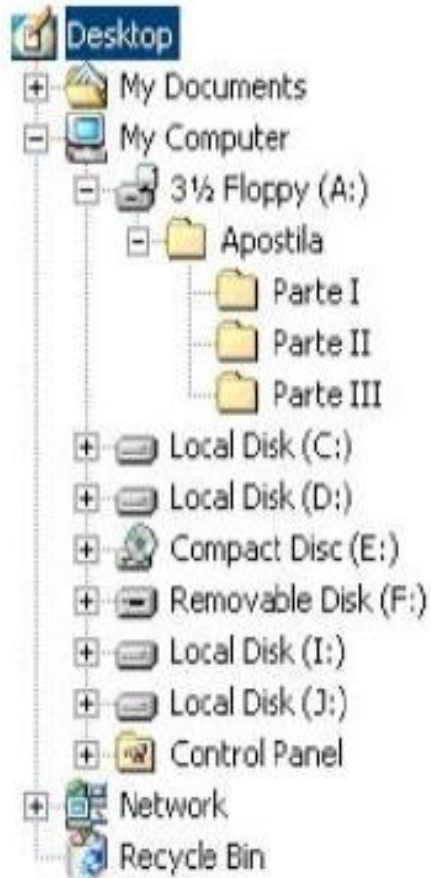


- Quantas sub-árvores existem na árvore ao lado?
- Quais são as sub-árvores?
- Quais nós são as raízes das sub-árvores da árvore ao lado?
- Quais nós são considerados nós internos?
- Quais nós são considerados nós externos (folhas)?
- Qual a altura da árvore ao lado?
- Qual o grau do nó A?
- Qual o grau do nó D?



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Exemplos de Árvores:

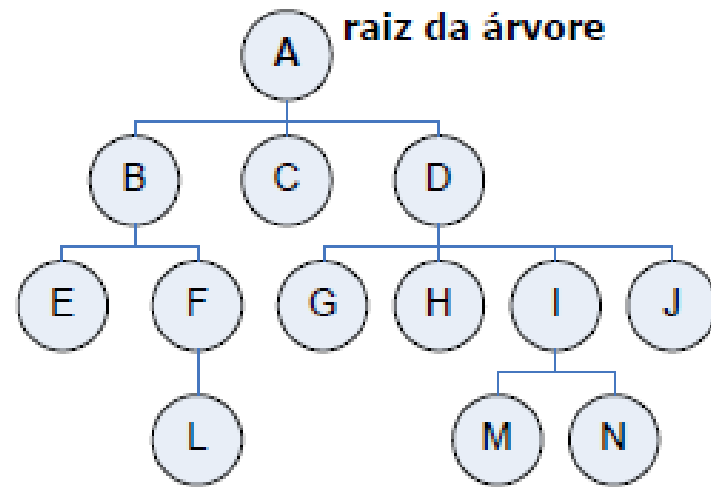


# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Propriedade Fundamental de Árvores:
  - Existe um único caminho da raiz para qualquer nó da árvore;
  - Portanto, podemos definir a altura de todas as árvores como sendo o comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas;
  - Por definição, a altura de uma árvore que possui somente um elemento é zero;

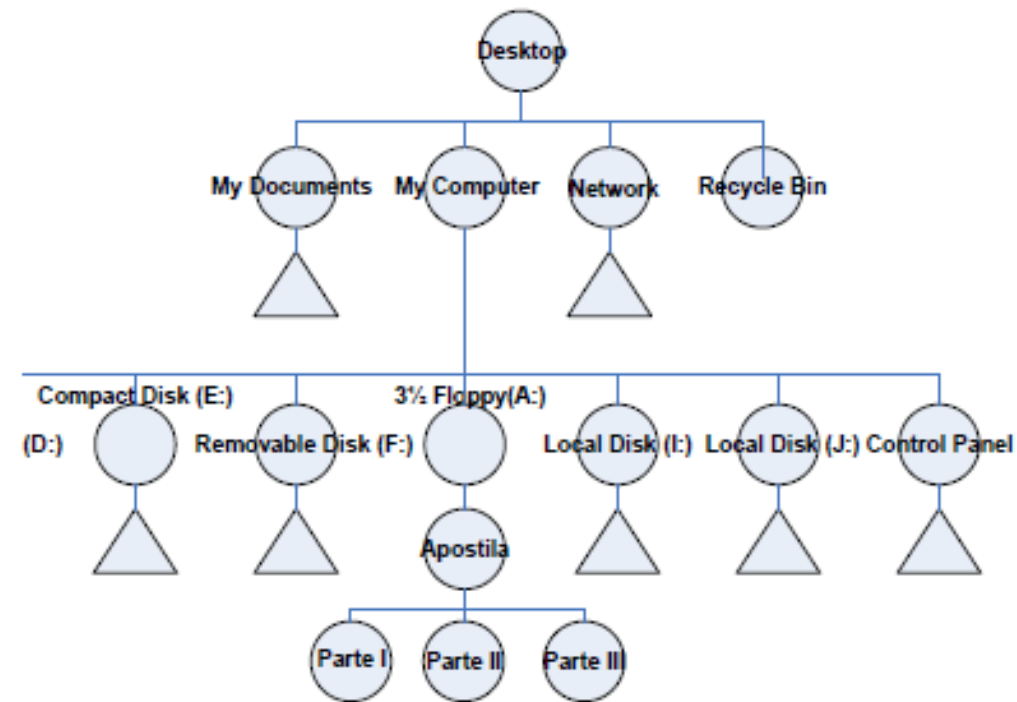
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Exemplo de altura em Árvores:



Árvore 1

Qual a altura da Árvore 1?



Árvore 2

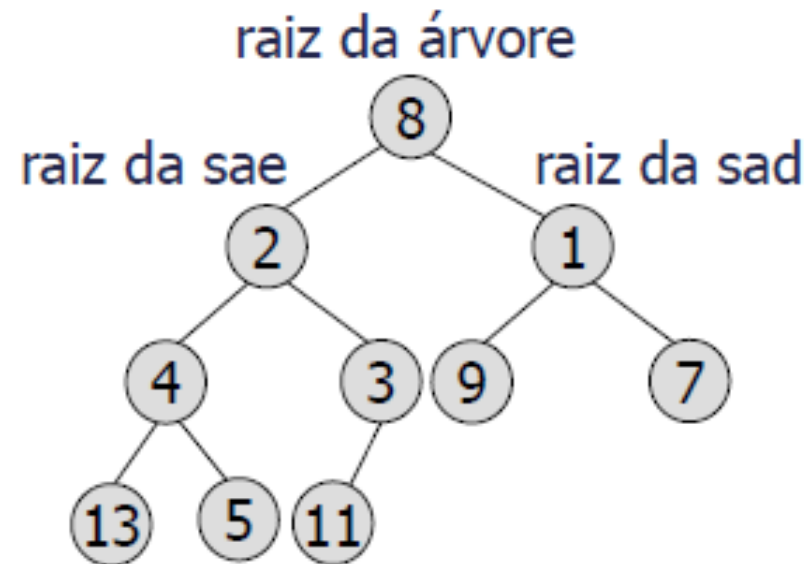
Qual a altura da Árvore 2?

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvores Binárias:
  - Uma árvore binária é constituída de um conjunto finito de nós;
  - Cada nó pode ter no máximo 2 filhos;
  - De maneira recursiva podemos definir uma árvore binária como:
    - Uma árvore vazia;
    - Um nó raiz tendo duas sub-árvores, identificadas como a sub-árvore da direita (sad) e a sub-árvore da esquerda (sae);

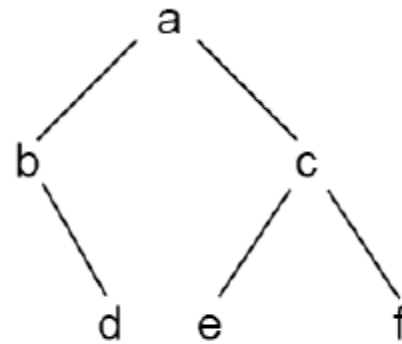
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Exemplo de Árvore Binária:



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Notação Textual de Árvore Binária:



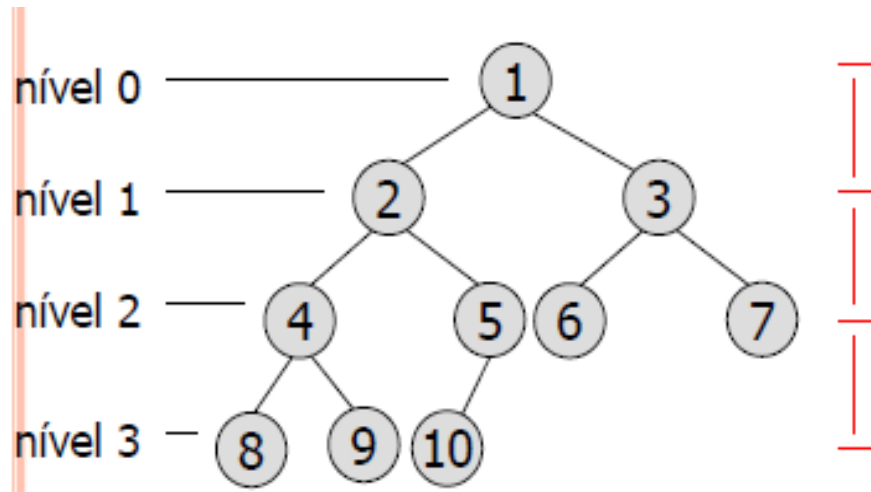
Exemplo de árvore binária

- Árvore vazia é representada por  $\langle \rangle$ , e árvores não vazias por  $\langle \text{raiz}, \text{sae}, \text{sad} \rangle$ . Com esta notação, a árvore apresentada anteriormente é representada por:

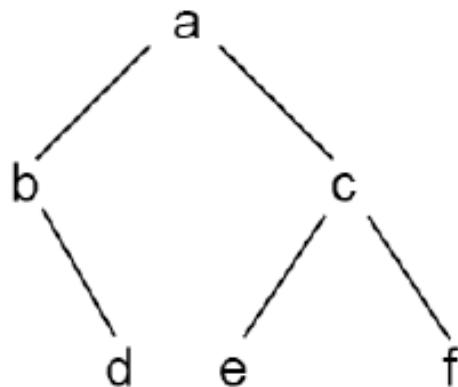
$\langle a \langle b \langle \rangle \langle d \langle \rangle \rangle \rangle \langle c \langle e \langle \rangle \rangle \langle f \langle \rangle \rangle \rangle \rangle$

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Altura de Árvores Binárias:



- Qual a altura da árvore binária ao lado?



- Qual a altura da árvore binária ao lado?
- Em qual nível está o nó C?

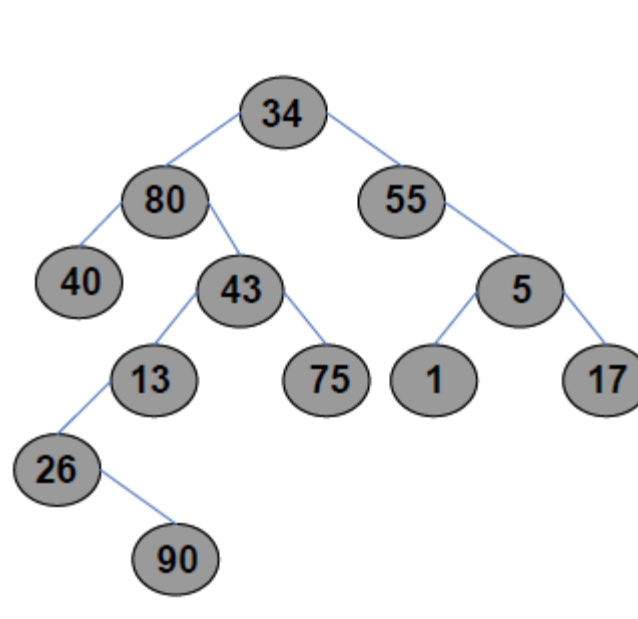
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Percursos em Árvores Binárias:
  - Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as suas sub-árvores, executando alguma ação de tratamento em cada nó;
  - É comum percorrer uma árvore em uma das seguintes ordens;
    - Pré-ordem: tratar raiz, percorrer sae, percorrer sad;
    - In-ordem (ordem simétrica): percorrer sae, tratar raiz, percorrer sad;
    - Pós-ordem: percorrer sae, percorrer sad, tratar raiz;



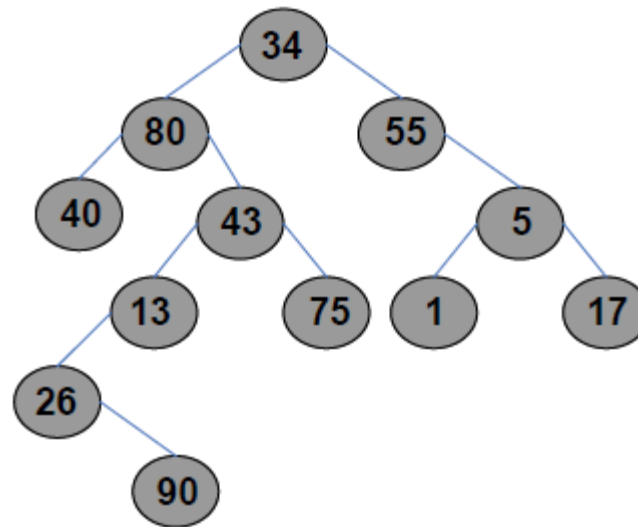
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Pré-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição pré-ordem (tratar raiz, percorrer sae, percorrer sad):



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

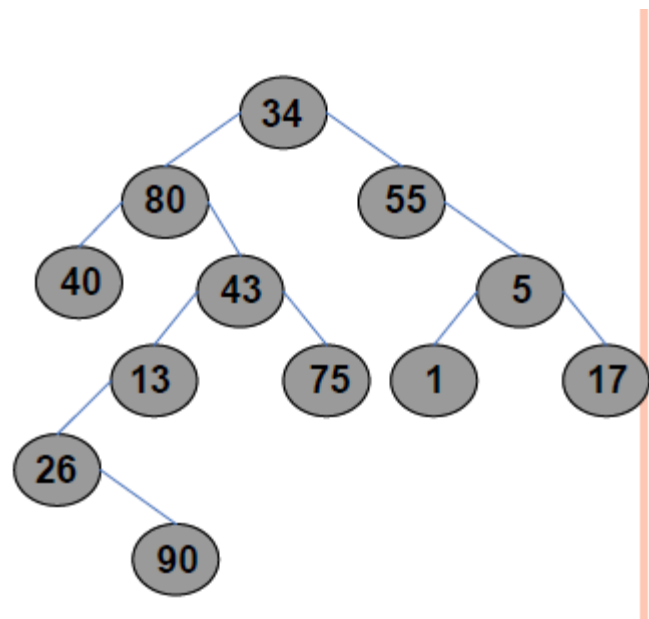
- Pré-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição pré-ordem (tratar raiz, percorrer sae, percorrer sad):



Resultado: 34, 80, 40, 43, 13, 26, 90, 75, 55, 5, 1, 17

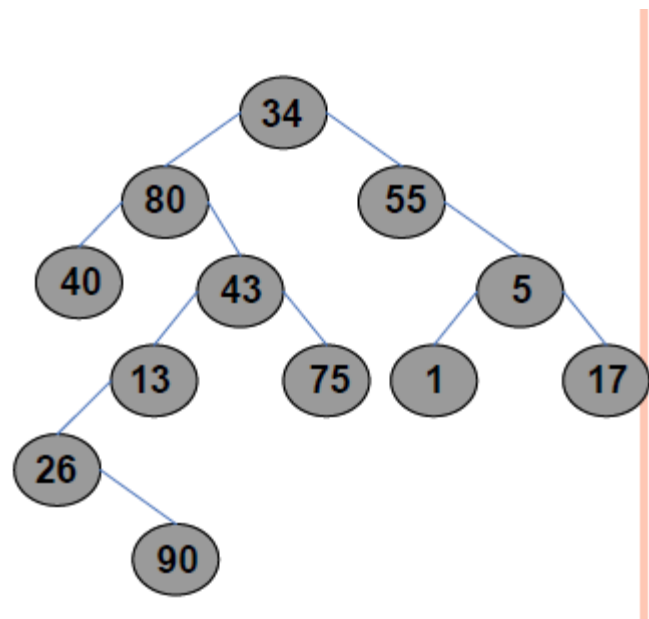
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- In-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição in-ordem (percorrer sae, tratar raiz, percorrer sad):



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

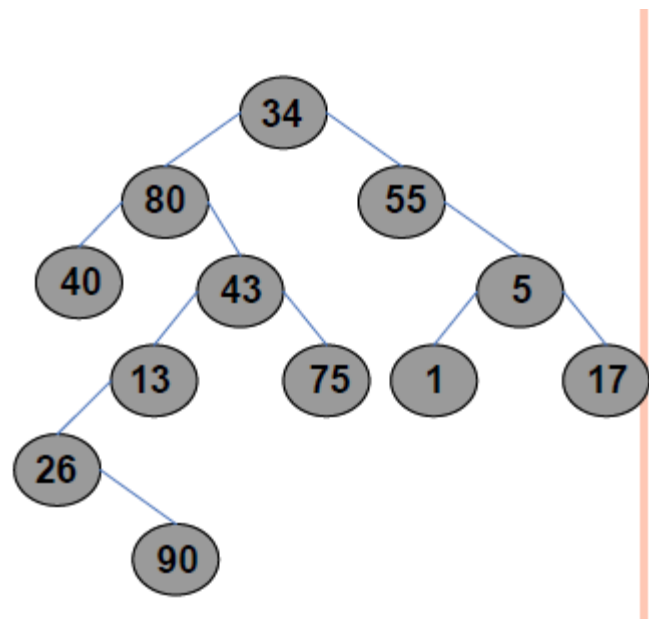
- In-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição in-ordem (percorrer sae, tratar raiz, percorrer sad):



Resultado: 40, 80, 26, 90, 13, 43, 75, 34, 55, 1, 5, 17

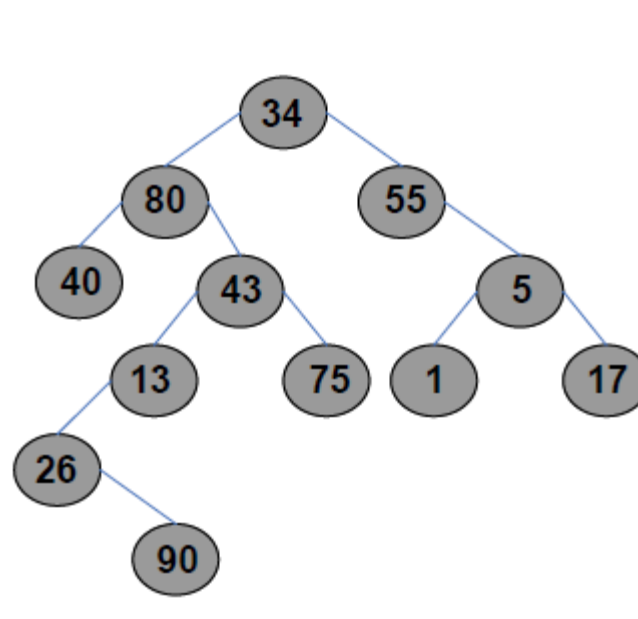
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Pós-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição pós-ordem (percorrer sae, percorrer sad , tratar raiz):



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Pós-ordem:
  - Imprima os valores presentes nos nós da árvore abaixo, segundo a condição pós-ordem (percorrer sae, percorrer sad , tratar raiz):



Resultado: 40, 90, 26, 13, 75, 43, 80, 1, 17, 5, 55, 34

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Definição da estrutura de Árvores Binárias:
  - Como definir o Tipo Abstrato de Dados – TAD que representa árvores binárias?
  - Há duas maneiras:
    - Estática;
    - Dinâmica (a mais comum);

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

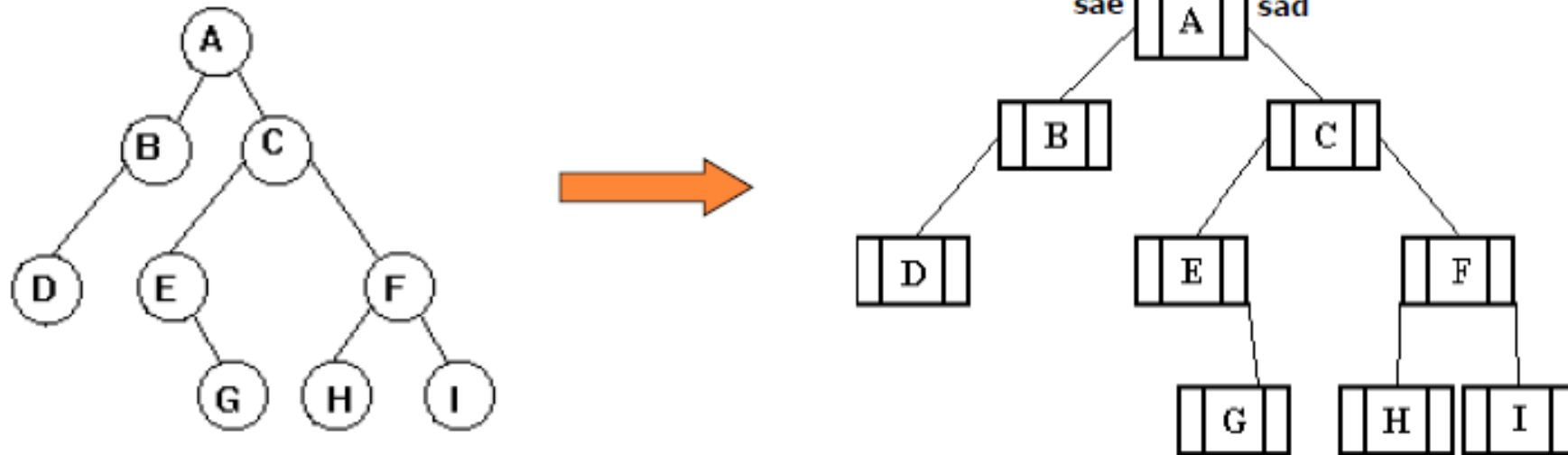
- Representação dinâmica de Árvores Binárias:
  - Criar um registro contendo os seguintes campos: info, sae e sad;
  - Este registro é auto-referenciado por meio dos campos sae e sad;

```
typedef struct arvore{  
    int info;                // armazena a informação  
    struct arvore *esq;      //ponteiro para sae  
    struct arvore *dir;      //ponteiro para sad  
}Arvore;
```



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Registro dos nós de uma Árvore Binária:

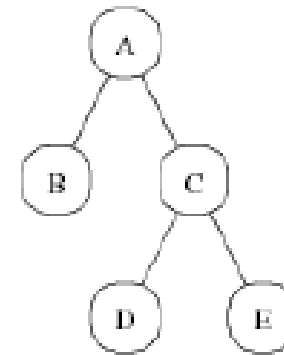
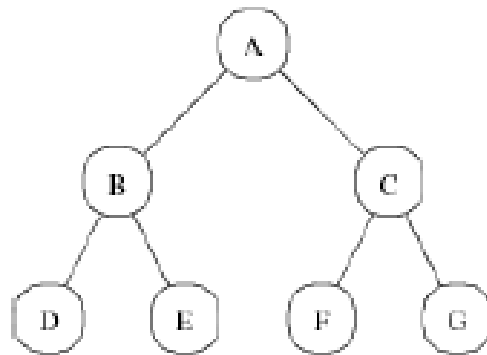
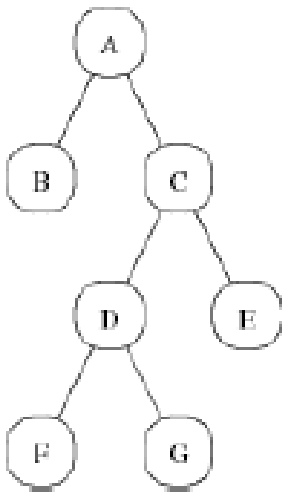


# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Principais funções sobre Árvores Binárias:
  - Iniciar árvores como vazias;
  - Inserir nós na árvore;
  - Verificar se a árvore está vazia;
  - Informar a altura da árvore;
  - Pesquisar ocorrência de um nó da árvore;
  - Liberar memória alocada para as árvores;
  - Percorrer a árvore em Pré-ordem;
  - Percorrer a árvore em In-ordem;
  - Percorrer a árvore em Pós-ordem;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Classificação de Árvores:
  - Árvore estritamente binária:
    - Se cada nó folha em uma árvore binária não tem sub-árvores esquerda e direita vazias;

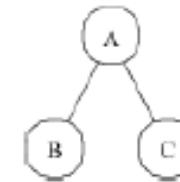
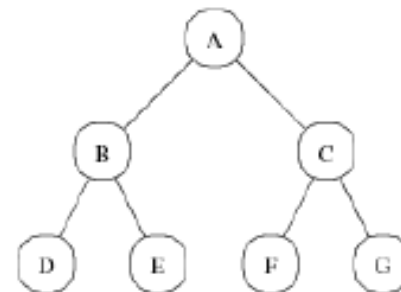
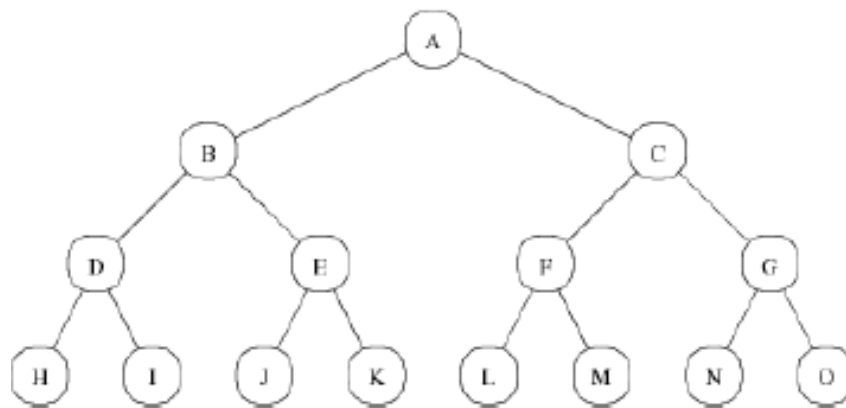


# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Classificação de Árvores:

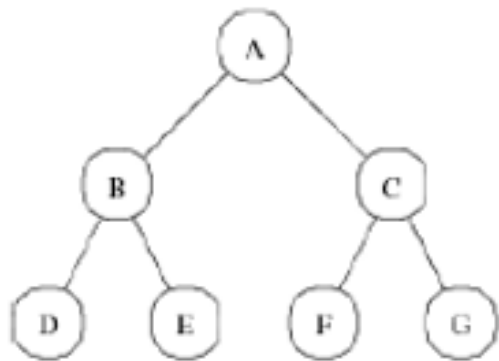
- Árvore binária completa:

- Uma árvore binária completa de nível  $n$  é a árvore estritamente binária, onde todos os nós folhas estão no nível  $n$ ;



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Classificação de Árvores:
- Cálculo do número de nós:
  - O número de nós ( $n$ ) é obtido com a fórmula a seguir, sendo fornecida a altura ( $h$ ) da mesma. Esse cálculo só é válido para árvores completas:

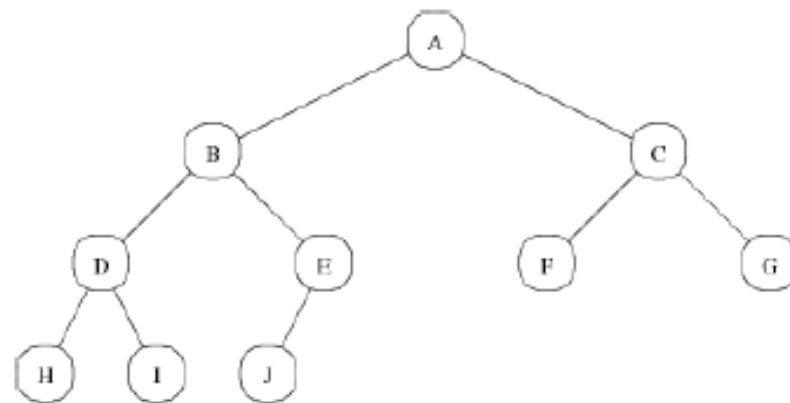
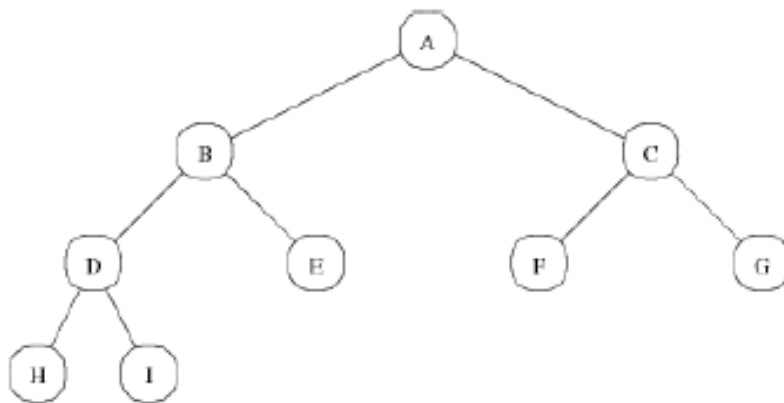


$$n = 2^{h+1}-1$$

Exemplo: Na árvore ao lado, de altura igual  $h = 2$ , obtemos facilmente com a fórmula apresentada abaixo da árvore, que o número de nós desta árvore binária completa é  $n = 7$ ;

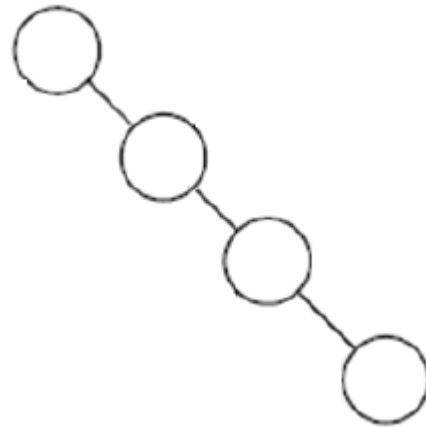
# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Classificação de Árvores:
  - Árvore binária quase completa:
    - Uma árvore binária de nível  $n$  é uma árvore binária quase completa se:
      - Cada nó folha na árvore está no nível  $n$  ou no nível  $n-1$ ;



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Degenerada:
  - Cada nó possui exatamente um filho, e a árvore tem o mesmo número de níveis que de nós;



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca:
  - Uma árvore é denominada árvore binária de busca se:
    - Todo elemento da sub-árvore esquerda é menor que o elemento raiz;
    - Nenhum elemento da sub-árvore direita é menor que o elemento raiz;
    - As sub-árvores direita e esquerda também são árvores de busca binária;



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Pesquisa por um elemento
  - Se o valor for igual à raiz, o valor existe na árvore;
  - Se o valor for menor do que a raiz, então deve buscar-se na sub-árvore da esquerda, e assim, recursivamente, em todos os nós da sub-árvore;
  - Se o valor for maior que a raiz, deve-se buscar na sub-árvore da direita, até alcançar-se o nó folha da árvore, encontrando ou não o valor requerido;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

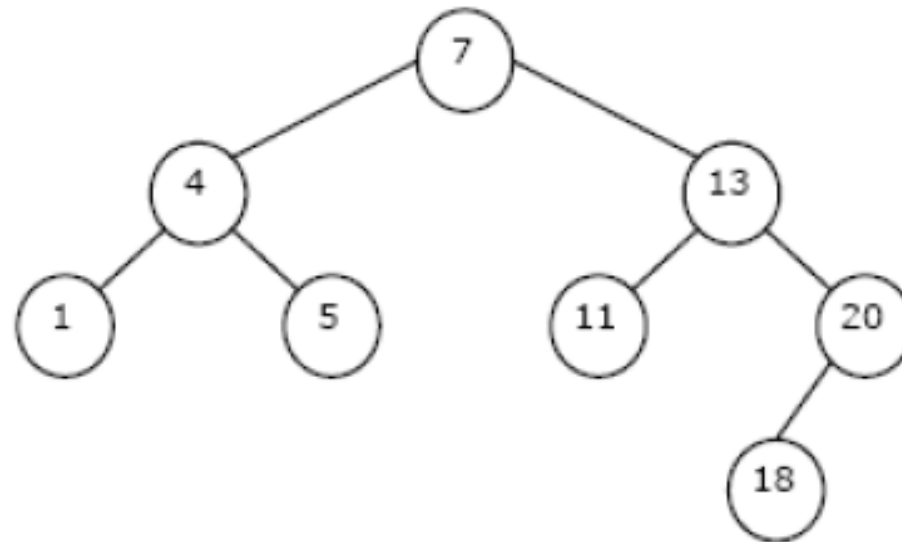
- Árvore Binária de Busca: Inserção
  - Se a árvore estiver vazia, cria um novo nó e insere as informações do novo nó;
  - Compara a chave a ser inserida com a chave do nó analisado:
    - Se menor, insere a chave na sub-árvore esquerda;
    - Se maior, insere a chave na sub-árvore da direita;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Inserção

- Exemplo:

- Inserir os seguintes elementos: 7, 13, 20, 4, 1, 18, 5, 11



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

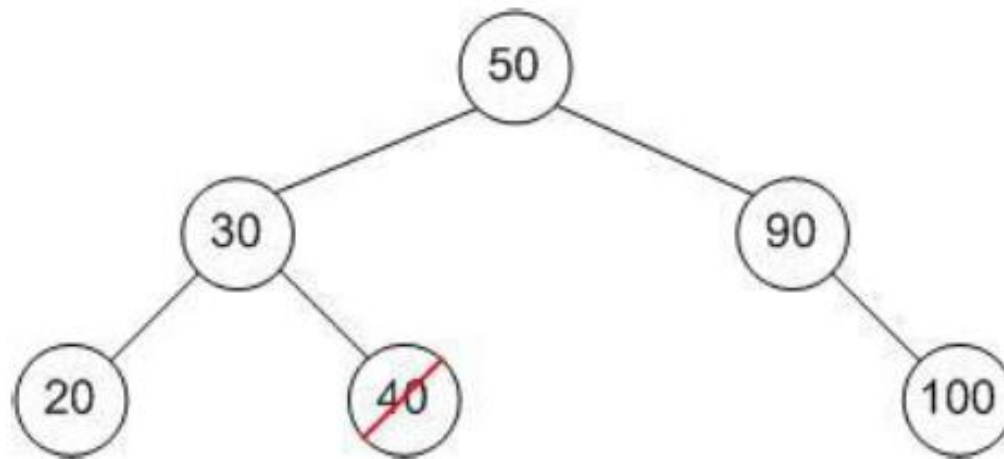
- Árvore Binária de Busca: Remoção
  - A remoção de um nó é um processo mais complexo. Para excluir um nó de uma árvore binária de busca, há de se considerar três casos distintos:
    - Remoção na folha;
    - Remoção de um nó com um filho;
    - Remoção de um nó com dois filhos;

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Remoção

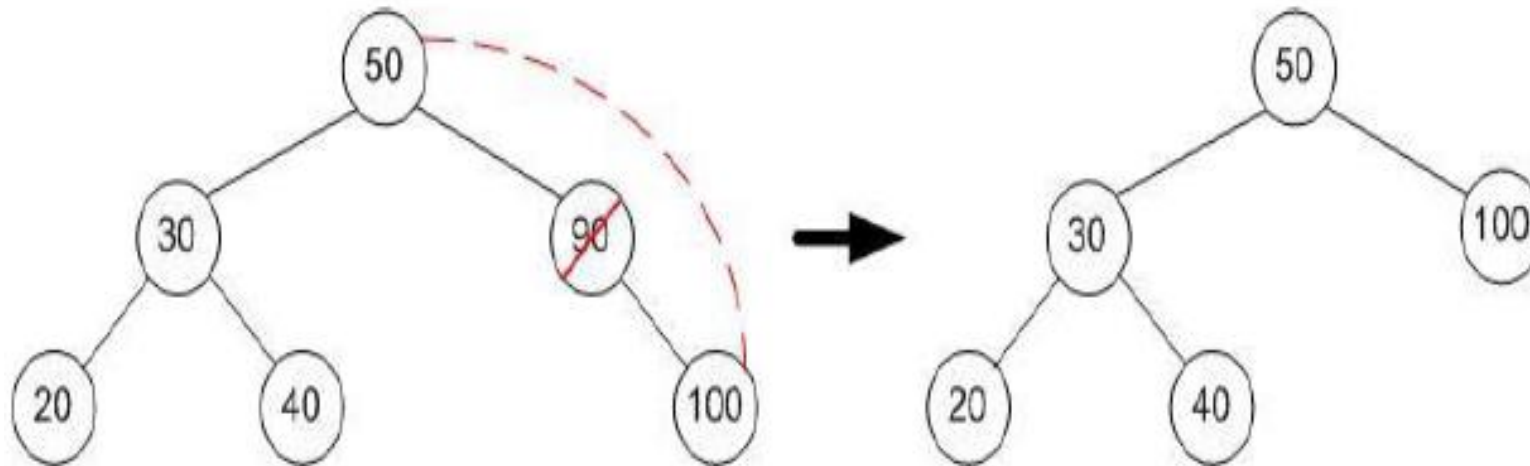
- Remoção na folha;

- A exclusão na folha é a mais simples, basta removê-lo da árvore e atualizar o local para onde o seu nó pai aponta;



# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Remoção
  - Remoção de um nó com um filho
    - Excluindo-o, o filho sobe para a posição do pai;

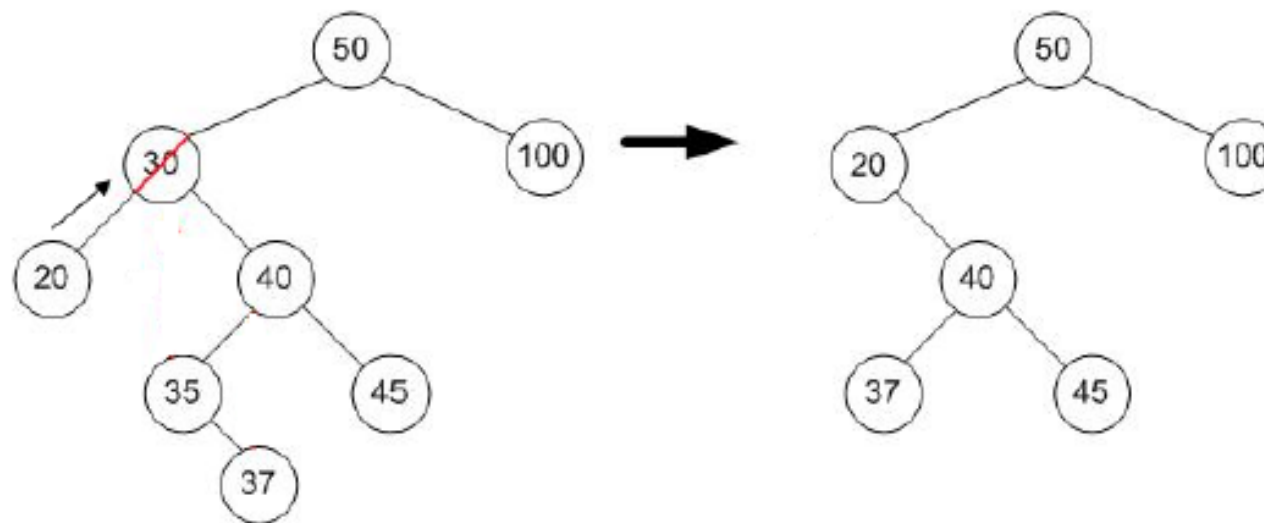


# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Remoção
  - Remoção de um nó com dois filhos
    - Neste caso, pode-se operar de duas maneiras diferentes:
      - Substitui-se o valor do nó a ser retirado pelo valor sucessor (o nó mais à esquerda da sub-árvore direita);
      - Substitui-se o valor do nó a ser retirado pelo valor antecessor (o nó mais à direita da sub-árvore esquerda);

# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

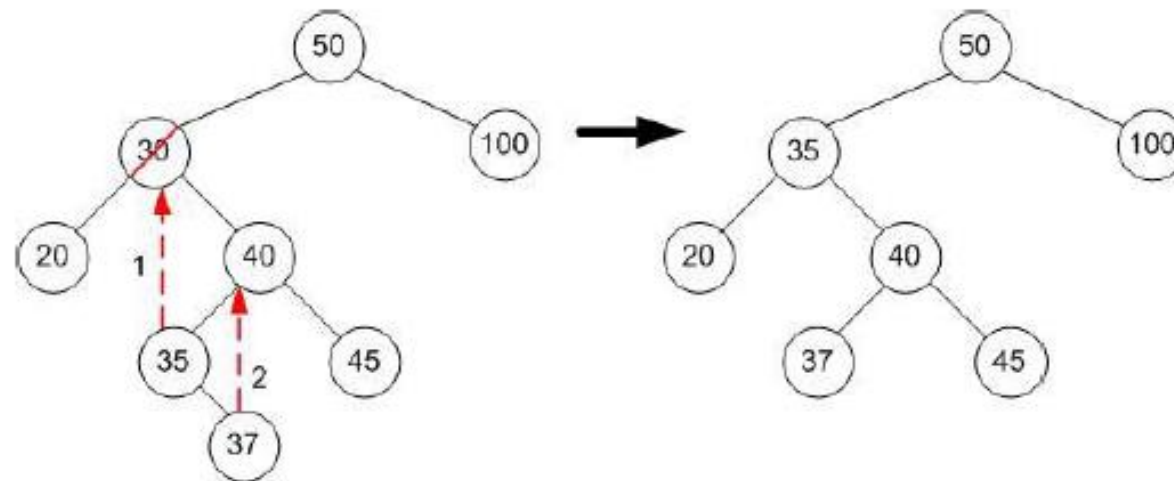
- Árvore Binária de Busca: Remoção
  - Remoção de um nó com dois filhos
    - Exemplo de remoção substituindo o nó pelo seu antecessor;





# Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

- Árvore Binária de Busca: Remoção
  - Remoção de um nó com dois filhos
    - Exemplo de remoção substituindo o nó pelo seu sucessor;



# Algoritmos e Estruturas de Dados III

- Bibliografia:

- Básica:

- ASCENCIO, Ana C. G. Estrutura de dados. Rio de Janeiro: Pearson. 2011.
    - CORMEN, Thomas; RIVEST, Ronald; STEIN, Clifford; LEISERSON, Charles. Algoritmos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.
    - ZIVIANI, Nívio. Projeto de algoritmos com implementação em Pascal e C. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

- Complementar:

- EDELWEISS, Nina, GALANTE, Renata. Estruturas de dados. Porto Alegre: Bookman. 2009. (Coleção Livros didáticos de informática UFRGS, 18).
    - PINTO, W.S. Introdução ao desenvolvimento de algoritmos e estrutura de dados. São Paulo: Érica, 1990.
    - PREISS, Bruno. Estruturas de dados e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
    - TENEMBAUM. Aaron M. Estruturas de Dados usando C. São Paulo: Makron Books. 1995.
    - VELOSO, Paulo A. S. Complexidade de algoritmos: análise, projeto e métodos. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 2001.

# Algoritmos e Estruturas de Dados III

