Busca em Largura

Adaptado de Humberto C. B. Oliveira

Últimas aulas

Introdução:
- História
- Aplicações

Conceitos Básicos:
- Grafo simples
- Grafo completo/vazio
- Grafo não orientado:
  - Arestas laço
  - Arestas paralelas
- Grafo orientado
- Grafo valorado

Representação Computacional:
- Matriz de adjacência
- Matriz de incidência
- Lista de adjacência

Busca em Profundidade:
- Método recursivo
- Marca os tempos de descoberta e finalização de cada vértice

Busca em Largura

Busca em largura

Um dos algoritmos mais simples da área de grafos;;

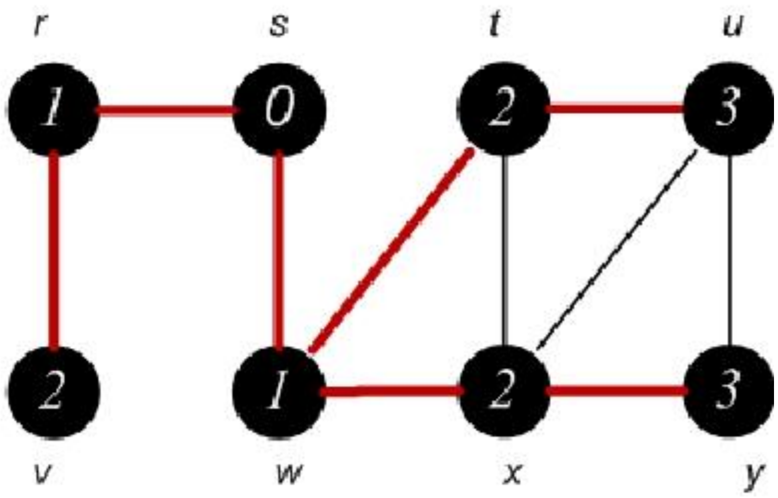
Serve de base para vários outros algoritmos:

- Base para Caminho mais curto (*Dijkstra*);
  - Utilizado para calcular rotas de custo mínimo em um par de localidades em um mapa, por exemplo;
- Base para Árvore Geradora Mínima - AGM (*Prim*);
  - Utilizado para interligar localidades a um custo mínimo, por exemplo.

Busca em largura

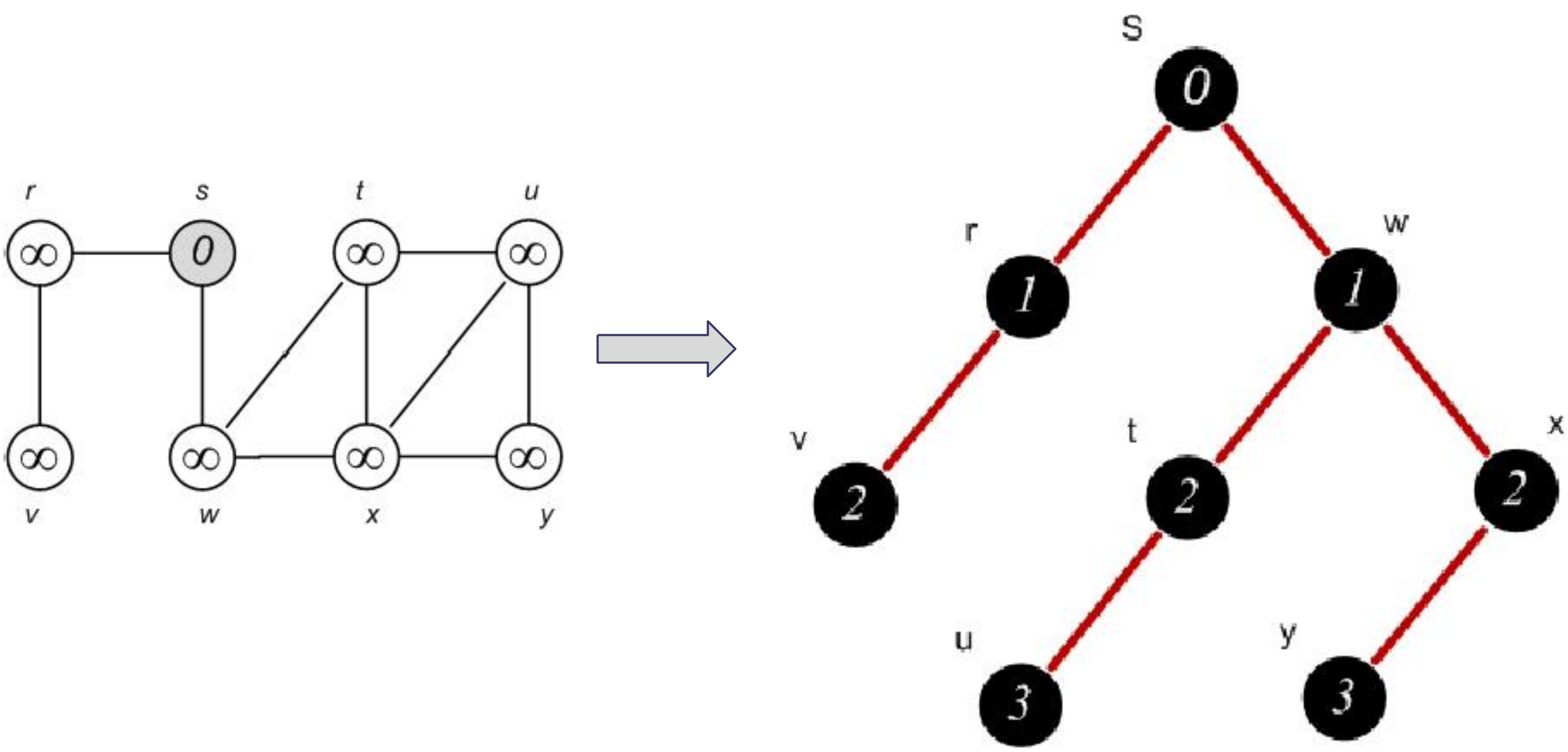
O algoritmo da Busca em Largura calcula a distância (menor número de arestas) desde o vértice *s* (raiz) até todos os vértices acessíveis

- Não considera a distância como o somatório do peso de arestas
- Considera a quantidade de saltos necessários mínimos para alcançar outro vértice do grafo



Busca em largura

Ele também produz uma Árvore Primeiro na Extensão com raiz no vértice de partida, que contém todos os vértices acessíveis

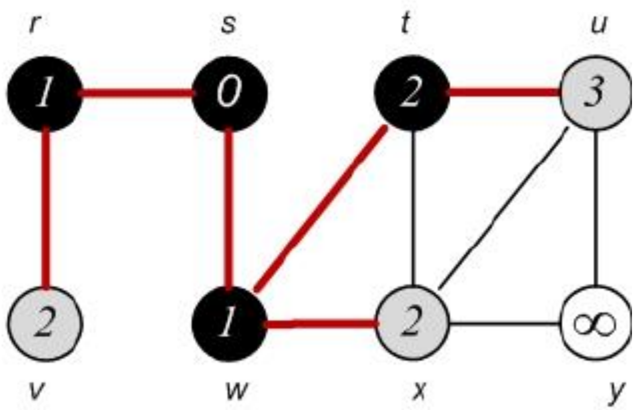


Busca em largura

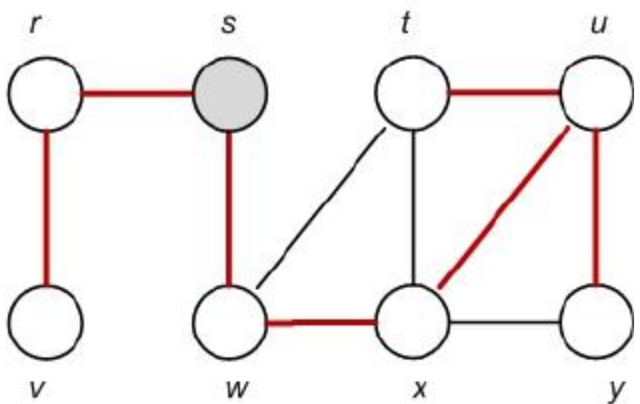
Para cada vértice v acessível a partir de s, o caminho na árvore primeiro na extensão de s até *v corresponde a um caminho mais curto de s* até v, ou seja, um caminho que contém um número mínimo de arestas

Observação: Esta informação não é possível ser obtida na busca em profundidade:

`d(s,t)=2`
na BFS



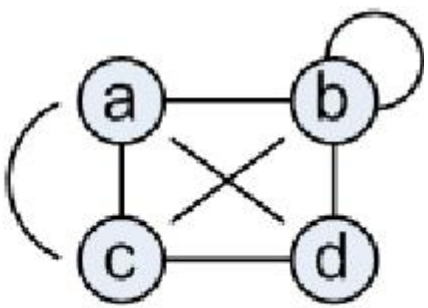
`d(s,t)=4`
na DFS



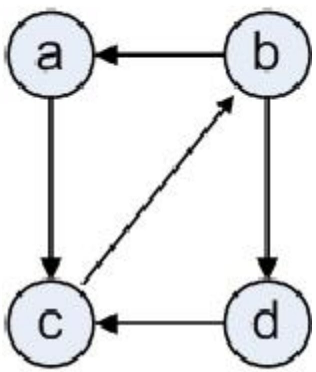
Busca em largura

Assim como a *Busca em Profundidade (DFS)*, o algoritmo da *Busca em Largura (BFS)* funciona sobre grafos orientados e também não orientados

O que importa, é a relação de adjacência;;



G



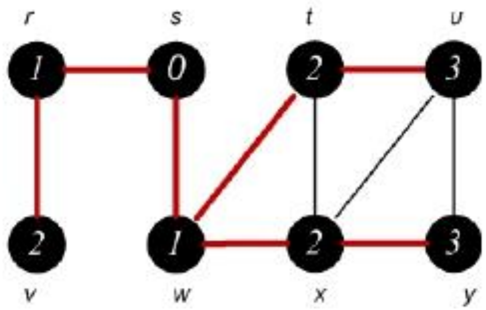
G'

Busca em largura

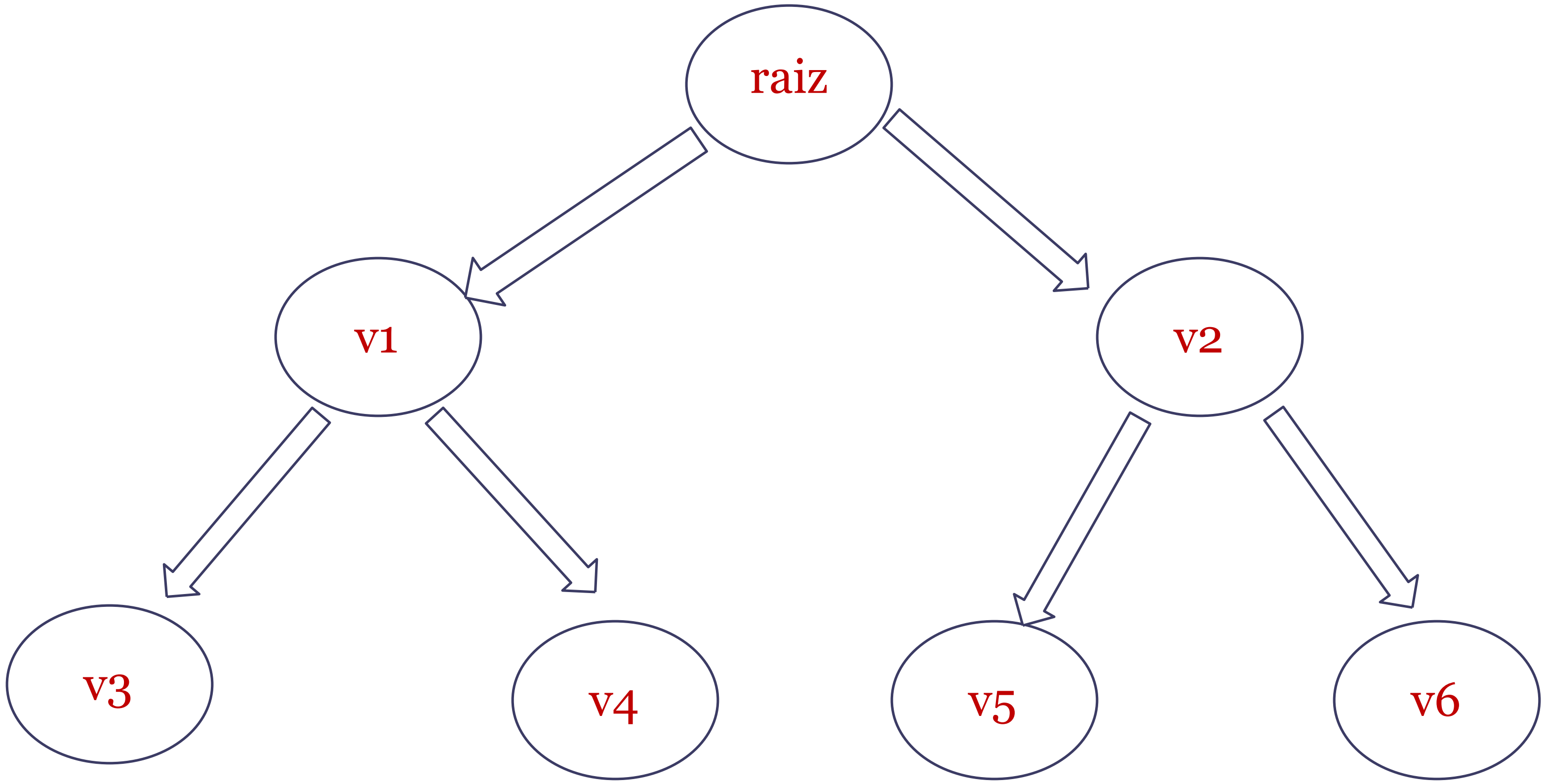
A busca em largura recebe esse nome porque expande a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos uniformemente ao longo da extensão da fronteira;;

Isto é, o algoritmo descobre todos os vértices à distância *k* a partir de *s*, antes de descobrir quaisquer vértices à distância *k+1*; *(ponto chave)*

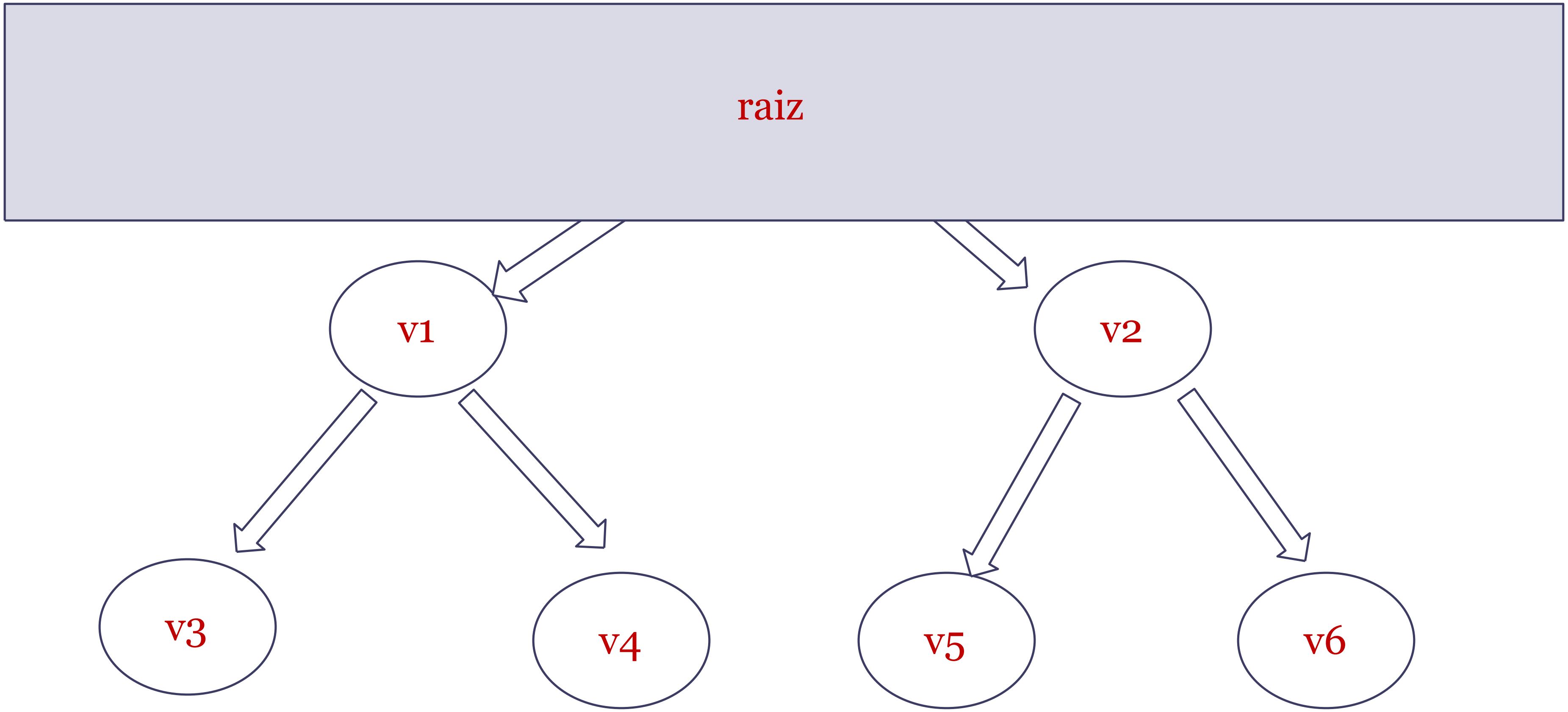
Comparação com o movimento da água



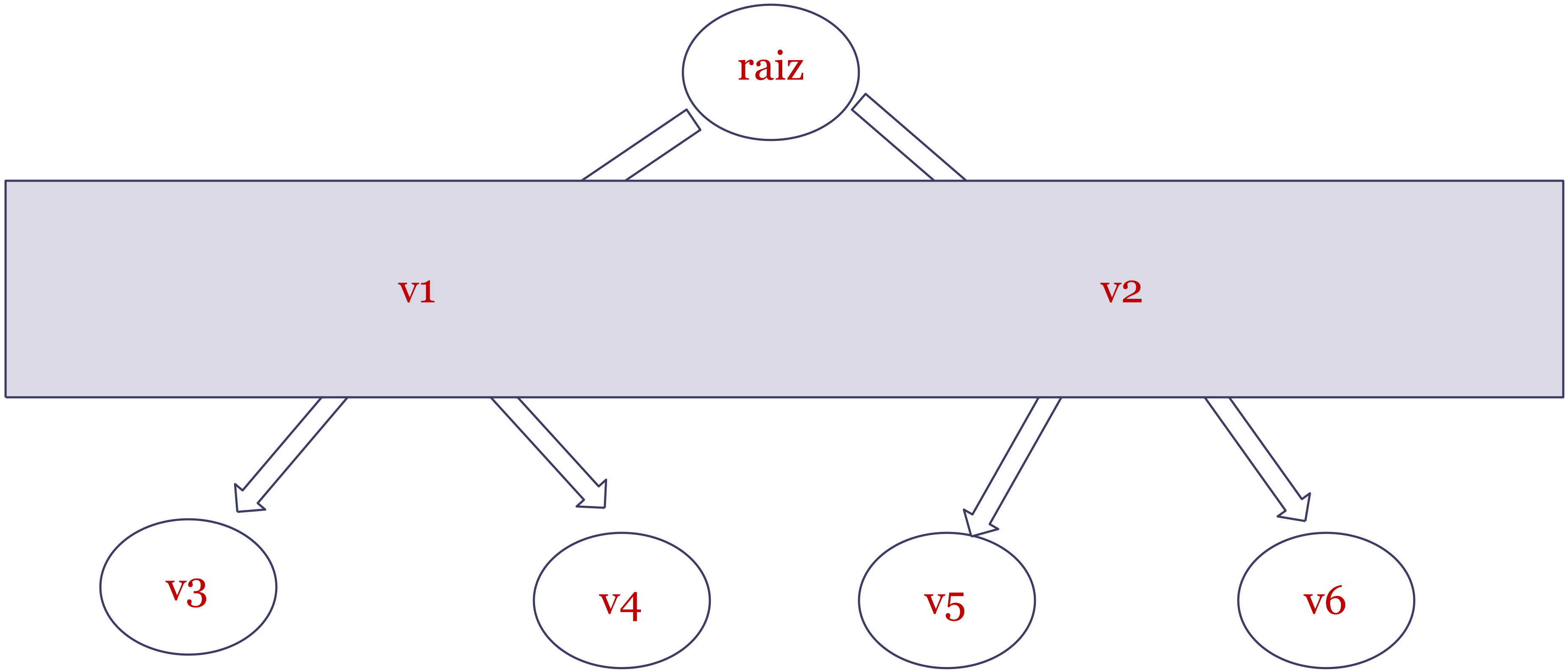
Aplicando Busca em Largura em uma Árvore



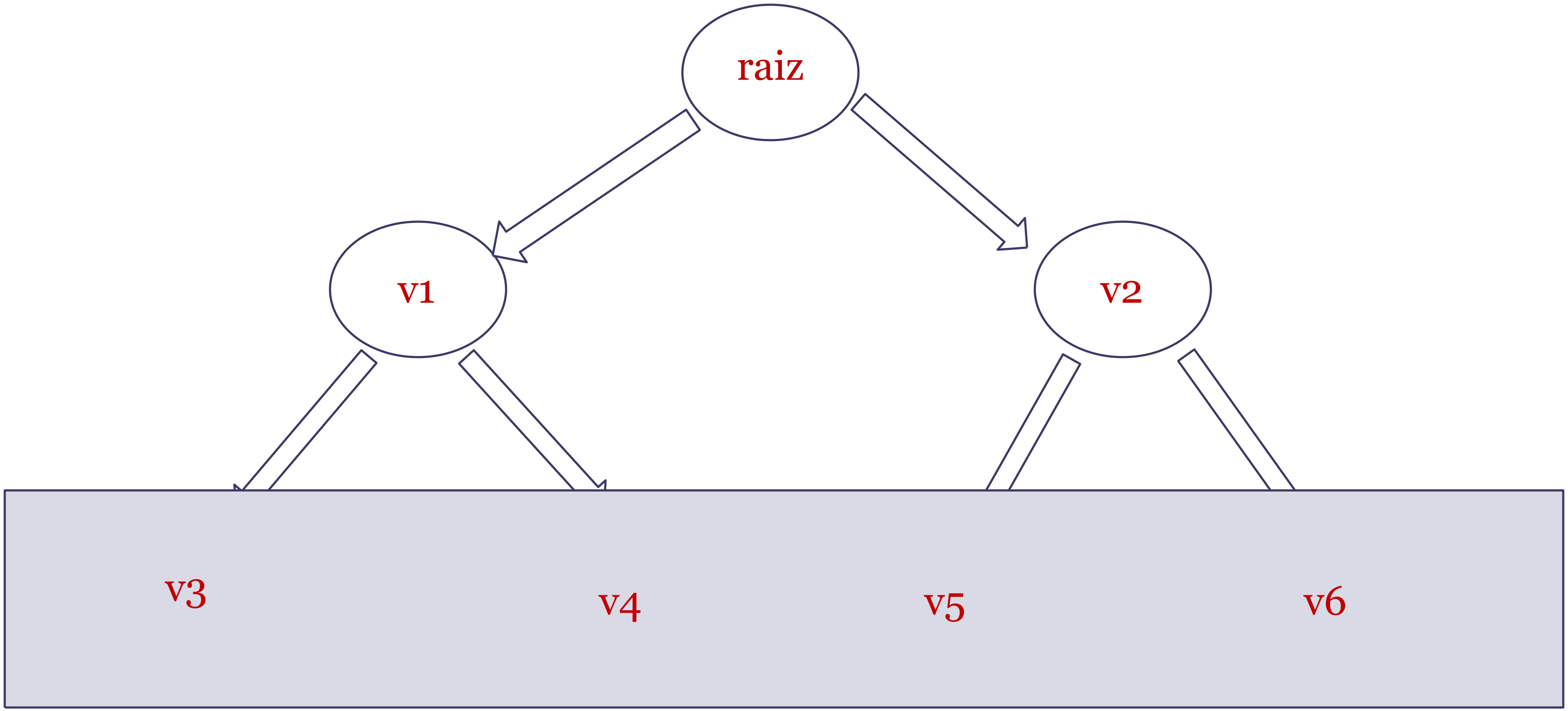
Aplicando Busca em Largura em uma Árvore



Aplicando Busca em Largura em uma Árvore



Aplicando Busca em Largura em uma Árvore



Busca em largura

O controle do descobrimento dos nós na busca em largura é feito de forma semelhante ao controle utilizado na busca em profundidade anteriormente apresentada:

Nó branco = Não visitado/não conhecido;

Nó cinza = Nó conhecido/não visitado; Seus adjacentes não foram inseridos em uma fila;

Nó preto = Nó conhecido/Nó visitado; Todos os seus adjacentes foram inseridos na fila (não necessariamente visitados, como na DFS);

Busca em largura

Um vértice é descoberto na primeira vez em que é encontrado

Neste momento ele se torna não branco

Assim como na DFS, os vértices de cor cinza e preta distinguem os vértices já localizados em duas categorias

Vértices de cor cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos
Eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos

Busca em largura

A Busca em largura constrói uma árvore primeiro na extensão, contendo inicialmente apenas sua raiz

Sempre que um vértice v é descoberto no curso da varredura da lista de adjacências de um vértice u já descoberto, o vértice v e a aresta (u,v) são adicionados à árvore primeiro na extensão

Neste caso, dizemos que u é predecessor ou pai de v na árvore primeiro na extensão

Busca em largura

Como um vértice é descoberto no máximo uma vez, este possui apenas um pai.

Conceito de Ancestral:

Se u está no caminho na árvore a partir da raiz s até o vértice v, então u é ancestral de v, e v é um descendente de u.

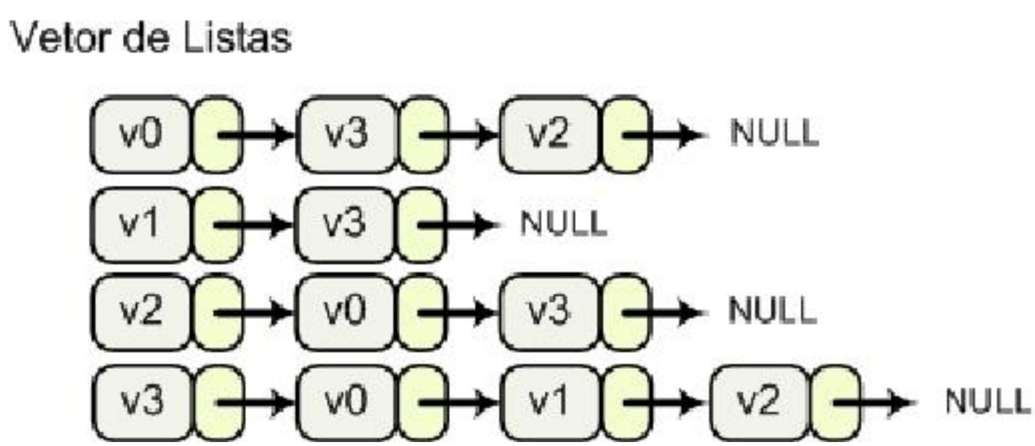
Tudo depende do nó escolhido para raiz; *As vezes é prefixado, como em algumas aplicações da área de redes*;

Roteamento, por exemplo (montando tabelas de encaminhamento);

Busca em largura

Segundo Cormen, a Busca em Largura (BFS) pressupõe que o grafo G=(V,A) é representado por uma lista de adjacência;;

Mas isso não é uma total verdade na prática...



Busca em largura

Assim como na DFS, a BFS faz uso de algumas estruturas auxiliares durante a pesquisa:

cor[u] *//indicativo de atingibilidade*

π[u] *//indica o vértice predecessor de u(pai)*

d[u] *//indica a distância desde a origem d(s,u) - em arestas*

Q *//indica a fila (FIFO)   ponto chave do algoritmo.*

Busca em Largura

```
BFS(G,s)
para cada vértice u ← V[G] - {s}
    cor[u] ← BRANCO
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NULL
cor[s] ← CINZA
d[s] ← 0
π[s] ← NULL
Q ← novaFila()
ENFILEIRA(Q,s)
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```

Busca em Largura

$BFS(G, s)$

1 $para\ cada\ vértice\ u \leftarrow V[G] - \{s\}$

2 $\quad cor[u] \leftarrow BRANCO$

3 $\quad d[u] \leftarrow \infty$

4 $\quad \pi[u] \leftarrow NULL$

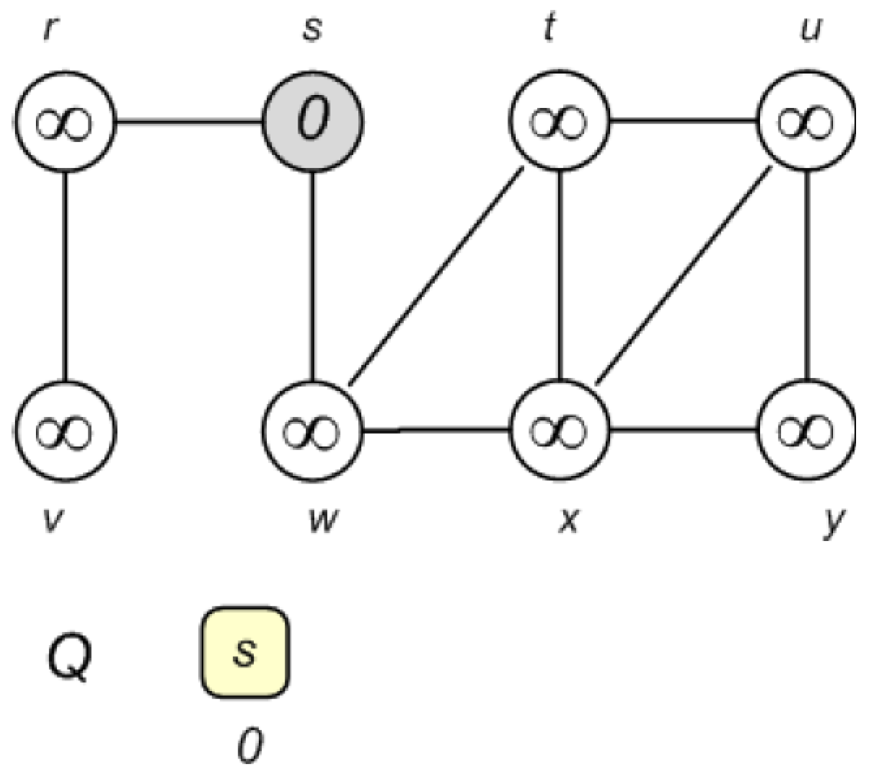
5 $cor[s] \leftarrow CINZA$

6 $d[s] \leftarrow 0$

7 $\pi[s] \leftarrow NULL$

8 $Q \leftarrow nova\ Fila()$

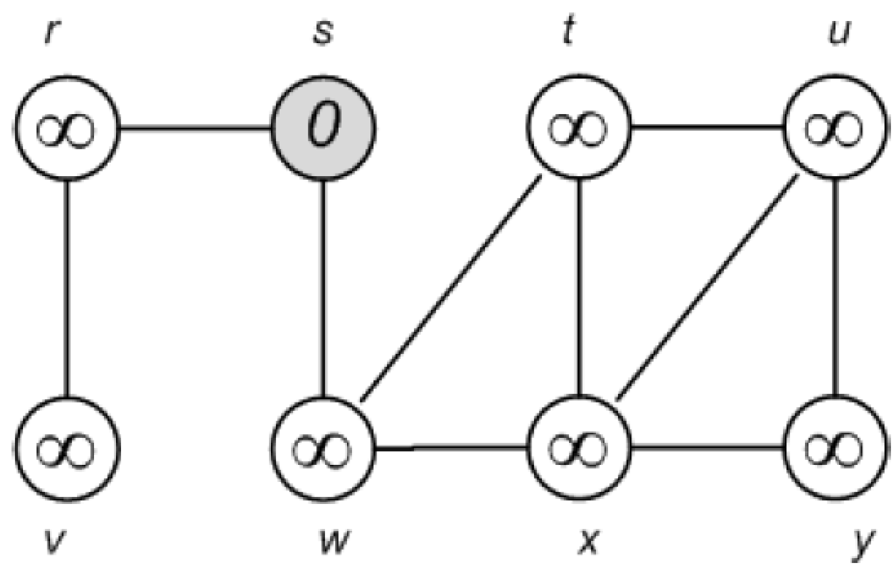
9 $ENFILEIRA(Q, s)$

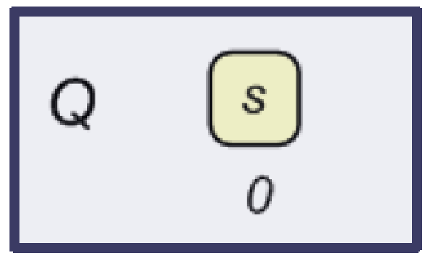


Inicializa as variáveis da BFS

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```





A fila não está vazia!

Busca em Largura

$\quad$ *enquanto* $!vazia(Q)$

$\qquad u \leftarrow DESENFILEIRA(Q)$

$\qquad$ *para cada* $v \leftarrow Adj[u]$

$\qquad\quad$ *se* $cor[v] = BRANCO$

$\qquad\qquad cor[v] \leftarrow CINZA$

$\qquad\qquad d[v] = d[u] + 1$

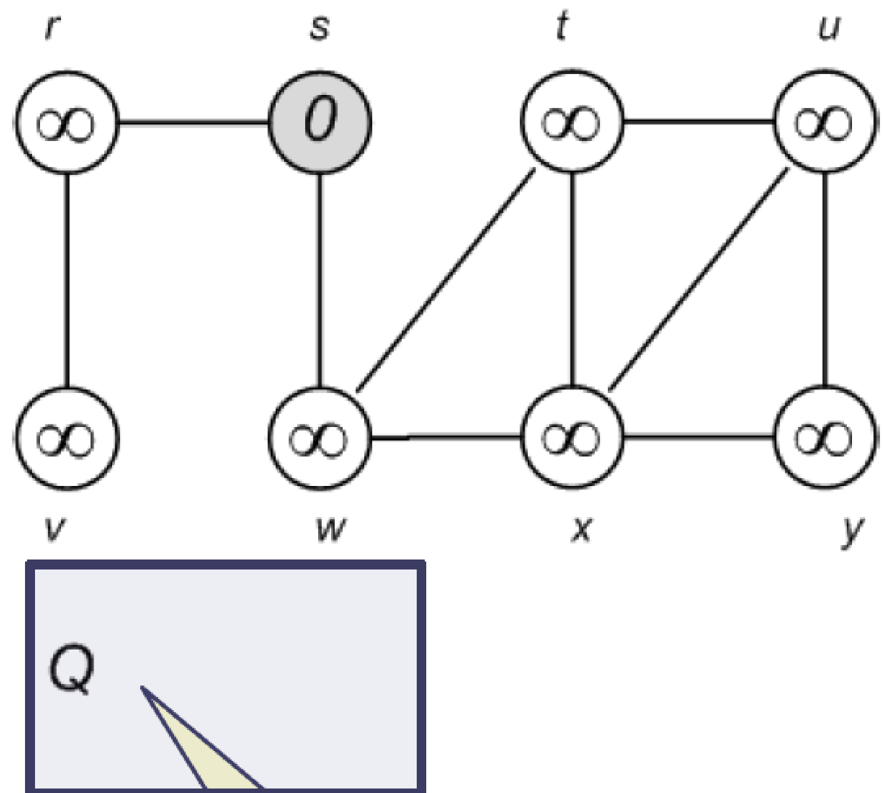
$\qquad\qquad \pi[v] \leftarrow u$

$\qquad\qquad ENFILEIRA(Q, v)$

$\qquad cor[u] \leftarrow PRETO$

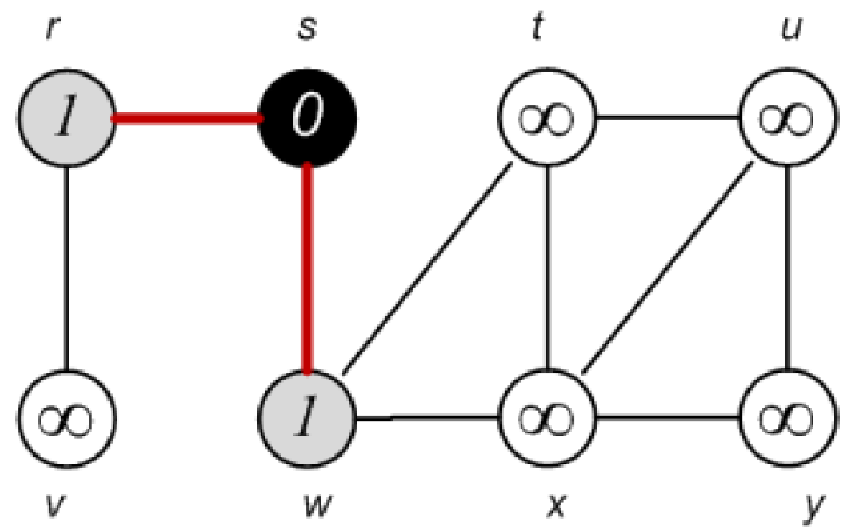
u=s

Adj[u]={r,w}

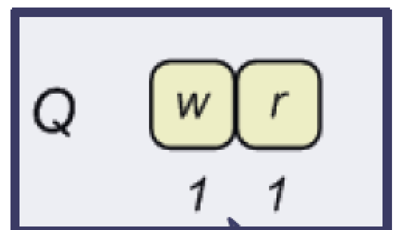


Retira *s* da fila, e parte para seus adjacentes...

Busca em Largura



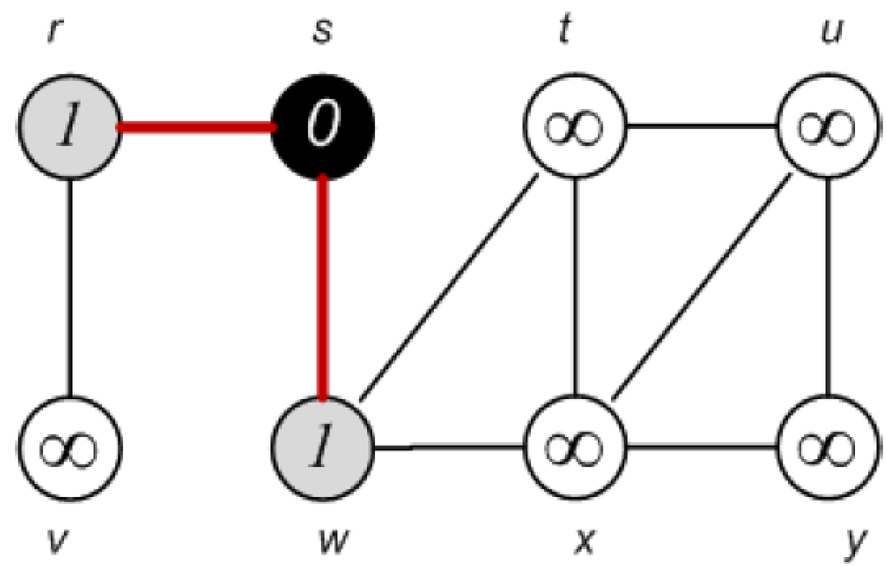
$$
\begin{array}{l}
\textit{enquanto } !vazia(Q) \\
\quad u \leftarrow DESENFILEIRA(Q) \\
\quad \textit{para cada } v \leftarrow Adj[u] \\
\quad\quad \textit{se } cor[v] = BRANCO \\
\quad\quad\quad cor[v] \leftarrow CINZA \\
\quad\quad\quad d[v] = d[u] + 1 \\
\quad\quad\quad \pi[v] \leftarrow u \\
\quad\quad\quad ENFILEIRA(Q, v) \\
\quad cor[u] \leftarrow PRETO
\end{array}
$$



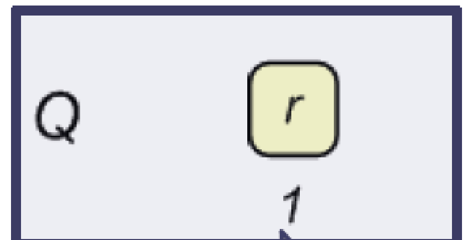
$u=s$
$Adj[u]=\{r,w\}$

Enfileirou os vértices desconhecidos pela busca...

Busca em Largura




```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
cor[u] ← PRETO
```



u=w

Adj[u]={s,t,x}

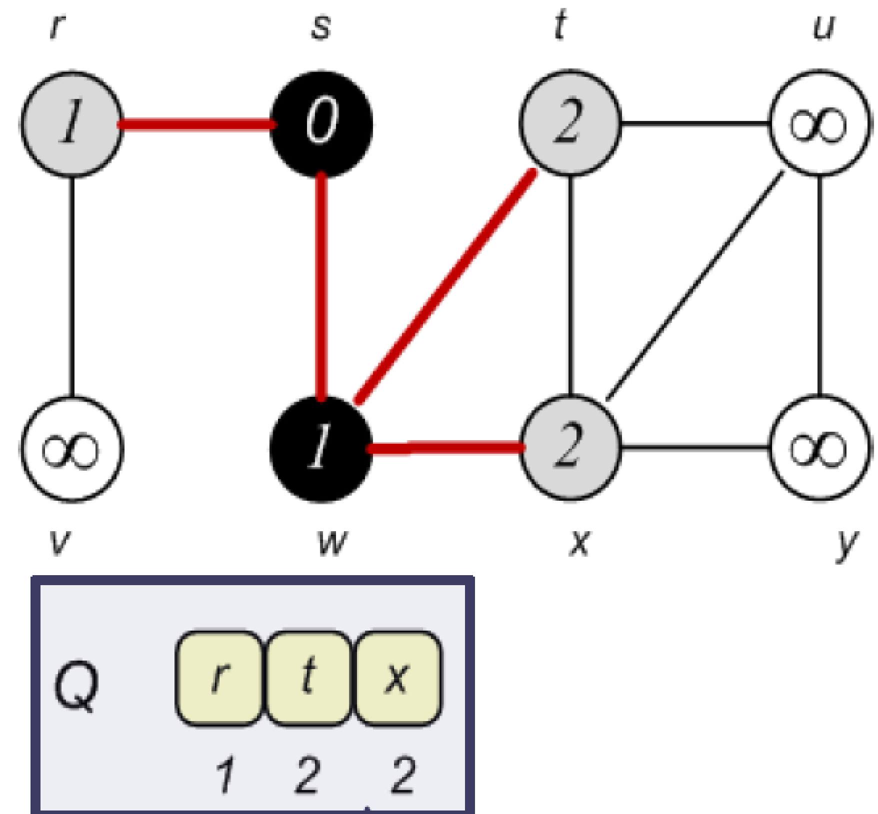
Retira *w* da fila, testa seus adjacentes...

Busca em Largura

$$
\begin{array}{l}
\textit{enquanto } !\textit{vazia}(Q) \\
\quad u \leftarrow \textit{DESENFILEIRA}(Q) \\
\quad \textit{para cada } v \leftarrow \textit{Adj}[u] \\
\quad\quad \textit{se } \textit{cor}[v] = \textit{BRANCO} \\
\quad\quad\quad \textit{cor}[v] \leftarrow \textit{CINZA} \\
\quad\quad\quad d[v] = d[u] + 1 \\
\quad\quad\quad \pi[v] \leftarrow u \\
\quad\quad\quad \textit{ENFILEIRA}(Q, v) \\
\quad \textit{cor}[u] \leftarrow \textit{PRETO}
\end{array}
$$

u=s

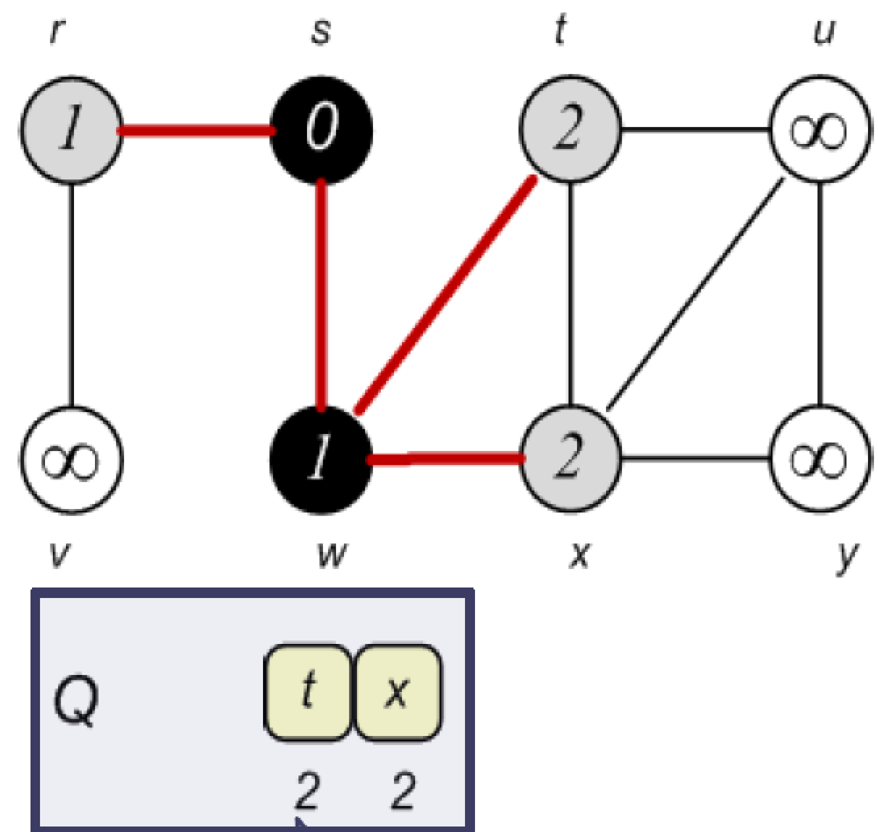
Adj[u]={t,x}



Enfileirou os vértices desconhecidos pela busca...

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u]+1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```



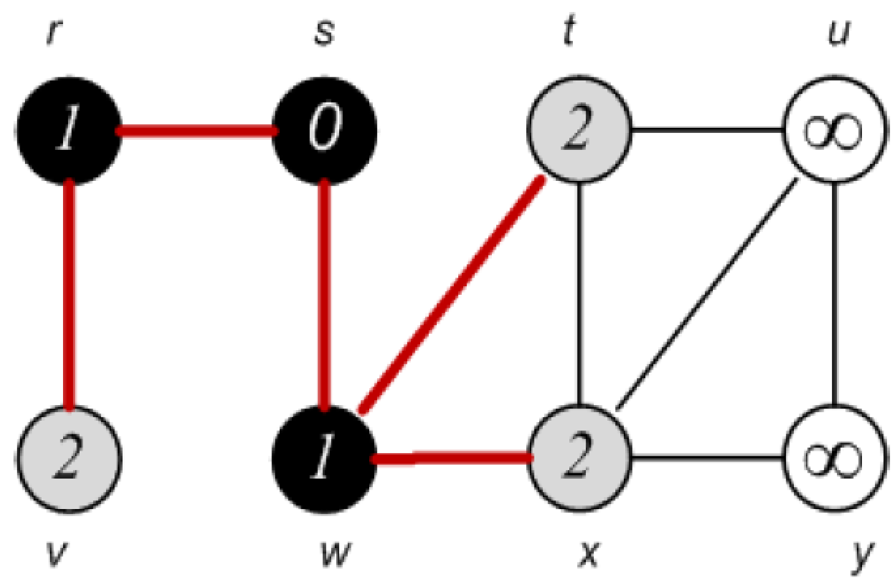
u=r

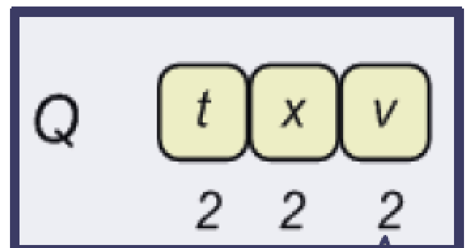
Adj[u]={s,v}

Retira *r* da fila, testa seus adjacentes...

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```





u=r

Adj[u]={s,v}

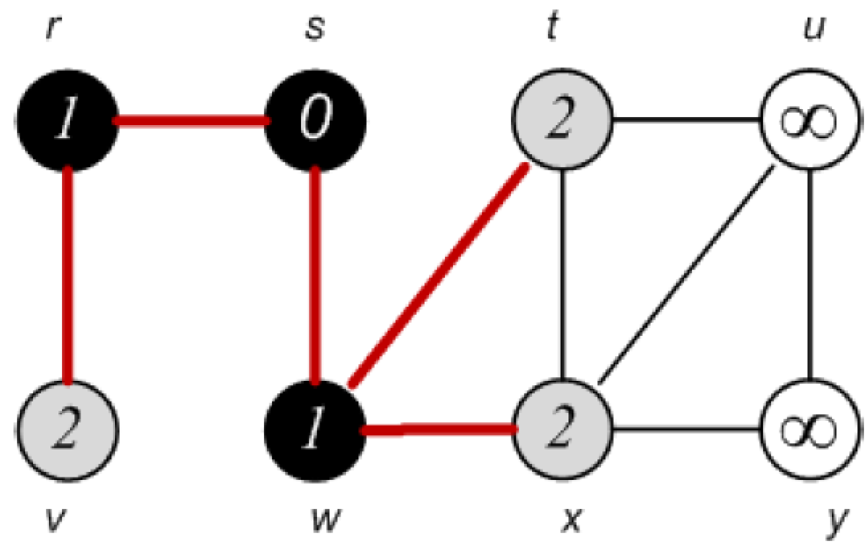
Enfileirou os vértices desconhecidos pela busca...

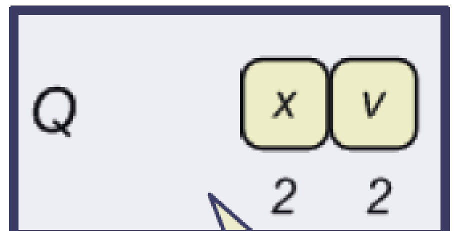
Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```

u=t

Adj[u]={w,x,u}





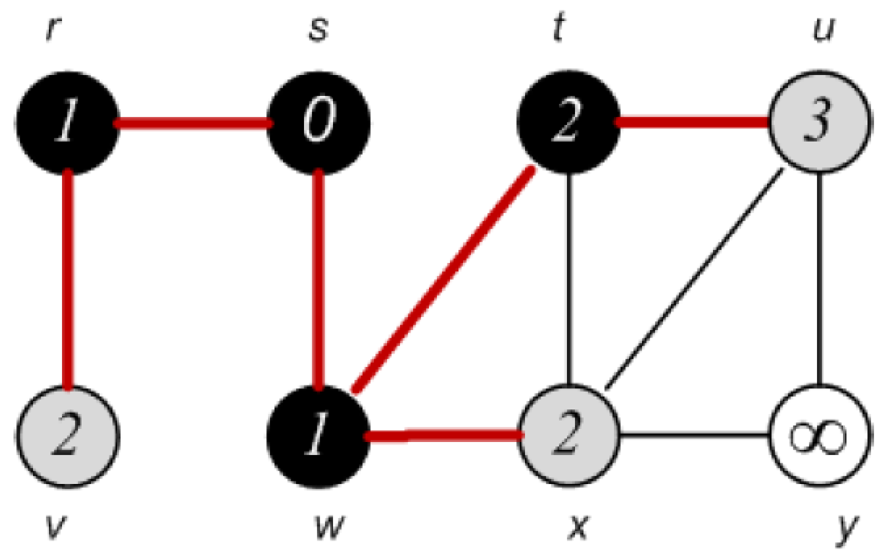
Retira *t* da fila, testa seus adjacentes...

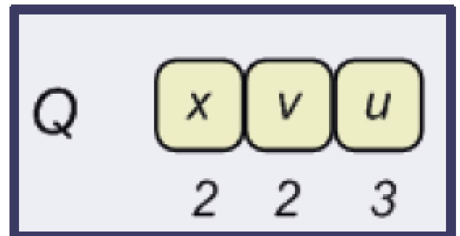
Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u]+1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```

u=t

Adj[u]={w,x,u}





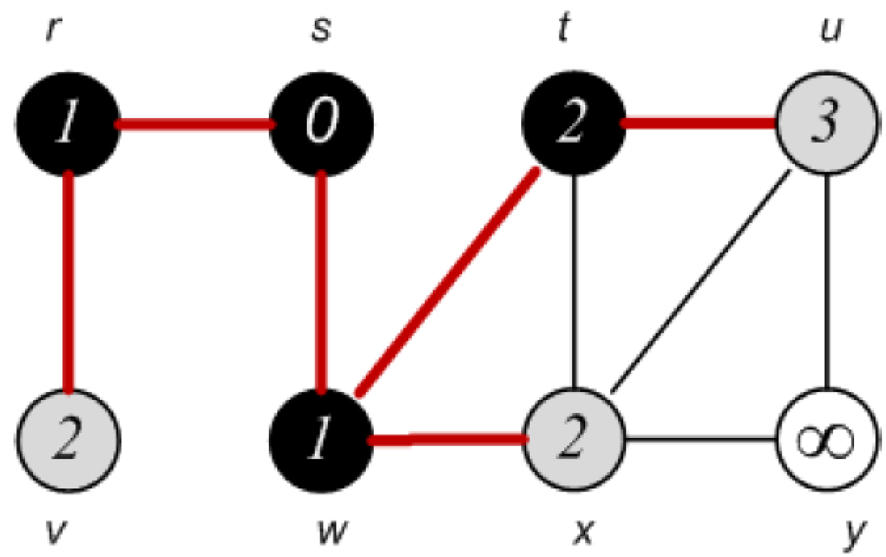
Enfileirou os vértices desconhecidos pela busca...

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```

u=x

Adj[u]={w,t,u,y}



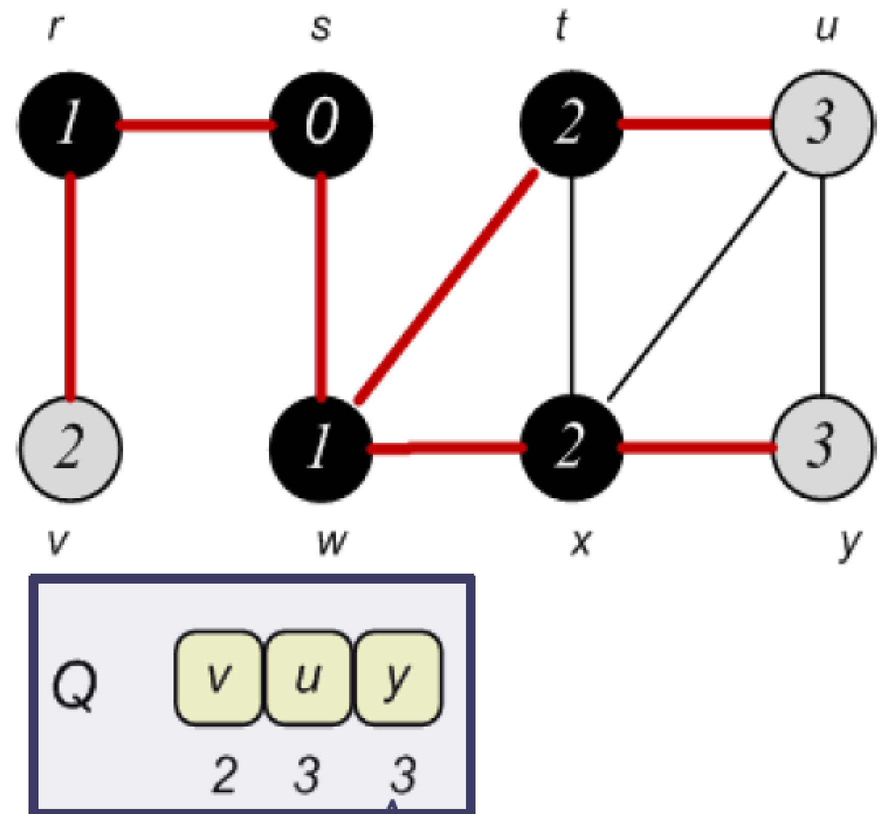
Retira *x* da fila, testa seus adjacentes...

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```

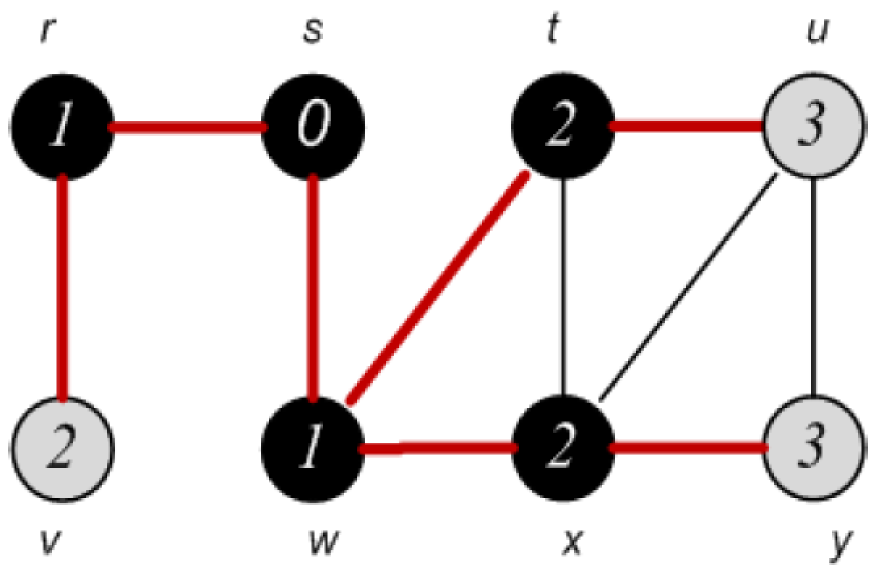
u=x

Adj[u]={w,t,u,y}

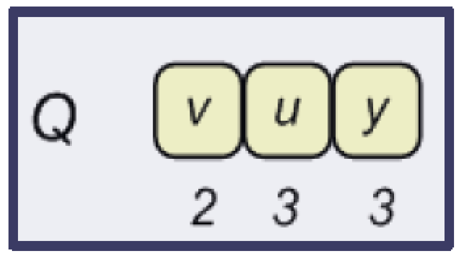


Enfileirou os vértices desconhecidos pela busca...

Busca em Largura



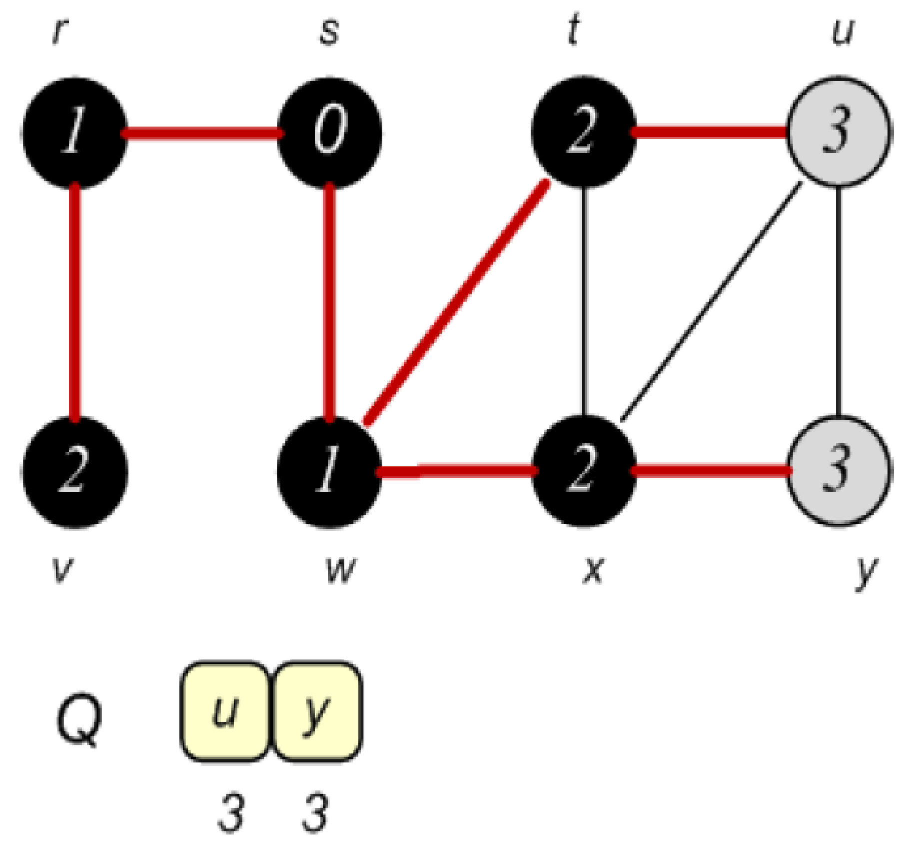

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u]+1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```



Marcando os vértices de preto...

Busca em Largura

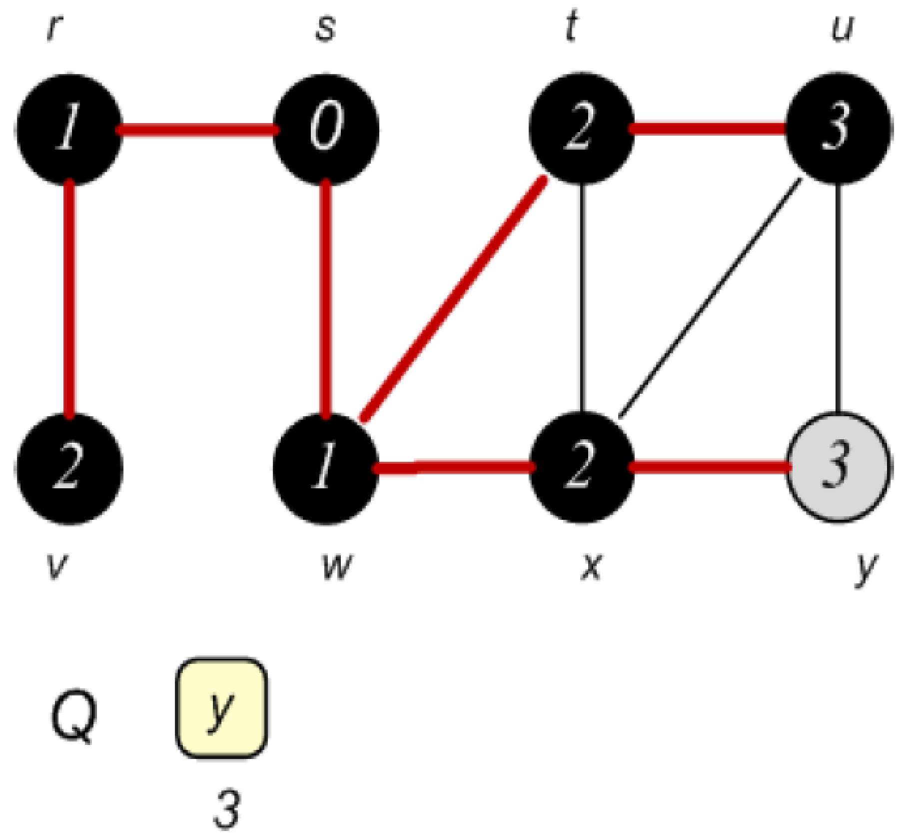
```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```



Marcando os vértices de preto...

Busca em Largura

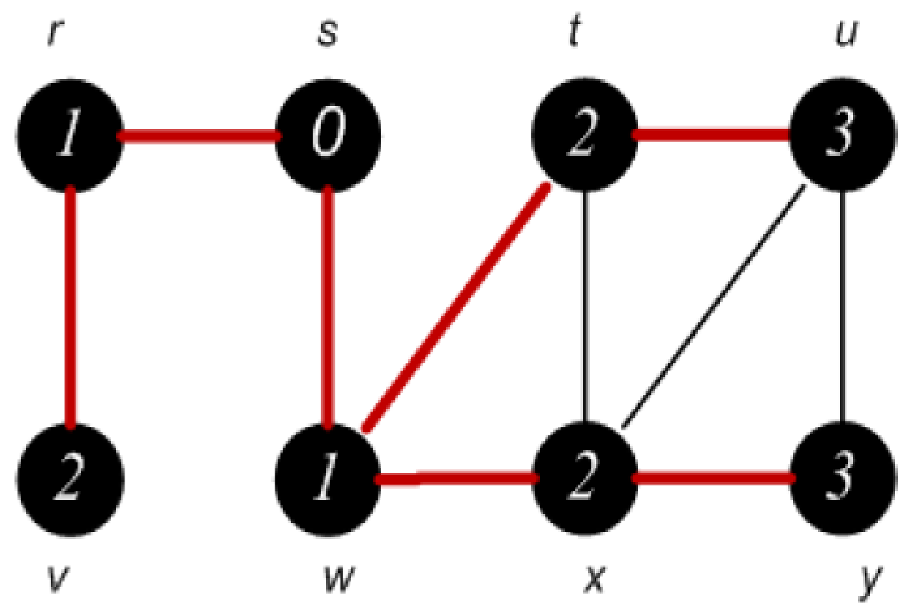
```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u]+1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q,v)
    cor[u] ← PRETO
```



Marcando os vértices de preto...

Busca em Largura

```
enquanto !vazia(Q)
    u ← DESENFILEIRA(Q)
    para cada v ← Adj[u]
        se cor[v] = BRANCO
            cor[v] ← CINZA
            d[v] = d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENFILEIRA(Q, v)
    cor[u] ← PRETO
```

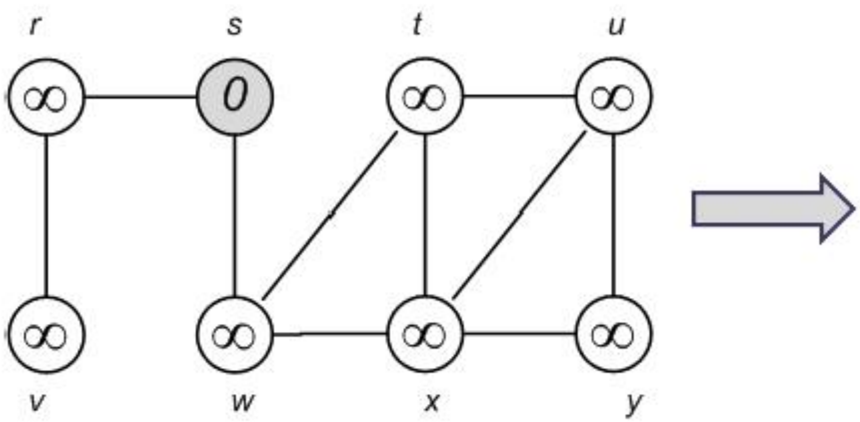


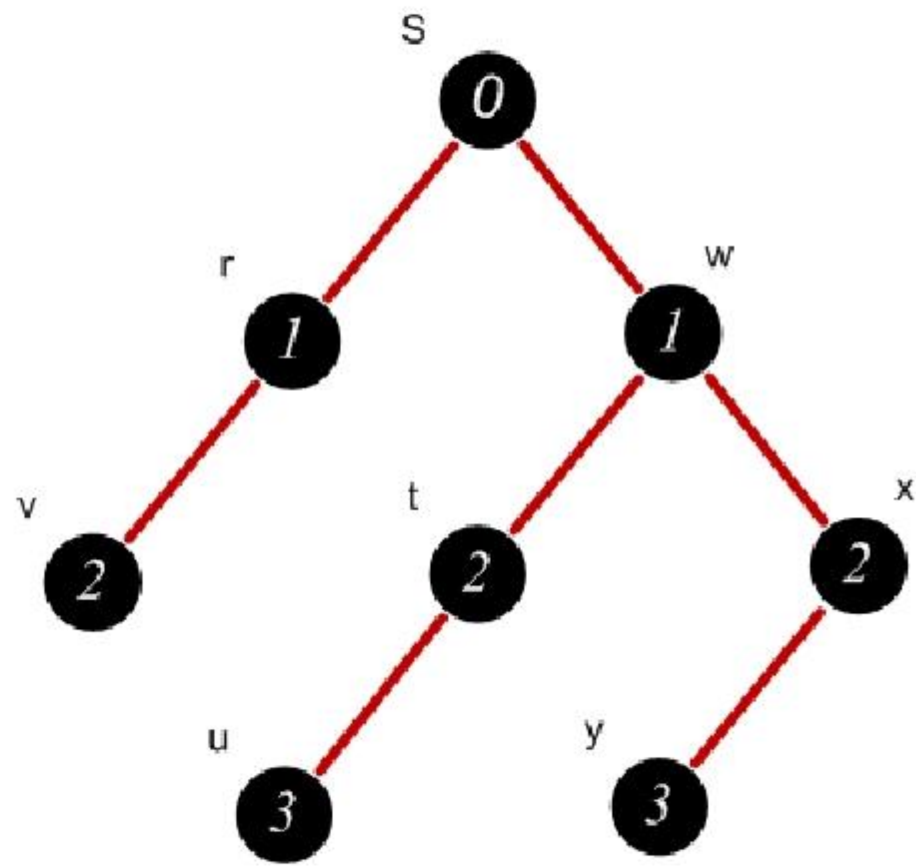
Q

Marcando os vértices de preto...

Busca em Largura

Árvore gerada na busca





Vetor

Índice:	s	y	x	t	w	u	v	r
Valor:	NULL	x	w	w	s	t	r	s

Busca em largura

Análise de complexidade

- Obviamente que a complexidade da busca em largura depende diretamente da representação do grafo utilizada;

$enquanto\ !vazia(Q)$

$\quad u \leftarrow DESENFILEIRA(Q)$

$\quad para\ cada\ v \leftarrow Adj[u]$

$\quad\quad se\ cor[v] = BRANCO$

$\quad\quad\quad cor[v] \leftarrow CINZA$

$\quad\quad\quad d[v] = d[u] + 1$

$\quad\quad\quad \pi[v] \leftarrow u$

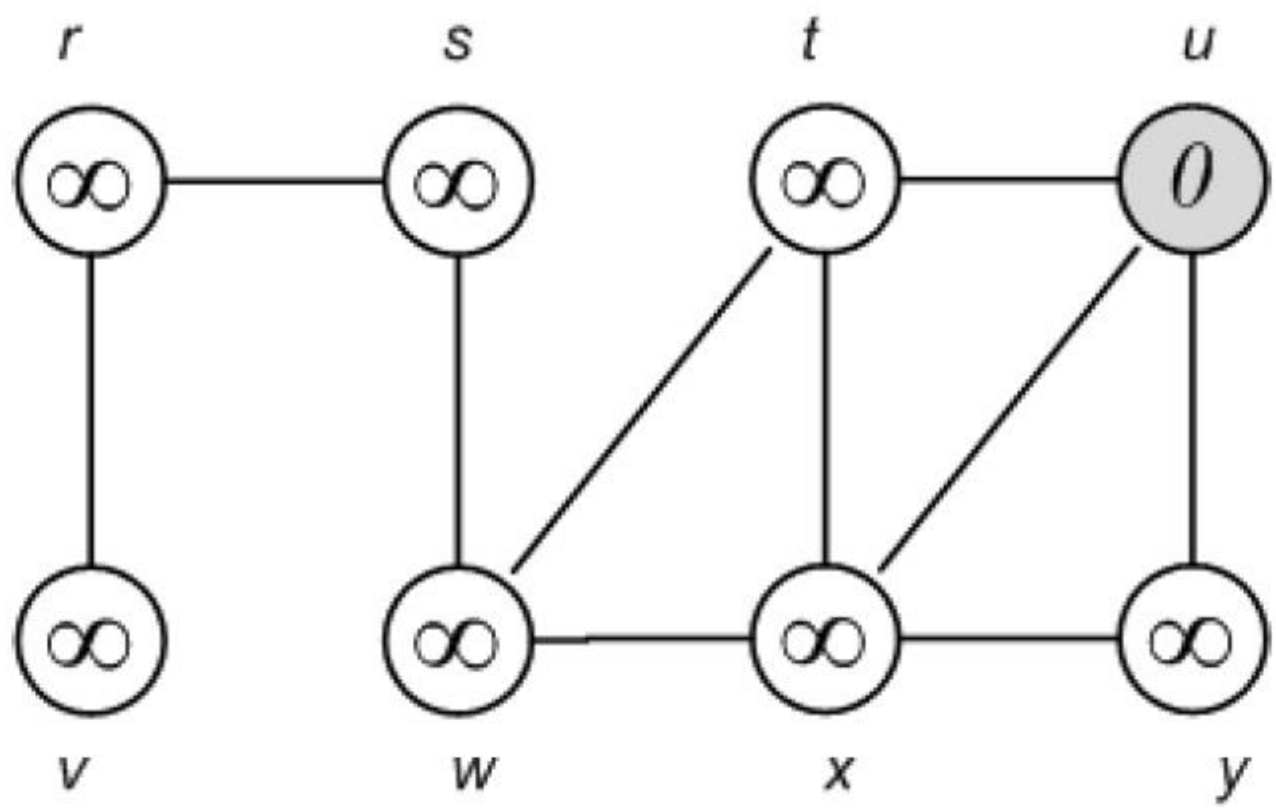
$\quad\quad\quad ENFILEIRA(Q, v)$

$\quad cor[u] \leftarrow PRETO$

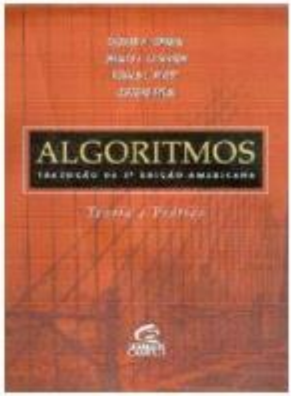
- Utilizando lista de adjacência: $O(|V| + |A|)$

Exercícios

BFS(G,u), para o grafo G a seguir:



Bibliografia



CORMEN, T. H.;; LEISERSON, C. E.;; RIVEST, R. L.;; (2002). Algoritmos Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.

ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;;