

# Algoritmos e Estruturas de Dados III

3º Período Engenharia da Computação

Prof. Edwaldo Soares Rodrigues  
Email: [edwaldo.rodrigues@uemg.br](mailto:edwaldo.rodrigues@uemg.br)

# Grafos

- Representação:
  - E se quisermos armazenar um grafo em um computador?
  - Precisamos armazenar os dados essenciais da definição do grafo;
  - A partir desta informação podemos, por exemplo:
    - Construir uma representação visual ou efetuar operações sobre o grafo;
    - Aplicar algoritmos para otimizar determinadas tarefas;
    - Determinar se alguma tarefa é possível de ser realizada;

# Grafos

- Representação:
  - Diversas são as formas de representação de um grafo computacionalmente;
  - Estruturas mais comumente utilizadas:
    - Matriz de adjacência;
    - Matriz de incidência;
    - Lista de adjacência;

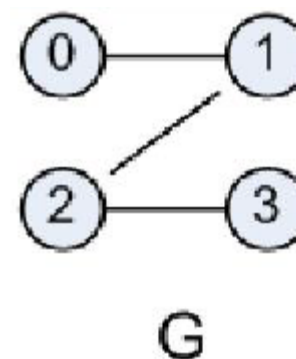
# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - Lembrando o conceito de adjacência:
    - A é adjacente a B se A está conectado a B;
  - A matriz de adjacência possui a informação que reflete este conceito;

# Grafos

- Matriz de adjacência:

$m_{i,j}$       1, se  $i$  é adjacente a  $j$   
              0, em caso contrário



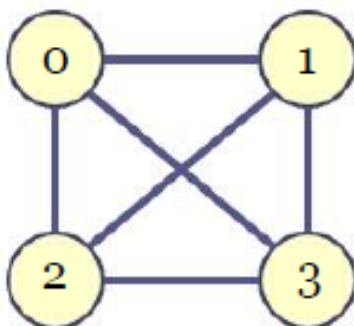
	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0

# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - Em um grafo completo  $K_4$ , como seria a matriz de adjacência?
  - E em um grafo complemento de  $K_4$ ?

# Grafos

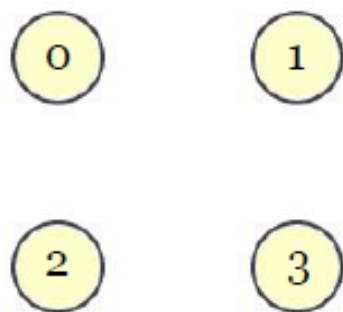
- Matriz de adjacência:
  - Em um grafo completo  $K_4$ , como seria a matriz de adjacência?



	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	1	1	1	0

# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - E em um grafo complemento de  $K_4$ ?



	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

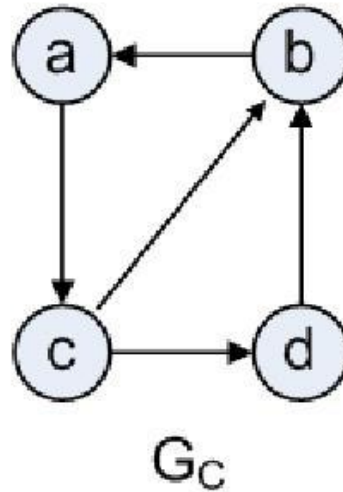


# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - Considerações:
    - Um laço é representado por 1 na diagonal principal;
    - Diagonal principal nula = grafo sem laços;
    - O grau de um vértice é igual ao número de 1s na linha correspondente ao vértice;
    - Para descobrir todos os vértices adjacentes ao vértice  $v$ , devemos percorrer toda a linha  $v$ ;
    - Para saber se um vértice  $v_1$  é adjacente a um vértice  $v_2$ , basta consultar a matriz na posição  $(v_1, v_2)$ ;

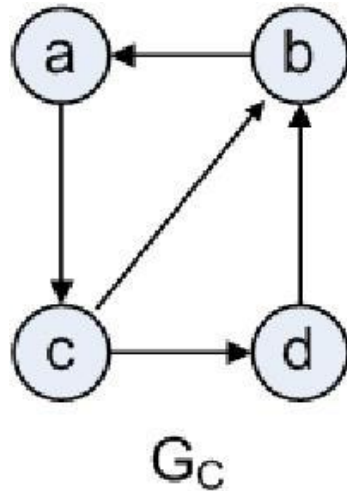
# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência?



# Grafos

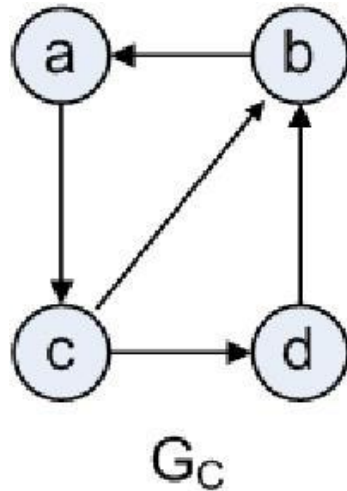
- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência?
    - Uma possibilidade!



	a	b	c	d
a	0	+1	-1	0
b	-1	0	+1	+1
c	+1	-1	0	-1
d	0	-1	+1	0

# Grafos

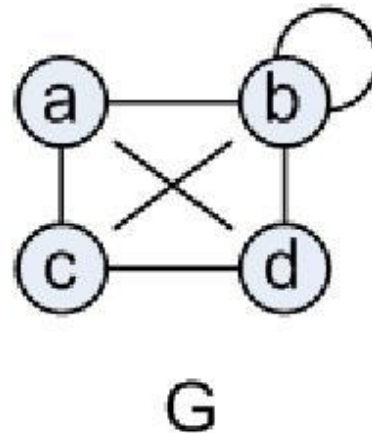
- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos direcionados usando matriz de adjacência?
    - Outra possibilidade!



	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	1	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	1	0	0

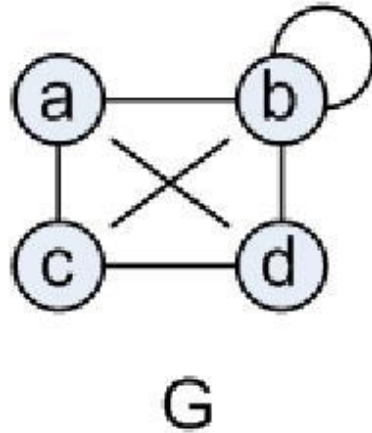
# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de adjacência:



# Grafos

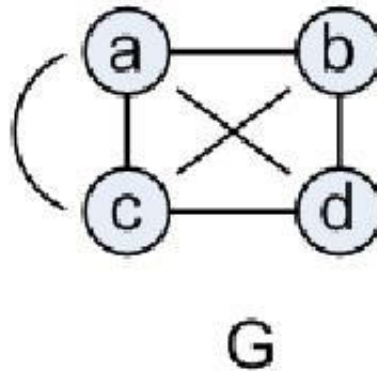
- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de adjacência:



	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	0	1
d	1	1	1	0

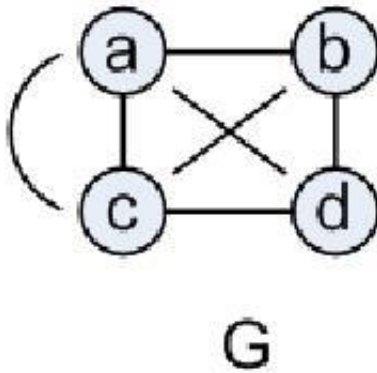
# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência:



# Grafos

- Matriz de adjacência:
- É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência:

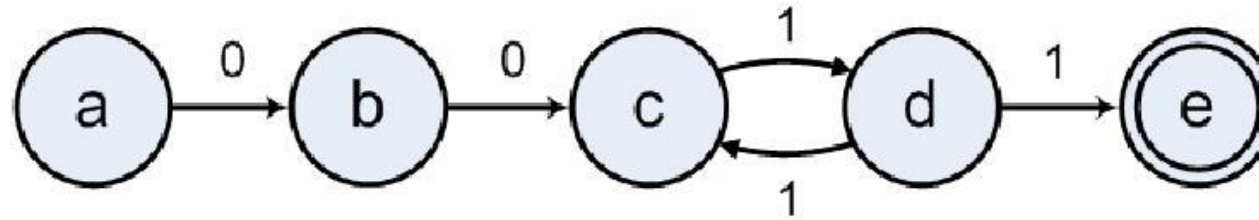


	a	b	c	d
a	0	1	2	1
b	1	0	1	1
c	2	1	0	1
d	1	1	1	0



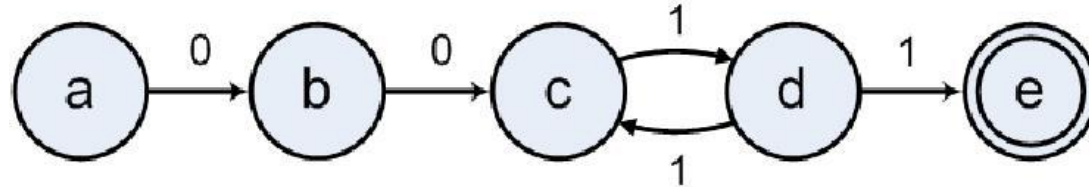
# Grafos

- Matriz de adjacência:
- É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de adjacência:



# Grafos

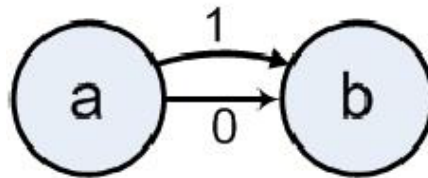
- Matriz de adjacência:
- É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de adjacência:



	a	b	c	d	e
a		0			
b			0		
c				1	
d			1		1
e					

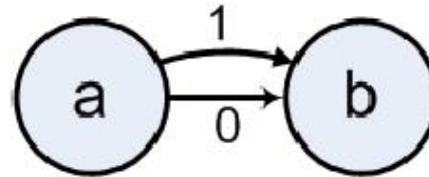
# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas e com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência:



# Grafos

- Matriz de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas e com arestas paralelas utilizando matriz de adjacência:



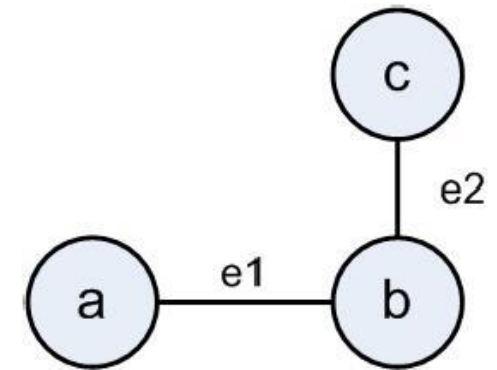
	a	b
a	0	-2
b	+2	0

Não é possível sem utilizar estruturas auxiliares.

# Grafos

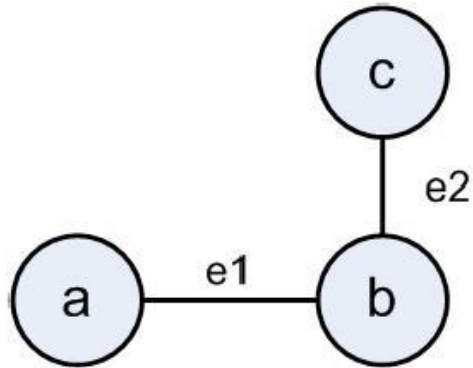
- Matriz de incidência:
  - A matriz de incidência possui a seguinte dimensão:  $|V| \times |A|$
  - Suponha a matriz  $M_{V \times A}$ ;

$m_{i,j}$        $\begin{cases} 1, & \text{se a aresta } j \text{ incide no vértice } i \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$



# Grafos

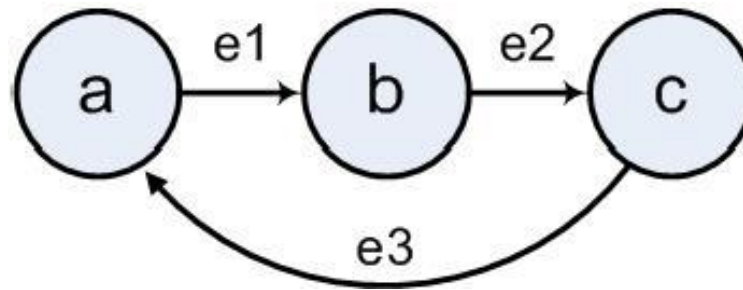
- Matriz de incidência:



	e1	e2
a	1	0
b	1	1
c	0	1

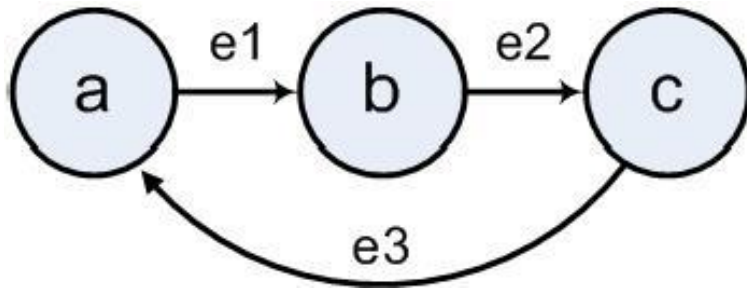
# Grafos

- Matriz de incidência:
  - Podemos representar grafos direcionados utilizando matriz de incidência?



# Grafos

- Matriz de incidência:
  - Podemos representar grafos direcionados utilizando matriz de incidência?

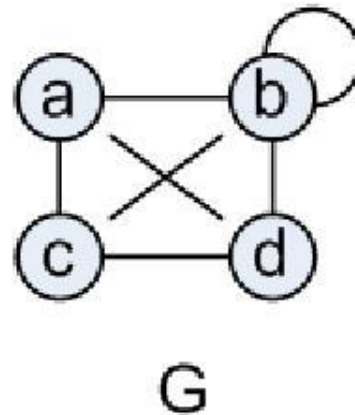


	e1	e2	e3
a	-1	0	+1
b	+1	-1	0
c	0	+1	-1



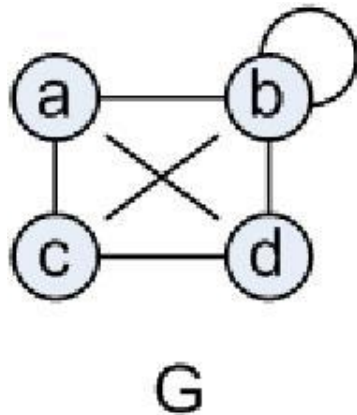
# Grafos

- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de incidência?



# Grafos

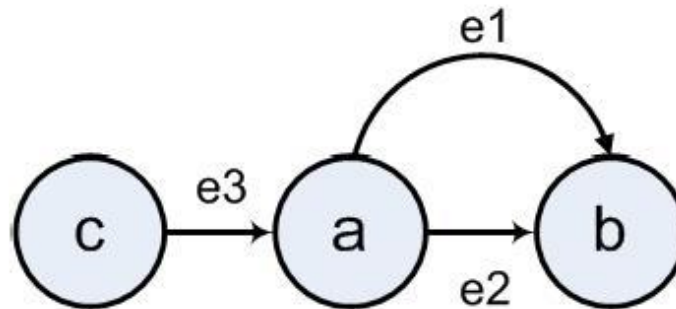
- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas laço utilizando matriz de incidência?



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
a	1	1	1	0	0	0	0
b	1	0	0	1	1	0	2
c	0	1	0	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1	1	0

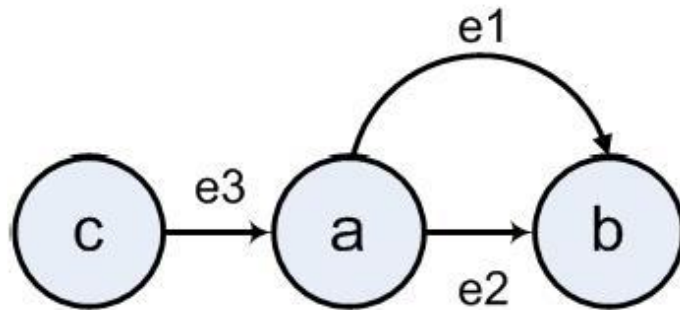
# Grafos

- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de incidência?



# Grafos

- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando matriz de incidência?

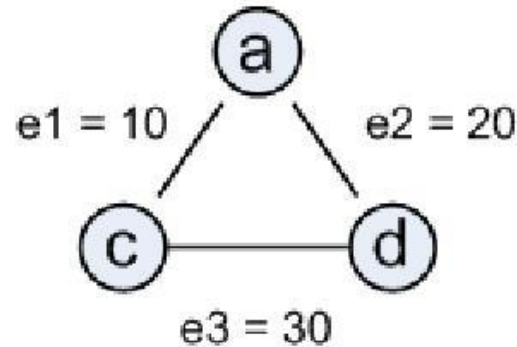


Mesma representação  
para arestas distintas

	e1	e2	e3
a	-1	-1	+1
b	+1	+1	0
c	0	0	-1

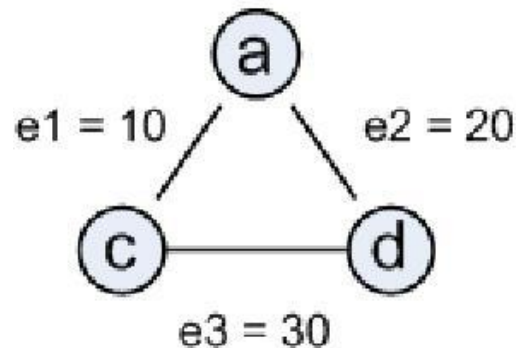
# Grafos

- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de incidência?



# Grafos

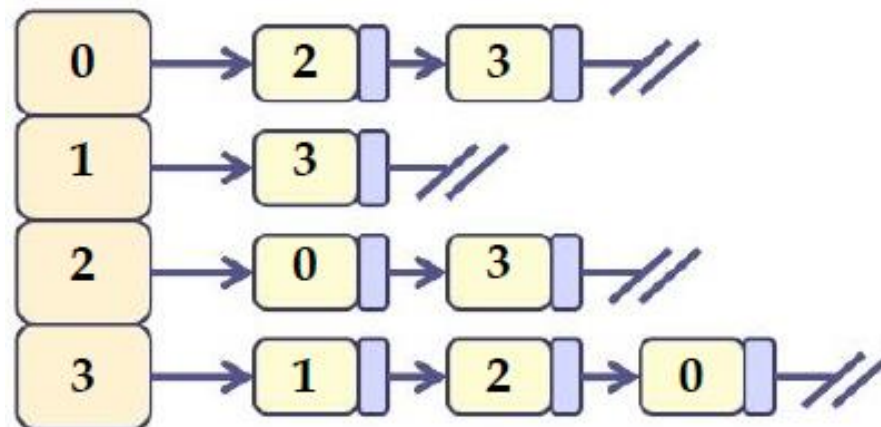
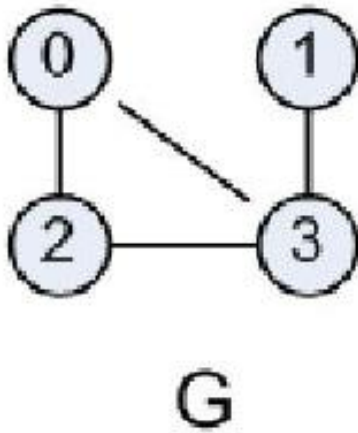
- Matriz de incidência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando matriz de incidência?



	e1	e2	e3
a	10	20	
b	10		30
c		20	30

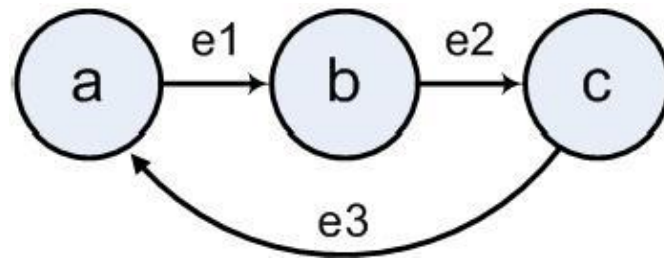
# Grafos

- Lista de adjacência:
  - Definição: manter para cada vértice uma lista dos vértices que são adjacentes (vizinhos) a ele;



# Grafos

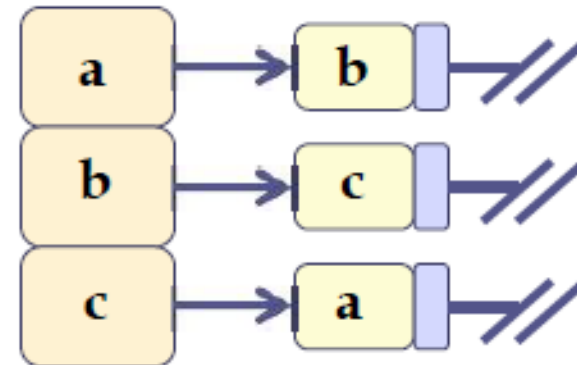
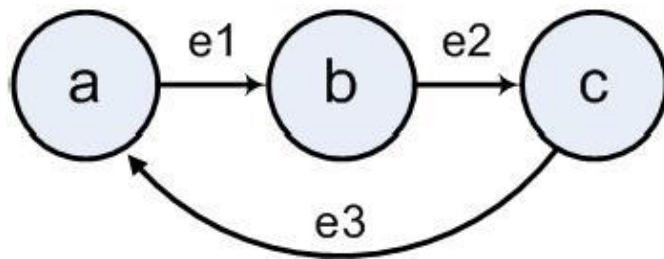
- Lista de adjacência:
  - Podemos representar grafos orientados utilizando lista de adjacência?





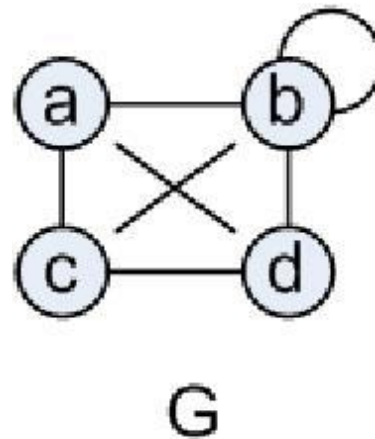
# Grafos

- Lista de adjacência:
- Podemos representar grafos orientados utilizando lista de adjacência?



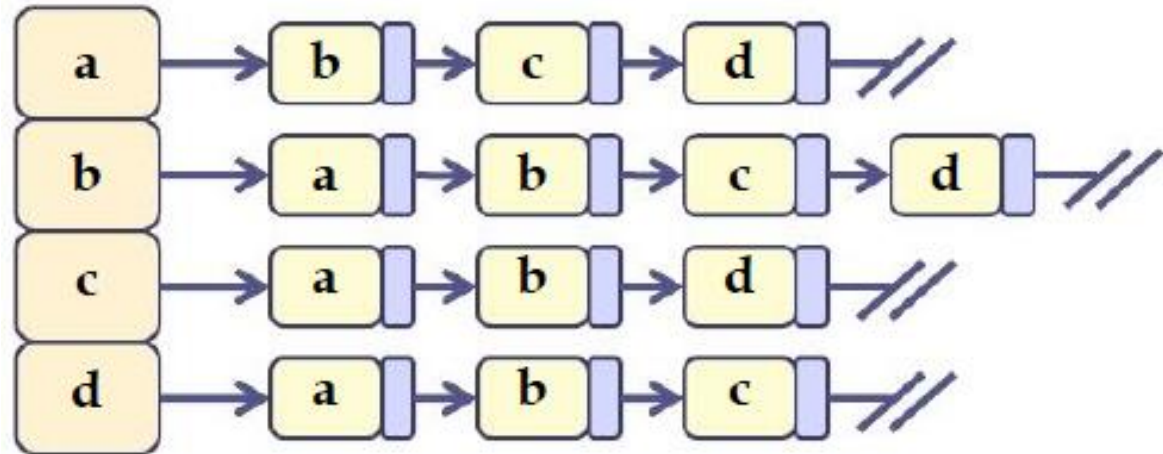
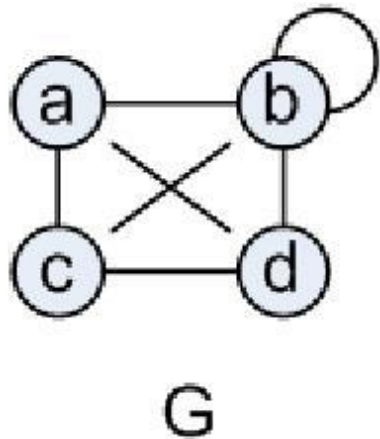
# Grafos

- Lista de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas laço utilizando lista de adjacência?



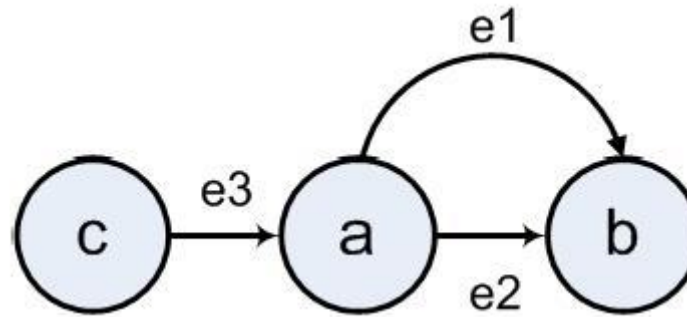
# Grafos

- Lista de adjacência:
- É possível representar grafos com arestas laço utilizando lista de adjacência?



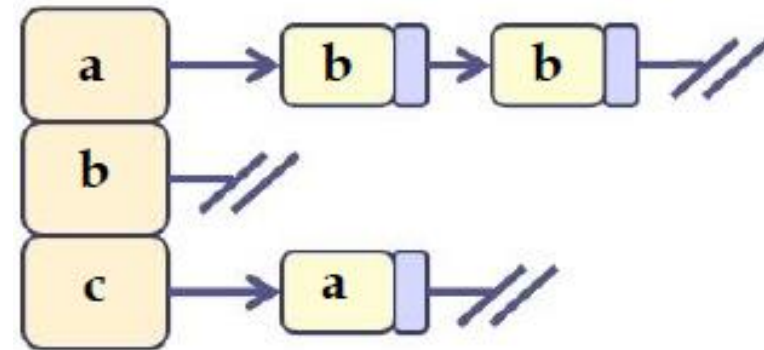
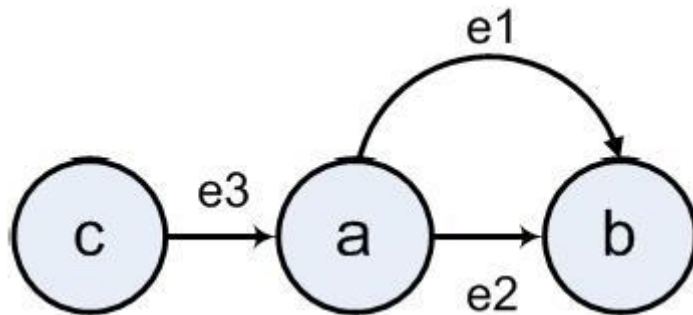
# Grafos

- Lista de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando lista de adjacência?



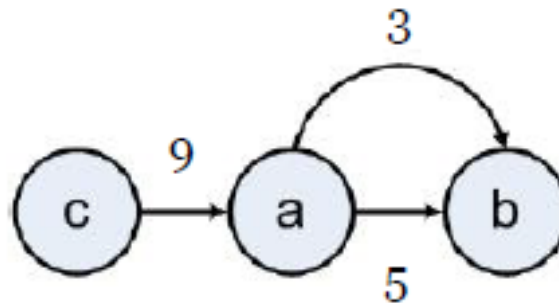
# Grafos

- Lista de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas paralelas utilizando lista de adjacência?



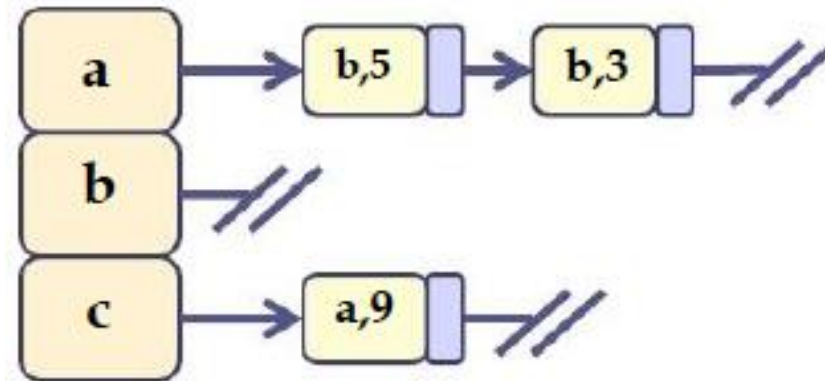
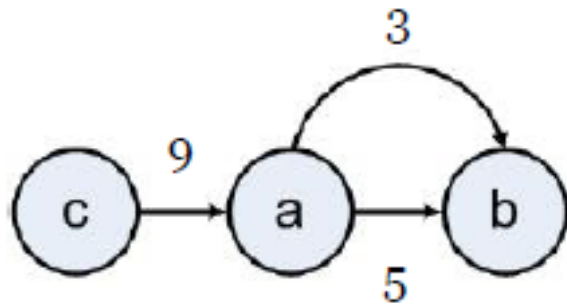
# Grafos

- Lista de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando lista de adjacência?



# Grafos

- Lista de adjacência:
  - É possível representar grafos com arestas valoradas utilizando lista de adjacência?



# Grafos

- Lista de adjacência:
  - Considerações:
    - Se  $G$  é um grafo direcionado, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é  $|A|$ ;
    - Se  $G$  não é um grafo direcionado, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é  $2 \times |A|$ ;
    - Para listar todos os vértices adjacentes a  $v$  temos que percorrer a lista associada a  $v$ ;
    - Para saber se um vértice  $v_1$  é adjacente a um vértice  $v_2$ , devemos realizar uma busca na lista associada ao vértice  $v_1$ ;



# Grafos

- Representação de um grafo:
  - Qual, dentre as três formas de representação computacional, é a mais adequada (ou mais eficiente)?

# Grafos

- Densidade de um grafo:
  - A densidade de um grafo é uma função entre o número de vértices e o número de arestas:
    - Grafos não direcionados:  $2A / V(V-1)$ ;
    - Grafos direcionados:  $A / V(V-1)$ ;
  - Grafo denso é aquele que possui densidade alta (próxima a 1);
  - Grafo esparso é aquele que possui densidade baixa (próxima a 0);

# Grafos

- Representação de um grafo:
  - Qual, dentre as três formas de representação computacional, é a mais adequada (ou mais eficiente)?
    - Quanto mais denso for o grafo, as melhores opções para representá-los são por meios das matrizes de adjacência/incidência;
    - Quanto mais esparsos forem os grafos, a melhor opção para representá-los é por meio de listas de adjacência;

# Grafos

- Matriz de adjacência/incidência x Lista de adjacência:
  - Matriz de adjacência/incidência:
    - Vantagens:
      - Acesso rápido;
      - Basta percorrer a matriz;
    - Desvantagens:
      - Espaço de armazenamento;
      - Pode ocupar muita memória para representar um grafo;

# Grafos

- Matriz de adjacência/incidência x Lista de adjacência:
  - Lista de adjacência:
    - Vantagens:
      - Espaço de armazenamento;
      - Pode ocupar pouca memória para efetuar o armazenamento;
    - Desvantagens:
      - Acesso pode se tornar um problema;
      - Pode ter um grafo com um vértice que tenha adjacências com todos os demais vértices, gerando uma lista grande, e inviabilizando seu acesso que seria sequencial;

# Algoritmos e Estruturas de Dados III

- Bibliografia:

- Básica:

- ASCENCIO, Ana C. G. Estrutura de dados. Rio de Janeiro: Pearson. 2011.
    - CORMEN, Thomas; RIVEST, Ronald; STEIN, Clifford; LEISERSON, Charles. Algoritmos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.
    - ZIVIANI, Nívio. Projeto de algoritmos com implementação em Pascal e C. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

- Complementar:

- EDELWEISS, Nina, GALANTE, Renata. Estruturas de dados. Porto Alegre: Bookman. 2009. (Coleção Livros didáticos de informática UFRGS, 18).
    - PINTO, W.S. Introdução ao desenvolvimento de algoritmos e estrutura de dados. São Paulo: Érica, 1990.
    - PREISS, Bruno. Estruturas de dados e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
    - TENEMBAUM. Aaron M. Estruturas de Dados usando C. São Paulo: Makron Books. 1995.
    - VELOSO, Paulo A. S. Complexidade de algoritmos: análise, projeto e métodos. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 2001.

# Algoritmos e Estruturas de Dados III

