S T Q Q S S D   __/__/__

Lista 1 - Teoria dos Grafos

1. Seja $G=(V,E)$ um grafo com $|V| \geq 2$. Prove que se $|E| \geq |V|+1$, então G possui um vértice com grau pelo menor 3.

Por contrapositiva:
Se G não possui um vértice com grau pelo menor 3, então $|E| < |V|+1$.

Se G não possui vértice com grau ≥ 3, logo $d(v) \leq 2$ para qualquer $v \in V$.

Logo $\sum_{v \in V} d(v) \leq 2 \cdot |V|$

Sabemos que $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} d(v)$, então $2 \cdot |E| \leq 2 \cdot |V|$,

$\rightarrow |E| \leq |V| \rightarrow |E| < |V|+1$ //

2. Prove que um passeio de u a v contém um caminho de u a v. Use indução no comprimento do passeio.

Por indução:

Seja $W := (u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ um passeio de u a v. Provaremos que há uma função $P(W)$ que sempre retorna um caminho de u a v sendo que $P(W) \subseteq W$

Caso base: Se W não repete vértices, então $P(W) = W$,

__/__/__ S T Q Q S S D

pois W já é um caminho de u a v.

Passo: Se W possui um vértice y repetido, então y faz parte de um ciclo $C = (y, x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ contido em W. Considere $W' = W - C$ um passeio de u a v menor que W. Temos que $P(W) = P(W')$

Como todos os casos estão tratados, temos que $P(W')$ funciona para qualquer passeio de u a v. Logo qualquer passeio W de u a v contém um caminho $P(W)$ de u a v. //

3. Seja G um grafo simples de ordem n cujos vértices têm graus $d_1, d_2, \dots, d_n$. Quais são os graus dos vértices em $\bar{G}$.

Seja $G = (V, E)$, $|V| = n$, $E \subseteq V^2$
Seja $\bar{G} = (V, E)$, $V(\bar{G}) = V(G)$, $E(\bar{G}) = V^2 - E(G)$

Temos de
$$\begin{aligned} d_{\bar{G}}(x) &= |\{xv \in E(\bar{G})\}| \\ &= |\{xv \in V^2\}| - |\{xv \in E(G)\}| \\ &= |\{xv \in V^2\}| - d_G(x) \end{aligned}$$

$\{xv \in V^2\}$ é o conjunto de todas as possíveis arestas entre os vértices V que tem x como um de seus terminais, se $|V| = n$, x pode ter no máximo $n-1$ arestas, logo...

$d_{\bar{G}}(x) = n - 1 - d_G(x)$ //

4. Mostre que $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$

Chamaremos de $\bar{d}$ a média dos graus dos vértices de G:

$\bar{d} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$, Por ser a media dos graus, temos que
$\delta(G) \leq \bar{d} \leq \Delta(G)$.

Temos que $2 \cdot |E| = \sum d(v)$, logo

$2 \cdot |E| = |V| \cdot \bar{d} \rightarrow \bar{d} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}$

$\delta(G) \leq \frac{2 \cdot |E|}{|V|} \leq \Delta(G)$ //

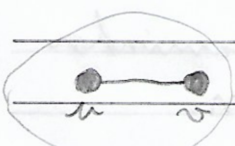
5. Se G é regular então $\bar{G}$ é regular?

Sim, pois se G é regular então $d_G(v) = K \quad \forall v \in V(G)$, usando o resultado do exercício 3, temos que...

$d_{\bar{G}}(x) = |V| - 1 - d_G(x) = \underbrace{|V| - 1 - K}_{\text{constante}} \quad \forall v \in V(G)$

6. Se $uv \in E(G)$ é aresta de corte então u e v são vértices de corte?

Não, há um contra-exemplo: considere o grafo conexo abaixo:



uv é aresta de corte, pois o grafo teria 2 componentes se uv fosse removido, mas u

removermos apenas u ou v, o número de componentes conexos continuaria 1.

7. Prove que se G é um grafo simples, então G ou $\bar{G}$ é conexo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Chamemos de $\#C$ o número de componentes conexos de G.

Se $\#C = 1$, G é conexo, logo a proposição vale.
Se $\#C > 1$, G é desconexo, logo é preciso provar que $\bar{G}$ é conexo.

Sejam G_i os componentes conexos de G, com $1 \leq i \leq \#C$. Seja v um vértice qualquer de G_1. Sabemos que v não tem nenhuma aresta o ligando a qualquer G_i, com $i > 1$. Logo o vértice v estaria ligado a todos os vértices dos outros componentes em $\bar{G}$. O mesmo vale para todos os outros vértices, logo $\bar{G}$ é conexo.

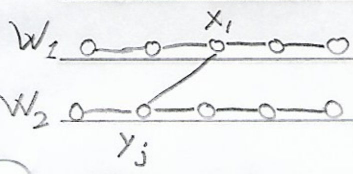
8. Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice em comum.

Por contradição:

Sejam $W_1 = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $W_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ caminhos maximais tal que $|W_1| = n$, $|W_2| = m$ e $n \leq m$.

Suponha, para fim de contradição, que W_1 e W_2 não possuem vértices em comum.

Se G é conexo e não há vértices em comum entre W_1 e W_2, então necessariamente existe uma aresta $x_i y_j$ que liga o vértice x_i de W_1 com y_j de W_2.



Dada essa aresta, é possível construir até mais 4 caminhos distintos:

$W^3 = (x_1, \dots, x_i, y_j, \dots, y_m)$, $|W_3| = i + m+1-j$
$W^4 = (x_1, \dots, x_i, y_j, \dots, y_1)$, $|W_4| = i + j$
$W^5 = (x_n, \dots, x_i, y_j, \dots, y_m)$, $|W_5| = n+1-i + m+1-j$
$W^6 = (x_n, \dots, x_i, y_j, \dots, y_1)$, $|W_6| = n+1-i+j$

O maior dos novos caminhos terá comprimento...

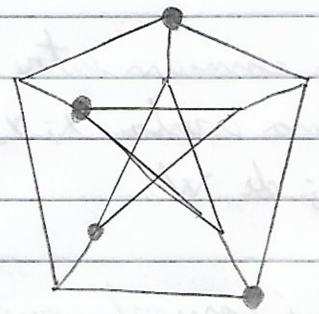
$$\max(i + m+1-j,\ i+j,\ n+1-i+m+1-j,\ n+1-i+j)$$
$$= \max(i, n+1-i) + \max(j, m+1-j) \geq \frac{n+1}{2} + \frac{m+1}{2}$$

$$\frac{n+1}{2} + \frac{m+1}{2} \geq \underline{n+1 > n}$$

Logo um dos novos caminhos será maior que W_1, levando ao absurdo, pois W_1 é maximal. //

___/___/___ S T Q Q S S D

9. Determine se o grafo de Petersen é bipartido e encontre o tamanho do seu maior conjunto independente.



O grafo de Petersen não é bipartido, pois possui ciclo ímpares.

O maior conjunto independente está pintado de preto

10. Seja G um grafo simples com $g(G)=5$. Mostre que G tem pelo menos $\delta(G)^2+1$ vértices.

Seja v um vértice qualquer de G.
v tem ao menos $\delta(G)$ vizinhos, cada um destes, por sua vez, tem ao menos $\delta(G)-1$ vizinhos, sem contar v

Logo $|V| \geq 1 + \delta(G) + \delta(G)\cdot(\delta(G)-1) = \delta(G)^2+1$ //

11. Seja $G=(V,E)$ o grafo tal que $V=(a,b,c,d)$ e $E=(ab,bc,ca,cd)$. Encontre todos os caminhos maximais, cliques maximais e conjuntos independentes maximais de G. Encontre todos os caminhos máximos, cliques máximos e conjuntos independentes máximos de G.

Caminhos maximais: (a,b,c,d), (a,b,c), (a,c,b), (b,c,a), (b,a,c), (b,a,c,d), (c,d)

S T Q Q S S D   ___/___/___

Cliques maximais: (a, b, c), (c, d)

Conjuntos independentes maximais: (a, d), (b, d), (c)

Caminhos máximos: (a, b, c, d), (b, a, c, d)

Cliques máximos: (a, b, c)

Conjuntos independentes máximos: (a, d), (b, d)

12. É verdade que existe um grafo bipartido com $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$? Justifique sua resposta.

Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Logo $|V(G)| = |V(X)| + |V(Y)|$
Seja v um vértice em X com grau $\Delta(G)$, v tem $\Delta(G)$ vizinhos em Y, logo $|V(Y)| \geq \Delta(G)$.

Logo temos: $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)| = |V(X)| + |V(Y)|$

$$\delta(G) + \Delta(G) > |V(X)| + \Delta(G)$$

$$\delta(G) > |V(X)|$$

É impossível que o menor grau de G seja maior que a partição X, pois qualquer vértice de Y obrigatoriamente deve ter no mínimo $\delta(G)$ vizinhos em X.

Logo, não existe grafo bipartido com $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$.

___/___/___ S T Q Q S S D

13. Prove que um grafo conexo G tem uma trilha Euleriana (não fechada) se e somente se G contém exatamente dois vértices de grau ímpar.

($\Leftarrow$) Se G contém exatamente dois vértices de grau ímpar, então G tem uma trilha Euleriana não fechada.

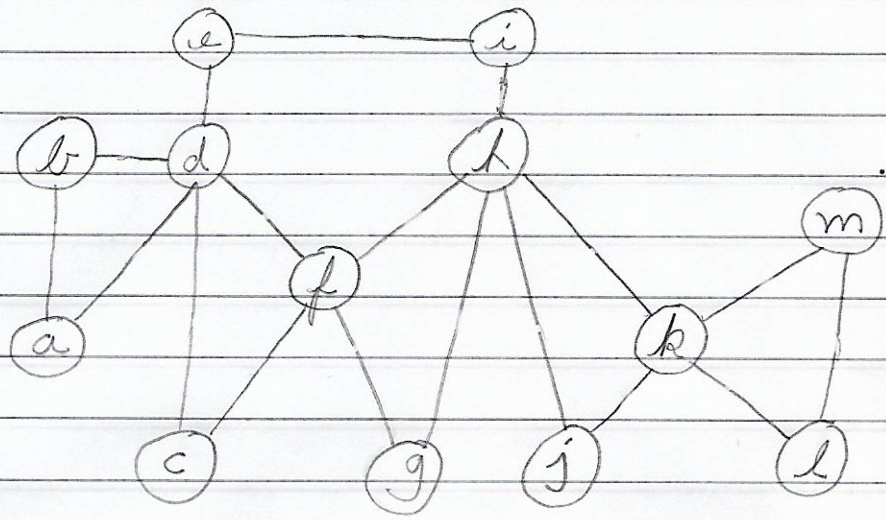
Seja H um grafo Euleriano, logo $\forall v \in V(H): d_H(v)$ é par.
Seja $W = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$ uma trilha Euleriana fechada de H.
Seja $x_1 v$ uma aresta não presente em H.
Considere $G = H + \{x_1 v\}$ um grafo com dois vértices de grau ímpar (x_1 e v). É possível construir uma trilha Euleriana $W' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, v)$ de G.

($\Rightarrow$) Se G tem uma trilha Euleriana não fechada, então G contém exatamente 2 vértices de grau ímpar.

Seja $W = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma trilha Euleriana não fechada de G.
Se W começa em x_1, então W gasta uma unidade do grau de x_1, mais $n \cdot 2$ unidades para cada aresta intermediária em W, logo x_1 tem grau ímpar. Logo, há uma aresta $x_1 v$ que liga x_1 a outro vértice v, que, pela mesma lógica anterior também tem grau ímpar. $x_1 v$ deve, obrigatoriamente ser a última aresta percorrida por W (caso contrário, os vértices teriam mais uma unidade de grau, tornando-os pares), ao remover essa aresta, temos um grafo Euleriano.

S T Q Q S S D   __/__/__

14. Execute o algoritmo de Fleury no grafo abaixo.



Fleury(G, h): $W=(h, k, m, l, k, j, h, i, e, d, b, a, d, f, h, g, f, c, d)$