S T Q Q S S D   __/__/__

Rafael Teller — 11036114

Lista 2 — Teoria dos Grafos

1. Dado um grafo G e uma aresta uv de G, escreva um algoritmo que verifica se uv é ponte.

```
é-ponte(G, uv):
    seja H = G - {uv}
    seja Q uma fila
    marque "u" como explorado
    coloque "u" na fila Q
    enquanto Q não é vazia:
        remove "x" da fila Q
        para todo e = xy ∈ E(H):
            se "y" é "v":
                retorna falso
            se "y" não é explorado:
                marca "y" como explorado
                coloque "y" na fila Q
    retorna verdadeiro
```

__/__/__ S T Q Q S S D

2. Explique como usar a BFS para calcular a cintura de um grafo.

A partir de um vértice "v" qualquer, executar a BFS, calculando a distância percorrida desde "v" (D_x) e quais vértices já foram visitados. No momento que houver um vértice que já foi visitado anteriormente, fechou-se um ciclo de tamanho máximo de $\Delta x + \Delta y + 1$, com x e y sendo o vértice já visitado anteriormente e seu predecessor.

Se "v" fizer parte de um ciclo, o valor encontrado será $D_x + D_y + 1$. Se "v" estiver em um componente conexo sem ciclos, deverá retornar ∞ (infinito).

Para obter a cintura do grafo G, basta executar esse algoritmo $\forall v \in V(G)$ e considerar o menor valor obtido como a cintura do grafo.

3. Mostre que o seguinte vale para todo grafo G com n vértices e m: $m \geq n - c(G)$, onde $c(G)$ denota a quantidade de componentes conexos de G. Mostre que a igualdade vale apenas para quando G é uma floresta.

Por indução:

Caso base: $c(G) = 1 \rightarrow |E(G)| \geq |V(G)| - 1$ (grafo conexo)

A expressão vale.

Passo: Seja $G' = G + \{uv\}$, onde u e v estão em componentes diferentes de G. Temos $|V(G')| = |V(G)|$, $|E(G')| = |E(G)| + 1$ e $c(G') = c(G) - 1$

$|E(G')| \geq |V(G')| - c(G')$

$|E(G)| + 1 \geq |V(G)| - (c(G) - 1)$

$|E(G)| + 1 \geq |V(G)| - c(G) + 1$

$|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$ $\square$

Parte 2: Mostre que se G é uma floresta, a igualdade vale: $|E(G)| = |V(G)| - c(G)$.

Sejam C as componentes de G, os grafos em C são árvores. Como demonstrado em aula, se C_i é uma árvore temos que $|E(C_i)| = |V(C_i)| - 1$. Podemos escrever $|E(G)|$ da seguinte forma:

$$|E(G)| = \sum_{C_i} |E(C_i)| = \sum_{C_i} (|V(C_i)| - 1) = \left[\sum_{C_i} |V(C_i)|\right] - c(G)$$

$= |V(G)| - c(G)$ $\square$.

4. Indique um argumento na prova de corretude do Dijkstra que não é válido quando o grafo em questão tem arestas com peso negativo.

O algoritmo de Dijkstra sempre escolhe o vértice aberto cujo custo seja o menor de todos, assumindo que a distância para aquele vértice só pode crescer (sendo somada pelos pesos POSITIVOS das arestas). Caso haja uma aresta com peso negativo, um vértice que já foi fechado pode ter sua distância calculada erroneamente.

S T Q Q S S D

5. Mostre que se G é uma árvore com $\Delta(G) \geq 2$, então G tem pelo menos $\Delta(G)$ folhas.

Seja $v \in V(G)$ um vértice de grau $\Delta(G)$. v tem $\Delta(G)$ vizinhos. Cada vizinho de v pode ser uma folha ou uma subárvore com pelo menos uma folha, já que não há ciclos (árvores são acíclicas). Podemos escrever uma função leaves(G, v) para obter o número de folhas:

$$\text{leaves}(G, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \text{ é folha de } G \\ \sum_{u \in N(v)} \text{leaves}(G - \{v\}, u) & \text{se } v \text{ não é folha de } G \end{cases}$$

Note que leaves$(G, v) \geq 1$ $\forall G \forall v$. No raciocínio acima, temos

$$\text{leaves}(G, v) = \sum_{u \in N(v)} \text{leaves}(G - \{v\}, u) \geq |N(v)| \cdot 1 = \Delta(G). \square$$

6. Prove que toda árvore G com $|V(G)| \geq 2$ possui pelo menos dois conjuntos independentes maximais disjuntos.

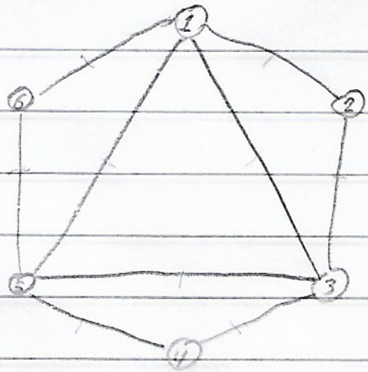
Seja G uma árvore, note que G é acíclico e portanto (X, Y)-bipartido.
Sabemos que $|V(X)| \geq 1$ e $|V(Y)| \geq 1$, pois G tem pelo menos 2 vértices e há $|V|-1$ arestas (por ser uma árvore).
Logo há pelo menos 2 conjuntos independentes maximais: X e Y.

7. Quantas orientações um grafo simples possui?

Para orientar um grafo simples, basta dar orientação a cada uma de suas arestas. Existem 2 orientações possíveis para cada aresta, portanto um grafo simples pode ter 2^n orientações, onde $n = |E|$.

12e. Existe grafo Euleriano simples com número par de vértices e ímpar de arestas?

Sim, por exemplo:



Trilha Euleriana: 1, 2, 3, 1, 6, 5, 4, 3, 5, 1

4e. Mostre que em todo grafo bipartido K-regular com bipartição (X, Y), temos $|X| = |Y|$

Sabendo que todas as arestas tem um terminal em X e outro em Y, e que $d(v) = K \ \forall v \in (X \cup Y)$,

$|E(G)| = K \cdot |X| = K \cdot |Y| \rightarrow |X| = |Y|$