

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional  
**Trabalho Prático**

**Identificação do Grupo**

<u>Número:</u>	<u>Nome Completo:</u>	<u>Rubrica:</u>
a83916	Ana João Dias de Almeida	Ana Almeida
a84807	André Sousa Figueiredo	André Figueiredo
a86265	Luís Pedro Barbosa Ferreira	Luís Ferreira
a86266	Rafael Inácio Lourenço	Rafael Lourenço

Data de entrega: 2020-05-11

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Descrição e formulação do problema</b>	<b>3</b>
2.1	Estágios . . . . .	3
2.2	Estados . . . . .	3
2.3	Decisões . . . . .	3
2.4	Objetivo . . . . .	3
2.5	Considerações e Métodos . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Descrição da resolução</b>	<b>4</b>
3.1	Rede de Programação Dinâmica (parcial) . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Análise dos resultados obtidos</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Resumo do artigo: <i>A continuous-time Markov model approach for modeling myelodysplastic syndromes progression from cross-sectional data</i></b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Dados fornecidos pelo docente (<i>“meio_tp1.dat”</i>)</b>	<b>14</b>
<b>B</b>	<b>Matrizes de transição (probabilidades) e de contribuição (lucro), relativas a cada uma das filiais e a cada uma das decisões alternativas</b>	<b>15</b>
B.1	Matrizes de Transição . . . . .	15
B.1.1	Filial 1: Enviar 3 carros para a Filial 2 . . . . .	15
B.1.2	Filial 2: Enviar 3 carros para a Filial 1 . . . . .	15
B.1.3	Filial 1: Enviar 2 carros para a Filial 2 . . . . .	15
B.1.4	Filial 2: Enviar 2 carros para a Filial 1 . . . . .	15
B.1.5	Filial 1: Enviar 1 carro para a Filial 2 . . . . .	16
B.1.6	Filial 2: Enviar 1 carro para a Filial 1 . . . . .	16
B.1.7	Filial 1: Não transferir carros . . . . .	16
B.1.8	Filial 2: Não transferir carros . . . . .	16
B.1.9	Filial 1: Receber 1 carro da Filial 2 . . . . .	16
B.1.10	Filial 2: Receber 1 carro da Filial 1 . . . . .	17
B.1.11	Filial 1: Receber 2 carros da Filial 2 . . . . .	17
B.1.12	Filial 2: Receber 2 carros da Filial 1 . . . . .	17
B.1.13	Filial 1: Receber 3 carros da Filial 2 . . . . .	17
B.1.14	Filial 2: Receber 3 carros da Filial 1 . . . . .	17
B.2	Matrizes de Contribuição . . . . .	18
B.2.1	Filial 1: Enviar 3 carros para a Filial 2 . . . . .	18
B.2.2	Filial 2: Enviar 3 carros para a Filial 1 . . . . .	18
B.2.3	Filial 1: Enviar 2 carros para a Filial 2 . . . . .	18
B.2.4	Filial 2: Enviar 2 carros para a Filial 1 . . . . .	18
B.2.5	Filial 1: Enviar 1 carro para a Filial 2 . . . . .	18
B.2.6	Filial 2: Enviar 1 carro para a Filial 1 . . . . .	18
B.2.7	Filial 1: Não transferir carros . . . . .	19
B.2.8	Filial 2: Não transferir carros . . . . .	19
B.2.9	Filial 1: Receber 1 carro da Filial 2 . . . . .	19
B.2.10	Filial 2: Receber 1 carro da Filial 1 . . . . .	19
B.2.11	Filial 1: Receber 2 carros da Filial 2 . . . . .	19
B.2.12	Filial 2: Receber 2 carros da Filial 1 . . . . .	19
B.2.13	Filial 1: Receber 3 carros da Filial 2 . . . . .	20
B.2.14	Filial 2: Receber 3 carros da Filial 1 . . . . .	20
<b>C</b>	<b>Listagem do código do programa criado</b>	<b>21</b>
<b>D</b>	<b>Listagem de inputs e outputs do programa</b>	<b>25</b>

# 1 Introdução

No âmbito da Unidade Curricular de Modelos Estocásticos de Investigação Operacional, foi-nos proposta a realização de um trabalho prático cujo principal objetivo passaria por formular, para o problema enunciado no mesmo, um modelo de Programação Dinâmica Estocástica, implementando computacionalmente um algoritmo de iteração de valor capaz de o resolver, determinando a política ótima de transferência diária de automóveis.

Este projeto encontra-se, então, dividido em duas partes:

- Uma primeira onde se pretende formular e resolver um problema com um modelo de Programação Dinâmica Estocástica, problema esse que consiste no desenvolvimento de uma política ótima de transferência diária de automóveis entre as duas filiais, geridas por um empresário.
- Uma segunda onde se pretende elaborar um resumo de um artigo que esteja relacionado com a aplicação de Processos Markovianos e/ou Programação Dinâmica Estocástica no estudo de problemas reais e que aborde, por exemplo, a problemática, as condições de aplicação do modelo, entre outras questões.

# Parte 1

## 2 Descrição e formulação do problema

### 2.1 Estágios

No problema em questão, os estágios correspondem aos dias, tendo como partida o começo da atividade nas filiais num dia até ao começo da atividade no dia seguinte, após as transferências.

### 2.2 Estados

Os estados correspondem ao número de automóveis que o empresário possui em cada estágio, podendo ser representado por  $(i_1, i_2)$ , sendo  $i_1$  o número de automóveis na filial 1 e o  $i_2$  o número de automóveis da filial 2.

### 2.3 Decisões

As decisões que o empresário tem que tomar no final do dia variam entre:

- **Transferir 0** automóveis entre filiais;
- **Transferir 1** automóvel da filial 1 para a filial 2;
- **Transferir 2** automóveis da filial 1 para a filial 2;
- **Transferir 3** automóveis da filial 1 para a filial 2;
- **Transferir 1** automóvel da filial 2 para a filial 1;
- **Transferir 2** automóveis da filial 2 para a filial 1;
- **Transferir 3** automóveis da filial 2 para a filial 1;

### 2.4 Objetivo

O objetivo consiste em adotar uma política ótima de transferência diária de automóveis entre as duas filiais.

### 2.5 Considerações e Métodos

Este trata-se de um problema de *número infinito de estágios, com alternativas*. Assim e para começar a formulação do problema foi necessário escolher os estágios, os estados e indicar as várias decisões. Posto isto, o próximo passo consistiu em efetuar o cálculo de todos os estados finais, partindo de um dado estado inicial, para encontrar, assim, as probabilidades necessárias para a construção da matriz de transição ( $P_n^k$ ). Para isso considerámos todas as combinações possíveis de *entregas, pedidos e transferências* de automóveis que levam a um estado final. É necessário tomar em atenção que cada filial não pode acumular mais que 12 automóveis no final de cada dia, caso isso aconteça têm de ser reencaminhados e o lucro que deles poderá advir não será para o empresário.

Seguidamente, foi necessário calcular a matriz de contribuição ( $R_n^k$ ) (dos lucros), matriz essa em que é necessário ter em consideração os vários valores que podem ser incluídos/combinados:

- 30€, recebidos (creditados) pelo empresário por cada veículo;
- 7€, por automóvel (até um máximo de 3), que o empresário pretenda transferir entre as filiais (esta situação serve para reajustar os stocks de automóveis, mitigando o reencaminhamento para outras filiais e consequente perda de lucro);
- 10€ (taxa fixa) por noite, caso estejam mais que 8 automóveis, no final do dia, no estacionamento de cada filial.

Concluindo tudo isto, resta apenas realizar o cálculo dos vetores  $Q_n^k$  (vetor das esperanças das contribuições),  $V_n^k$  (vetor do total das esperanças das contribuições),  $F_n$  (vetor da esperança do total da contribuição quando o sistema segue uma política ótima) e  $D_n$  (vetor ganho).

### 3 Descrição da resolução

Da formulação e análise realizada anteriormente, podemos passar para a resolução do problema. Para tal, vamos recorrer a um algoritmo realizado na linguagem de programação *Java* para cálculo das matrizes e vetores enumerados previamente. Como se trata de um problema com um número de estágios indeterminado iremos fazer uma análise alongada no tempo.

Para criar as matrizes de transição e contribuição de cada uma das filiais, fizemos a função `public Par<Par<double[] [] [], double[] [] []>, Par<double[] [] [], double[] [] []>> criarMatriz()` (que pode ser consultada no anexo C, figura 5). Esta função irá criar as matrizes de transição e contribuição de cada filial para todas as decisões em simultâneo, sendo estas mais tarde combinadas. Numa primeira parte, esta irá, para cada estado inicial possível e qualquer combinação possível de entregas, pedidos e transferências, calcular o estado final, `fim`, tendo em conta que uma filial não pode terminar com um número de carros superior a 12, nem com um número negativo de carros. De seguida, é calculada a probabilidade desta combinação e esta é adicionada à matriz de transição na célula que tem o `n_Inicial` e o estado `fim`. É também calculado o lucro associado a esta combinação. Numa segunda parte, a matriz de contribuições é normalizada, isto é, como se trata de um lucro ponderado, é necessário dividir este lucro ponderado para um dado par (estado inicial, estado final) pela probabilidade dessa mesma transição. Tivemos também em conta os casos em que a probabilidade de uma transição é igual a 0, ou seja, os casos impossíveis. Nestes casos, colocámos o valor da contribuição a  $-1000$ , para que esta não possa influenciar os resultados obtidos mais tarde.

Foi criada a função `public double calculaLucros(int qtFim, int pedidosAtendidos, double prob, int transf)` (que pode ser consultada no anexo C, figura 6) para calcular o lucro, que recebe o número final de carros numa filial (`qtFim`), o número de pedidos atendidos (`pedidosAtendidos`), a probabilidade deste acontecimento (`prob`) e o número de transferências (`transf`).

Estes valores foram os necessários, pois são todos os que irão alterar o lucro de uma transição, visto que, se o número final de carros for superior a 8 (`qtFim > 8`) terá de ser paga uma taxa de 10€; por cada pedido atendido serão recebidos 30€ e, caso existam transferências para a outra filial, serão cobrados 7€ por transferência (até um máximo de 3).

Foi criada a função `public static double[] [] [] createProbBig(double[] [] [] f1, double[] [] [] f2)` (que pode ser consultada no anexo C, figura 7) para criar a matriz de transição conjugada das 2 filiais, matriz essa com 169 linhas e 169 colunas. Trata-se de um processo simples, onde serão combinados os estados iniciais e finais das duas filiais e a probabilidade desta transição conjunta será a multiplicação das probabilidades de cada uma dessas transições associadas a uma filial.

Foi criada a função `public static double[] [] [] createBigCustos(double[] [] [] l1, double[] [] [] l2, double[] [] [] p1, double[] [] [] p2)` (que pode ser consultada no anexo C, figura 8) para criar a matriz de contribuição conjugada das duas filiais. Esta terá um funcionamento muito similar à função explicada acima. Cada célula da matriz de contribuição será a soma das contribuições de cada filial. Tendo em conta que a probabilidade de uma dessas transições, numa das filiais, pode ser 0, isto leva a que o valor da célula da matriz de contribuição, nessa transição conjugada, passe a ser  $-1000$  (para não correr o risco de ser escolhida pelo algoritmo como solução).

Após obtermos as matrizes de probabilidade ( $P_n^k$ ) e de contribuição ( $R_n^k$ ), calculámos o vetor de esperança ( $Q_n^k$ ) para cada decisão, através da função `public double[] calcula_Q(double[] [] pn, double[] [] rn)` (que pode ser consultada no anexo C, figura 9), que multiplica as duas matrizes por linhas.

De seguida, para cada vetor  $Q_n^k$ , calculámos o respetivo  $V_n^k$  (esperança total da contribuição para cada estado), através da fórmula  $V_n^k = Q_n^k + P_n^k \times F_{n-1}$ , sendo o vetor  $F_{n-1}$  o lucro atual obtido até à iteração anterior. Deste modo, obtemos 7 vetores  $V_n^k$  diferentes, um por cada decisão alternativa e, com base nestes vetores, determinámos um único vetor  $F_n$ , escolhendo, para cada estado possível, o maior elemento dos 7  $V_n^k$ 's.

Após este passo, calculámos o vetor  $D_n$ , uma vez que este é usado para descobrir o valor convergente do lucro (ou seja, passa a ser uma constante) por estágio e obtém-se através da diferença dos vetores  $F_n$  e  $F_{n-1}$ . Por fim, este processo ocorre durante  $N$  iterações, sendo implementado na função `public Par<Par<double[], double[]>, double[] []> resolve_N_iteracao(double[] [] [] pn, double[] [] [] rn, int iteracoes)` (que pode ser consultada no anexo C, figura 12).

### 3.1 Rede de Programação Dinâmica (parcial)

De seguida apresentámos um esboço parcial da rede de programação dinâmica. Representámos apenas alguns exemplos para algumas decisões, dado que, quando uma filial recebe um carro, a outra teve necessariamente de o enviar.

Para facilitar a leitura adotámos algumas considerações:

- As setas de ligação foram representadas com diferentes cores (na realidade seriam pretas);
- Foram representados apenas 3 dos estados iniciais (0, 6 e 12);
- Foram colocados os valores de probabilidade e de lucro ( $\text{prob}(\text{lucro})$ ) em baixo de cada estado final (com a cor de estado inicial respetiva - 0 verde, 6 azul, 12 rosa) ao invés de por cima da ligação;
- Foram utilizados os termos "enviar" e "receber" ao invés de "transferir", apenas para simplificação da compreensão do caso.

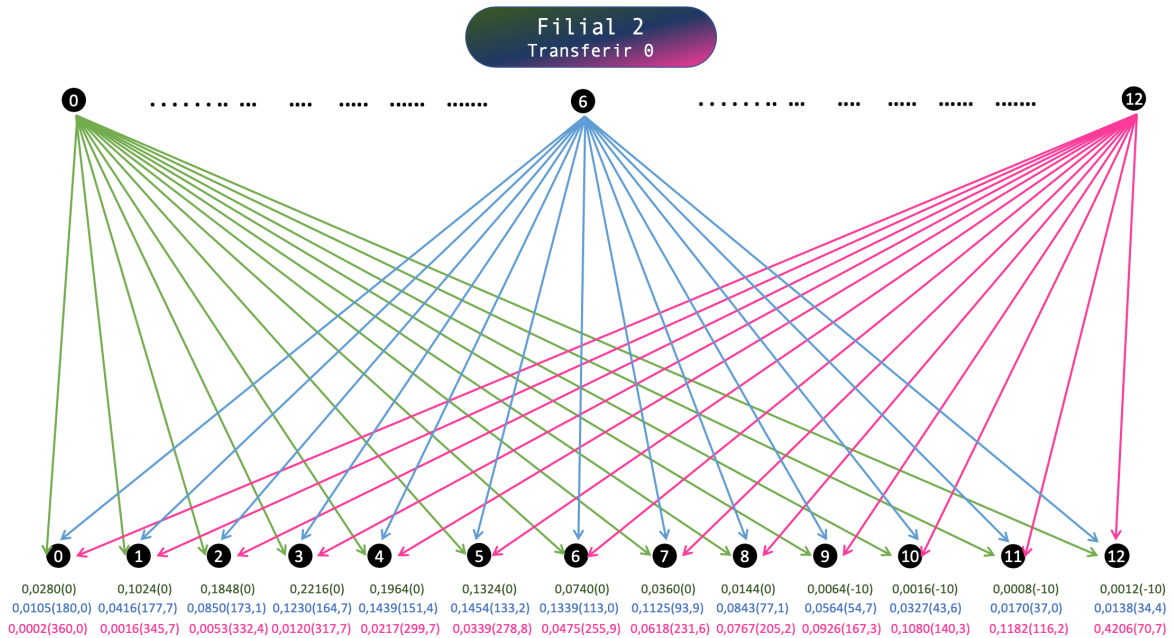


Figura 1: Rede parcial da Filial 2 para transferência de 0 carros

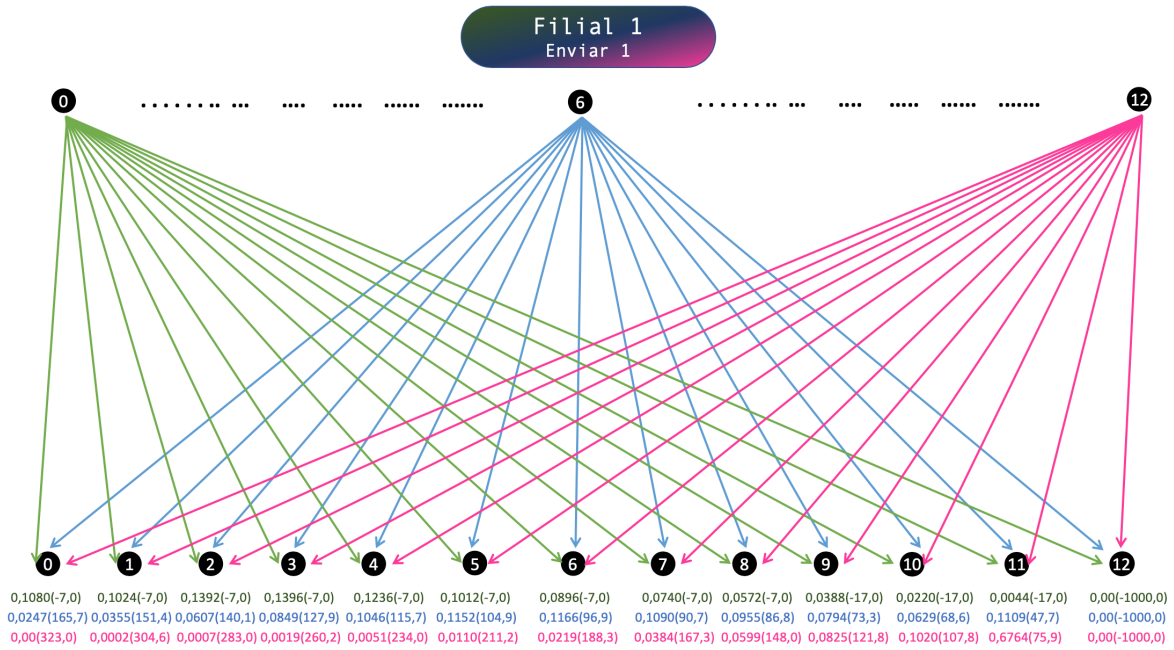


Figura 2: Rede parcial da Filial 1 para enviar 1 carro para a Filial 2

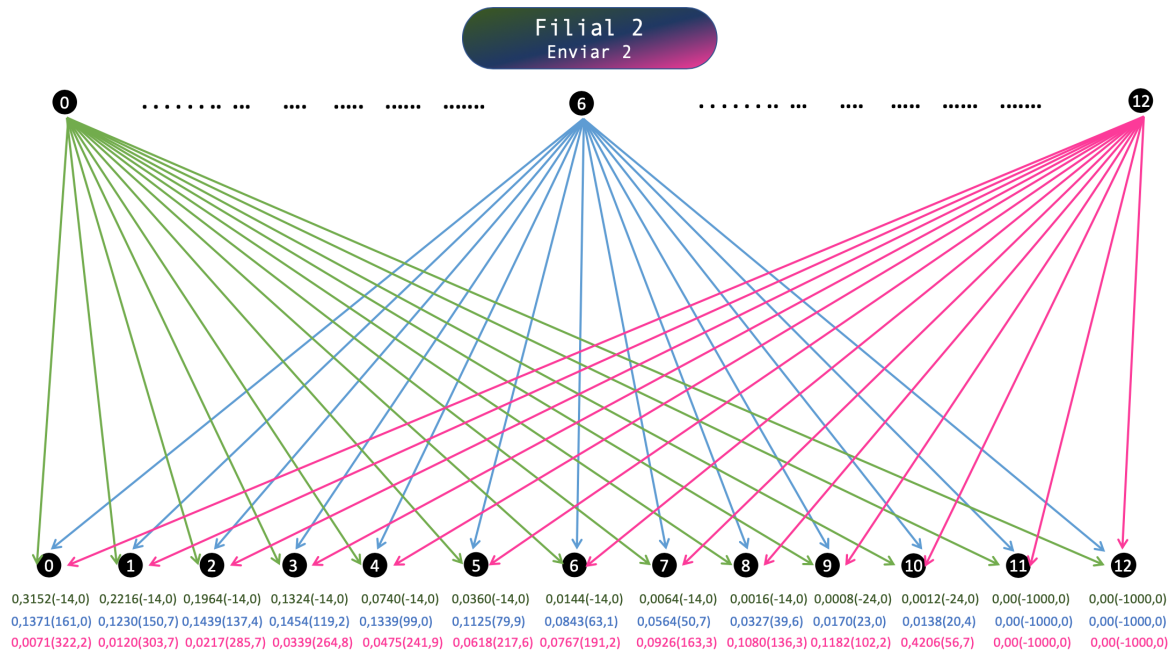


Figura 3: Rede parcial da Filial 2 para enviar 2 carros para a Filial 1

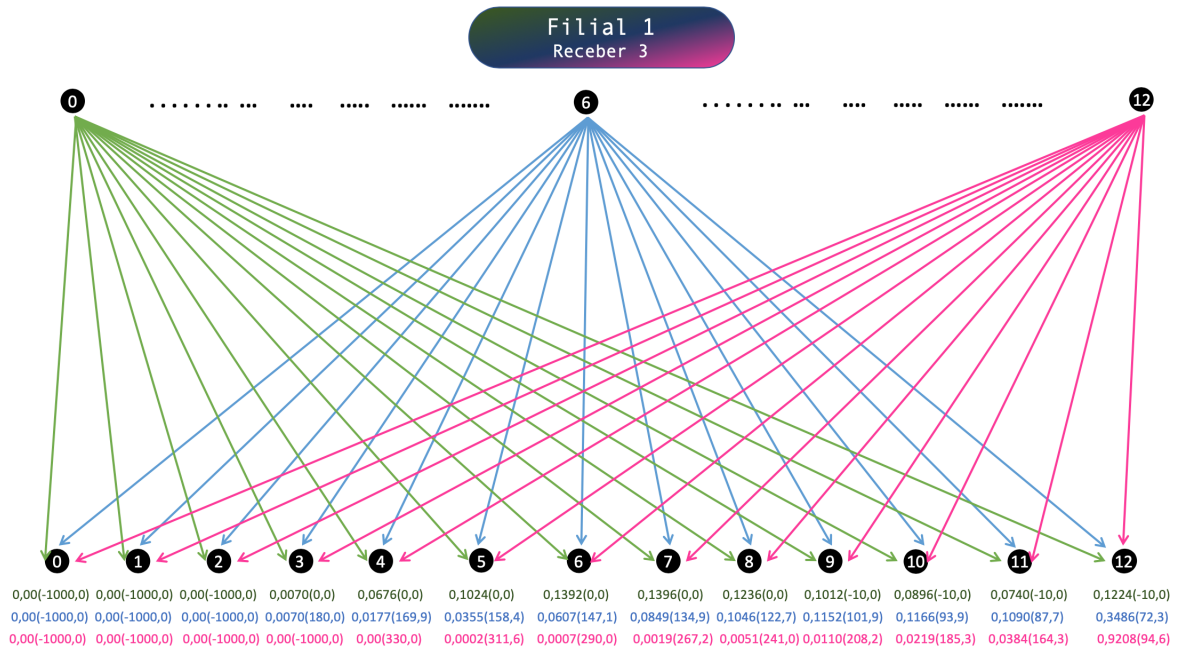


Figura 4: Rede parcial da Filial 1 para receber 3 carros para a Filial 2



## 4 Análise dos resultados obtidos

Tal como referido ao longo deste relatório, este problema trata-se de um problema de número *infinito* de estágios. Assim sendo, para podermos concluir um lucro ótimo, temos de perceber a partir de que iteração o algoritmo converge e que valor (constante) toma a partir daí, valor esse calculado no vetor ganho  $D_n$ .

Como podemos ver de seguida, a diferença diária estabilizou ao fim de 24 iterações, com um valor de 212,37, isto é, podemos concluir que o lucro diário ótimo é de 212,37€ (cada coluna foi dividida apenas para facilitar a visualização).

Iteração 0	Iteração 1	...	Iteração 23	Iteração 24	Iteração 0	Iteração 1	...	Iteração 23	Iteração 24
-1,32	165,64		212,37	212,37	234,78	208,87		212,37	212,37
27,80	166,14		212,37	212,37	239,64	214,80		212,37	212,37
54,73	167,77		212,37	212,37	242,17	220,16		212,37	212,37
78,11	171,02		212,37	212,37	243,16	224,65		212,37	212,37
96,94	176,05		212,37	212,37	243,13	228,27		212,37	212,37
111,25	182,32		212,37	212,37	242,44	231,08		212,37	212,37
121,99	188,88		212,37	212,37	105,46	190,79		212,37	212,37
129,57	195,28		212,37	212,37	134,58	191,06		212,37	212,37
134,43	201,22		212,37	212,37	161,51	191,91		212,37	212,37
136,96	206,57		212,37	212,37	184,90	193,54		212,37	212,37
137,95	211,06		212,37	212,37	203,73	197,02		212,37	212,37
137,92	214,68		212,37	212,37	218,04	201,46		212,37	212,37
137,23	217,49		212,37	212,37	228,78	205,96		212,37	212,37
27,84	165,89		212,37	212,37	236,35	211,55		212,37	212,37
56,96	166,39		212,37	212,37	241,22	217,48		212,37	212,37
83,89	168,01		212,37	212,37	243,74	222,84		212,37	212,37
107,27	171,27		212,37	212,37	244,70	227,33		212,37	212,37
126,10	176,30		212,37	212,37	244,70	230,95		212,37	212,37
140,42	182,57		212,37	212,37	244,02	233,76		212,37	212,37
151,16	189,13		212,37	212,37	105,36	196,18		212,37	212,37
158,73	195,53		212,37	212,37	134,48	196,45		212,37	212,37
163,60	201,46		212,37	212,37	161,41	197,31		212,37	212,37
166,12	206,81		212,37	212,37	184,79	198,94		212,37	212,37
167,11	211,31		212,37	212,37	203,62	201,33		212,37	212,37
167,08	214,92		212,37	212,37	217,93	204,84		212,37	212,37
166,39	217,74		212,37	212,37	228,67	209,34		212,37	212,37
54,10	166,90		212,37	212,37	236,25	213,64		212,37	212,37
83,22	167,40		212,37	212,37	241,11	219,31		212,37	212,37
110,15	169,03		212,37	212,37	243,64	224,66		212,37	212,37
133,53	172,28		212,37	212,37	244,63	229,15		212,37	212,37
152,36	177,31		212,37	212,37	244,60	232,77		212,37	212,37
166,67	183,58		212,37	212,37	243,91	235,58		212,37	212,37
177,41	190,14		212,37	212,37	104,62	199,88		212,37	212,37
184,99	196,54		212,37	212,37	133,74	200,16		212,37	212,37
189,86	202,47		212,37	212,37	160,68	201,01		212,37	212,37
192,38	207,83		212,37	212,37	184,06	202,64		212,37	212,37
193,37	212,32		212,37	212,37	202,89	205,03		212,37	212,37
193,34	215,94		212,37	212,37	217,20	207,86		212,37	212,37
192,65	218,75		212,37	212,37	227,94	211,44		212,37	212,37
75,57	169,28		212,37	212,37	235,52	215,74		212,37	212,37
104,69	169,67		212,37	212,37	240,38	220,30		212,37	212,37
131,62	171,08		212,37	212,37	242,91	225,66		212,37	212,37
155,00	174,33		212,37	212,37	243,90	230,15		212,37	212,37
173,83	179,36		212,37	212,37	243,87	233,77		212,37	212,37
188,14	185,63		212,37	212,37	243,18	236,58		212,37	212,37
198,88	192,19		212,37	212,37	103,74	203,37		212,37	212,37
206,46	198,59		212,37	212,37	132,86	203,54		212,37	212,37
211,32	204,52		212,37	212,37	159,79	204,04		212,37	212,37
213,85	209,87		212,37	212,37	183,17	204,98		212,37	212,37
214,84	214,37		212,37	212,37	202,00	207,20		212,37	212,37
214,81	217,99		212,37	212,37	216,32	210,02		212,37	212,37
214,12	220,80		212,37	212,37	227,06	212,80		212,37	212,37
90,56	173,79		212,37	212,37	234,63	216,77		212,37	212,37
119,68	174,17		212,37	212,37	239,50	220,74		212,37	212,37
146,61	175,40		212,37	212,37	242,02	226,07		212,37	212,37
170,00	177,82		212,37	212,37	243,01	230,56		212,37	212,37
188,83	182,52		212,37	212,37	242,98	234,18		212,37	212,37
203,14	188,80		212,37	212,37	242,29	236,99		212,38	212,37
213,88	195,35		212,37	212,37	102,95	205,47		212,37	212,37
221,45	201,75		212,37	212,37	132,07	205,64		212,37	212,37
226,32	207,69		212,37	212,37	159,00	206,15		212,37	212,37
228,84	213,04		212,37	212,37	182,38	207,08		212,37	212,37
229,84	217,53		212,37	212,37	201,21	208,41		212,37	212,37
229,80	221,15		212,37	212,37	215,53	210,99		212,37	212,37
229,12	223,96		212,37	212,37	226,27	213,77		212,37	212,37
99,55	179,26		212,37	212,37	233,84	217,09		212,37	212,37
128,67	179,64		212,37	212,37	238,71	221,06		212,37	212,37
155,60	180,87		212,37	212,37	241,23	226,13		212,37	212,37
178,98	183,29		212,37	212,37	242,22	230,63		212,37	212,37
197,81	186,95		212,37	212,37	242,19	234,25		212,38	212,37
212,12	192,46		212,37	212,37	241,51	237,06		212,38	212,37
222,86	199,01		212,37	212,37	102,35	206,33		212,37	212,37
230,44	205,41		212,37	212,37	131,47	206,50		212,37	212,37
235,30	211,35		212,37	212,37	158,40	207,01		212,37	212,37
237,83	216,70		212,37	212,37	181,79	207,94		212,37	212,37
238,82	221,19		212,37	212,37	200,61	209,27		212,37	212,37
238,79	224,81		212,37	212,37	214,93	211,19		212,37	212,37
238,10	227,62		212,37	212,37	225,67	213,97		212,37	212,37
103,89	184,74		212,37	212,37	233,24	217,01		212,37	212,37
133,01	185,12		212,37	212,37	238,11	220,98		212,37	212,37
159,94	186,35		212,37	212,37	240,63	226,04		212,37	212,37
183,32	188,77		212,37	212,37	241,63	230,54		212,37	212,37
202,15	192,43		212,37	212,37	241,59	234,16		212,38	212,37
216,46	196,87		212,37	212,37	240,91	236,97		212,38	212,37
227,20	202,47		212,37	212,37					

O plano de decisões a seguir durante os dias para obter o valor ótimo é o seguinte:

[illegible]

Como podemos constatar dos resultados obtidos, apenas é decidido não fazer transferências ou transferências de carros da filial 1 para a 2. Isto deve-se ao facto de a probabilidade de pedidos de alugueres para números elevados de carros na filial 2 ser muito maior que na filial 1 e, ainda, devido ao facto da probabilidade de entregas de um número elevado de carros ser muito maior na filial 1 que na filial 2. Isto justifica-se com o facto das transferências apenas serem feitas no final do dia, ou seja, são efetuados os pedidos e as entregas desse dia e, após isso, é decidido se serão feitas transferências ou não. Foram feitos testes com vetores probabilidade mais equilibrados e já foram observadas transferências diversificadas entre filiais, sendo que para probabilidades iguais nas 2 filiais, verificaram-se transferências simétricas.

## Parte 2

### 5 Resumo do artigo: *A continuous-time Markov model approach for modeling myelodysplastic syndromes progression from cross-sectional data*

Nicora G., Moretti F., Sauta E., Della Porta M., Malcovati L., Cazzola M., Quaglini S., and Bellazzi R. (2020). A continuous-time Markov model approach for modeling myelodysplastic syndromes progression from cross-sectional data. *Journal of Biomedical Informatics*, 104 (2020) 103398. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jbi.2020.103398>

A Síndrome Mielodisplásica (SMD) consiste num grupo heterogêneo de patologias clonais do foro hemato-oncológico, com incidência progressivamente crescente na atualidade devido ao envelhecimento das populações. O espectro da doença é bastante diverso, existindo subtipos com gravidade variável, alguns dos quais condicionam uma grave redução na esperança média de vida dos pacientes. Desta forma, torna-se essencial encontrar novos tratamentos dirigidos para a SMD, visto que a grande maioria das terapêuticas atuais não possuem intuito curativo, mas sim de controlo sintomático e de atraso na progressão da doença. É neste contexto que surge a Medicina de Precisão, como ferramenta que possibilita a personalização de intervenções terapêuticas com base numa estratificação mais precisa do risco de cada paciente, integrando dados clínicos e relativos ao genoma para modelar a progressão de doenças como a SMD.

O estudo apresentado, baseado em dados de uma coorte transversal, tem então como objetivo primordial avaliar o contributo de covariáveis genómicas para a progressão da SMD e sugerir possíveis biomarcadores de prognóstico, de forma a proporcionar informação relevante para a investigação de novos fármacos “feitos à medida” das características de cada doente. Assim, neste artigo, é apresentada uma base de suporte à decisão clínica, que combina a simulação da progressão da doença através de uma amostragem de coorte transversal com o modelo de Markov, que explora uma transição contínua no tempo de probabilidades derivadas da regressão de Cox. Os modelos de Cox identificam fatores de prognóstico que podem ser associados com diferenças na sobrevivência ou progressão para diferentes estágios da doença, enquanto que os modelos de Markov são usados para descrever a evolução da doença num espaço finito de estágios de progressão, neste caso, deste tipo de cancro. Estas técnicas necessitam de dados longitudinais de uma coorte de pacientes que têm que ser monitorizados e seguidos criteriosamente e por um longo período de tempo. Logo, uma análise longitudinal requer um elevado tempo para recolha e tratamento de dados, podendo tornar-se exigente, cara e, por vezes, inviável. Foi por este motivo que os autores deste estudo decidiram combinar os modelos de Cox e Markov com os dados da sua coorte transversal de pacientes com SMD.

É importante referir, para melhor compreensão das possíveis trajetórias de evolução da doença, que existe risco de os pacientes acometidos pela SMD virem a desenvolver Leucemia Mieloide Aguda (LMA), existindo um *score* internacional que categoriza os doentes de acordo com o risco de progressão (“muito elevado”, “elevado”, “intermédio”, “baixo” e “muito baixo”). As trajetórias entre pacientes com diferentes graus de evolução da doença foram construídas estocasticamente neste estudo de acordo com uma medida de semelhança entre pacientes, computada através de uma técnica de fatorização tripla de matrizes. Estas trajetórias são simuladas como ilações retiradas do processo estocástico subjacente às transições entre estágios diferentes da doença. A estas trajetórias computadas foi aplicado o modelo de Cox, para avaliar se as características do genoma podem ser associadas a um nível maior ou menor de probabilidade de progressão da doença. Seguidamente, os parâmetros resultantes da aplicação do referido modelo de Cox foram usados para calcular as probabilidades de transição de um modelo de Markov, contínuo no tempo, que descreve a evolução dos pacientes através dos estágios.

A análise estatística efetuada neste estudo conseguiu avaliar diversos biomarcadores de prognóstico já descritos na literatura médica atual. Com efeito, ficou demonstrado que os genes KDM6A, IDH1 e NPM1 conferem mau prognóstico e, portanto, maior risco de progressão do estágio de risco “muito baixo” para “baixo”, ao contrário do gene FLT3, que confere bom prognóstico. Já o gene MLL3 foi

associado a uma maior progressão de “baixo” risco para risco “intermédio”. Em relação à transição de risco “intermédio” para “elevado”, apenas o gene DNMT3A se revelou um biomarcador de bom prognóstico, por oposição aos genes CBL, SF3B1, TET2, CREBB, NRAS e IDH2, que conferem maior risco de evolução da SMD. Por fim, os genes CDKN2A e CTNNA1 mostraram ser significativos na progressão de risco “elevado” para “muito elevado”.

Os resultados deste estudo são, na maioria dos casos, confirmados por estudos prévios, demonstrando, assim, que a aplicação dos modelos de Cox e Markov a dados longitudinais simulados representa um recurso valioso para a investigação da progressão da doença em pacientes com SMD.

Uma das grandes conclusões retiradas deste estudo é a de que as características individuais dos pacientes, bem como a presença de mutações genéticas, estão fortemente associadas com a progressão da doença, estando a Medicina de Precisão na base de uma nova vaga de investigações acerca da prevenção e tratamento de uma enorme variedade de doenças, entre as quais a SMD.

## 6 Conclusões

Tal como dito anteriormente, o objetivo da primeira parte do trabalho prático passava por elaborar um algoritmo capaz de nos fornecer todos os dados necessários para desenvolver uma solução face ao problema apresentado pelo empresário em questão.

Desta forma, apesar das diversas adversidades que fomos enfrentando à medida que avançávamos com a implementação do algoritmo e das várias abordagens que tentámos adotar, conseguimos, então, chegar àquela que acreditámos ser a política que melhor se ajusta às necessidades do empresário, que passa por minimizar todos os custos (como estacionamento extra e transferências de automóveis) e maximizar o seu lucro. Apesar de estarmos confiantes relativamente à política ótima encontrada, é necessário resalvar que, por vezes, esta pode não ser realmente a mais eficaz, uma vez que estamos a trabalhar no campo das probabilidades, que é bastante inconsistente e impossível de prever. Deste modo, cabe ao próprio empresário decidir se vale realmente a pena por em prática a solução encontrada, de modo a minimizar os seus prejuízos.

O objetivo da segunda parte do trabalho era a realização de um resumo de um artigo, bem analisado, sintetizado e contendo alguns pontos chave, algo que considerámos ter conseguido com sucesso.

Assim e com a elaboração deste trabalho prático, conseguimos não só desenvolver as nossas capacidades associadas à formulação de modelos de Programação Dinâmica Estocástica, mas também adquirir e aperfeiçoar todos os conhecimentos que nos foram transmitidos durante as aulas da unidade curricular.

Em suma, podemos concluir que fomos capazes de desenvolver um trabalho ao nível daquilo que era inicialmente esperado.

## A Dados fornecidos pelo docente (“*meio\_tp1.dat*”)

Grupo que inclui o Aluno com o Nº 86266

MEIO-TP1 - Tabelas de probabilidades de pedidos e entregas de automóveis

### FILIAL 1

Número de clientes:	;	0 ;	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;	5 ;	6 ;	7 ;	8 ;	9 ;	10 ;	11 ;	12
Probabilidade (pedidos):	;	0.0272 ;	0.0944 ;	0.1552 ;	0.2092 ;	0.1932 ;	0.1476 ;	0.0864 ;	0.0528 ;	0.0208 ;	0.0088 ;	0.0032 ;	0.0012 ;	0.0000
Probabilidade (entregas):	;	0.0404 ;	0.0676 ;	0.1024 ;	0.1392 ;	0.1396 ;	0.1236 ;	0.1012 ;	0.0896 ;	0.0740 ;	0.0572 ;	0.0388 ;	0.0220 ;	0.0044

### FILIAL 2

Número de clientes:	;	0 ;	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;	5 ;	6 ;	7 ;	8 ;	9 ;	10 ;	11 ;	12
Probabilidade (pedidos):	;	0.0292 ;	0.0724 ;	0.1168 ;	0.1488 ;	0.1452 ;	0.1116 ;	0.0968 ;	0.0824 ;	0.0736 ;	0.0508 ;	0.0376 ;	0.0268 ;	0.0080
Probabilidade (entregas):	;	0.0280 ;	0.1024 ;	0.1848 ;	0.2216 ;	0.1964 ;	0.1324 ;	0.0740 ;	0.0360 ;	0.0144 ;	0.0064 ;	0.0016 ;	0.0008 ;	0.0012

## B Matrizes de transição (probabilidades) e de contribuição (lucro), relativas a cada uma das filiais e a cada uma das decisões alternativas

Nesta secção serão apresentadas todas as matrizes  $13 \times 13$ , enquanto que as matrizes  $169 \times 169$   $P_n^k$  e  $R_n^k$  e os vetores coluna  $Q_n^k$ ,  $V_n^k$ ,  $D_n$  e  $F_n$  serão enviados num ficheiro em *Excel* à parte.

### B.1 Matrizes de Transição

#### B.1.1 Filial 1: Enviar 3 carros para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,3496	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0388	0,0220	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3458	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0393	0,0225	0,0050	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,3299	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0415	0,0245	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,2968	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0464	0,0293	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,2443	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,0546	0,0377	0,0348	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,1817	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,0658	0,0492	0,0655	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,1209	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,0794	0,0629	0,1109	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0723	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,0939	0,0779	0,1719	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0383	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,1070	0,0933	0,2490	0,0000	0,0000	0,0000
9	0,0182	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,1145	0,1067	0,3420	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0078	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,1144	0,4487	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0029	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,5630	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0010	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6764	0,0000	0,0000	0,0000

#### B.1.2 Filial 2: Enviar 3 carros para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,5368	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0016	0,0008	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,5303	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0017	0,0008	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5089	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0023	0,0010	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,4666	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0041	0,0017	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,4038	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0084	0,0036	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,3302	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0173	0,0080	0,0061	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,2601	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0327	0,0170	0,0138	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,1990	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,0551	0,0325	0,0306	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,1474	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,0811	0,0549	0,0629	0,0000	0,0000	0,0000
9	0,1028	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,1043	0,0810	0,1177	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0668	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,1177	0,1042	0,1987	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0392	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,1182	0,1177	0,3029	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0191	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,1080	0,1182	0,4206	0,0000	0,0000	0,0000

#### B.1.3 Filial 1: Enviar 2 carros para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,2104	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0388	0,0220	0,0044	0,0000	0,0000
1	0,2076	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0393	0,0225	0,0050	0,0000	0,0000
2	0,1961	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0415	0,0245	0,0081	0,0000	0,0000
3	0,1727	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0464	0,0293	0,0168	0,0000	0,0000
4	0,1370	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,0546	0,0377	0,0348	0,0000	0,0000
5	0,0968	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,0658	0,0492	0,0655	0,0000	0,0000
6	0,0602	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,0794	0,0629	0,1109	0,0000	0,0000
7	0,0336	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,0939	0,0779	0,1719	0,0000	0,0000
8	0,0163	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,1070	0,0933	0,2490	0,0000	0,0000
9	0,0072	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,1145	0,1067	0,3420	0,0000	0,0000
10	0,0027	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,1144	0,4487	0,0000	0,0000
11	0,0010	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,5630	0,0000	0,0000
12	0,0003	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6764	0,0000	0,0000

#### B.1.4 Filial 2: Enviar 2 carros para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,3152	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0016	0,0008	0,0012	0,0000	0,0000
1	0,3098	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0017	0,0008	0,0012	0,0000	0,0000
2	0,2934	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0023	0,0010	0,0013	0,0000	0,0000
3	0,2636	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0041	0,0017	0,0017	0,0000	0,0000
4	0,2221	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0084	0,0036	0,0029	0,0000	0,0000
5	0,1768	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0173	0,0080	0,0061	0,0000	0,0000
6	0,1371	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0327	0,0170	0,0138	0,0000	0,0000
7	0,1038	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,0551	0,0325	0,0306	0,0000	0,0000
8	0,0755	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,0811	0,0549	0,0629	0,0000	0,0000
9	0,0507	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,1043	0,0810	0,1177	0,0000	0,0000
10	0,0315	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,1177	0,1042	0,1987	0,0000	0,0000
11	0,0173	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,1182	0,1177	0,3029	0,0000	0,0000
12	0,0071	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,1080	0,1182	0,4206	0,0000	0,0000



### B.1.5 Filial 1: Enviar 1 carro para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,1080	0,1024	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0388	0,0220	0,0044	0,0000
1	0,1062	0,1015	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0393	0,0225	0,0050	0,0000
2	0,0987	0,0974	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0415	0,0245	0,0081	0,0000
3	0,0844	0,0884	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0464	0,0293	0,0168	0,0000
4	0,0640	0,0730	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,0546	0,0377	0,0348	0,0000
5	0,0425	0,0544	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,0658	0,0492	0,0655	0,0000
6	0,0247	0,0355	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,0794	0,0629	0,1109	0,0000
7	0,0129	0,0207	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,0939	0,0779	0,1719	0,0000
8	0,0058	0,0105	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,1070	0,0933	0,2490	0,0000
9	0,0023	0,0049	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,1145	0,1067	0,3420	0,0000
10	0,0008	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,1144	0,4487	0,0000
11	0,0003	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,5630	0,0000
12	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6764	0,0000

### B.1.6 Filial 2: Enviar 1 carro para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,1304	0,1848	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0016	0,0008	0,0012	0,0000
1	0,1274	0,1824	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0017	0,0008	0,0012	0,0000
2	0,1192	0,1743	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0023	0,0010	0,0013	0,0000
3	0,1052	0,1584	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0041	0,0017	0,0017	0,0000
4	0,0867	0,1354	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0084	0,0036	0,0029	0,0000
5	0,0676	0,1091	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0173	0,0080	0,0061	0,0000
6	0,0522	0,0850	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0327	0,0170	0,0138	0,0000
7	0,0391	0,0646	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,0551	0,0325	0,0306	0,0000
8	0,0280	0,0475	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,0811	0,0549	0,0629	0,0000
9	0,0181	0,0326	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,1043	0,0810	0,1177	0,0000
10	0,0109	0,0206	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,1177	0,1042	0,1987	0,0000
11	0,0056	0,0117	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,1182	0,1177	0,3029	0,0000
12	0,0018	0,0053	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,1080	0,1182	0,4206	0,0000

### B.1.7 Filial 1: Não transferir carros

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0404	0,0676	0,1024	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0388	0,0220	0,0044
1	0,0393	0,0669	0,1015	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0393	0,0225	0,0050
2	0,0355	0,0632	0,0974	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0415	0,0245	0,0081
3	0,0292	0,0552	0,0884	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0464	0,0293	0,0168
4	0,0208	0,0432	0,0730	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,0546	0,0377	0,0348
5	0,0130	0,0295	0,0544	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,0658	0,0492	0,0655
6	0,0070	0,0177	0,0355	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,0794	0,0629	0,1109
7	0,0035	0,0094	0,0207	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,0939	0,0779	0,1719
8	0,0014	0,0044	0,0105	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,1070	0,0933	0,2490
9	0,0005	0,0017	0,0049	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,1145	0,1067	0,3420
10	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,1144	0,4487
11	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,5630
12	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6764

### B.1.8 Filial 2: Não transferir carros

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0280	0,1024	0,1848	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0016	0,0008	0,0012
1	0,0272	0,1002	0,1824	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0017	0,0008	0,0012
2	0,0252	0,0940	0,1743	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0023	0,0010	0,0013
3	0,0219	0,0833	0,1584	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0041	0,0017	0,0017
4	0,0177	0,0690	0,1354	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0084	0,0036	0,0029
5	0,0137	0,0540	0,1091	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0173	0,0080	0,0061
6	0,0105	0,0416	0,0850	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0327	0,0170	0,0138
7	0,0078	0,0313	0,0646	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,0551	0,0325	0,0306
8	0,0055	0,0225	0,0475	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,0811	0,0549	0,0629
9	0,0034	0,0147	0,0326	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,1043	0,0810	0,1177
10	0,0020	0,0088	0,0206	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,1177	0,1042	0,1987
11	0,0010	0,0046	0,0117	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,1182	0,1177	0,3029
12	0,0002	0,0016	0,0053	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,1080	0,1182	0,4206

### B.1.9 Filial 1: Receber 1 carro da Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0404	0,0676	0,1024	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0388	0,0264
1	0,0000	0,0393	0,0669	0,1015	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0393	0,0275
2	0,0000	0,0355	0,0632	0,0974	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0415	0,0327
3	0,0000	0,0292	0,0552	0,0884	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0464	0,0461
4	0,0000	0,0208	0,0432	0,0730	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,0546	0,0725
5	0,0000	0,0130	0,0295	0,0544	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,0658	0,1147
6	0,0000	0,0070	0,0177	0,0355	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,0794	0,1738
7	0,0000	0,0035	0,0094	0,0207	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,0939	0,2498
8	0,0000	0,0014	0,0044	0,0105	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,1070	0,3423
9	0,0000	0,0005	0,0017	0,0049	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,1145	0,4488
10	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,1134	0,5631
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6764
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,7784

### B.1.10 Filial 2: Receber 1 carro da Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0280	0,1024	0,1848	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0016	0,0020
1	0,0000	0,0272	0,1002	0,1824	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0017	0,0020
2	0,0000	0,0252	0,0940	0,1743	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0023	0,0023
3	0,0000	0,0219	0,0833	0,1584	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0041	0,0034
4	0,0000	0,0177	0,0690	0,1354	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0084	0,0065
5	0,0000	0,0137	0,0540	0,1091	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0173	0,0141
6	0,0000	0,0105	0,0416	0,0850	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0327	0,0308
7	0,0000	0,0078	0,0313	0,0646	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,0551	0,0631
8	0,0000	0,0055	0,0225	0,0475	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,0811	0,1178
9	0,0000	0,0034	0,0147	0,0326	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,1043	0,1987
10	0,0000	0,0020	0,0088	0,0206	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,1177	0,3029
11	0,0000	0,0010	0,0046	0,0117	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,1182	0,4206
12	0,0000	0,0002	0,0016	0,0053	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,1080	0,5387

### B.1.11 Filial 1: Receber 2 carros da Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0404	0,0676	0,1024	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,0572	0,0652
1	0,0000	0,0000	0,0393	0,0669	0,1015	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,0577	0,0668
2	0,0000	0,0000	0,0355	0,0632	0,0974	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,0597	0,0742
3	0,0000	0,0000	0,0292	0,0552	0,0884	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,0641	0,0925
4	0,0000	0,0000	0,0208	0,0432	0,0730	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,0717	0,1271
5	0,0000	0,0000	0,0130	0,0295	0,0544	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,0826	0,1805
6	0,0000	0,0000	0,0070	0,0177	0,0355	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,0955	0,2531
7	0,0000	0,0000	0,0035	0,0094	0,0207	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,1076	0,3436
8	0,0000	0,0000	0,0014	0,0044	0,0105	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,1147	0,4493
9	0,0000	0,0000	0,0005	0,0017	0,0049	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,1135	0,5632
10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,1020	0,6765
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,7784
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,8609

### B.1.12 Filial 2: Receber 2 carros da Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0280	0,1024	0,1848	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0064	0,0036
1	0,0000	0,0000	0,0272	0,1002	0,1824	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0066	0,0038
2	0,0000	0,0000	0,0252	0,0940	0,1743	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0078	0,0047
3	0,0000	0,0000	0,0219	0,0833	0,1584	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0115	0,0075
4	0,0000	0,0000	0,0177	0,0690	0,1354	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0196	0,0149
5	0,0000	0,0000	0,0137	0,0540	0,1091	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0345	0,0314
6	0,0000	0,0000	0,0105	0,0416	0,0850	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,0564	0,0635
7	0,0000	0,0000	0,0078	0,0313	0,0646	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,0820	0,1182
8	0,0000	0,0000	0,0055	0,0225	0,0475	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,1049	0,1989
9	0,0000	0,0000	0,0034	0,0147	0,0326	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,1181	0,3030
10	0,0000	0,0000	0,0020	0,0088	0,0206	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,1183	0,4206
11	0,0000	0,0000	0,0010	0,0046	0,0117	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,1080	0,5387
12	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0053	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,0926	0,6467

### B.1.13 Filial 1: Receber 3 carros da Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0404	0,0676	0,1024	0,1392	0,1396	0,1236	0,1012	0,0896	0,0740	0,1224
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0393	0,0669	0,1015	0,1382	0,1396	0,1240	0,1018	0,0899	0,0744	0,1244
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0355	0,0632	0,0974	0,1338	0,1386	0,1255	0,1044	0,0916	0,0762	0,1338
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0292	0,0552	0,0884	0,1240	0,1341	0,1270	0,1093	0,0960	0,0803	0,1565
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0208	0,0432	0,0730	0,1073	0,1242	0,1258	0,1155	0,1034	0,0880	0,1988
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0130	0,0295	0,0544	0,0849	0,1074	0,1191	0,1187	0,1117	0,0984	0,2630
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0070	0,0177	0,0355	0,0607	0,0849	0,1046	0,1152	0,1166	0,1090	0,3486
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0035	0,0094	0,0207	0,0387	0,0608	0,0835	0,1027	0,1142	0,1153	0,4512
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0044	0,0105	0,0219	0,0387	0,0602	0,0828	0,1023	0,1137	0,5640
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0017	0,0049	0,0110	0,0219	0,0385	0,0599	0,0826	0,1021	0,6767
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,0825	0,7785
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,0599	0,8609
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0051	0,0110	0,0219	0,0384	0,9208

### B.1.14 Filial 2: Receber 3 carros da Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0280	0,1024	0,1848	0,2216	0,1964	0,1324	0,0740	0,0360	0,0144	0,0100
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0272	0,1002	0,1824	0,2205	0,1971	0,1343	0,0757	0,0371	0,0150	0,0104
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0252	0,0940	0,1743	0,2155	0,1979	0,1396	0,0818	0,0416	0,0177	0,0125
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0219	0,0833	0,1584	0,2030	0,1958	0,1479	0,0940	0,0521	0,0247	0,0190
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0177	0,0690	0,1354	0,1817	0,1871	0,1553	0,1109	0,0699	0,0384	0,0345
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0137	0,0540	0,1091	0,1534	0,1694	0,1559	0,1268	0,0924	0,0594	0,0659
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0105	0,0416	0,0850	0,1230	0,1439	0,1454	0,1339	0,1125	0,0843	0,1199
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0078	0,0313	0,0646	0,0953	0,1159	0,1260	0,1291	0,1233	0,1065	0,2002
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0055	0,0225	0,0475	0,0719	0,0903	0,1033	0,1146	0,1216	0,1190	0,3038
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0034	0,0147	0,0326	0,0521	0,0688	0,0824	0,0962	0,1099	0,1189	0,4211
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0088	0,0206	0,0353	0,0502	0,0641	0,0782	0,0934	0,1083	0,5390
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0046	0,0117	0,0219	0,0344	0,0480	0,0621	0,0769	0,0927	0,6468
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0053	0,0120	0,0217	0,0339	0,0475	0,0618	0,0767	0,7393

## B.2 Matrizes de Contribuição

### B.2.1 Filial 1: Enviar 3 carros para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-31,0000	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
1	8,5035	8,1863	8,0816	8,0093	8,0816	8,0176	7,9527	7,8124	7,5902	-5,3099	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
2	36,6595	34,9485	34,0410	33,4627	33,6702	33,5035	33,0370	32,1856	30,7195	6,7173	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
3	63,3047	58,6053	55,6980	53,3880	53,2347	52,9061	51,8328	49,4833	45,6300	11,7637	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
4	88,0726	78,6104	73,0711	67,8864	65,8531	64,7713	63,2691	59,8162	54,0084	18,4892	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
5	111,7187	96,4686	87,7182	79,7088	74,5671	71,4066	69,2046	65,7387	59,8274	26,2399	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
6	134,6520	113,9156	101,7449	90,8914	82,8510	76,7445	72,7646	69,3437	64,6294	33,7285	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
7	158,4993	132,1090	117,0191	103,2271	92,3337	83,6280	77,0141	72,3737	68,4010	40,1631	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
8	181,6579	152,2250	133,6884	117,6039	103,7898	92,5466	83,6119	76,7291	71,9001	45,4705	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
9	205,6881	173,7107	153,1296	133,9362	117,8455	103,8444	92,4991	83,4589	76,5151	49,8181	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
10	229,7920	196,9754	174,2141	153,2314	134,0356	117,8547	103,8133	92,4325	83,3773	53,7508	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
11	255,9915	219,9584	197,2365	174,2520	153,2698	134,0348	117,8403	103,7891	92,4063	57,7290	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
12	275,7584	246,2243	219,9584	197,2365	174,2520	153,2698	134,0348	117,8403	103,7891	61,8652	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000

### B.2.2 Filial 2: Enviar 3 carros para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-21,0000	-31,0000	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
1	8,4794	8,0153	7,7186	7,4680	7,2532	6,9019	7,0984	5,7782	7,2977	-2,4321	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
2	37,2057	34,9316	33,1648	31,2781	29,5526	27,2604	26,9711	22,1431	24,6203	20,9795	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
3	65,2615	59,5579	54,5510	48,7915	43,0779	36,7701	33,9549	25,1109	26,9887	30,6231	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
4	92,8013	82,6980	73,2839	62,4030	51,6148	40,9717	34,6467	24,9136	23,1499	25,5753	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
5	120,4243	105,7753	91,8598	76,0460	60,7632	46,7603	37,1278	27,2852	22,7704	17,1065	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
6	149,1339	130,4025	112,2047	92,0031	72,9300	56,1136	43,6545	32,6128	26,0147	13,3540	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
7	178,1741	156,9236	135,1465	111,0953	88,6837	69,1875	53,9654	41,0907	31,9505	14,1691	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
8	206,6646	184,2523	160,5780	133,5573	108,0515	85,8158	67,7494	52,5087	40,7526	17,8881	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
9	233,5838	210,1750	186,8657	159,0509	131,1277	106,0163	84,9043	66,9485	52,3426	23,7650	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
10	260,0746	234,4327	211,8538	185,5612	157,2386	129,7146	105,4339	84,4494	66,8640	31,2879	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
11	285,0698	257,5910	235,2445	210,9005	184,4426	156,4130	129,3917	105,2027	84,4104	40,0726	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000
12	303,5664	278,6654	257,7519	234,8932	210,5577	184,2070	156,3241	129,3314	105,1933	49,6781	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000

### B.2.3 Filial 1: Enviar 2 carros para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-24,0000	-24,0000	-1000,0000	-1000,0000
1	15,5755	15,3954	15,1863	15,0816	15,0093	15,0816	15,0176	14,9527	14,8124	4,5902	1,6901	-1000,0000	-1000,0000
2	44,1042	43,0076	41,9485	41,0410	40,4627	40,6702	40,5035	40,0370	39,1856	27,7195	13,7173	-1000,0000	-1000,0000
3	71,7642	68,2723	65,6053	62,6980	60,3880	60,2347	59,9061	58,8328	56,4833	42,6300	18,7637	-1000,0000	-1000,0000
4	98,3070	90,9417	85,6104	80,0711	74,8864	72,8531	71,7713	70,2691	66,8162	51,0084	25,4892	-1000,0000	-1000,0000
5	124,2964	112,3546	103,4686	94,7182	86,7088	81,5671	78,4066	76,2046	72,7387	56,8274	33,2399	-1000,0000	-1000,0000
6	150,2734	133,1083	120,9156	108,7449	97,8914	89,8510	83,7445	79,7646	76,3437	61,6294	40,7285	-1000,0000	-1000,0000
7	176,9959	155,5339	139,1090	124,0191	110,2271	99,3337	90,6280	84,0141	79,3737	65,4010	47,1631	-1000,0000	-1000,0000
8	202,7226	178,1805	159,2250	140,6884	124,6039	110,7898	99,5466	90,6119	83,7291	68,9001	52,4705	-1000,0000	-1000,0000
9	228,7002	202,2960	180,7107	160,1296	140,9362	124,8455	110,8444	99,4991	90,4589	73,5151	56,8181	-1000,0000	-1000,0000
10	256,9436	226,9582	203,9754	181,2141	160,2314	141,0356	124,8547	110,8133	99,4325	80,3773	60,7508	-1000,0000	-1000,0000
11	282,7584	253,2243	226,9584	204,2365	181,2520	160,2698	141,0348	124,8403	110,7891	89,4063	64,7290	-1000,0000	-1000,0000
12	301,0185	275,9539	253,2243	226,9584	204,2365	181,2520	160,2698	141,0348	124,8403	100,7891	68,8652	-1000,0000	-1000,0000

### B.2.4 Filial 2: Enviar 2 carros para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-14,0000	-24,0000	-24,0000	-1000,0000	-1000,0000
1	15,6313	15,2659	15,0153	14,7186	14,4680	14,2532	13,9019	14,0984	12,7782	4,2977	4,5679	-1000,0000	-1000,0000
2	44,8676	43,3044	41,9316	40,1648	38,2781	36,5526	34,2604	33,9711	29,1431	21,6203	27,9795	-1000,0000	-1000,0000
3	73,8053	70,2569	66,5579	61,5510	55,7915	50,0779	43,7701	40,9549	32,1109	23,9887	37,6231	-1000,0000	-1000,0000
4	102,4961	96,5707	89,6980	80,2839	69,4030	58,6148	47,9717	41,6467	31,9136	20,1499	32,5753	-1000,0000	-1000,0000
5	131,3731	122,8732	112,7753	98,8598	83,0460	67,7632	53,7603	44,1278	34,2852	19,7704	24,1065	-1000,0000	-1000,0000
6	161,0376	150,6659	137,4025	119,2047	99,0031	79,9300	63,1136	50,6545	39,6128	23,0147	20,3540	-1000,0000	-1000,0000
7	190,5430	179,3261	163,9236	142,1465	118,0953	95,6837	76,1875	60,9654	48,0907	28,9505	21,1691	-1000,0000	-1000,0000
8	219,5570	207,4569	191,2523	167,5780	140,5573	115,0515	92,8158	74,7494	59,5087	37,7526	24,8881	-1000,0000	-1000,0000
9	247,5968	233,7478	217,1750	193,8657	166,0509	138,1277	113,0163	91,9043	73,9485	49,3426	30,7650	-1000,0000	-1000,0000
10	275,7676	259,3106	241,4327	218,8538	192,5612	164,2386	136,7146	112,4339	91,4494	63,9640	38,2879	-1000,0000	-1000,0000
11	302,5601	283,7943	264,5910	242,2445	217,9005	191,4426	163,4130	136,3917	112,2027	81,4104	47,0726	-1000,0000	-1000,0000
12	322,2333	303,6924	285,6654	264,7519	241,8932	217,5577	191,2070	163,3241	136,3314	102,1933	56,6781	-1000,0000	-1000,0000

### B.2.5 Filial 1: Enviar 1 carro para a Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-7,0000	-17,0000	-17,0000	-17,0000	-1000,0000
1	22,6895	22,4563	22,3954	22,1863	22,0816	22,0093	22,0816	22,0176	21,9527	11,8124	11,5902	8,6901	-1000,0000
2	51,8406	50,3583	50,0076	48,9485	48,0410	47,4627	47,6702	47,5035	47,0370	36,1856	34,7195	20,7173	-1000,0000
3	80,7707	76,8483	75,2723	72,6053	69,6980	67,3880	67,2347	66,9061	65,8328	53,4833	49,6300	25,7637	-1000,0000
4	109,0360	102,0416	97,9417	92,6104	87,0711	81,8864	79,8531	78,7713	77,2691	63,8162	58,0084	32,4892	-1000,0000
5	137,4841	126,4643	119,3546	110,4686	101,7182	93,7088	88,5671	85,4066	83,2046	69,7387	63,8274	40,2399	-1000,0000
6	165,7482	151,3875	140,1083	127,9156	115,7449	104,8914	96,8510	90,7445	86,7646	73,3437	68,6294	47,7285	-1000,0000
7	194,8603	177,2412	162,5339	146,1090	131,0191	117,2271	106,3337	97,6280	91,0141	76,3737	72,4010	54,1631	-1000,0000
8	221,9764	202,9745	185,1805	166,2250	147,6884	131,6039	117,7898	106,5466	97,6119	80,7291	75,9001	59,4705	-1000,0000
9	251,8745	228,2068	209,2960	187,7107	167,1296	147,9362	131,8455	117,8444	106,4991	87,4589	80,5151	63,8181	-1000,0000
10	280,1610	256,7994	232,9582	210,9754	188,2141	167,2314	148,0356	131,8547	117,8133	96,4325	87,3773	67,7508	-1000,0000
11	308,0185	282,9539	260,2243	233,9584	211,2365	188,2584	167,2698	148,0348	131,8403	107,7891	96,4063	71,7290	-1000,0000
12	323,0000	304,5665	282,9539	260,2243	233,9584	211,2365	188,2520	167,2698	148,0348	121,8403	107,7891	75,8652	-1000,0000

### B.2.6 Filial 2: Enviar 1 carro para a Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	--

**B.2.7 Filial 1: Não transferir carros**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	30,0000	29,5069	29,4563	29,3954	29,1863	29,0816	29,0093	29,0816	29,0176	18,9527	18,8124	18,5902	15,6901
2	60,0000	58,1895	57,3583	57,0076	55,9485	55,0410	54,4627	54,6702	54,5035	44,0370	43,1856	41,7195	27,7173
3	90,0000	86,5898	83,8483	82,2723	79,6053	76,6980	74,3880	74,2347	73,9061	62,8328	60,4833	56,6300	32,7637
4	120,0000	114,1305	109,0416	104,9417	99,6104	94,0711	88,8864	86,8531	85,7713	74,2691	70,8162	65,0084	39,4892
5	150,0000	142,0601	133,4643	126,3546	117,4686	108,7182	100,7088	95,5671	92,4066	80,2046	76,7387	70,8274	47,2399
6	180,0000	169,8768	158,3875	147,1083	134,9156	122,7449	111,8914	103,8510	97,7445	83,7646	80,3437	75,6294	54,7285
7	210,0000	198,8102	184,2412	169,5339	153,1090	138,0191	124,2271	113,3337	104,6280	88,0141	83,3737	79,4010	61,1631
8	240,0000	225,5594	209,9745	192,1805	173,2250	154,6884	138,6039	124,7898	113,5466	94,6119	87,7291	82,9001	66,4705
9	270,0000	255,4502	235,2068	216,2960	194,7107	174,1296	154,9362	138,8455	124,8444	103,4991	94,4589	87,5151	70,8181
10	300,0000	283,6658	263,7994	239,9582	217,9754	195,2141	174,2314	155,0356	138,8547	114,8133	103,4325	94,3773	74,7508
11	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	195,2520	174,2698	155,0348	128,8403	114,7891	103,4063	78,7290
12	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	195,2520	174,2698	145,0348	128,8403	114,7891	82,8652

**B.2.8 Filial 2: Não transferir carros**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	30,0000	29,7553	29,5082	29,2659	29,0153	28,7186	28,4680	28,2532	27,9019	18,0984	16,7782	18,2977	18,5679
2	60,0000	59,3532	58,4421	57,3044	55,9316	54,1648	52,2781	50,5526	48,2604	37,9711	33,1431	35,6203	41,9795
3	90,0000	88,8223	86,9674	84,2569	80,5579	75,5510	69,7915	64,0779	57,7701	44,9549	36,1109	37,9887	51,6231
4	120,0000	118,1876	115,1765	110,5070	103,6980	94,2839	83,4030	72,6148	61,9717	45,6467	35,9136	34,1499	46,5753
5	150,0000	147,7412	143,6227	136,8732	126,7753	112,8598	97,0460	81,7632	67,7603	48,1278	38,2852	33,7704	38,1065
6	180,0000	177,7480	173,0950	164,6659	151,4025	133,2047	113,0031	93,9300	77,1136	54,6545	43,6128	37,0147	34,3540
7	210,0000	207,4022	202,4983	193,3261	177,9236	156,1465	132,0953	109,6837	90,1875	64,9654	52,0907	42,9505	35,1691
8	240,0000	236,9182	231,2503	221,4569	205,2523	181,5780	154,5573	129,0515	106,8158	78,7494	63,5087	51,7526	38,8881
9	270,0000	265,7875	258,8219	247,7478	231,1750	207,8657	180,0509	152,1277	127,0163	95,9043	77,9485	63,3426	44,7650
10	300,0000	295,1708	286,4498	273,3106	255,4327	232,8538	206,5612	178,2386	150,7146	116,4339	95,4494	77,8640	52,2879
11	330,0000	323,1582	312,8386	297,7943	278,5910	256,2445	231,9005	205,4426	177,4130	140,3917	116,2027	95,4104	61,0762
12	360,0000	345,6575	332,4202	317,6924	299,6654	278,7519	255,8932	231,5577	205,2070	167,3241	140,3314	116,1933	70,6781

**B.2.9 Filial 1: Receber 1 carro da Filial 2**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	30,0000	29,5069	29,4563	29,3954	29,1863	29,0816	29,0093	29,0816	19,0176	18,9527	18,8124	18,0622
2	-1000,0000	60,0000	58,1895	57,3583	57,0076	55,9485	55,0410	54,4627	54,6702	44,5035	44,0370	43,1856	38,2352
3	-1000,0000	90,0000	86,5898	83,8483	82,2723	79,6053	76,6980	74,3880	74,2347	63,9061	62,8328	60,4833	52,7639
4	-1000,0000	120,0000	114,1305	109,0416	104,9417	99,6104	94,0711	88,8864	86,8531	75,7713	74,2691	70,8162	65,0084
5	-1000,0000	150,0000	142,0601	133,4643	126,3546	117,4686	108,7182	100,7088	95,5671	82,4066	80,2046	76,7387	57,3624
6	-1000,0000	180,0000	169,8768	158,3875	147,1083	134,9156	122,7449	111,8914	103,8510	87,7445	83,7646	80,3437	62,2932
7	-1000,0000	210,0000	198,8102	184,2412	169,5339	153,1090	138,0191	124,2271	113,3337	94,6280	88,0141	83,3737	66,8525
8	-1000,0000	240,0000	225,5594	209,9745	192,1805	173,2250	154,6884	138,6039	124,7898	103,5466	94,6119	87,7291	70,9481
9	-1000,0000	270,0000	255,4502	235,2068	216,2960	194,7107	174,1296	154,9362	138,8455	114,8444	103,4991	94,4589	74,7895
10	-1000,0000	300,0000	283,6658	263,7994	239,9582	217,9754	195,2141	174,2314	155,0356	128,8547	114,8133	103,4325	78,7568
11	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	195,2520	174,2698	145,0348	128,8403	114,7891	82,8652
12	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	195,2520	164,2698	145,0348	128,8403	87,0481

**B.2.10 Filial 2: Receber 1 carro da Filial 1**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	30,0000	29,7553	29,5082	29,2659	29,0153	28,7186	28,4680	28,2532	17,9019	18,0984	16,7782	18,4592
2	-1000,0000	60,0000	59,3532	58,4421	57,3044	55,9316	54,1648	52,2781	50,5526	38,2604	37,9711	33,1431	39,2148
3	-1000,0000	90,0000	88,8223	86,9674	84,2569	80,5579	75,5510	69,7915	64,0779	47,7701	44,9549	36,1109	44,8620
4	-1000,0000	120,0000	118,1876	115,1765	110,5070	103,6980	94,2839	83,4030	72,6148	51,9717	45,6467	35,9136	39,7206
5	-1000,0000	150,0000	147,7412	143,6227	136,8732	126,7753	112,8598	97,0460	81,7632	57,7603	48,1278	38,2852	35,6448
6	-1000,0000	180,0000	177,7480	173,0950	164,6659	151,4025	133,2047	113,0031	93,9300	67,1136	54,6545	43,6128	35,8203
7	-1000,0000	210,0000	207,4022	202,4983	193,3261	177,9236	156,1465	132,0953	109,6837	80,1875	64,9654	52,0907	39,1779
8	-1000,0000	240,0000	236,9182	231,2503	221,4569	205,2523	181,5780	154,5573	129,0515	96,8158	78,7494	63,5087	44,8823
9	-1000,0000	270,0000	265,7875	258,8219	247,7478	231,1750	207,8657	180,0509	152,1277	117,0163	95,9043	77,9485	52,3353
10	-1000,0000	300,0000	295,1708	286,4498	273,3106	255,4327	232,8538	206,5612	178,2386	140,7146	116,4339	95,4494	61,0895
11	-1000,0000	330,0000	323,1582	312,8386	297,7943	278,5910	256,2445	231,9005	205,4426	167,4130	140,3917	116,2027	70,6812
12	-1000,0000	360,0000	345,6575	332,4202	317,6924	299,6654	278,7519	255,8932	231,5577	195,2070	167,3241	140,3314	80,6615

**B.2.11 Filial 1: Receber 2 carros da Filial 2**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	-1000,0000	30,0000	29,5069	29,4563	29,3954	29,1863	29,0816	29,0093	19,0816	19,0176	18,9527	18,5038
2	-1000,0000	-1000,0000	60,0000	58,1895	57,3583	57,0076	55,9485	55,0410	54,4627	44,6702	44,5035	44,0370	41,0048
3	-1000,0000	-1000,0000	90,0000	86,5898	83,8483	82,2723	79,6053	76,6980	74,3880	64,2347	63,9061	62,8328	54,2352
4	-1000,0000	-1000,0000	120,0000	114,1305	109,0416	104,9417	99,6104	94,0711	88,8864	76,8531	75,7713	74,2691	60,5175
5	-1000,0000	-1000,0000	150,0000	142,0601	133,4643	126,3546	117,4686	108,7182	100,7088	85,5671	82,4066	80,2046	64,4265
6	-1000,0000	-1000,0000	180,0000	169,8768	158,3875	147,1083	134,9156	122,7449	111,8914	93,8510	87,7445	83,7646	67,9532
7	-1000,0000	-1000,0000	210,0000	198,8102	184,2412	169,5339	153,1090	138,0191	124,2271	103,3337	94,6280	88,0141	71,3651
8	-1000,0000	-1000,0000	240,0000	225,5594	209,9745	192,1805	173,2250	154,6884	138,6039	114,7898	103,5466	94,6119	74,9432
9	-1000,0000	-1000,0000	270,0000	255,4502	235,2068	216,2960	194,7107	174,1296	154,9362	128,8455	114,8444	103,4991	78,7874
10	-1000,0000	-1000,0000	300,0000	283,6658	263,7994	239,9582	217,9754	195,2141	174,2314	145,0356	128,8547	114,8133	82,8780
11	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	195,2520	164,2698	145,0348	128,8403	87,0481
12	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	185,2520	164,2698	145,0348	91,0542

**B.2.12 Filial 2: Receber 2 carros da Filial 1**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	-1000,0000	30,0000	29,7553	29,5082	29,2659	29,0136	28,7186	28,4680	18,2532	17,9019	18,0984	17,6668
2	-1000,0000	-1000,0000	60,0000	59,3532	58,4421	57,3044	55,9513	54,1648	52,2781	40,5526	38,2604	37,9711	36,1972
3	-1000,0000	-1000,0000	90,0000	88,8223	86,9674	84,2569	80,5579	75,5510	69,7915	54,0779	47,7701	44,9549	40,0952
4	-1000,0000	-1000,0000	120,0000	118,1876	115,1765	110,5070	103,6980	94,2839	83,4030	62,6148	51,9717	45,6467	37,5728
5	-1000,0000	-1000,0000	150,0000	147,7412	143,6227	136,8732	126,7753	112,8598	97,0460	71,7632	57,7603	48,1278	37,0972
6	-1000,0000	-1000,0000	180,0000	177,7480	173,0950	164,6659	151,4025	133,2047	113,0031	83,9300	67,1136	54,6545	39,8340
7	-1000,0000	-1000,0000	210,0000	207,4022	202,4983	193,3261	177,9236	156,1465	132,0953	99,6837	80,1875	64,9654	45,1957
8	-1000,0000	-1000,0000	240,0000	236,9182	231,2503	221,4569	205,2523	181,5780	154,5573	119,0515	96,8158	78,7494	52,4742
9	-1000,0000	-1000,0000	270,0000	265,7875	258,8219	247,7478	231,1750	207,8657	180,0509	142,1277	117,0163	95,9043	61,1512
10	-1000,0000	-1000,0000	300,0000	296,1708	286,4498	273,3106	255,4327	232,8538	206,5612	168,2386	140,7146	116,4339	70,7053
11	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	323,1582	312,8386	297,7943	278,5910	256,2445	231,9005	195,4426	167,4130	140,3917	80,6663
12	-1000,0000	-1000,0000	360,0000	345,6575	332,4202	317,6924	299,6654	278,7519	255,8932	221,5577	195,2070	167,3241	90,6255

### B.2.13 Filial 1: Receber 3 carros da Filial 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	30,0000	29,5069	29,4563	29,3954	29,1863	29,0816	19,0093	19,0816	19,0176	18,7118
2	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	60,0000	58,1895	57,3583	57,0076	55,9485	55,0410	44,4627	44,6702	44,5035	42,3566
3	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	90,0000	86,5898	83,8483	82,2723	79,6053	76,6980	64,3880	64,2347	63,9061	57,7539
4	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	120,0000	114,1305	109,0416	104,9417	99,6104	94,0711	78,8864	76,8531	75,7713	65,4765
5	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	150,0000	142,0601	133,4643	126,3546	117,4686	108,7182	90,7088	85,5671	82,4066	69,3788
6	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	180,0000	169,8768	158,3875	147,1083	134,9156	122,7449	101,8914	93,8510	87,7445	72,2829
7	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	210,0000	198,8102	184,2412	169,5339	153,1090	138,0191	114,2271	103,3337	94,6280	75,3348
8	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	240,0000	225,5594	209,9745	192,1805	173,2250	154,6884	128,6039	114,7898	103,5466	78,9440
9	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	270,0000	255,4502	235,2068	216,2960	194,7107	174,1296	144,9362	128,8455	114,8444	82,9312
10	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	300,0000	283,6658	263,7994	239,9582	217,9754	195,2141	164,2314	145,0356	128,8547	87,0630
11	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	218,2365	185,2520	164,2698	145,0348	91,0542
12	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	311,5665	289,9539	267,2243	240,9584	208,2365	185,2520	164,2698	94,5635

### B.2.14 Filial 2: Receber 3 carros da Filial 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000
1	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	30,0000	29,7553	29,5082	29,2659	29,0153	28,7186	18,4680	18,2532	17,9019	17,9488
2	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	60,0000	59,3532	58,4421	57,3044	55,9316	54,1648	42,2781	40,5526	38,2604	37,3090
3	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	90,0000	88,8223	86,9674	84,2569	80,5579	75,5510	59,7915	54,0779	47,7701	43,0298
4	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	120,0000	118,1876	115,1765	110,5070	103,6980	94,2839	73,4030	62,6148	51,9717	42,1601
5	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	150,0000	147,7412	143,6227	136,8732	126,7753	112,8598	87,0460	71,7632	57,7603	42,8733
6	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	180,0000	177,7480	173,0950	164,6659	151,4025	133,2047	103,0031	83,9300	67,1136	46,8036
7	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	210,0000	207,4022	202,4983	193,3261	177,9236	156,1465	122,0953	99,6837	80,1875	53,2962
8	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	240,0000	236,9182	231,2503	221,4569	205,2523	181,5780	144,5573	119,0515	96,8158	61,5456
9	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	270,0000	265,7875	258,8219	247,7478	231,1750	207,8657	170,0509	142,1277	117,0163	70,8950
10	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	300,0000	295,1708	286,4498	273,3106	255,4327	232,8538	196,5612	168,2386	140,7146	80,7458
11	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	330,0000	323,1582	312,8386	297,7943	278,5910	256,2445	221,9005	195,4426	167,4130	90,6424
12	-1000,0000	-1000,0000	-1000,0000	360,0000	345,6575	332,4202	317,6924	299,6654	278,7519	245,8932	221,5577	195,2070	100,2309

## C Listagem do código do programa criado

```
public Par<Par<double[] [] [], double[] [] []>, Par<double[] [] [], double[] [] []>> criarMatriz(){
    double[] [] [] probs1 = new double[7][MAX][MAX];
    double[] [] [] lucrs1 = new double[7][MAX][MAX];
    double[] [] [] probs2 = new double[7][MAX][MAX];
    double[] [] [] lucrs2 = new double[7][MAX][MAX];

    for (int t = -3; t < 4; t++) {
        for (int n_Inicial = 0; n_Inicial < MAX; n_Inicial++) {
            for (int e = 0; e < MAX; e++) {
                for (int p = 0; p < MAX; p++) {
                    int pAtendidos = min(n_Inicial, p);

                    int fim = min(n_Inicial - pAtendidos + e, MAX - 1);

                    fim = max(fim + t, 0);
                    fim = min(fim, MAX - 1);

                    double prob1 = f1p[p] * f1e[e];
                    probs1[t + 3][n_Inicial][fim] += prob1;
                    lucrs1[t + 3][n_Inicial][fim] += calculaLucros(fim, pAtendidos, prob1, t);

                    double prob2 = f2p[p] * f2e[e];
                    probs2[t + 3][n_Inicial][fim] += prob2;
                    lucrs2[t + 3][n_Inicial][fim] += calculaLucros(fim, pAtendidos, prob2, t);
                }
            }
        }
    }

    for (int t = -3; t < 4; t++) {
        for (int i = 0; i < MAX; i++) {
            for (int j = 0; j < MAX; j++) {
                lucrs1[t + 3][i][j] /= probs1[t + 3][i][j];
                if (Double.isNaN(lucrs1[t + 3][i][j]))
                    lucrs1[t + 3][i][j] = -1000;

                lucrs2[t + 3][i][j] /= probs2[t + 3][i][j];

                if (Double.isNaN(lucrs2[t + 3][i][j]))
                    lucrs2[t + 3][i][j] = -1000;
            }
        }
    }

    return new Par(new Par(probs1, probs2), new Par(lucrs1, lucrs2));
}
```

Figura 5: Função que calcula matrizes de transição e de contribuição para as 2 filiais

```

public double calculaLucros(int qtFim, int pedidosAtendidos, double prob, int transf) {
    double sum = 0.0;

    if (qtFim > 8) sum -= 10 * prob;
    if (transf < 0) sum += transf * 7 * prob;

    sum += pedidosAtendidos * 30 * prob;

    return sum;
}

```

Figura 6: Função que calcula lucro ponderado

```

public static double[][][] createProbBig(double[][][] f1, double[][][] f2) {
    double[][][] result;
    int a = f1.length; // Num estados
    int b = f1[0].length; // Linhas
    int c = f1[0][0].length; // Colunas
    int d = f2[0].length; // Linhas
    int e = f2[0][0].length; // Colunas

    result = new double[a * a][b * d][c * e];

    for (int t = 0; t < a; t++)
        for (int i = 0; i < b; i++)
            for (int j = 0; j < c; j++)
                for (int k = 0; k < d; k++)
                    for (int l = 0; l < e; l++)
                        result[t][i * 1 + k][j * 13 + l] = f1[t][i][j] * f2[a - 1 - t][k][l];

    return result;
}

```

Figura 7: Função que calcula a matriz de transição conjugada das filiais

```

public static double[][][] createBigCustos(double[][][] l1, double[][][] l2,
double[][][] p1, double[][][] p2) {
    double[][][] result;
    int a = l1.length; // Num transferencias
    int b = l1[0].length; // Linhas
    int c = l1[0][0].length; // Colunas
    int d = l2[0].length; // Linhas
    int e = l2[0][0].length; // Colunas

    result = new double[a * a][b * d][c * e];

    for (int t = 0; t < a; t++) {
        for (int i = 0; i < b; i++) {
            for (int j = 0; j < c; j++) {
                for (int k = 0; k < d; k++) {
                    for (int l = 0; l < e; l++) {
                        if (p1[t][i][j] != 0 && p2[a - t - 1][k][l] != 0)
                            result[t][i * 13 + k][j * 13 + l] = l1[t][i][j] + l2[a - t - 1][k][l];
                        else
                            result[t][i * 13 + k][j * 13 + l] = -1000;
                    }
                }
            }
        }
    }

    return result;
}

```

Figura 8: Função que calcula a matriz de contribuição conjugada das filiais

```

public double[] calcula_Q(double[][] pn, double[][] rn){
    return Matrix.multiply_by_rows(pn, rn);
}

```

Figura 9: Função que calcula o vetor  $Q_n^k$

```

public static double[] multiply_by_rows(double[][] a, double[][] b){
    int m = a.length;
    int n = a[0].length;
    if (b.length != n) throw new RuntimeException("Illegal matrix dimensions.");
    double[] res = new double[n];
    for (int i = 0; i < m; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            res[i] += a[i][j] * b[i][j];
    return res;
}

```

Figura 10: Função de auxílio a calcula\_Q



```

public double[] calcula_Vn(double[] qn,double[] pn_fn_1)
{
    if(qn==null ||pn_fn_1==null )    throw new RuntimeException("Null Vector!");

    int t1=qn.length;
    int t2=pn_fn_1.length;

    if(t1!=t2)    throw new RuntimeException("Vectors with different sizes!");

    double []res=new double[t1];

    for (int i=0;i<t1;i++)
        res[i]=qn[i]+pn_fn_1[i];

    return res;
}

```

Figura 11: Função que calcula o vetor  $V_n^k$

```

public Par<Par <double[],double[]>, double[][]> resolve_N_iteracao(double[][][]
pn,double[][][] rn,int iteracoes){
    int transf,i,j;
    Par<int [],double []> fn=new Par(new double[169], new double[169]);// Fn inicial
    Par<int [],double []> fn_ant=new Par(new double[169], new double[169]);// Fn anterior.
    double[][] dn = new double[iteracoes][169];//Vetor Dn para todas as Iterações.

    //Vetor Qn
    double [][] q=new double[7][169];
    for(transf=-3;transf<4;transf++)
        q[transf+3] = calcula_Q(pn[transf+3],rn[transf+3]);

    //faz as n iterações
    for(j=0;j<iteracoes;j++) {
        //Vetor Vn
        double vn[][] = new double[7][169];

        for (i = 0; i < 7; i++) {// Para todas as decisões de uma iteração
            double[] pn_fn = Matrix.multiply(pn[i], fn.getSecond());
            vn[i] = calcula_Vn(q[i], pn_fn);
        }
        fn_ant=fn;
        fn = solução(vn);

        //Calculo do Dn
        for(i=0;i<169;i++)
            dn[j][i] = fn.getSecond()[i] - fn_ant.getSecond()[i];
    }
    return new Par(fn,dn);
}

```

Figura 12: Função que resolve o problema em N iterações

## D Listagem de inputs e outputs do programa

Nas matrizes de transição e contribuição de  $169 \times 169$ , as linhas correspondem a um estado inicial e as colunas a um estado final. Como agora temos de descrever um estado conjugado, fomos obrigados a criar uma fórmula geral para o cálculo do estado. Considerando que a filial 1 parte de um estado  $i$  e acaba num estado  $j$  e filial 2 parte de um estado  $k$  e acaba num estado  $l$ , o estado conjugado será:

- **Inicial:**  $i * 13 + k$ ,
- **Final:**  $j * 13 + l$ .

Por exemplo, para uma transição conjugada onde:

- **Filial 1** passa do estado **3** para o estado **7**;
- **Filial 2** passa do estado **3** para o estado **0**.

Os estados conjugados serão:

- **Inicial:**  $3 * 13 + 3 = 42$ ;
- **Final:**  $7 * 13 + 0 = 91$ .

No que toca a decisões, são criadas 7 matrizes  $169 \times 169$  de transição e contribuição, calculadas pelas funções que podem ser consultadas na secção C nas figuras 7 e 8, respetivamente, que são colocadas numa "lista" de matrizes, sendo que o índice da matriz de uma das decisões é dada por:

- **Índice 0:** Transferir **3** carros da filial **1** para a filial **2**;
- **Índice 1:** Transferir **2** carros da filial **1** para a filial **2**;
- **Índice 2:** Transferir **1** carro da filial **1** para a filial **2**;
- **Índice 3:** Não há transferências entre filiais;
- **Índice 4:** Transferir **1** carro da filial **2** para a filial **1**;
- **Índice 5:** Transferir **2** carros da filial **2** para a filial **1**;
- **Índice 6:** Transferir **3** carros da filial **2** para a filial **1**.