Conexões de Galois

Monotonia da Diferença:

$$X \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X - R \subseteq Z - R$$

Converso :

$$X^{º} \subseteq Y \equiv X \subseteq Y^{º}$$
$$R \subseteq S \equiv R^{º} \subseteq S^{º}$$

Reunião:

$X - R \subseteq Y \equiv X \subseteq Y \cup R$ (5.140)

Interseção:

$$R \cap X \subseteq Y \equiv X \subseteq (R \Rightarrow Y)$$

Divisão à Direita:

$$Z \cdot Y \subseteq X \equiv Z \subseteq X / Y$$

Distributividade da Diferença:

$$(X \cup Y) - R = (X - R) \cup (Y - R)$$

Distributividade da Reunião:

$(X \cap Y) \cup R = (X \cup R) \cap (Y \cup R)$

Preservação do ínfimo:

$\bot - R = \bot$

Monotonia da Reunião:

$$X \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X \cup R \subseteq Z \cup R$$

Preservação do supremo:

$$\top \cup R = \top$$

Left cancelation:

$$X \subseteq (X - R) \cup R$$

Right cancelation:

$$(Y \cup R) - R \subseteq Y$$

Divisão à Esquerda:

$$X \cdot Z \subseteq Y \equiv Z \subseteq X \backslash Y$$

Semi-inverso:

$$((X - R) \cup R) - R = X - R$$
$$((X \cup R) - R) \cup R = X \cup R$$

Negação:

$$X \subseteq \neg R \equiv R \subseteq \neg X$$
$$\neg R = R \Rightarrow \bot$$

Domínio e contra-domínios:

$$\delta X \subseteq Y \equiv X \subseteq \top \cdot Y$$
$$\rho R \subseteq Y \equiv R \subseteq Y \cdot \top$$

Outras igualdades:

$$R \cdot f = R / f^{\circ} \tag{5.164}$$
$$f \backslash R = f^{\circ} \cdot R \tag{5.165}$$
$$R / \bot = \top \tag{5.166}$$
$$R / id = R \tag{5.167}$$
$$R \backslash (f^{\circ} \cdot S) = f \cdot R \backslash S \tag{5.168}$$
$$R \backslash \top \cdot S = \,! \cdot R \backslash ! \cdot S \tag{5.169}$$
$$R / (S \cup P) = R / S \cap R / P \tag{5.170}$$

Operador relacional overriding:

$R \dagger S = S \cup R \cap \bot / S^{º}$ (5.197) $X \subseteq R \dagger S = X \subseteq (R \cup S) \wedge (X - S) \cdot S^{º} = \bot$ (5.198)

Significado : Remover de R todas as **entradas** em comum com S. De seguida, escrever as entradas de S em R. **Exemplo**:Se R=(a1->b1),(a1->b2) e S =(a1->b3) fica $R \dagger S = (a1 -> b3)$.

Nota:Esta parte :$\bot / S^{º}$**=** todos os elementos que não estão definidos em S **...** $R \cap \bot / S^{º}$ **=** Todos os elementos R , onde S não está definido.

Difuncionais:

$\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{f} \subseteq \frac{h}{g}$ (5.180)

$R \cdot Rº \cdot R \subseteq R$

Monotonia:

Colocar **implicações.**

Exemplo:

$$
\begin{array}{ll}
 & R \subseteq f^{\circ} \cdot S \\
\Leftarrow & \quad \{ \; id \subseteq f^{\circ} \cdot f \text{ ; raising the lower-side} \; \} \\
 & f^{\circ} \cdot f \cdot R \subseteq f^{\circ} \cdot S \\
\Leftarrow & \quad \{ \; \text{monotonicity of } (f^{\circ} \cdot) \; \} \\
 & f \cdot R \subseteq S \\
\Leftarrow & \quad \{ \; f \cdot f^{\circ} \subseteq id \text{ ; lowering the upper-side} \; \} \\
 & f \cdot R \subseteq f \cdot f^{\circ} \cdot S \\
\Leftarrow & \quad \{ \; \text{monotonicity of } (f \cdot) \; \} \\
 & R \subseteq f^{\circ} \cdot S
\end{array}
$$

CAP 6 - Relators and relation on functions :

Funtor **Maybe** -> $GR = id \, + \, R$

Funtor **Listas** -> $GR = id \, + \, id \, \times R \quad *$

$R \subseteq S \; \Rightarrow G \; R \; \subseteq GS$ (6.7)

$G(Rº) \; = (GR)º$ (6.8)

Seta de Reynolds:

$f(R \; \leftarrow S)g \; \equiv \; f \; \cdot S \; \subseteq R \; \cdot g$ (6.10)

Tipologia:

1) descobrir o tipo da função.
2)Passar tipos a relações(Rt)
3)Colocar a f (Rt)f , sendo f a função fornecida.
4)Aplicar a seta de reynolds e dp shunting
5)Normalmente um guardanapo.Pode-se ter de usar a seta de reynolds novamente.
6)Por último, para calcular o teorema grátis -trocar relações por funções , $\subseteq$ por $=$, e caso tenha (f + id)* colocar map(f+id) ;

Outras propriedades:

5)Introduzir vars($\subseteq$ $passa \; a$ $\Rightarrow$ formula **5.19**)

$$
\begin{array}{rcll}
id \leftarrow id & = & id & (6.11) \\
(R \leftarrow S)^{\circ} & = & R^{\circ} \leftarrow S^{\circ} & (6.12) \\
R \leftarrow S \;\subseteq\; V \leftarrow U & \Leftarrow & R \subseteq V \wedge U \subseteq S & (6.13) \\
(R \leftarrow V) \cdot (S \leftarrow U) & \subseteq & (R \cdot S) \leftarrow (V \cdot U) & (6.14) \\
(f \leftarrow g^{\circ})h & = & f \cdot h \cdot g & (6.15) \\
k(f \leftarrow g)h & \equiv & k \cdot g = f \cdot h & (6.16)
\end{array}
$$

From property (6.13) we learn that the combinator is monotonic on the left hand side — and thus facts

$$
\begin{array}{rcll}
S \leftarrow R & \subseteq & (S \cup V) \leftarrow R & (6.17) \\
\top \leftarrow S & = & \top & (6.18)
\end{array}
$$

hold[2] — and anti-monotonic on the right hand side — and thus property

$$
R \leftarrow \bot \; = \; \top \qquad (6.19)
$$

and the two distributive laws which follow:

$$
\begin{array}{rcll}
S \leftarrow (R_1 \cup R_2) & = & (S \leftarrow R_1) \cap (S \leftarrow R_2) & (6.20) \\
(S_1 \cap S_2) \leftarrow R & = & (S_1 \leftarrow R) \cap (S_2 \leftarrow R) & (6.21)
\end{array}
$$

CAP 7 - Contracts and Weakest pre-conditions:

Regras "comuns":

Φ_p **é co-reflexiva;**

$\Phi_p = id \cap \frac{true}{p}$ (5.201)

$y\, \Phi_p\, x \Leftrightarrow y = x \wedge (p\, x)$ (5.202)

$\Phi_{\neg p} = id - \Phi_p$(5.207)

$\Phi_p \cdot \top = \frac{true}{p}$ (5.208)

$R \cdot \Phi_p = R \cap \top \cdot \Phi_p$ (5.209)

$\Phi_p \cdot R = R \cap \Phi_p \cdot \top$ (5.210)

$\Phi_q \cdot \Phi_p = \Phi_q \cap \Phi_p$ (2.211)

Notas:

$$b\,(R \cdot \Phi_p)\,a \Leftrightarrow b\,R\,a \wedge (p\,a)$$
$$b\,(\Phi_q \cdot R)\,a \Leftrightarrow b\,R\,a \wedge (q\,b)$$

$p? = [\Phi_p, \Phi_{\neg p}]^{o}$

Cálculo da pré-condição :

$f \cdot \Phi_p = \Phi_q \cdot f \equiv p = q \cdot f$ (7.6)

Catamorfismos relacionais:

Universal:

$X = (\!|R|\!) \equiv X \cdot in = R \cdot (FX)$ (8.2)

$X \subseteq (\!|R|\!) \Leftarrow X \subseteq R \cdot (FX) \cdot in^{o}$ (8.6)

Cancelamento:

$$(\!|R|\!) = R \cdot F\,(\!|R|\!) \cdot in^{o}$$

Fusão cata:

$$(\!|R|\!) \cdot in = R \cdot F(\!|R|\!)$$

Monotonia do funtor:

$$\begin{array}{ll} & X \subseteq R \cdot \mathsf{F}\,(\!|R|\!) \cdot \mathsf{in}^{\circ} \\ \Leftarrow & \quad \{ \text{ since } X \subseteq (\!|R|\!)\text{; monotonicity of } \mathsf{F} \ \} \\ & X \subseteq R \cdot (\mathsf{F}\,X) \cdot \mathsf{in}^{\circ} \end{array}$$

Propriedade derivada de 8.2:

$S \cdot (\!|R|\!) = (\!|Q|\!) \Leftarrow S \cdot R = Q \cdot FS$ (8.13)

Regras "comuns":

$(\!|R|\!) \subseteq X \Leftarrow R \cdot FX \cdot in^{o} \subseteq X$ (8.7)

Propriedade derivada de 8.6 e 8.7:

$Q \cdot (\!|S|\!) \subseteq (\!|R|\!) \Leftarrow Q \cdot S \subseteq R \cdot FQ$ (8.14)

$(\!|R|\!) \subseteq Q \cdot (\!|S|\!) \Leftarrow R \cdot FQ \subseteq Q \cdot S$ (8.15)

Hilomorfismos relacionais:

Hilomorfismo são 2 catas:

$H = (\!|R|\!) \cdot (\!|S|\!)^{o}$ (8.16)

Regras "comuns":

$(\!|R|\!) \cdot (\!|S|\!)^{o} \subseteq X \Leftarrow R \cdot FX \cdot S^{o} \subseteq X$ (8.18)

$X \subseteq (\!|R|\!) \cdot (\!|S|\!)^{o} \Leftarrow X \subseteq R \cdot FX \cdot S^{o}$ (8.20)

$(\!|R|\!) \cdot (\!|S|\!)^{o} = \langle \mu X :: R \cdot FX \cdot S^{o} \rangle$ (8.19)