2a. Lista de Exercícios SMA 0354 - Cálculo II - Curso Coordenado
segundo semestre de 2020

Curvas Parametrizadas: reta tangente, reta normal, limite, comprimento de arco.

Exercício 1 *Faça o esboço do traço de cada curva parametrizada abaixo indicando a sua orientação:*
(a) $t \mapsto (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $t \mapsto (5\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) $t \mapsto (t, t^3)$, $t \in [-3, 3]$.
(d) $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(e) $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Exercício 2 *Para cada item abaixo, encontre pelo menos duas funções a valores vetoriais* $r(t) = (x(t), y(t))$ *e* $s(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ *distintas satisfazendo a equação dada. (Conclui-se, assim, que uma parametrização de uma curva nunca é única.)*
(a) $y = x^2 - 5$
(b) $y = \sqrt{x}$
(c) $x^2 + y^2/4 = 1$

Exercício 3 *Verifique se existe* $\lim_{t \to t_0} F(t)$ *para:*
(a) $F(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t - 1}{t} \right)$, $t_0 = 1$.
(b) $F(t) = \left(\dfrac{\operatorname{tg} 3t}{t}, \dfrac{e^{2t} - 1}{t}, t^3 \right)$, $t_0 = 0$.

Exercício 4 *Verifique se a curva parametrizada* $r(t)$ *é regular no ponto* $r(t_0)$*. Se for, determine a equação da reta tangente a tal curva no ponto* $r(t_0)$*. Verifique também se a curva têm reta normal no ponto* $r(t_0)$ *e determine a sua equação. Faça um esboço:*

(a) $r(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $t_0 = 0$.

(b) $r(t) = (1 - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$.

Exercício 5 *Considere a curva parametrizada* $r(t) = (t^2, 2t^2 + 1, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$*. Verifique se tal curva admite reta tangente paralela ao vetor* $v = (1, 2, 3)$*. Se sim, em qual(quais) ponto(s) da curva isso ocorre?*

Funções de Várias Variáveis

Exercício 6 *Descreva o domínio e a imagem de* f*:*
(a) $f(x, y) = 2x - y^2$ (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ (c) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y} - 1}{x + y - 1}$
(d) $f(x, y, z) = \dfrac{x - z}{x^2 + y^2}$ (e) $f(x, y, z) = \ln(x + y + z + 1)$.

Exercício 7 *Para as funções* f *cujas leis são dadas abaixo, verifique se são limitadas em seu domínio de definição. Caso* f *não seja limitada, verifique por qual sequência de pontos ela cresce (ou decresce)* *arbitrariamente:*

$(a)\ f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$ $\quad (b)\ f(x,y) = x/(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad (c)\ f(x,y) = \ln(x+y)$

$(d)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy - z^2}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (e)\ f(x,y,z) = \cos(\dfrac{xyz^9}{\sqrt{x-y}})$ $\quad (f)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^4}$

$(g)\ f(x,y) = \dfrac{x^8}{x^8+y^8}$ $\quad (h)\ f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^8+y^8}$ $\quad (i)\ f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^8+y^8}$

$(j)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^4}$ $\quad (k)\ f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$ $\quad (l)\ f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^4}$

$(m)\ f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\quad (n)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Curvas de níveis e gráficos

Exercício 8 *Esboce os gráficos das funções abaixo. Reconheça todos os gráficos, exceto um, como superfícies dadas por (ou contidas em) quádricas, identificando-as:*

$(a)\ f(x,y) = x^2+y^2+3$ $\quad (b)\ f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2+3$ $\quad (c)\ \ f(x,y) = 3$

$(d)\ f(x,y) = -x-3y+3$ $\quad (e)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+1$

$(g)\ f(x,y) = x+2$ $\quad (h)\ f(x,y) = e^x+2$

Exercício 9 *Em cada item, esboce no mesmo plano coordenado as curvas de nível $f(x,y) = c$ para $c \in \{-1,0,4\}$:*

$(a)\ f(x,y) = xy$ $\quad (b)\ f(x,y) = \ln(xy)$ $\quad (c)\ f(x,y) = 4-(x-1)^2-(y+3)^2$

$(d)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2/2}$ $\quad (f)\ \ f(x,y) = e^x/(2y).$

Exercício 10 *Descreva a superfície de nível $f(x,y,z) = c$ para $c \in \{-1,0,4\}$:*

(a) $f(x,y,z) = e^x/(2y)$ $\qquad$ *(b)* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exercício 11 *Ache a equação do conjunto de nível de f que passe pelo ponto P dado:*

(a) $f(x,y) = y\arctan x,\ P = (1,4)$ $\qquad$ *(b)* $f(x,y,z) = z^2y + x,\ P = (1,4,-2)$

(c) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1+t^2},\ P = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Exercício 12 *(a) Encontre alguma função (especificando seu domínio, contradomínio e sua lei), que tenha a reta de equação $y = 3x-4$ como uma curva de nível.*
(b) O mesmo para a curva dada pela equação $y = 3/x^2$.

Exercício 13 *Se $T(x,y)$ dá a temperatura num ponto (x,y) sobre uma placa delgada de metal no plano-x,y, então as curvas de nível de T são chamadas de curvas isotérmicas (todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma temperatura). Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e $T(x,y) = xy$.*
(a) Esboce as curvas isotérmicas de temperaturas $T = 1$, $T = 2$ e $T = 3$.
(b) Uma formiga, inicialmente no ponto $(1,4)$, se move sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória, e qual é a temperatura correspondente?

Exercício 14 *Os pontos de uma chapa plana de metal estão marcados no plano-x,y de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.*
(a) Qual é a lei $T(x,y)$ que descreve a temperatura da chapa acima?
(b) Descreva as isotérmicas, isto é, as curvas de nível da função temperatura.
(c) Se a temperatura no ponto $P = (4,3)$ é de 40^oC, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20^oC.

Exercício 15 *Duas curvas de nível podem se interceptar? Justifique sua resposta.*

Limite de funções de várias variáveis

Exercício 16 *Use as propriedades de limite para calcular:*

$(a)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$ $\quad (b)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$ $\quad (c)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

$(d)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z}$ $\quad (e)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz-xy-2xzy$ $\quad \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \left|\frac{x-y}{x+xy+y^2z}\right|.$

Exercício 17 *Verifique se os resultados abaixo são verdadeiros, justificando sua resposta.*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}=0$ $\quad$ *(b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y}=0$ $\quad$ *(c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1}=2$

Exercício 18 *Verificar se os limites abaixo existem. Justifique sua resposta.*

$(a)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (b)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ $\quad (c)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+5y}{x-y^2+z}$

$(d)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}}$ $\quad (e)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (f)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$

Sugestão: Em (b) esboce o gráfico da função. É fácil!

Exercício 19 *Veja se é possível utilizar o Teorema do Confronto (ou Sanduíche) para o cálculo dos limites abaixo (O exercício anterior será útil). Para os casos em que não é possível utilizar o teorema, verifique se o limite não existe.*

$(a)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad (b)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (c)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$(d)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (e)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (f)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

$(g)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$ $\quad (h)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \frac{x}{x-y}$ $\quad (i)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{x^4+y^4}$

$(j)\ \displaystyle\lim_{(x,y,x)\to(1,0,0)} \frac{x-1}{(x-1)^2+|y|+|z|}$ $\quad (k)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\quad (l)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Continuidade de funções de várias variáveis

Exercício 20 *Descreva os pontos onde f é contínua. Faça também o esboço do domínio $D(f)$:*

$(a)\ f(x,y)=\ln(x+y-1)$ $\quad (b)\ f(x,y)=\sqrt{x}e^{xy}$ $\quad (c)\ f(x,y)=\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2+y^2}$

$(d)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (e)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+y+z}$ $\quad (f)\ f(x,y,z)=\tan(xyz)$

Exercício 21 *Verifique se cada uma das leis abaixo define uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$:*

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad$ *(b)* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad$ *(d)* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 \operatorname{sen}^2(y)}{x^2+2y^2-2x+1}, & se \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Derivadas Parciais e Direcionais

Exercício 22 *Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:*

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x^4 - xy + 1}{xy}$ (b) $f(x,y) = \arctan x/y$ (c) $f(x,y) = sen(x^2 - y^3)$

(d) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$ (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^3-z^4}$ (f) $f(x,y,z,u,v) = xyzu^2v^4$

Exercício 23 *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ *para* $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + \operatorname{sen}(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]$.
Dica: Deve ser de fácil resolução.

Exercício 24 *Seja* $f(x,y) = 2x + 3y^2$.
(a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva que está na intersecção do gráfico de f com o plano $x = 2$, no ponto $(2,1,f(2,1))$.
(b) Idem para a curva que está na intersecção do gráfico com o plano $y = -1$, no ponto $(2,-1,f(2,-1))$.
(c) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,-1,f(2,-1))$.

Exercício 25 *Encontre o vetor gradiente de cada uma das funções:*
(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *(b)* $f(x,y,z) = x\,\operatorname{arctg}(y+z)$ *(c)* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Exercício 26 *Considere a função f cuja lei é dada por* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
(a) Encontre a aproximação linear de $f(x,y,z)$ para (x,y,z) no ponto $(0,3,4)$.
(b) Obtenha o valor aproximado de $\sqrt{(0,01)^2+(3,02)^2+(3.97)^2}$. Faça a análise sem o uso da calculadora e depois use-a para comparar seu resultado.

Exercício 27 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável em toda reta. Seja $u(x,y) = f(x-cy)$ onde c é constante dada. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de u e então mostre que u satisfaz a equação de transporte $u_y + cu_x = 0$.*

Exercício 28 *Seja $z(t) = f(x(t),y(t))$ onde f é diferenciável no plano e $x(t), y(t)$ são deriváveis num intervalo $]a,b[$.*
(a) Dê a expressão de $z'(t)$ usando o vetor gradiente de f.
(b) Derive $z(t)$ para os casos:
(i) $z = \tan(x^2+y)$ onde $x = 2t$, $y = t^2$.
(ii) $z = x/y$ onde $x = e^{-t}$ e $y = \ln t$.

Exercício 29 *(a) Se $h(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$, onde $f(x,y), x(u,v)$ e $y(u,v)$ são diferenciáveis em todo plano, obtenha as expressões para $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$. Aplique para cada caso abaixo:*
(b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ onde $x(u,v) = u - v$ e $y(u,v) = u + v$
(c) $f(x,y) = 1 - 4x^2 + 9y^2$ onde $x(u,v) = 2ucosv$ e $y(u,v) = 3usenv$

Exercício 30 *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Seja $v = (\alpha, \beta)$ *vetor unitário. Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x, y)$ *para* $(x, y) \neq (0, 0)$.
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$.

Exercício 31 *Em cada item, calcule a derivada direcional de* f *na direção de* v *e no ponto* P:
(a) $f(x, y) = xy - x + y$, $v = (1, 1)$ $P = (1, 1)$
(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4 + 4)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $P = (1, 0)$
(c) $f(x, y, z) = \dfrac{x - e^y}{x^2 + y^4 + 1}$, $v = (2, 2, 0)$, $P = (1, 1, 1)$.

Exercício 32 *Encontre a direção em que* f *decresce mais rapidamente, a partir de* P *nos três casos do exercício anterior.*

Exercício 33 *Mostre que se as funções* $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções com derivadas de segunda ordem contínuas em* $\mathbb{R}$, *então a função* $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$u(t, x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct), \text{ para } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfaz a equação da onda unidimensional, isto é, a equação diferencial

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \text{ para } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $c > 0$ *é uma constante fixada.*

Exercício 34 *Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções do Exercício 22.*

Exercício 35 *Mostre que* $U(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-x} \operatorname{sen} y$ *satisfaz a chamada* **equação de Laplace** $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Exercício 36 *Mostre que* $u(x, t) = e^{-25t} \operatorname{sen} 5x$ *é solução da* **equação do calor** $u_t = u_{xx}$.

Exercício 37 *Para cada* $(x, y) \neq (0, 0)$ *calcule* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y)$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$ *onde* $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Exercício 38 *(a) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
(b) Verifique que f *satisfaz a equação de Laplace*

$$\Delta f = 0,$$

sendo $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *(Uma função que satisfaz a equação de Laplace é chamada harmônica.)*

Exercício 39 *Se* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$ *são funções de classe* C^2 *e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u *e* v *são funções harmônicas.*

Exercício 40 *Seja* $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$, *onde* a *é uma constante real e* f *e* g *são funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até segunda ordem. Mostre que* $u(x, t)$ *satisfaz a equação da onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Exercício 41 *Suponha que $u(x,t)$ satisfaça*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

(a) Verifique que $v(r,s) = u(x,t)$, onde $x = r+s$ e $t = r-s$, satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r} = 0.$$

(b) Determine funções $u(x,t)$ que satisfaçam (1).

Exercício 42 *Seja $v(r,\theta) = u(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\theta$. Verifique que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Diferenciabilidade de funções de várias variáveis

Exercício 43 *Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável (justifique):*

(a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$,
(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,
(c) $f(x,y) = x^2 e^y$,
(d) $f(x,y) = \dfrac{1+y}{1+x}$,
(e) $f(x,y) = 4\arctan(xy)$,
(f) $f(x,y) = y + \sin(x/y)$.

Exercício 44 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem*
(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$.
(c) f *não é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 45 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem,*
(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$
(c) f *é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 46 *Verifique se a função* $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\cos(y)$ *é diferenciável em* $(0,0)$. (Dica: Encontre, por definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.)

Reta (ou plano) tangente e reta normal

Exercício 47 *Determine as retas normal e tangente à curva* $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ *no ponto* $(1, 2)$.

Exercício 48 *Verifique se existem pontos sobre a curva* $x^2 - y^2 = 1$ *nos quais a reta tangente seja paralela à reta dada por* $y = 2x$. *Caso existam, determine-os.*

Exercício 49 *(a) Encontre o plano tangente à superfície* $x + y^2 + z = 4$ *no ponto* $P_0 = (1, 1, 2)$.
(b) Determine o plano tangente à superfície $x^3 + y^3 + z^3 = 10$ *no ponto* $P_0 = (1, 1, 2)$.

Exercício 50 *Verifique se existe(m) ponto(s) na esfera* $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tal que o plano tangente a* S *neste(s) ponto(s) seja paralelo ao plano* $3x - y + z = 7$. *Caso exista(m), determine-o(s).*

Aproximação linear

Exercício 51 *Abaixo é dada a função e sua respectiva aproximação linear, digamos* $L_P(x, y)$, *em algum ponto* P. *Use a informação dada em cada caso para determinar as coordenadas do ponto* P.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L_P(x, y) = 2y - 2x - 2$;

(b) $f(x, y) = x^2y$, $L_P(x, y) = 4y - 4x + 8$;

(c) $f(x, y, z) = xy + z^2$, $L_P(x, y, z) = y + 2z - 1$;

(d) $f(x, y, z) = xyz$, $L_P(x, y, z) = x - y - z - 2$.

Máximo e Mínimos para funções de várias variáveis

Exercício 52 *(a) Se a distribuição de temperatura numa chapa metálica é dada pela função* $T(x, y) = x^3 - 2xy^2$ *e se uma formiga está sobre a chapa no ponto* $(x, y) = (1, 1)$ *e deseja se aquecer pois está sentindo muito frio. Em que direção deverá tomar sua caminhada para que isso ocorra de modo mais eficiente?*

(b) Se a formiga estivesse confortável, termicamente falando, que direção ela tomaria para continuar com esta mesma sensação.

Exercício 53 *Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções cujas leis são dadas por:*

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
2. $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
3. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$

Exercício 54 *Determine o ponto do plano* $x + 2y - z = 4$ *mais próximo da origem.*

Exercício 55 *Encontre o ponto de máximo e o ponto de mínimo que* $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ *assume no quadrado* $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. *Dê os valores de máximo e mínimo de* f *neste quadrado.*

Exercício 56 *Em um laboratório foram obtidas, experimentalmente, as seguintes medidas:*

$$t_1 = 0, \quad v_1 = 2;$$
$$t_2 = 1, \quad v_2 = 8;$$
$$t_3 = 2, \quad v_3 = 11.$$

Determine os coeficientes a *e* b *da função* $v(t) = at + b$ *de modo a minimizar a soma dos erros quadráticos, isto é,* $e_1^2 + e_2^2 + e_3^3$, *onde* $e_i = v(t_i) - v_i,\ i = 1, 2, 3$.

Exercício 57 *Sobre a elipse* $x^2 + 2y^2 = 1$ *determine todos os pontos onde* $f(x,y) = xy$ *assume seus valores extremos.*

Exercício 58 *Encontre as dimensões da lata cilíndrica reta fechada de menor área superficial cujo volume é* $16\pi\text{cm}^3$.

Exercício 59 *Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.*

Exercício 60 *Encontre os valores extremos de* $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ *na interseção do plano* $z = 1$ *com a esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Exercício 61 *Uma placa metálica circular com um metro de raio está posicionada com seu centro na origem do plano* xy *e tem temperatura variável, incluindo os pontos de sua fronteira. A temperatura num ponto* (x,y) *da placa é mantida a* $T(x,y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)^o C$, *com* x *e* y *em metros. Encontre os valores de maior e de menor temperatura desta placa.*

Exercício 62 *Estude a função dada com relação a máximos e mínimos no conjunto dado.*

(a) $f(x,y) = 3x - y$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; y - x \leq 3; x + y \leq 4; 3x + y \leq 6\}$.
(b) $f(x,y) = 3x - y$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.
(d) $f(x,y) = xy$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; 2x + y \leq 5\}$.
(e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$; $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

Exercício 63 *Determine os valores máximos e mínimos de* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$:
(a) *na região retangular* $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Exercício 64 *Encontre os pontos de máximo e de mínimo de* $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2$ *na região delimitada pelo triângulo determinado pelas retas* $y = 0$, $x = 0$ *e* $x + y = 1$.

Exercício 65 *Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determinar os extremos condicionados das funções:*

(a) $z = xy$ *quando* $x + y = 1$
(b) $u = x^2 + y^2 + z^2$ *quando* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c > 0)$
(c) $z = x^2 + y^2$ *quando* $3x + 2y = 6$
(d) $u = xyz$ *quando* $x + y + z = 5$ *e* $xy + yz + zx = 8$

Polinômio de Taylor

Exercício 66 *Determine o polinômio de Taylor de ordem dois da função dada, em torno do ponto* (x_0, y_0) *dado.*

(a) $f(x,y) = e^x + 5y$ *e* $(x_0, y_0) = (0,0)$.
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ *e* $(x_0, y_0) = (11)$.
(c) $f(x,y) = \sin(3x + 4y)$ *e* $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Exercício 67 *Sejam* $f(x,y) = e^x + 5y$ *e* $P_1(x,y)$ *o polinômio de Taylor de ordem 1 de* f *em torno de* $(0,0)$. *Avalie o erro que se comete na aproximação*

$$e^x + 5y \cong P_1(x,y)$$

na região $A : |x| \leq 0,01\,, |y| \leq 0,01$.

Exercício 68 *Sejam* $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ *e* $P_1(x,y)$ *o polinômio de Taylor de ordem 1 de* f *em torno de* $(1,1)$. *Avalie o erro que se comete na aproximação de* $f(x,y)$ *por* $P_1(x,y)$ *na região* $A : |x-1| \leq 1$, $|y-1| \leq 1$.