



# Geometria Analítica

## Videoaula 3.11

# Produto Misto

**Departamento de Matemática (UFSC)**

Professora ALDA MORTARI

Professor CHRISTIAN WAGNER

Professor FELIPE TASCA

Professor GIULIANO BOAVA

Professor LEANDRO MORGADO

Professora MARÍA ASTUDILLO

Professor MYKOLA KHRYPCHENKO

# Produto Misto

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

O **produto misto** entre  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é o número real dado por:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

# Método Prático

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

## Exemplo

Considere os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, 4, 3)$ ,  $\vec{w} = (3, 1, 1)$ .

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

# Propriedades do Produto Misto

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedades do produto misto:

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  se e somente se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ .

# Propriedades do Produto Misto

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedades do produto misto:

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$

# Propriedades do Produto Misto

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedades do produto misto:

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}).$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$

# Aplicação 1

Considere os vetores  $\vec{u} = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 4, 0)$ ,  $\vec{w} = (3, 10, 4)$ .

Verifique se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.



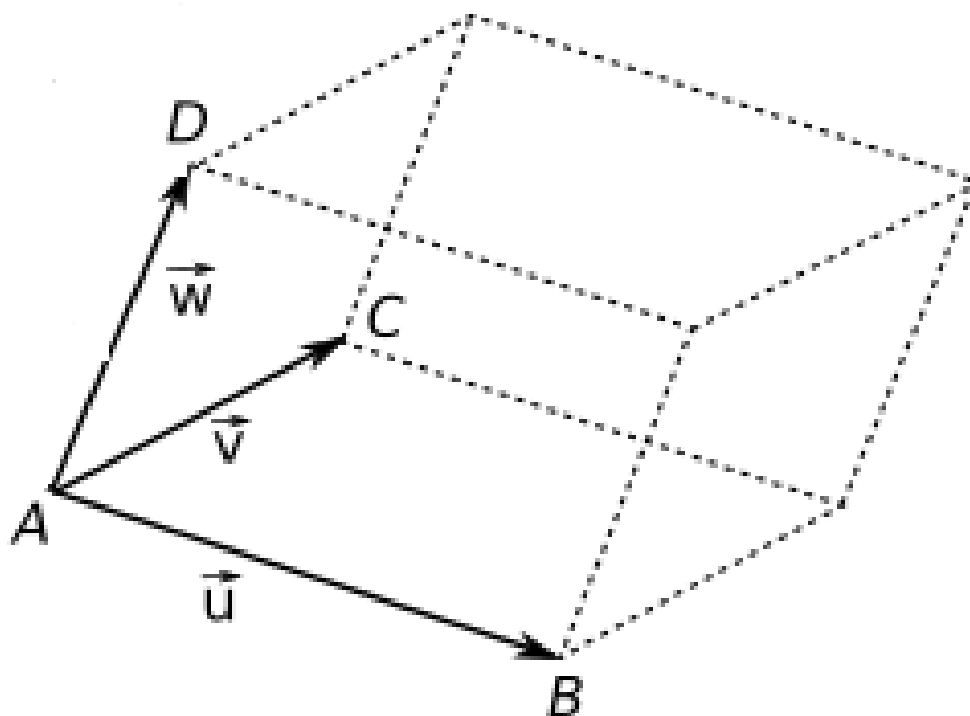
## Aplicação 2

Considere os pontos  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (3, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 4)$  e  $D = (-1, 3, 1)$ .

Verifique se os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares.

# Interpretação Geométrica

O módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores.



## Exemplo

Considere os vetores  $\vec{u} = (x, 5, 0)$ ,  $\vec{v} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{w} = (1, 1, -1)$ .

Calcule  $x$  para que o volume do paralelepípedo gerado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  seja 24.