# 1.7. Escalonamento

**Professores:**
Alda Dayana Mattos Mortari
Christian Wagner
Giuliano Boava (autor e voz)
Felipe Augusto Tasca
Leandro Batista Morgado
María Rosario Astudillo Rojas
Mykola Khrypchenko

# PRELIMINARES

# PRELIMINARES

Se já sabemos calcular determinante e inversa, por que aprender um novo método?

# PRELIMINARES

**Se já sabemos calcular determinante e inversa, por que aprender um novo método?**

Ferramenta teórica: pode ser usado na demonstração de teoremas e propriedades.

# PRELIMINARES

**Se já sabemos calcular determinante e inversa, por que aprender um novo método?**

**Ferramenta teórica: pode ser usado na demonstração de teoremas e propriedades.**

**Eficiência computacional: o novo método pode requerer menos operações para ser concluído.**

**Complexidade computacional: o novo método pode se comportar melhor quando as dimensões crescem muito.**

# PRELIMINARES

**Se já sabemos calcular determinante e inversa, por que aprender um novo método?**

Ferramenta teórica: pode ser usado na demonstração de teoremas e propriedades.

Eficiência computacional: o novo método pode requerer menos operações para ser concluído.

Complexidade computacional: o novo método pode se comportar melhor quando as dimensões crescem muito.

Muitos problemas práticos envolvem manipulação de matrizes muito grandes, com milhares de linhas e colunas.

# PRELIMINARES

## Comparação para o cálculo de determinante

| | Tempo em um processador moderno | |
|---|---|---|
| **Tamanho da matriz** | **Laplace** | **Escalonamento** |
| **10 x 10** | $7 \cdot 10^{-7}$ **segundos** | $2 \cdot 10^{-13}$ **segundos** |
| **15 x 15** | $0{,}4$ **segundos** | $7 \cdot 10^{-12}$ **segundos** |
| **20 x 20** | $11$ **dias** | $2 \cdot 10^{-11}$ **segundos** |
| **25 x 25** | $256$ **mil anos** | $6 \cdot 10^{-11}$ **segundos** |
| **30 x 30** | $5$ **trilhões de anos** | $2 \cdot 10^{-10}$ **segundos** |
| **1000 x 1000** | 😱 | $7 \cdot 10^{-6}$ **segundos** |

# PRELIMINARES

## Comparação para o cálculo de determinante

Pesquise sobre

**Complexidade computacional**

para saber mais!

| | | |
|---|---|---|
| | | lor moderno |
| Tamanho da ma | | scalonamento |
| 10 x 10 | | $10^{-13}$ segundos |
| 15 x 15 | $0{,}4$ segundos | $7 \cdot 10^{-12}$ segundos |
| 20 x 20 | $11$ dias | $2 \cdot 10^{-11}$ segundos |
| 25 x 25 | $256$ mil anos | $6 \cdot 10^{-11}$ segundos |
| 30 x 30 | $5$ trilhões de anos | $2 \cdot 10^{-10}$ segundos |
| 1000 x 1000 | 😱 | $7 \cdot 10^{-6}$ segundos |

# PRELIMINARES

## Comparação para o cálculo de determinante

| | | |
|---|---|---|
| | | …lor moderno |
| Tamanho da ma… | | …scalonamento |
| 10 x 10 | | $10^{-13}$ segundos |
| 15 x 15 | 0,4 segundos | $7 \cdot 10^{-12}$ segundos |
| 20 x 20 | | $10^{-11}$ segundos |
| 25 x 25 | | $10^{-11}$ segundos |
| 30 x 30 | | $10^{-10}$ segundos |
| 1000 x 1000 | 😱 | $7 \cdot 10^{-6}$ segundos |

Pesquise sobre
**Complexidade computacional**
para saber mais!

Existe um problema em aberto sobre complexidade computacional e quem resolver ganha um milhão de dólares!!! Pesquise sobre **P versus NP** para saber mais.

# RECAPITULAÇÃO

Uma matriz está na forma escalonada quando duas condições são satisfeitas:

1. Se a matriz possui linhas nulas, então elas estão nas linhas mais abaixo da matriz.

2. Entre as linhas não nulas, o número de zeros à esquerda do primeiro elemento não nulo de cada linha aumenta de cima para baixo.

# RECAPITULAÇÃO

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{0 zeros} \\ \text{2 zeros} \\ \text{4 zeros} \end{array}$$

Satisfaz condição 1? ✅
Satisfaz condição 2? ✅
Está escalonada? ✅

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Satisfaz condição 1? ❌
Satisfaz condição 2? Não importa!
Está escalonada? ❌

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{1 zero} \\ \text{2 zeros} \\ \text{3 zeros} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Satisfaz condição 1? ✅
Satisfaz condição 2? ✅
Está escalonada? ✅

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{0 zeros} \\ \text{1 zero} \\ \text{1 zero} \\ \text{3 zeros} \end{array}$$

Satisfaz condição 1? ✅
Satisfaz condição 2? ❌
Está escalonada? ❌

# RECAPITULAÇÃO

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}$$

**Pivôs**

posto(A) = 3

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Pivôs**

posto(B) = 3

$$G = \begin{bmatrix} \boxed{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Pivô**

posto(G) = 1

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Não possui pivô**

posto(E) = 0

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Pivô**

posto(F) = 1

**Posto é o número de pivôs!**

# RECAPITULAÇÃO

Matriz inicial

Operação elementar

Nova matriz

## Há três tipos de operações elementares por linhas:

**Tipo 1. Troca de linhas.**

**Tipo 2. Multiplicação de linha por escalar não nulo.**

**Tipo 3. Soma de um múltiplo de uma linha a uma outra.**

# RECAPITULAÇÃO

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \quad ? \quad -\frac{1}{2}L_3 \quad ?$$

**Rascunho 1**

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{matrix} \times 2$$

**Rascunho 2**

$$\begin{matrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} +$$

# RECAPITULAÇÃO

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} L_3$$

?

**Rascunho 1**

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{matrix} \quad \times 2$$

**Rascunho 2**

$$\begin{matrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad +$$

# RECAPITULAÇÃO

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} L_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rascunho 1**

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{matrix} \quad \times 2$$

**Rascunho 2**

$$\begin{matrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad +$$

**Rascunho 3**

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix} \quad \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

# RECAPITULAÇÃO

Encontre uma operação elementar que faça com que no resultado a entrada (2,1) seja 0.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ? \quad \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Operação tipo 1. ❌

Operação tipo 2. ❌

Operação tipo 3. 😎

# RECAPITULAÇÃO

**Encontre uma operação elementar que faça com que no resultado a entrada (2,1) seja 0.**

$$\begin{bmatrix} \colorbox{lightgreen}{2} & -2 & -1 \\ \colorbox{pink}{3} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ? \quad \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

**Operação tipo 1.** ❌
**Operação tipo 2.** ❌
**Operação tipo 3.** 😎

Operação procurada: $L_2 \leftarrow L_2 + ? \cdot L_?$

Usando a linha 1: $L_2 \leftarrow L_2 + k \cdot L_1$

Encontrando k: $3 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{2}$

Operação encontrada: $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1$

# RECAPITULAÇÃO

**Encontre uma operação elementar que faça com que no resultado a entrada (2,1) seja 0.**

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Operação tipo 1.** ❌

**Operação tipo 2.** ❌

**Operação tipo 3.** 😎

**Operação procurada:** $L_2 \leftarrow L_2 + ? \cdot L_?$

**Usando a linha 1:** $L_2 \leftarrow L_2 + k \cdot L_1$

**Encontrando k:** $3 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{2}$

**Operação encontrada:** $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1$

**Rascunho 1**

$$\begin{matrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 3/2 \end{matrix} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

**Rascunho 2**

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3/2 \\ \hline 0 & 4 & 1/2 \end{matrix} \; +$$

# ESCALONAMENTO

Escalonar uma matriz significa aplicar uma sequência de operações elementares por linhas de modo que a matriz final esteja na forma escalonada.

# ESCALONAMENTO

Escalonar uma matriz significa aplicar uma sequência de operações elementares por linhas de modo que a matriz final esteja na forma escalonada.

Matriz inicial → Operação elementar → Nova matriz

# ESCALONAMENTO

Escalonar uma matriz significa aplicar uma sequência de operações elementares por linhas de modo que a matriz final esteja na forma escalonada.

Matriz inicial → Operação elementar → Nova matriz → Operação elementar → Nova matriz

# ESCALONAMENTO

Escalonar uma matriz significa aplicar uma sequência de operações elementares por linhas de modo que a matriz final esteja na forma escalonada.

Matriz inicial → Operação elementar → Nova matriz → Operação elementar → Nova matriz → Operação elementar →

Nova matriz → Operação elementar → . . . → Operação elementar → Matriz na forma escalonada

# EXEMPLO

Escalone a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

# EXEMPLO

Escalone a matriz $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Precisamos chegar a uma matriz escalonada e essas matrizes possuem "muitos" zeros. Logo, precisamos aprender a produzir zeros!**

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Precisamos chegar a uma matriz escalonada e essas matrizes possuem "muitos" zeros. Logo, precisamos aprender a produzir zeros!

Operação tipo 1 de troca de linhas não produz novos zeros. Portanto, não será muito usada.

Operação tipo 2 que multiplica uma linha por um número diferente de 0 também não produz novos zeros.

# EXEMPLO

Escalone a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Precisamos chegar a uma matriz escalonada e essas matrizes possuem "muitos" zeros. Logo, precisamos aprender a produzir zeros!**

**Operação tipo 1 de troca de linhas não produz novos zeros. Portanto, não será muito usada.**

**Operação tipo 2 que multiplica uma linha por um número diferente de 0 também não produz novos zeros.**

**Portanto, a operação tipo 3 de somar um múltiplo de uma linha a uma outra linha será a principal ferramenta.**

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & & \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + kL_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & & \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 2 \\ \boxed{2} & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + \boxed{k} L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \boxed{0} & & \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{2} + \boxed{1} \cdot \boxed{k} = \boxed{0}$$

$$\boxed{k} = -2$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & & \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + kL_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + kL_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$-3 + 1 \cdot k = 0$$

$$k = 3$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

Escalone a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

**Usar linha 1 aqui estraga a entrada (3,1).**

$$L_3 \leftarrow L_3 + kL_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + kL_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$-5 + 3 \cdot k = 0$$

$$k = \frac{5}{3}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{5}{3}L_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{5}{3}L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -15 & 21 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -15 & 21 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$$

# EXEMPLO

**Escalone a matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -15 & 21 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Se existem infinitos caminhos possíveis para o escalonamento, como saber se minha resposta está correta?

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Se existem infinitos caminhos possíveis para o escalonamento, como saber se minha resposta está correta?

Boa pergunta! Sua resposta não precisa ser igual à do gabarito ou do seu colega para estar certa. Não existe um método para confirmar que sua resposta está certa a não ser verificando as contas. Mas existem alguns métodos que podem mostrar que a resposta está errada. Veremos um desses métodos nessa aula.

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Como saber se não vou ficar fazendo operações elementares e nunca chegar a uma matriz escalonada?

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Como saber se não vou ficar fazendo operações elementares e nunca chegar a uma matriz escalonada?

**Parte da resposta está no teorema:**
**Toda matriz pode ser escalonada.**

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Como saber se não vou ficar fazendo operações elementares e nunca chegar a uma matriz escalonada?

**Parte da resposta está no teorema:**
**Toda matriz pode ser escalonada.**

**A segunda parte da resposta é que você não pode escolher as operações elementares aleatoriamente. Deve escolher as operações com objetivos bem definidos.**

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Como saber se não vou ficar fazendo operações elementares e nunca chegar a uma matriz escalonada?

**Parte da resposta está no teorema:**
**Toda matriz pode ser escalonada.**

**A segunda parte da resposta é que você não pode escolher as operações elementares aleatoriamente. Deve escolher as operações com objetivos bem definidos.**

**Pergunta.** Como saber se estou no caminho certo? Existe alguma "receita de bolo" para o escalonamento?

# PERGUNTAS

**Pergunta.** Como saber se não vou ficar fazendo operações elementares e nunca chegar a uma matriz escalonada?

Parte da resposta está no teorema:
Toda matriz pode ser escalonada.

A segunda parte da resposta é que você não pode escolher as operações elementares aleatoriamente. Deve escolher as operações com objetivos bem definidos.

**Pergunta.** Como saber se estou no caminho certo? Existe alguma "receita de bolo" para o escalonamento?

Existe sim uma receita de bolo, que chamamos de algoritmo do escalonamento. Uma lista de passos que funciona em todos os casos.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 1.** Olhe para a primeira coluna da matriz.

**Caso 1.** Se ela for nula, reinicie este passo como se a primeira coluna não existisse.

**Caso 2.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for diferente de 0, siga para o passo 2.

**Caso 2.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for igual a 0, troque linhas para que sua primeira entrada fique diferente de 0 e siga para o passo 2.

**Caso 1**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Repita o passo 1 como se a coluna de zeros não existisse.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 1.** Olhe para a primeira coluna da matriz.

**Caso 1.** Se ela for nula, reinicie este passo como se a primeira coluna não existisse.

**Caso 2.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for diferente de 0, siga para o passo 2.

**Caso 2.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for igual a 0, troque linhas para que sua primeira entrada fique diferente de 0 e siga para o passo 2.

### Caso 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Repita o passo 1 como se a coluna de zeros não existisse.**

### Caso 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Vá para o passo 2.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 1.** Olhe para a primeira coluna da matriz.

**Caso 1.** Se ela for nula, reinicie este passo como se a primeira coluna não existisse.

**Caso 2.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for diferente de 0, siga para o passo 2.

**Caso 3.** Se ela não for nula e sua primeira entrada for igual a 0, troque linhas para que sua primeira entrada fique diferente de 0 e siga para o passo 2.

## Caso 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Repita o passo 1 como se a coluna de zeros não existisse.**

## Caso 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Vá para o passo 2.**

## Caso 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Faça $L_1 \leftrightarrow L_2$ ou $L_1 \leftrightarrow L_4$ e vá para o passo 2.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 2.** Aplique operações do tipo 3 para fazer com que todos os elementos da primeira coluna fiquem iguais a 0, exceto o primeiro. Depois siga para o passo 3.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 2.** Aplique operações do tipo 3 para fazer com que todos os elementos da primeira coluna fiquem iguais a 0, exceto o primeiro. Depois siga para o passo 3.

**Exemplo 1.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Devem ser transformados em 0.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 2.** Aplique operações do tipo 3 para fazer com que todos os elementos da primeira coluna fiquem iguais a 0, exceto o primeiro. Depois siga para o passo 3.

**Exemplo 1.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2.**

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & -1 \\ \boxed{4} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{3}L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

**Deve ser transformado em 0.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

Passo 2 feito de forma compactada

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & 2 \\ \boxed{2} & -2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Devem ser transformados em 0.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 2 feito de forma compactada**

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

Devem ser transformados em 0.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

## Passo 2 feito de forma compactada

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & 2 \\ \boxed{2} & -2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Devem ser transformados em 0.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 3.** Reinicie o passo 1 fazendo de conta que a primeira linha e primeira coluna não existem.

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 3.** Reinicie o passo 1 fazendo de conta que a primeira linha e primeira coluna não existem.

**Exemplos.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Faça de conta que a região em vermelho não existe e reinicie o processo com a região em verde.**

# O ALGORITMO DO ESCALONAMENTO

**Passo 3.** Reinicie o passo 1 fazendo de conta que a primeira linha e primeira coluna não existem.

**Exemplos.**

Neste caso, a matriz em verde é uma matriz linha, então o escalonamento acaba aqui.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Faça de conta que a região em vermelho não existe e reinicie o processo com a região em verde.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 1: fazer de conta que a coluna nula não existe e reiniciar.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 2: não precisamos trocar linhas e podemos ir para o passo 2.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \frac{2}{3}L_3$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \tfrac{2}{3}L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \frac{2}{3}L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde. Como é uma matriz linha, paramos aqui.**

# EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \tfrac{2}{3}L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 2: não precisamos trocar linhas e podemos ir para o passo 2.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 3: devemos trocar linhas!**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & \boxed{-12} & 16 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

Escalone a matriz abaixo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 2: não precisamos trocar linhas e podemos ir para o passo 2.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + 11L_3$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 11L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + 11L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde. Como é uma matriz linha, paramos aqui.**

# EXERCÍCIO

**Escalone a matriz abaixo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 12 & 4 & -41 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -12 & 16 & -77 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 22 & -77 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + 11L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

Escalone as matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 2: não precisamos trocar linhas e podemos ir para o passo 2.**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

## Escalone as matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

## Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Passo 3: reiniciar ignorando a parte em vermelho, fazendo de conta que a matriz é apenas a parte em verde.**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Passo 1, caso 2: não precisamos trocar linhas e podemos ir para o passo 2.**

# EXERCÍCIO

## Escalone as matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

## Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

**Passo 2: transformar em zero.**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# EXERCÍCIO

## Escalone as matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

## Solução.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

**Matrizes D e E já estão na forma escalonada!**

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# EXERCÍCIO

**Escalone as matrizes abaixo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Escalonamento finalizado!** 🙌

# ALERTAS E CONSELHOS

**Cada operação elementar exige pequenas contas. Mantenha atenção e concentração para evitar pequenos errinhos.**

# ALERTAS E CONSELHOS

**Cada operação elementar exige pequenas contas. Mantenha atenção e concentração para evitar pequenos errinhos.**

**O escalonamento é injusto com nossos erros. Se você errar no início, precisa refazer praticamente tudo.** 😫

# ALERTAS E CONSELHOS

Cada operação elementar exige pequenas contas. Mantenha atenção e concentração para evitar pequenos errinhos.

O escalonamento é injusto com nossos erros. Se você errar no início, precisa refazer praticamente tudo. 😫

Muitos erros são cometidos ao copiar errado as entradas que não são alteradas em uma etapa. Confira isso também!

# ALERTAS E CONSELHOS

Cada operação elementar exige pequenas contas. Mantenha atenção e concentração para evitar pequenos errinhos.

O escalonamento é injusto com nossos erros. Se você errar no início, precisa refazer praticamente tudo. 😫

Muitos erros são cometidos ao copiar errado as entradas que não são alteradas em uma etapa. Confira isso também!

Uma estratégia é identificar o que não será alterado e copiar primeiro. Depois fazer as contas em um rascunho das novas linhas para depois colocá-las na nova matriz.

# POSTO DE UMA MATRIZ

**Lembra que já definimos posto de uma matriz na forma escalonada? É só contar o número de pivôs.**

# POSTO DE UMA MATRIZ

Lembra que já definimos posto de uma matriz na forma escalonada? É só contar o número de pivôs.

Agora vamos definir o que é o posto de uma matriz qualquer, estando ela escalonada ou não.

# POSTO DE UMA MATRIZ

Lembra que já definimos posto de uma matriz na forma escalonada? É só contar o número de pivôs.

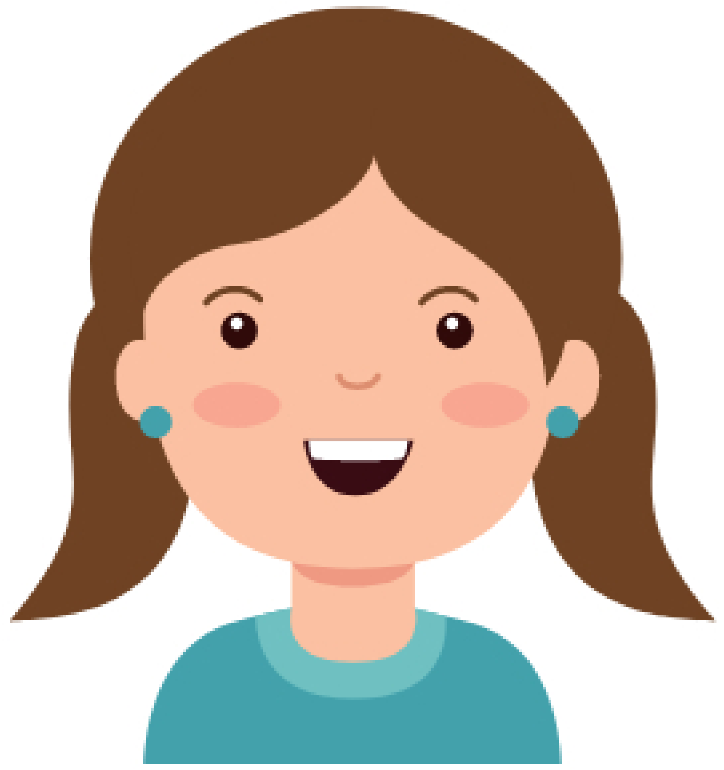
Agora vamos definir o que é o posto de uma matriz qualquer, estando ela escalonada ou não.

**Precisamos de um teorema:**

**Independentemente do caminho escolhido no escalonamento de uma matriz A, o posto da matriz escalonada é sempre o mesmo.**

# POSTO DE UMA MATRIZ

**Exemplo.** Alda escalonou a matriz A e chegou à matriz Ã. María também escalonou a matriz A e chegou à matriz Â. O teorema diz que Ã e Â possuem o mesmo posto.



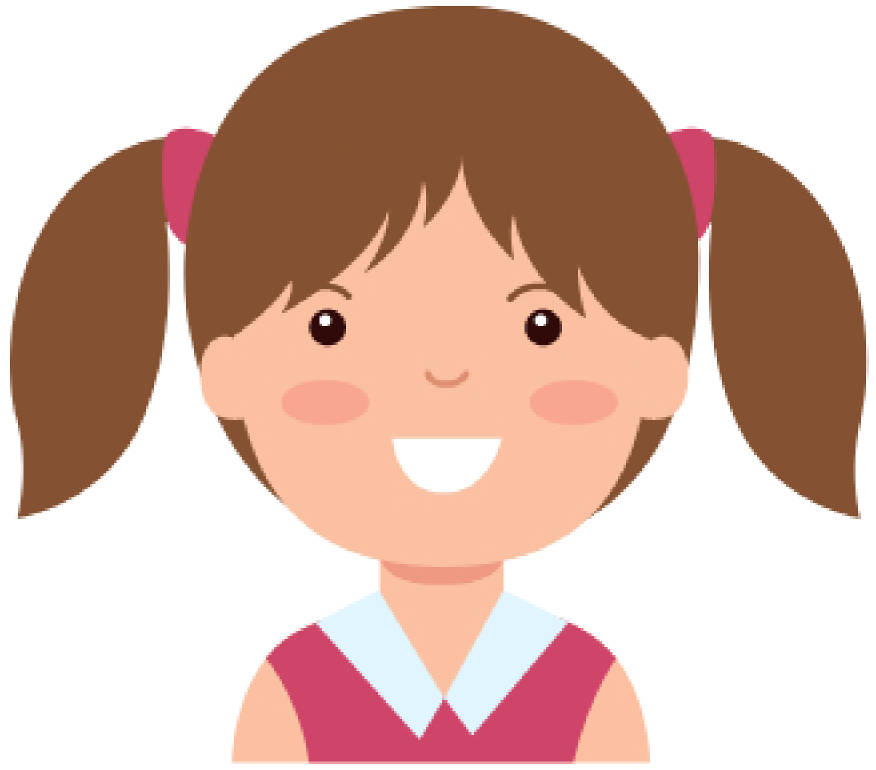
Matriz A

**Escalonamento da Alda**

Matriz Ã

Teorema:

posto(Ã) = posto(Â)



Matriz A

**Escalonamento da María**

Matriz Â

# POSTO DE UMA MATRIZ

**Definição.** O posto de uma matriz qualquer é definido como o posto da matriz obtida após o processo de escalonamento (qualquer um).

# POSTO DE UMA MATRIZ

**Definição.** O posto de uma matriz qualquer é definido como o posto da matriz obtida após o processo de escalonamento (qualquer um).

**Exemplo.** Já vimos o escalonamento dessa matriz F nessa aula.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# POSTO DE UMA MATRIZ

**Definição.** O posto de uma matriz qualquer é definido como o posto da matriz obtida após o processo de escalonamento (qualquer um).

**Exemplo.** Já vimos o escalonamento dessa matriz F nessa aula.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivôs

Portanto, posto(F) = 2.

# EQUIVALÊNCIA POR LINHAS

**Definição.** Dizemos que duas matrizes A e B são **equivalentes por linhas** se é possível aplicar uma sequência de operações elementares por linhas a uma delas e obter a outra.

# EQUIVALÊNCIA POR LINHAS

**Definição.** Dizemos que duas matrizes A e B são **equivalentes por linhas** se é possível aplicar uma sequência de operações elementares por linhas a uma delas e obter a outra.

**Exemplo.** Todas as matrizes que aparecem durante o escalonamento de uma matriz são equivalentes por linhas entre si.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}}$$

# EQUIVALÊNCIA POR LINHAS

**Definição.** **Dizemos que duas matrizes A e B são equivalentes por linhas se é possível aplicar uma sequência de operações elementares por linhas a uma delas e obter a outra.**

**Exemplo.** **Todas as matrizes que aparecem durante o escalonamento de uma matriz são equivalentes por linhas entre si.**

$$\overset{\mathbf{A}}{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \overset{\tilde{\mathbf{A}}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \overset{\hat{\mathbf{A}}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

**A e Ã são equivalentes por linhas.**
**A e Â são equivalentes por linhas.**
**Ã e Â são equivalentes por linhas.**

# EXERCÍCIOS PARA FILOSOFAR

Mostre que se existe uma sequência de operações elementares que transformam A em B, então existe uma sequência que transforma B em A.

Mostre que se A e B são equivalentes por linhas e B e C também são equivalentes por linhas, então A e C também são equivalentes por linhas.

# Fim!

**A lista de exercícios está esperando sua visita.**