MTM3111 e MTM5512 - Geometria Analítica

Lista de exercícios 5.6 - Rotação de curvas cônicas

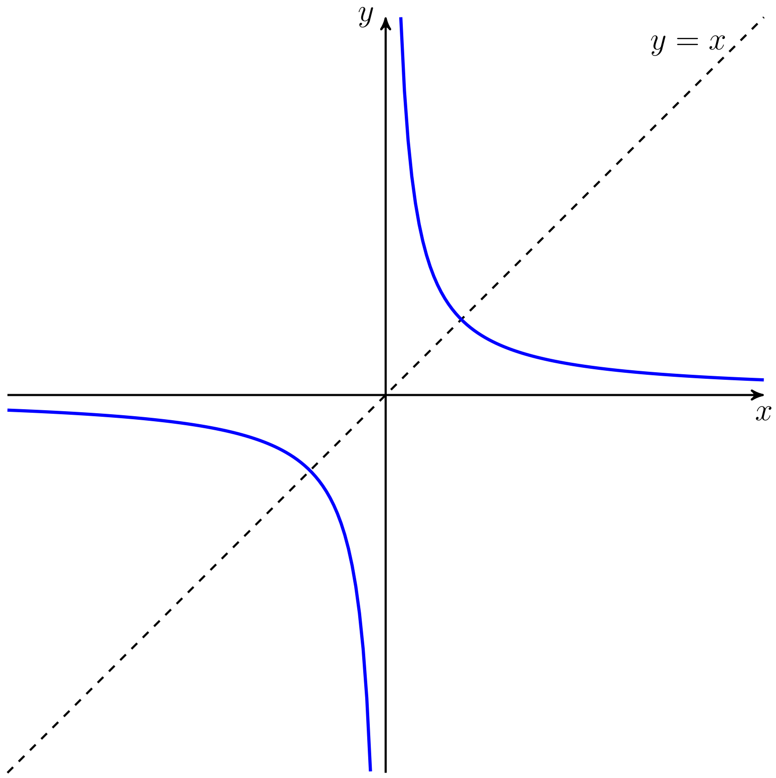
Semana 13

Última atualização: 8 de março de 2021.

Conforme comentado no final da lista de exercícios complementar da seção 5, o estudo de cônicas pode ser resumido como o estudo das equações da forma

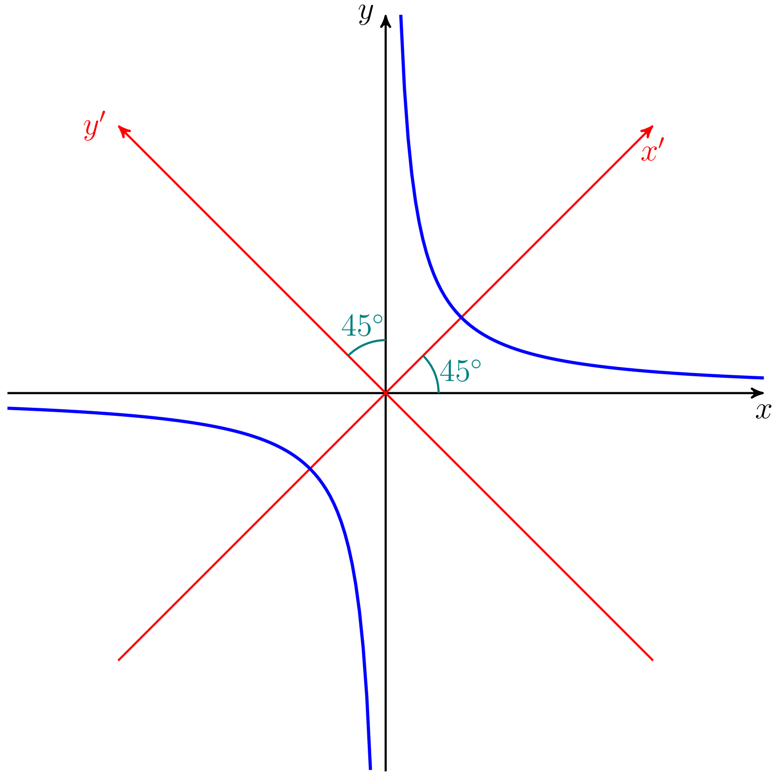
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

O que fizemos na seção 5 foi entender completamente como se comportam essas equações quando $C = 0$. O caso $C \neq 0$ exige um pouco mais de trabalho. Em resumo, os gráficos continuam sendo como os que vimos na seção 5, o que muda é que os eixos de simetria não são mais paralelos aos eixos coordenados. Por exemplo, $xy = 1$ tem como gráfico uma hipérbole em que seu eixo real é a reta $y = x$ (veja figura abaixo).



O processo para reconhecer o tipo de gráfico quando $C \neq 0$ é chamado de *rotação de uma cônica* e o estudaremos nesta lista de exercícios.

Quando temos uma equação do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ com $C \neq 0$ e queremos identificar a cônica ou fazer o seu gráfico, usando tudo o que já sabemos quando os eixos de simetria são paralelos aos eixos coordenados, uma estratégia é rodar os eixos coordenados para encontrar novos eixos, que denotaremos por x' e y', de modo que os eixos de simetria da cônica em questão sejam paralelos a estes novos eixos coordenados (veja na figura abaixo novos eixos x' e y' obtidos através de uma rotação de $45°$ dos eixos x e y).



Um processo semelhante a este foi o que fizemos quando transladamos os eixos coordenados para estudar cônicas que não estavam centradas na origem.

Neste material apresentaremos um roteiro de como proceder em situações como a descrita acima, sem explicar por que as coisas são feitas dessa forma. Se você tem interesse em entender as razões do por que as contas são feitas da forma que apresentaremos, sugerimos que você consulte a seção "Rotação de eixos" do livro "Geometria Analítica - Bezerra, L. H., Costa e Silva" (segunda referência da seção Material Complementar - Livros digitais).

De forma muito resumida, para trabalharmos com cônicas que possuem $C \neq 0$ procedemos da seguinte forma:

(i) Encontramos um ângulo θ tal que, ao rotacionarmos os eixos coordenados de um ângulo θ no sentido anti-horário, os eixos de simetria da cônica fiquem paralelos a estes novos eixos.

(ii) Reescrevemos a equação da cônica nesse novo sistema de coordenadas; para isso precisamos escrever as coordenadas de um ponto (x, y) em função dos novos eixos x' e y'.

(iii) Substituímos na equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F = 0$ o x e o y pelas equações obtidas no item anterior. Ao fazermos isso, obteremos uma nova equação nas variáveis x' e y'. Esta nova equação representa a mesma cônica e como a cônica tem eixos paralelos a estes novos eixos coordenados, então o coeficiente de $x'y'$ será necessariamente zero.

(iv) Através de alguns cálculos encontramos os coeficientes A', B', D', E' e F' da nova equação $A'(x')^2 + B'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$. Com a equação nesse formato, basta usar o conteúdo já aprendido na seção 5 usando x' e y' como eixos.

Ao seguir as quatro etapas acima, obtemos fórmulas para o ângulo de rotação e para os coeficientes da nova equação. Para o ângulo θ, há dois casos a considerar:

(a) Se $A = B$, então $\theta = 45°$.

(b) Se $A \neq B$, então θ é o ângulo tal que $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{C}{A-B}$.

Uma vez encontrado θ, devemos encontrar os novos coeficientes A', B', D', E' e F' conforme expressões abaixo:

(a) $A' = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}^2\,\theta + C\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$;

(b) $B' = A\,\mathrm{sen}^2\,\theta + B\cos^2\theta - C\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$;

(c) $C' = 2(B-A)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta)$;

(d) $D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$;

(e) $E' = E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta$;

(f) $F' = F$.

Importante! As fórmulas acima são válidas para qualquer ângulo de rotação θ. Porém, quando escolhemos θ conforme a primeira etapa acima, necessariamente $C' = 0$. Assim, caso você tenha encontrado θ como na primeira etapa e o cálculo de C' não deu zero, então há algum erro nas suas contas.

De posse dos novos coeficientes, basta analisar a cônica representada pela equação

$$A'(x')^2 + B'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

usando tudo o que aprendemos na seção 5.

Vejamos como aplicar esses procedimento nos dois exemplos abaixo.

Exemplo 1. Identifique e faça o gráfico da cônica determinada pela equação $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4 = 0$.

Começamos identificando os coeficientes: $A = 3$, $B = 3$, $C = 2$, $D = E = 0$ e $F = -4$. Logo, $A = B$ e o ângulo procurado é $\theta = 45°$.

Agora vamos calcular os coeficientes A', B', C', D', E' e F':

(a) $A' = A\cos^2(45°) + B\,\mathrm{sen}^2(45°) + C\cos(45°)\,\mathrm{sen}(45°) = 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4$;

(b) $B' = A\,\mathrm{sen}^2(45°) + B\cos^2(45°) - C\cos(45°)\,\mathrm{sen}(45°) = 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$;

(c) $C' = 2(B-A)\cos(45°)\,\mathrm{sen}(45°) + C(\cos^2(45°) - \mathrm{sen}^2(45°)) = 2 \times 0 \times \cos(45°)\,\mathrm{sen}(45°) + 2 \times 0 = 0$;

(d) $D' = D\cos(45°) + E\,\mathrm{sen}(45°) = 0 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$;

(e) $E' = E\cos(45°) - D\,\mathrm{sen}(45°) = 0 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$;

(f) $F' = F = -4$.

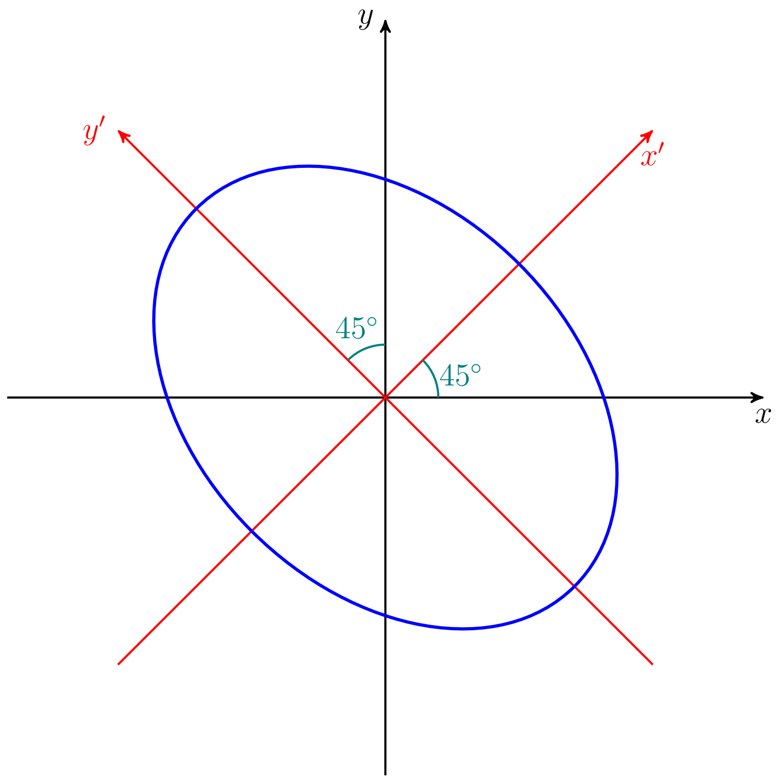
Portanto, a equação da cônica com respeito aos eixos coordenados x' e y' (que neste caso são os eixos x e y rotacionados de 45° no sentido anti-horário) é

$$4(x')^2 + 2(y')^2 - 4 = 0,$$

ou seja,

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Esta cônica é uma elipse, com eixo maior sobre ao eixo y', eixo menor paralelo sobre o eixo x', semieixo maior com comprimento $\sqrt{2}$, semieixo menor com comprimento 1, ou seja, $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, e centro na origem do sistema de coordenadas x' e y' (veja gráfico abaixo).



Exemplo 2. Identifique e faça o gráfico da cônica determinada pela equação $3x^2 + y^2 + -2\sqrt{3}xy + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$.

Começamos identificando os coeficientes: $A = 3$, $B = 1$, $C = -2\sqrt{3}$, $D = 2$, $E = 2\sqrt{3}$ e $F = 0$. Logo, $B \neq A$ e o ângulo procurado é o ângulo θ tal que

$$\mathrm{tg}(2\theta) = \frac{C}{A-B} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Portanto, $2\theta = 120°$, então $\theta = 60°$.

Agora vamos calcular os coeficientes A', B', C', D', E' e F':

(a) $A' = A\cos^2(60°) + B\,\mathrm{sen}^2(60°) + C\cos(60°)\,\mathrm{sen}(60°) = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;

(b) $B' = A\,\text{sen}^2(60^\circ) + B\cos^2(60^\circ) - C\cos(60^\circ)\,\text{sen}(60^\circ) = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2\sqrt{3}) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4;$

(c) $C' = 2(B - A)\cos(60^\circ)\,\text{sen}(60^\circ) + C(\cos^2(60^\circ) - \text{sen}^2(60^\circ)) = 2 \times (1 - 3) \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = 0;$

(d) $D' = D\cos(60^\circ) + E\,\text{sen}(60^\circ) = 2 \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4;$

(e) $E' = E\cos(60^\circ) - D\,\text{sen}(60^\circ) = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$

(f) $F' = F = 0.$

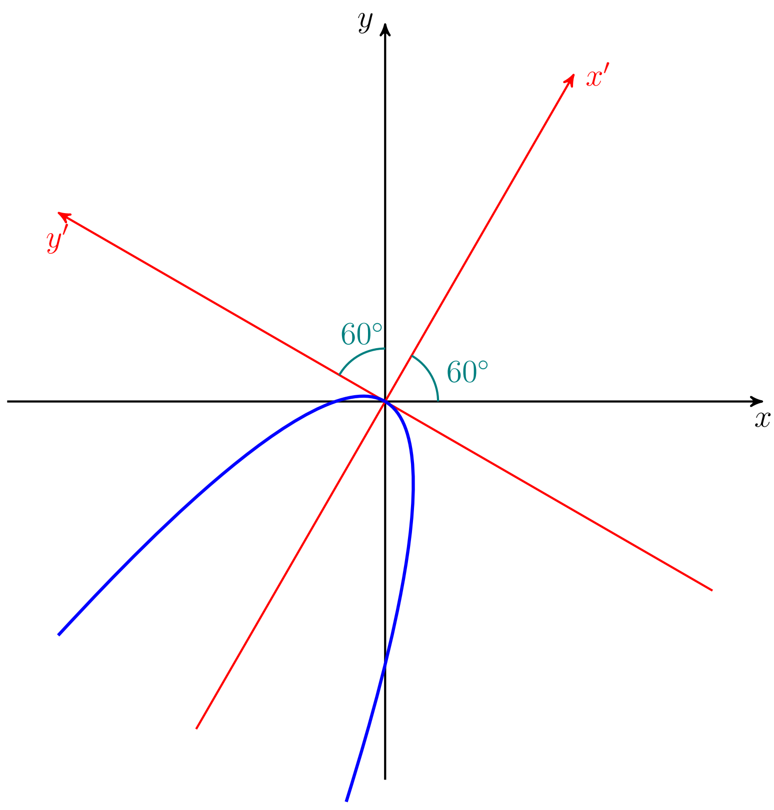
Portanto, a equação da cônica com respeito aos eixos coordenados x' e y' (que neste caso são os eixos x e y rotacionados de 60° no sentido anti-horário) é

$$4(y')^2 + 4x' = 0,$$

ou seja,

$$(y')^2 = -x'.$$

Esta cônica é uma parábola, com eixo de simetria sobre o eixo x', $p = -\frac{1}{2}$, reta diretriz $x' = \frac{1}{4}$, foco $F = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ (coordenadas com relação ao sistema de coordenadas x' e y'), e vértice na origem do sistema de coordenadas x' e y' (que coincide com a origem do sistema de coordenadas x e y).



Agora é a sua vez!

1. Identifique e faça o gráfico das cônicas determinadas pelas equações abaixo.

(a) $21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy = 144.$

(b) $2xy = 1.$

(c) $x^2 + y^2 - xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0.$