Prolegômenos

Prof^{a} Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

Conjuntos

- **Conjunto**: coleção de objetos, números, símbolos ou outros conjuntos
  - $L = \{a, b, c, d\}$
  - $C = \{amarelo, vermelho, azul\}$
- Os objetos que constituem um conjunto são chamados **elementos** ou **membros**
  - $b \in L$
  - $vermelho \in C$
  - $z \notin L$

Conjuntos

- **Igualdade entre conjuntos**: dois conjuntos são iguais sse contiverem os mesmos elementos.
  obs.: elementos repetidos ou ordens distintas são irrelevantes.
  - $\{3, 9, 1\} = \{9, 3, 1\} = \{1, 3, 9\}$
  - $\{vermelho, azul, vermelho\} = \{vermelho, azul\}$
- Os elementos de um conjunto não precisam estar relacionados
  - {3, vermelho, {d, azul}}

Conjuntos

- **Conjunto Unitário**: conjunto que possui apenas 1 elemento.
  - $\{1\}$ - conjunto que possui apenas o número 1 como elemento.
  - $\{1\} \neq 1$
- **Conjunto Vazio**: conjunto que não possui elementos
  - o conjunto vazio é notado por $\emptyset$ ou $\{\}$
- Os conjuntos podem ser **finitos** ou **infinitos**
  - $\{a, b, c, d, e, ..., z\}$
  - $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

Conjuntos

- Por vezes é interessante representar um conjunto pelas características comuns aos seus membros. Então, faz-se referência a outros conjuntos e as propriedades que os seus elementos podem ou não apresentar.

$$B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \text{ tem a propriedade } P\}$$

  - $Turma\_de\_TC = \{x \mid x \text{ matriculado em INE5415}\}$
  - $Pares = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é divisível por } 2\}$

Conjuntos

- Um conjunto B é um **subconjunto** de A (notado $B \subseteq A$) se cada elemento de B também é um elemento de A
  obs.: Qualquer conjunto é subconjunto dele próprio. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
  - $Pares \subseteq \mathbb{N}$
- Se B é um subconjunto de A, mas existe um elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$, diz-se que B é um **subconjunto próprio** de A (notado $B \subset A$)
- Se dois conjuntos A e B são iguais, então $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
- Dois conjuntos são **disjuntos** se não tiverem elementos em comum ($A \cap B = \emptyset$).

Operações sobre Conjuntos

- **União**: de dois conjuntos é o agrupamento que tem como elementos os objetos que são os mesmos de, pelo menos, um dos dois conjuntos e, possivelmente de ambos

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

  - $\{1, 3, 9\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Operações sobre Conjuntos

- **Intersecção**: de dois conjuntos é a coleção de todos os elementos que são comuns aos dois conjuntos

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

  - $\{1, 3, 9\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3\}$
  - $\{1, 3, 9\} \cap \{a, b, c, d\} = \emptyset$

Operações sobre Conjuntos

- **União de mais de dois conjuntos**: $\bigcup S$ onde S é qualquer coleção de conjuntos

$$\bigcup S = \{x \mid x \in P \text{ para algum conjunto } P \in S\}$$

  - $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \bigcup S = \{a, b, c, d\}$
  - $S = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \bigcup S = \mathbb{N}$

- **Intersecção de mais de dois conjuntos**:

$$\bigcap S = \{x \mid x \in P \text{ para todo conjunto } P \in S\}$$

  - $S = \{\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \bigcap S = \{c\}$
  - $S = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \bigcap S = \emptyset$

Operações sobre Conjuntos

- **Diferença**: de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos de A que não são elementos de B

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

  - $\{1,3,9\} - \{3,5,7\} = \{1,9\}$
  - $\{1,3,9\} - \{1,3,9\} = \emptyset$

Operações sobre Conjuntos

- **Conjunto das Partes** ou **Conjunto Potência**: é a coleção de todos os subconjuntos de um conjunto A, denotado 2^A ou $\mathcal{P}(A)$
  - $2^{\{c,d\}} = \{\{c,d\},\{c\},\{d\},\emptyset\}$
  - $2^{\{a,b,c\}} = \{\{a,b,c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a\},\{b\},\{c\},\emptyset\}$
- **Partição**: é um subconjunto Π de 2^A, tal que $\emptyset$ não é um elemento de Π e tal que cada elemento de A está em um e somente um conjunto de Π.
  - $A = \{a,b,c,d\} \Rightarrow \Pi = \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$
  - $A = \{azul, verde, roxo\} \Rightarrow \Pi = \{\{azul\},\{verde\},\{roxo\}\}$

  obs.: $\bigcup \Pi = A$

Propriedades das Operações

- Idempotência

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Associatividade

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propriedades das Operações

- Distributividade

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- Absorção

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

- Leis de DeMorgan

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Sequências e Tuplas

- Relações: $>$, $<$, $=$... (entre números)
- Como expressar relações entre objetos usando conjuntos??
  - Diremos que, p.e. a relação menor ($<$) será o conjunto de todos os pares de números tal que o 1^o número seja menor que o 2^o
  - Problema: Não há distinção entre os conjuntos $\{2, 3\}$ e $\{3, 2\}$
- Nova forma de agrupar objetos: **Sequências**
  - Uma **sequência** de objetos é uma lista destes objetos em alguma ordem
  - A lista é descrita entre parênteses
  - Ao contrário dos conjuntos, a ordem e a repetição dos elementos importa
  - Assim como os conjuntos, uma sequência pode ser finita ou infinita

Sequências e Tuplas

- Sequências finitas são chamadas **Tuplas**
  - uma sequência com k elementos é chamada k-tupla
    - para cada $i = 1, ..., k$, x_i é o i-ésimo componente da tupla $(x_1, ..., x_k)$
    - 2-tupla - par ordenado
    - 3-tupla - triplo ordenado
    - 4-tupla - quádruplo ordenado
    - ...

Sequências e Tuplas

- o **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, denotado $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$
  - $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$
  - $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- o **produto cartesiano** de k conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$, notado $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ resulta no conjunto de todas as k-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_k)$ onde $x_i \in A_i$
  - $A \times B \times A = \{(a, 1, a), (a, 1, b), (a, 1, c), (a, 2, a), ...(c, 2, c)\}$

Sequências e Tuplas

- Abrevia-se a notação do produto cartesiano de um mesmo conjunto k vezes, como:

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{k}} = A^k$$

- Exemplo:
  - O conjunto resultante de $\mathbb{N}^2$, ou seja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consiste em todos os pares ordenados de números naturais, ou seja

$$\{(i, j) \mid i, j \geq 0\}$$

Relações

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **Relação** (binária) R de A em B é um subconjunto de um produto cartesiano $A \times B$, ou seja:

$$R \subseteq A \times B$$

  onde:

  - A é denominado **domínio** ou **origem** de R
  - B é denominado **contradomínio** ou **destino** de R

- Uma relação também pode ser denotada $R : A \mapsto B$ e um elemento $(a, b) \in R$ pode ser denotado como

$$aRb$$

Relações

- Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$
  - $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
  - A Relação "menor que" definida de A em B contém os seguintes elementos

$$R_{menor\ que} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Relações

- **Endorrelação**: Seja A um conjunto. Uma relação $R : A \mapsto A$ é dita uma Endorrelação, ou seja, o domínio e o contradomíno de R são iguais
- Notação

$$(A, R)$$

Relações

- Seja (A, R), define-se:
  - **Relação Conexa**: se para todo $a, b \in A$, vale que aRb ou bRa ou $a = b$
  - **Relação Reflexiva**: se para todo $a \in A$, vale que aRa
  - **Simétrica**: se para todo $a, b \in A$, caso aRb então bRa
  - **Anti-Simétrica**: se para todo $a, b \in A$, caso aRb e bRa, então $a = b$
  - **Transitiva**: se para todo $a, b, c \in A$, caso aRb e bRc então aRc

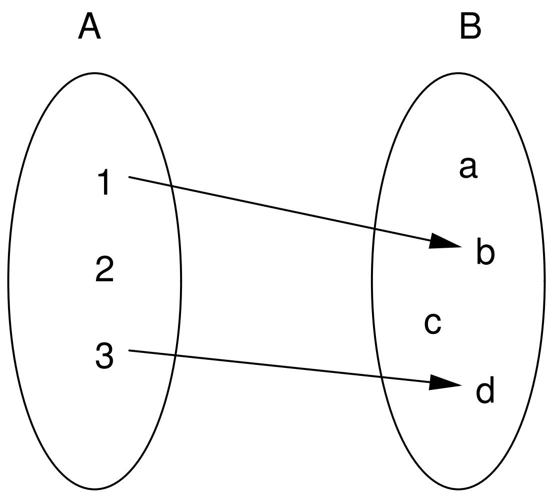
Funções

- **Função Parcial**: uma função parcial é uma relação $f \subseteq A \times B$ tal que se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, então $b = c$
  - ou seja, uma função parcial é uma relação na qual cada elemento do domínio está relacionado com, no máximo, um elemento do contradomínio.
- $(a, b) \in f$ é usualmente denotado por $f(a) = b$
- Assim como nas relações
  - A é o **domínio** de f
  - B é o **contra domínio** de f
  - $f(a) = b$ é a **imagem** de a sob f
  - O conjunto formado pelo mapeamento de cada elemento $a \in A$ é chamado **conjunto imagem**

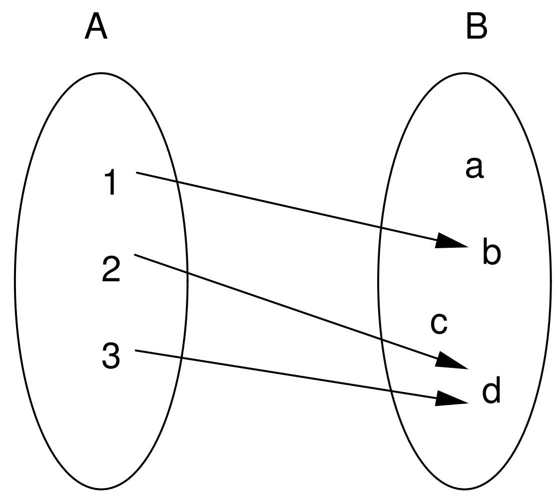
Funções

- **Função Total**: uma função total, ou simplesmente função, é uma função parcial $f : A \mapsto B$ onde para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$
- Exemplo:
  - C = conjunto de cidades e E = conjunto de estados
    - $R_1 = \{(x, y) \mid x \in C$ e $y \in E$ e x é uma cidade no estado $y\}$ é uma função, uma vez que cada cidade está em um e somente um estado
    - $R_2 = \{(x, y) \mid x \in E$ e $y \in C$ e y é uma cidade no estado $x\}$ não é uma função, pois a maioria dos estados possui mais de uma cidade

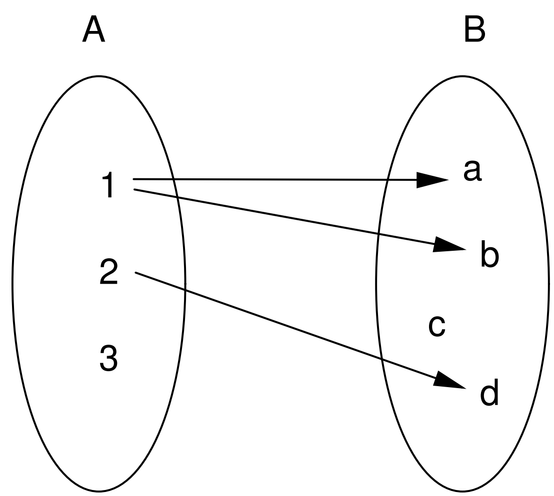
Funções



Função Parcial



Função Total



Não é função

Funções

- Outros exemplos:
  - $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x^2$
    - $\mathbb{N}$ é o conjunto domínio e o conjunto contra domínio
    - $(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),...,(n,n^2),...$ são os pares ordenados resultantes da função
  - $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tal que $f(x,y) = x + y$
    - $\{(1,1),(1,2),...(1,9),...,(2,1),...\}$ é o conjunto domínio
    - $\mathbb{N}$ é o conjunto contra domínio
    - $((1,1),2),((1,2),3),...)$ são os pares ordenados resultantes da função

Funções

- quando o domínio de uma função é uma k-tupla, cada elemento da k-tupla é chamado **argumento** da função.
- uma função com k argumentos é chamada função k-ária
  - para $k = 1$ - função unária
  - para $k = 2$ - função binária
  - para $k = 3$ - função ternária

Funções

- Uma função $f : A \mapsto B$ é dita **injetora** se, para quaisquer dois elementos distintos $a, a' \in A$, $f(a) \neq f(a')$
  - Exemplo
    - C = conjunto de cidades e E = conjunto de estados e $g : E \mapsto C$ tal que $g(e) =$ a capital do estado e
    - g é injetora uma vez que não há dois estados com a mesma capital
- ou seja, se cada elemento do contra domínio é imagem de, no máximo, um elemento do domínio

Funções

- Uma função $f : A \mapsto B$ é dita **sobrejetora** se todo elemento de B é a imagem, sob f, de algum elemento de A
  - Exemplo
    - $R_1 = \{(x, y) \mid x \in C$ e $y \in E$ e x é uma cidade no estado $y\}$
    - R_1 é sobrejetora pois cada estado possui, pelo menos, uma cidade
- ou seja, se para todo $b \in B$, existe pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$

Funções

- Uma função é dita **bijetora** se for simultaneamente injetora e sobrejetora.
  - Exemplo
    - C_0 é o conjunto de todas as cidades capitais de estado
    - $g : E \mapsto C_0$ onde $g(e) =$ a capital do estado e

Alfabetos e Linguagens

- um **alfabeto** (Σ) é um conjunto finito e não vazio de **símbolos.**
  - $\Sigma = \{0, 1\} \Rightarrow$ alfabeto binário
  - $\Sigma = \{a, b, ..., z\} \Rightarrow$ alfabeto latino (letras minúsculas)
  - $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, ..., \omega\} \Rightarrow$ alfabeto grego

Alfabetos e Linguagens

- uma **palavra** ou **cadeia** sobre um alfabeto Σ é uma sequência finita de símbolos desse alfabeto.
  - $w = 010101111$, $w = 0001$, $w = 10011100$
  - $w = auladelinguagensformais$
  - $w = \gamma\alpha\iota\theta\sigma$
- uma **cadeia vazia** (denotada por ε) é uma cadeia que não contém nenhum símbolo.
  - a cadeia vazia é palavra de qualquer alfabeto.

Alfabetos e Linguagens

- O **comprimento** de uma cadeia w é notado por $|w|$ e é igual ao número de símbolos da sequência.
  - $|010101111| = 9$
  - $|auladelinguagensformais| = 23$
  - $|\varepsilon| = 0$

Alfabetos e Linguagens

- O conjunto de todas as cadeias sobre um alfabeto Σ com comprimento k é notado Σ^k
  - $\{0,1\}^1 = \{0,1\}$
  - $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- O conjunto de todas as cadeias sobre um alfabeto Σ, incluindo a cadeia vazia ε, é denotado por $\Sigma^\star$ (**Fechamento de Kleene**)

$$\Sigma^\star = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup ...$$

- O conjunto de todas as cadeias sobre um alfabeto Σ, sem a cadeia vazia ε, é denotado por Σ^+ (**Fechamento positivo**)

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup ...$$

Alfabetos e Linguagens

- A operação de **concatenação** combina duas cadeias para formar uma terceira (notado por $w.v$ ou wv)
  - $\varepsilon.w = w.\varepsilon = w$
  - $w = 011$, $v = 110$, $wv = 011110$, $vw = 110011$
- Uma cadeia v é uma **subcadeia** de w sse houver cadeias x e y tais que $w = xvy$ onde, tanto x quanto y podem ser ε
  - ε é subcadeia de qualquer cadeia
  - a cadeia é subcadeia de si própria
- **sufixo** e **prefixo** de cadeias

Alfabetos e Linguagens

- Para cada cadeia w e para cada número natural i, a cadeia w^i é definida como:

$$w^0 = \varepsilon$$

$$w^{i+1} = w^i.w$$

  - $w = a$, $w^2 = aa$
  - $w = do$, $w^3 = dododo$

Alfabetos e Linguagens

- O **reverso** de uma cadeia w, denotado por w^R, é a cadeia w "escrita às avessas"
  - $reverse^R = esrever$
- Curiosidade: palavras ou frases que podem ser lidas tanto da direita para a esquerda quanto da esquerda para a direita são chamadas *palíndromos*
  - ana
  - ah livre era papai noel, leon ia papar é ervilha
  - a mala nada na lama

Alfabetos e Linguagens

- Uma **linguagem** é qualquer conjunto de cadeias sobre um alfabeto Σ, ou seja, qualquer subconjunto de $\Sigma^\star$
  - São exemplos de linguagens:
    - a linguagem formada por todas as palavras consistindo de n 0's seguidos por n 1's, para algum $n \geq 0 : \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, ...\}$
    - o conjunto de palavras com o mesmo número de 0's e 1's: $\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 1100, 0101, 1010, 0110, 1001, ...\}$
    - O conjunto de números binários cujo valor decimal é um primo: $\{10, 11, 101, 111, 1011, ...\}$
    - $\Sigma^\star$ é uma linguagem para qualquer alfabeto Σ
    - $\emptyset$, a linguagem vazia, é uma linguagem sobre qualquer alfabeto
    - $\{\varepsilon\}$, a linguagem consistindo da palavra vazia, é uma linguagem sobre qualquer alfabeto. Note que: $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$

Alfabetos e Linguagens

- A maioria das linguagens de interesse é infinita, assim, descrevemos linguagens infinitas por meio do esquema:

$$L = \{w \mid w \in \Sigma^{\star} \text{ e } w \text{ tem a propriedade } P\}$$

- Se Σ é um alfabeto finito, então $\Sigma^{\star}$ é certamente infinito, porém contável

Alfabetos e Linguagens

- Como as linguagens são conjuntos, aplicam-se sobre elas as mesmas operações: união, intersecção e diferença, além da concatenação e do fechamento.
- **Concatenação de linguagens**: se L_1 e L_2 são linguagens sobre o alfabeto Σ, sua concatenação é L_1L_2 em que:

$$L = \{w \in \Sigma^\star \mid w = xy \text{ para algum } x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$$

- **Fechamento de Kleene** $(L^\star)$: compreende todas as cadeias obtidas pela concatenação de zero ou mais cadeias de L.

$$L^\star = \{w \in \Sigma^\star \mid w = w_1.\cdots.w_k \text{ para algum } k \geq 0, \text{ com } w_1, \cdots, w_k \in L\}$$

Bibliografia

- Lewis, H.R., Papadimitriou, C.H., Elementos de Teoria da Computação, 2a. edição, Bookman, 2000.
- Menezes, P.B., Linguagens Formais e Autômatos, 5a. edição, Série Livros Didáticos - UFRGS, Editora Sagra Luzzato, 2005.
- Johnsonbaugh, R., Discrete Mathematics, 3a. edição, Macmillan, 1993.