Provas

Prof^{a} Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

Provas

- O que é uma **Prova**?
  - Algo que demonstra que uma afirmação ou um fato é verdadeiro
  - Em matemática, prova = demonstração
    - A demonstração consiste na apresentação ou no particular arranjo dos argumentos que produzem a prova
    - Uma prova é uma forma de comunicação que visa convencer, a quem a leia, que uma afirmação segue a partir de outras e que, se estas outras são verdadeiras, então aquela também deve ser

Alguns Conceitos Básicos

- **Definições**
  - descrevem os objetos e as noções utilizadas
  - Exemplos:
    - Definição de Conjunto, Conjunto Vazio, Conjunto Unitário
  - Devem ser definidos com precisão
  - Após definidos os objetos, são construídas asserções (enunciados matemáticos) sobre suas propriedades
- **Axiomas**
  - asserções elementares que são assumidas como verdadeiras
  - Exemplo (axiomas da geometria Euclidiana):
    - Dados dois pontos distintos, há exatamente uma linha que os contém
    - Dada uma linha e um ponto fora da linha, há exatamente uma linha paralela a linha dada que passa pelo ponto

Alguns Conceitos Básicos

- **Teorema**
  - Asserção demonstrada verdadeira
  - Exemplo (sobre número reais):
    - Para todo número real x, y e z, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.
  - Exemplo (geometria euclidiana):
    - Se dois lados de um triângulo são iguais, então seus ângulos opostos são iguais.
  - Um teorema é uma proposição do tipo

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n, \text{if } p(x_1, x_2, ..., x_n) \text{then } q(x_1, x_2, ..., x_n)$$

    - $p(...)$ e $q(...)$ são denominadas **hipótese** e **tese**

Alguns Conceitos Básicos

- **Lema**
  - Um teorema que assiste a um outro de maior importância
  - Exemplo:
    - Se n é um inteiro positivo, então $n - 1$ é um inteiro positivo ou $n - 1 = 0$.
- **Corolário**
  - Uma asserção cuja verdade decorre diretamente de um teorema
  - Exemplo (geometria euclidiana):
    - Se um triângulo é equilatero, então ele é equiangular (decorre do teorema anterior).

Alguns Conceitos Básicos

- **Prova**
  - Uma prova é uma sequência de argumentos logicamente coerentes que visam demonstrar que uma asserção é **verdadeira**

Encontrando Provas

- A construção de provas matemáticas nem sempre é fácil
- Assim, antes de começar, busque conhecer bem a asserção que se quer provar
  - leia a asserção e certifique-se de tê-la entendido (notação e definições)
  - se necessário, divida a asserção nas partes que a compõem

    $$\text{A sse B} \equiv \text{A se B e B se A}$$

  - teste a asserção para vários exemplos antes de tentar prová-la
  - teste a asserção visando encontrar algum contraexemplo

Encontrando Provas

- Exemplo:
  - Para todo grafo G, a soma dos graus de todos os vértices em G é um número par.

Encontrando Provas

- Dicas:
  - Seja paciente: encontrar provas leva tempo.
  - Volte a prova: trabalhe um pouco sobre a prova e deixe-a, então retorne a ela mais tarde. Deixe a parte inconsciente, intuitiva, de sua mente ter a oporturnidade de trabalhar
  - Seja claro e organizado: a organização e a clareza ajudarão a aumentar a sua percepção e também ajudarão a quem for ler a sua prova
  - Seja conciso: uso de boa notação matemática facilita a expressão de idéias e o raciocínio

Encontrando Provas

- Exemplo:
  - Para todo grafo G, a soma dos graus de todos os vértices em G é um número par.
    Prova: Toda a aresta em G conecta 2 vértices. Cada aresta contribui com 1 para o grau do vértice ao qual está conectada. Portanto, cada aresta contribui com 2 para a soma dos graus de todos os vértices. Logo, se G contém e arestas, então a soma dos graus de todos os vértices de G é $2e$, que é um número par.

Construindo Provas

- Há várias formas de se construir uma prova:
  - Prova direta ou por construção
  - Prova por contradição
  - Prova por indução

Construindo Provas

- **Prova direta ou por construção**
  - assume-se que $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ é verdade e então, usando $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, axiomas, definições e outros teoremas, mostra-se que $q(x_1, x_2, ..., x_n)$ é verdade

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

  Prova: Para construir esta prova, inicialmente tomemos $L = A - (B \cup C)$ e $R = (A - B) \cap (A - C)$. Se $L = R$ então (i)$L \subseteq R$ e (ii) $R \subseteq L$.

  (i) Se $x \in L$, então $x \in A$, mas $x \notin B$ e $x \notin C$. Logo, $x \in A - B$ e $x \in A - C$, sendo portanto um elemento de R. Então, $L \subseteq R$.

  (ii) Seja $x \in R$, então $x \in A - B$ e $x \in A - C$, sendo portanto, um elemento de A, mas não de B, nem de C. Logo, $x \in A$, mas $x \notin B \cup C$, logo $x \in L$. Portanto $R \subseteq L$.

  Como queríamos demonstrar.

Construindo Provas

- **Prova por contradição**
  - Assume-se que a hipótese p é verdadeira e que a conclusão q é falsa
  - Usando p e $\neg q$, bem como outros axiomas, definições e teoremas, deriva-se uma contradição, ou seja, não se pode assumir que a tese negada é verdade e, portanto a proposição é verdadeira

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.
  Prova: Suponha que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p e q inteiros. Suponha também que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, isto é, nenhum número divide ambos p e q. Então, $p = \sqrt{2}q$, e $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par e p é portanto par também. Assim desde que $\frac{p}{q}$ é fração irredutível, q é impar. Mas se $p = 2r$, então $(2r)^2 = 2q^2$ e $4r^2 = 2q^2$. Portanto $2r^2 = q^2$, o que significa que q^2 é par e assim q é par. Contradição.

Construindo Provas

- **Provas por Indução**
  - mostrar que a afirmação é válida para 1 (base)
  - assumir que a afirmação é válida para n (hipótese)
  - mostrar que a afirmação é válida para $n+1$ (passo)

  - Baseia-se no método de geração dos números naturais: adicionar 1 e na regra de inferência Modus Ponens

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

  - o ponto inicial pode ser qualquer número

Construindo Provas

- Exemplo: Prove que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$

  Prova:

  Base:

$$1 = \frac{1.(1+1)}{2}$$

  Hipótese

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Construindo Provas

Passo

$$\frac{n.(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1).(n+1+1)}{2}$$

Logo

$$\frac{n.(n+1) + (2n+2)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

e

$$\frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

Portanto

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

Ou seja

$$\frac{(n+1).(n+2)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

Bibliografia

- Sipser, M., *Introdução a Teoria da Computação*, 2a. edição, Cengage Learning, 2012.
- Johnsonbaugh, R., *Discrete Mathematics*, 3a. edição, Macmillan, 1993.
- W. Carnielli e R.L. Epstein, *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Editora Unesp, 2006.
- Lewis, H.R., Papadimitriou, C.H., *Elementos de Teoria da Computação*, 2a. edição, Bookman, 2000.
- Hopcroft, J.E., Motwani, R., Ullman, J.D., *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, 3a. edição, Addison Wesley, 2007.
- Menezes, P.B., *Linguagens Formais e Autômatos*, 5a. edição, Série Livros Didáticos - UFRGS, Editora Sagra Luzzato, 2005.