Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3111 e MTM5512 - Geometria Analítica

Lista de exercícios 4.9 - Distâncias entre duas retas, uma reta e um plano e entre dois planos

Semana 11

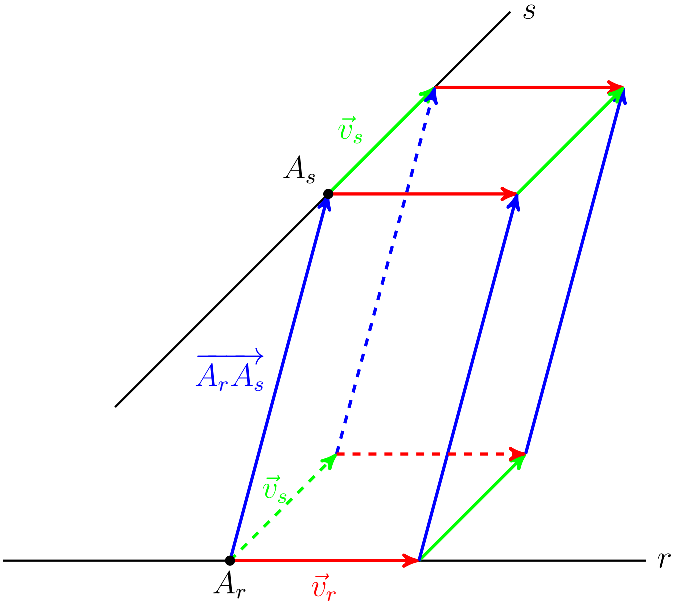
Última atualização: 3 de fevereiro de 2021

1. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância entre duas retas. Este problema não pode ser abordado de uma única forma e, portanto, teremos que separar em dois casos.

(a) Sejam r e s duas retas paralelas. Explique como a distância entre r e s pode ser calculada usando o exercício 2 da lista 4.8.

(b) Verifique que as retas $r : (x, y, z) = (2, -1, 3) + t(2, 0, -1)$ e $s : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(-2, 0, 1)$ são paralelas e determine a distância entre elas.

(c) Sejam r e s duas retas não paralelas. Neste caso, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Deduziremos aqui uma fórmula que serve para ambos os casos (no caso de as retas serem concorrentes, o resultado da fórmula dará 0). Sejam $\vec{v}_r$ e A_r vetor e ponto conhecidos da reta r e $\vec{v}_s$ e A_s vetor e ponto conhecidos da reta s. Desenhemos um paralelepípedo com os vetores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ e $\overrightarrow{A_rA_s}$, conforme figura abaixo.



Observe atentamente a figura e conclua que a distância entre r e s é igual à altura do paralelepípedo. Usando a fórmula vetorial para calcular o volume de um paralelepípedo, deduza que

$$d(r, s) = \frac{|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s})|}{||\vec{v}_r \times \vec{v}_s||}.$$

(d) A figura acima foi desenhada com as retas r e s reversas. Justifique por que a fórmula obtida também serve para calcular a distância entre retas concorrentes.

(e) Justifique por que a fórmula obtida no item (c) não pode ser aplicada para retas paralelas.

(f) Verifique que as retas $r:(x,y,z)=(-1,2,3)+t(1,-1,0)$ e $s:(x,y,z)=(1,0,1)+t(2,0,1)$ não são paralelas e determine a distância entre elas.

Observação. Daqui em diante, cabe a você identificar em qual caso as retas se encaixam e usar o método adequado para determinar a distância.

(g) Determine m sabendo que m é um número inteiro e a distância entre as retas

$$r:\begin{cases} y=-2x+3 \\ z=2x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x=-1-2t \\ y=m+4t \\ z=-3-4t \end{cases}$$

é igual a $\sqrt{13}$.

(h) Determine m sabendo que a distância entre as retas

$$r:\begin{cases} y=1 \\ x+2=\dfrac{z-m}{-2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x=3 \\ y=-1+2t \\ z=3-t \end{cases}$$

é igual a $\dfrac{16}{\sqrt{21}}$.

2. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância de uma reta a um plano. Este problema não pode ser abordado de uma única forma e, portanto, teremos que separar em dois casos.

(a) Qual critério vetorial é utilizado para saber quando uma reta é paralela ou está contida em um plano?

(b) Sejam π um plano e r uma reta que não é paralela e nem está contida no plano. Conclua que $d(r,\pi)=0$.

(c) Determine a distância entre a reta $r:(x,y,z)=(1,0,1)+t(-2,0,1)$ e o plano $\pi:x+y-z+1=0$.

(d) Sejam π um plano e r uma reta que é paralela ou está contida no plano. Explique como determinar a distância entre r e π usando o exercício 3 da lista 4.8.

Observação. Agora cabe a você identificar em qual caso a reta e o plano se encaixam e usar o método adequado para determinar a distância.

(e) Determine m sabendo que m é positivo e que a distância entre a reta $r:(x,y,z)=(1,0,m)+t(-2,0,1)$ e o plano $\pi:-x+y-2z+1=0$ é igual a $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

(f) Determine a distância entre a reta $r:(x,y,z)=(1,0,1)+t(-2,0,1)$ e o plano $\pi:-x+y-2z+3=0$.

3. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância entre dois planos. Este problema não pode ser abordado de uma única forma e, portanto, teremos que separar em dois casos.

(a) Qual critério vetorial (ou em termos de equações) é utilizado para saber quando dois planos são paralelos?

(b) Sejam π_1 e π_2 dois planos não paralelos. Conclua que $d(\pi_1,\pi_2)=0$.

(c) Determine a distância entre os planos $\pi_1:2x-y+z+2=0$ e $\pi_2:x+y-z-1=0$.

(d) Sejam π_1 e π_2 dois planos paralelos. Explique como determinar a distância entre π_1 e π_2 usando o exercício 3 da lista 4.8.

(e) Determine a distância entre os planos $x-2y+z+3=0$ e $2x-4y+2z-1=0$.

(f) Sejam π_1 e π_2 dois planos paralelos. Explique por que é possível escrever suas equações nas formas $\pi_1:ax+by+cz+d_1=0$ e $\pi_2:ax+by+cz+d_2=0$.

(g) Sejam $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ dois planos paralelos. Utilize o procedimento do item (d) para mostrar que

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Observação. Daqui em diante, cabe a você identificar em qual caso os planos se encaixam e usar o método adequado para determinar a distância.

(h) Determine m sabendo que m é positivo e que a distância entre os planos $\pi_1 : 2x-2y+z-m = 0$ e $\pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0$ é igual a 4.