Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

10ª lista de exercícios - Função exponencial.

1. Uma cultura bacteriana contém inicialmente 1.500 bactérias e essa população dobra a cada hora. Encontre uma função que modela o número de bactérias depois de t horas. Use uma calculadora para determinar o número de bactérias depois de 24 horas.

2. Considere $f(x) = 5^x$. Calcule $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(1/2)$ e $f(-3/5)$.

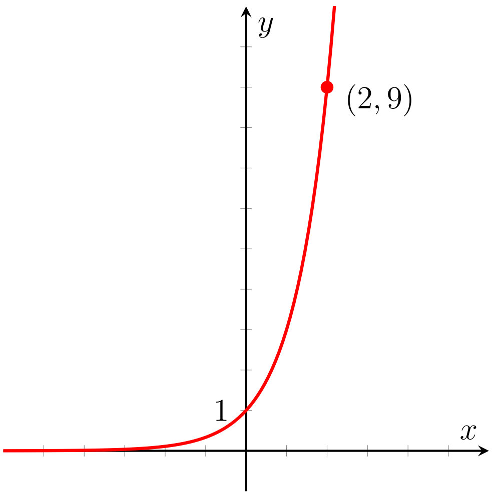
3. Faça o gráfico das funções abaixo montando uma tabela de valores. Se necessário, use uma calculadora.

(a) $f(x) = 3^x$.

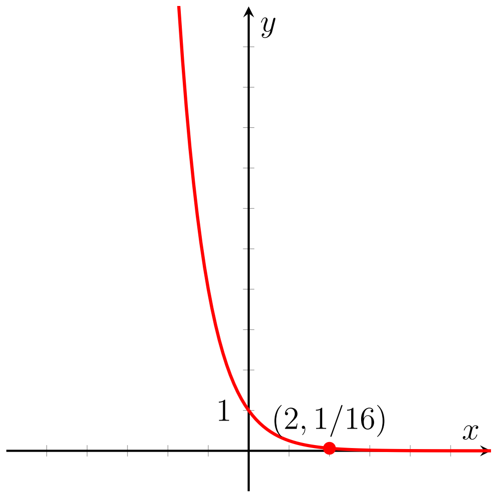
(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

4. Em cada item, encontre a função exponencial $f(x) = a^x$ cujo gráfico está representado.

(a)



(b)



5. Considere $f(x) = a^x$. Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h}\right).$$

6. Utilize as técnicas de construção de gráficos para fazer o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = -3^x$.

(b) $f(x) = 10^{-x}$.

(c) $f(x) = 2^x - 3$.

(d) $f(x) = 2^{x-3}$.

7. Determine os únicos u e v inteiros de modo que o gráfico da função real $f(x) = uv^x$ contenha os pontos $(-3, -3)$ e $(4, -384)$.

8. R\$ 100.000,00 foram aplicados em um fundo com rendimento de 8% ao ano. Determine o valor resgatado após 6 anos.

9. Uma substância radioativa decai de tal forma que sua massa (em gramas) após t dias é dada por $m(t) = 1600e^{-\frac{1}{3}t}$. Determine a massa no instante inicial, a massa remanescente após 12 dias e quanto de massa decaiu em 12 dias (use uma calculadora e dê a resposta truncada com 4 casas decimais).

10. Considere a função $f(x) = \dfrac{4}{1+4^{x-6}}$. A soma $f(x) + f(12-x)$ é igual a uma constante, ou seja, não depende de x. Qual é essa constante?

11. A função *cosseno hiperbólico* é definida como $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Calcule $\cosh 0$, $\cosh 1$ e $\cosh(-2)$.

(b) Qual é o domínio desta função?

(c) Verifique que esta função é par.

12. A função *seno hiperbólico* é definida como $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) Calcule $\operatorname{senh} 0$, $\operatorname{senh} 1$ e $\operatorname{senh}(-2)$.

(b) Qual é o domínio desta função?

(c) Verifique que esta função é ímpar.

13. Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

(a) $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$

(b) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.

14. Considere $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Mostre que $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$. Se $\tanh(a) = 84$ e $\tanh(b) = \dfrac{99}{84}$, calcule $\tanh(a+b)$ (escreva a resposta com pelo menos duas casas decimais).

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 10ª lista de exercícios

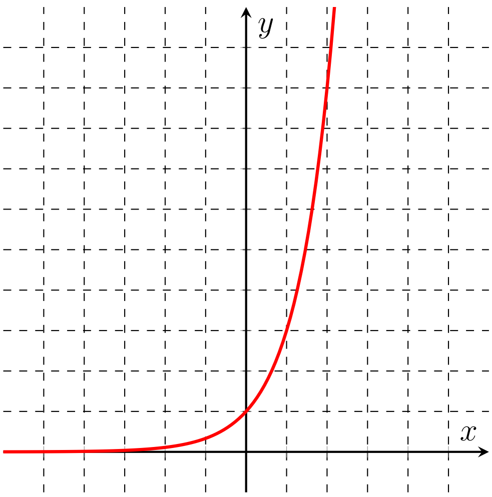
Função exponencial.

1. $n(t) = 1500 \cdot 2^t$. $n(24) = 25.165.824.000$.

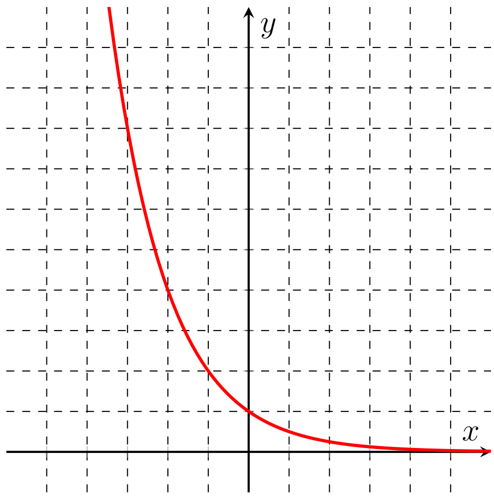
2. $f(1) = 5$, $f(2) = 25$, $f(3) = 125$, $f(0) = 1$, $f(-1) = \dfrac{1}{5}$, $f(-3) = \dfrac{1}{125}$, $f(1/2) = 5^{1/2} = \sqrt{5}$ e $f(-3/5) = 5^{-3/5} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{125}}$.

3.

(a)



(b)



4.

(a) $f(x) = 3^x$.

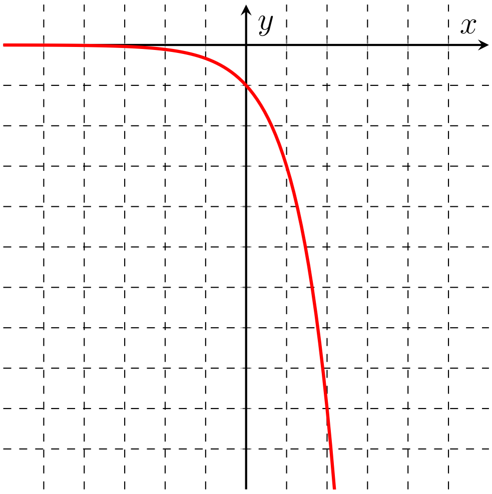
(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$.

5.

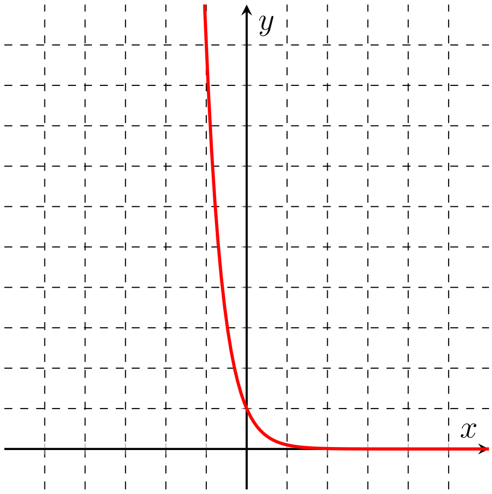
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

6.

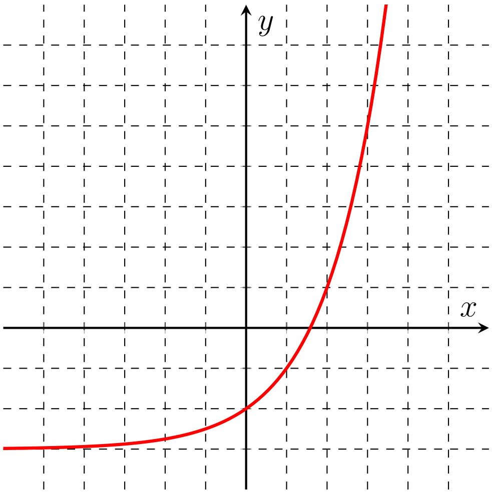
(a)



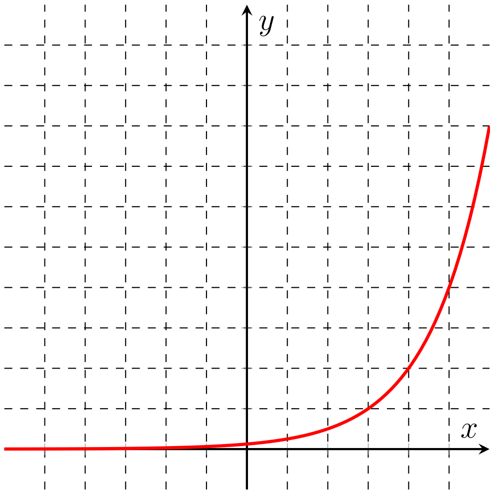
(b)



(c)



(d)



7. $u = -24$ e $v = 2$.

8. R$ 158.687,43.

9. No instante inicial haviam 1600 g de substância. A massa remanescente após 12 dias é de 29.3050 g. Decaíram neste período 1570.6949 g.

10. 4.

11.

(a) $\cosh 0 = 1$, $\cosh 1 = \dfrac{e + e^{-1}}{2} \cong 1{,}543$ e $\cosh(-2) = \dfrac{e^{-2} + e^{2}}{2} \cong 3{,}762$.

(b) $\mathbb{R}$

(c)

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

12.

(a) $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\operatorname{senh} 1 = \dfrac{e - e^{-1}}{2} \cong 1{,}175$ e $\operatorname{senh}(-2) = \dfrac{e^{-2} - e^{2}}{2} \cong -3{,}627$.

(b) $\mathbb{R}$

(c)

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{-e^{x} + e^{-x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x).$$

13.

(a)

$$(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

(b)

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{2(e^x e^y - e^{-x}e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{senh}(x+y)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{2(e^x e^y + e^{-x}e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}\tanh(x+y) &= \frac{\operatorname{senh}(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y}{\cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y} \\ &= \frac{\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y}{\cosh x \cosh y(1 + \tanh x \tanh y)} \\ &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.\end{aligned}$$

$\tanh(a+b) \approx 0.8517$