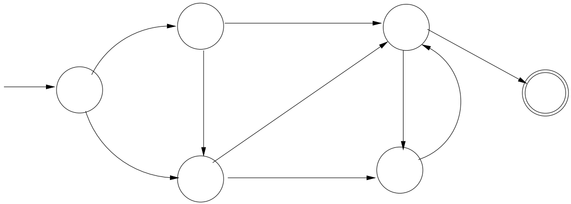
Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

Profa. Jerusa Marchi[1]

[1]Departamento de Informática e Estatística
Universidade Federal de Santa Catarina

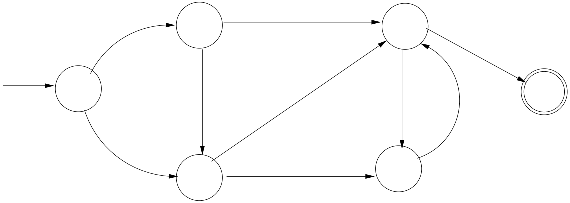
Linguagens Regulares

- Autômatos Finitos Determinísticos são representações finitas de Linguagens Regulares possivelmente infinitas
- AF possuem um número finito de estados



  - Quão longa pode ser uma palavra sem ciclos em um autômato?

Linguagens Regulares

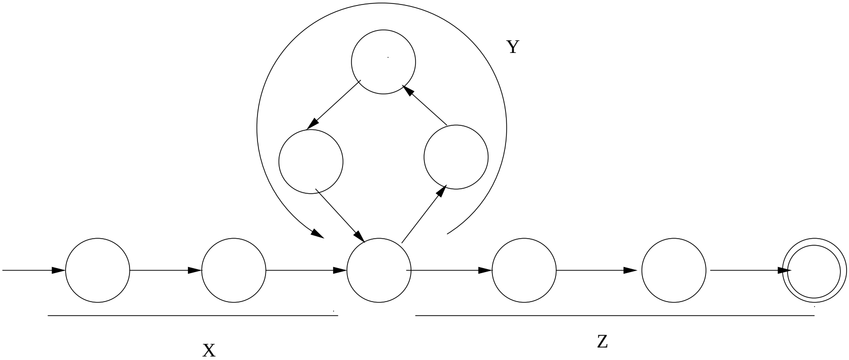


- para reconhecer palavras maiores do que $| K | - 1$ é necessário visitar alguns estados mais de uma vez

Lema do Bombeamento

- **Ideia:** Se é necessário visitar um mesmo estado 1 vez para reconhecer palavras maiores do que o número de estados do autômato, então isto pode ser feito $2, 3, \cdots, i$ vezes e a palavra ainda pertencerá à Linguagem.
  - Também pode-se pular o *ciclo* e a palavra também deverá pertencer à Linguagem (salvo casos especiais).

Lema do Bombeamento



Lema do Bombeamento

- Se A é uma Linguagem Regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em 3 partes $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:
    1. para cada $i \geq 0, xy^iz \in A$
    2. $| y |> 0$, e
    3. $| xy |\leq p$.

Lema do Bombeamento

- Lembrando que:
  - associa-se a p a cardinalidade de K
  - a condição 2 ($|\ y\ | > 0$ permite que x ou z sejam ε, mas $y \neq \varepsilon$. Sem essa condição o teorema é trivialmente verdadeiro por vacuidade.
  - $|\ xy\ | \leq p$, significa que o ciclo precisa ser alcançado antes de p transições

Lema do Bombeamento

- **Prova:** Seja $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que reconhece A. Atribui-se ao comprimento de bombeamento p o número de estados de M. Seja $s = s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$ uma cadeia em A de comprimento n, onde $n \geq p$. Seja $r_1, \ldots r_{n+1}$ a sequência de estados nos quais M passa enquanto processa s, de forma que $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Essa sequência tem comprimento $n + 1$, que é pelo menos $p + 1$. Entre os primeiros $p + 1$ elementos da sequência **dois** devem ser o mesmo estado. Sejam r_j e r_l tais estados.

Lema do Bombeamento

- **Prova (cont.):** Como r_l ocorre entre as primeiras $p+1$ posições da sequência começando em r_1, temos que $l \leq p+1$. Agora seja

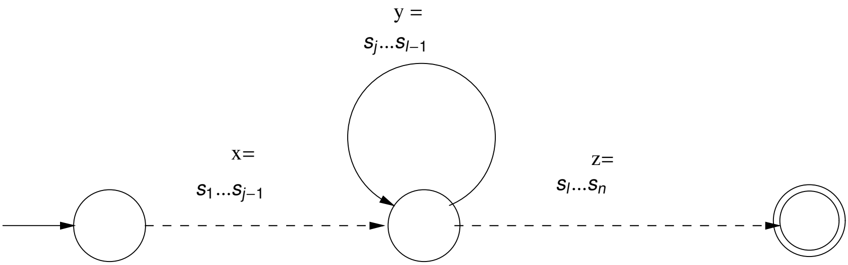
$$x = s_1 \dots s_{j-1}$$

$$y = s_j \dots s_{l-1}$$

$$z = s_l \dots s_n$$

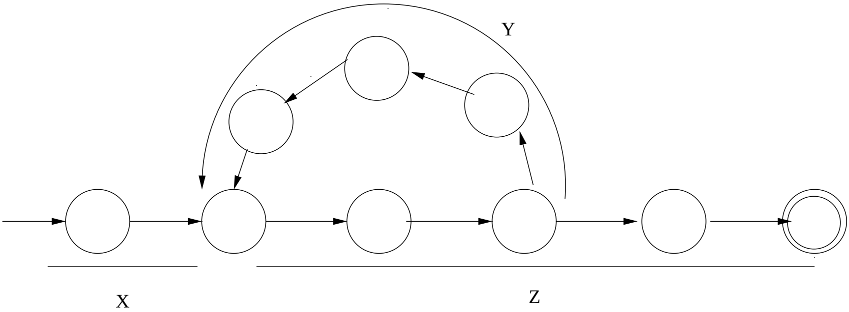
Como x leva M de r_1 para r_j, y leva M de r_j para r_j e z leva M de r_j para r_{n+1} que é um estado de aceitação, M deve aceitar xy^iz para $i \geq 0$. Sabemos que $j < l$ e portanto $\mid y \mid > 0$, $l \leq p+1$ logo $\mid xy \mid \leq p$

Lema do Bombeamento



Lema do Bombeamento

- Casos especiais:
  - *xyz* onde *y* e *z* tem uma sobreposição (*x* e *y* também podem se sobrepor)



Uso do Lema do Bombeamento

- Para demonstrar que uma linguagem A não é regular:
  1. supõe-se A regular
  2. A tem um comprimento de bombeamento p (todas as palavras maiores que p devem ser "bombeadas")
  3. encontre uma palavra $s \in A$ tal que $|s| \geq p$
  4. divida s em xyz
  5. mostre que $xy^iz \notin A$ para todo i (Contradição!)
- Se a sua primeira escolha não foi boa, tente novamente!

Exemplos de Aplicação

- $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
  - **Prova:** Suponha que L_1 é regular. Seja p o comprimento do bombeamento. Seja $s = 0^p 1^p$. Como $s \in L_1$ e tem comprimento maior que p, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em xyz onde para qualquer $i \geq 0$ a cadeia $xy^i z \in L_1$. Consideramos 3 casos para mostrar que isso é impossível.

Exemplos de Aplicação

- **Prova (cont.):**
  1. A cadeia y contém apenas um 0. Neste caso, a cadeia $xyyz$ tem mais 0's do que 1's e, portanto, não pertence a L_1, violando a condição (1) do lema do bombeamento.Contradição.
  2. A cadeia y contém somente 1's. Novamente tem-se uma Contradição.
  3. A cadeia y tem 0's e 1's. Neste caso a cadeia $xyyz$ pode ter o mesmo número de 0's e 1's, mas eles estarão fora de ordem. Logo a cadeia não é membro de B. Contradição.

  Observe que a condição (3) do lema do bombeamento elimina os casos (2) e (3) da prova.

Exemplos de Aplicação

- $L_2 = \{w \mid w$ tem igua número de 0's e 1's $\}$
  - **Prova:** Suponha que L_2 é regular. Seja p o comprimento do bombeamento. Seja $s = 0^p 1^p$, ter-se-ia que $x = \varepsilon$ e $z = varepsilon$ e a cadeia poderia ser bombeada. Contudo, essa escolha conflita com a condição (3) do lema que diz que $\mid xy \mid \leq p$. Essa restrição impõem que y tenha somente 0's e portante não pode ser bombeada.
- Obs.: a cadeia $s = (01)^p$ pode ser bombeada, fazendo $x = \varepsilon$ $y = 01$ e $z = (01)^{p-1}$.

Exemplos de Aplicação

- **Prova (alternativa):** Suponha L_2 regular. Se L_2 fosse regular, $L_2 \cap (0^*1^*)$ seria regular, pois a classe das linguagens regulares é fechada sob a operação de interseção. Mas $L_2 \cap (0^*1^*)$ resulta em 0^n1^n que acabamos de demontrar ser não regular.

Exemplos de Aplicação

- $L_3 = \{0^i 1^j \mid i \geq j\}$
  - **Prova:** Suponha que L_3 é regular. Seja p o comprimento do bombeamento. Seja $s = 0^{p+1}1^p$. Então s pode ser dividida em $s = xyz$, satisfazendo as condições do lema do bombeamento. Pela condição (3) y contém somente 0's. Considere a cadeia $xyyz$. Adicionar uma cópia de y aumenta o número de 0's. Mas como L_3 contém todas as cadeias em 0^*1^* que tem mais 0's do que 1's, aumentando-se o número de 0's obtém-se ainda uma cadeia em L_3. Neste caso é útil "bombear para baixo".

Exemplos de Aplicação

- $L_3 = \{0^i 1^j \mid i \geq j\}$
  - **Prova (cont.):** O lema do bombeamento afirma que $xy^iz \in L_3$ mesmo quando $i = 0$; assim, considere a cadeia $xy^0z = xz$. Removendo-se a cadeia y, o número de 0 em s diminui. Lembre-se que pela escolha de $s = 0^{p+1}1^p$, s tem apenas um 0 a mais. Portanto xz não pode ter mais 0's do que 1's, logo não pode ser membro de L_3. Contradição.