# Conjuntos Enumeráveis

Prof$^a$ Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

# O Infinito

- George Cantor (final do século XIX)
  - introdução de **coleções infinitas** na matemática
  - usado posteriormente para prover os fundamentos do cálculo
- De lá para cá, coleções infinitas são usuais na matemática moderna

# O infinito e a computação

- E o que isso tem a ver com computação?
  - Considere o conjunto de todos os problemas (um conjunto possivelmente infinito)
    - Seriam todos os elementos deste conjunto passíveis de uma solução computacional?
  - Estamos tentando visualizar a linha que separa os **problemas computáveis** dos **problemas não computáveis**

# Lidando com o Infinito

- Suponha os seguintes conjuntos:
  - O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
  - O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
  - O conjunto dos números racionais $\mathbb{QP} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
  - O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$
- Qual é o tamanho destes conjuntos?
- Existem um ou mais níveis de infinidade?

# Lidando com o Infinito

- O que significa afirmar que dois conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos?
- Podemos nos lembrar como podemos determinar se dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos
  - Contagem - contar o número de elementos de $A$ e de $B$ e ver se são iguais
  - Emparelhamento - emparelhar os elemento de $A$ e de $B$ de forma a constatar se sobram elementos em $A$ ou em $B$ que não tenham **correspondência**

# Lidando com o Infinito

- Emparelhar elementos é um **processo** e podemos utilizar funções para descrevê-lo:
  - Dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos se existe uma função **bijetora** de um no outro
- Extrapolando essa noção para conjuntos infinitos:
  - Dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se existe uma função **bijetora** de um no outro
  - Se há uma função bijetora de $A$ para $B$ diz-se que $A$ é **equipotente** a $B$
  - Outrossim, diz-se que $A$ e $B$ são **equinumerosos**

# Lidando com o Infinito

- De modo mais formal:
  - Dois conjuntos $A$ e $B$ são ditos ter a mesma cardinalidade, isto é $card(A) = card(B)$ se existe uma função bijetora de $A$ para $B$
  - Um conjunto *infinito* pode ser definido como sendo aquele que tem um subconjunto próprio de mesma cardinalidade
    - O conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$ é infinito, pois
      1. $\mathbb{N} - \{0\} \subset \mathbb{N}$; e
      2. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $f(x) = x + 1$ é uma função bijetora

# Lidando com o Infinito

- Dizemos que um conjunto é **enumerável** se equivale a $\mathbb{N}$ (tem a mesma cardinalidade)
- Um conjunto é dito **contável** se é finito ou **enumerável**
- A bijeção é chamada **enumeração**
- Se uma coleção é contável e não finita, dizemos que é **contavelmente** (ou **enumeravelmente**) **infinita**

Será que todos os conjuntos infinitos são **enumeráveis**?

# Conjuntos Enumeráveis

- A coleção de todos os números pares é **contavelmente ou enumeravelmente infinita**
  - Seja a função $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{P}$ tal que

$$f(x) = 2x$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

# Conjuntos Enumeráveis

- O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável
  - Seja a função $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ é par} \\ -(x+1)/2 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

# Conjuntos Enumeráveis

- O conjunto dos números racionais não negativos $\mathbb{QP}$ é enumerável

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \vdots & \cdots & & \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \vdots & \cdots & & & \\
\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

- Passeio de Cantor

# Conjuntos Enumeráveis

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável
  - Prova por Contradição
  - Método de prova: Diagonalização de Cantor
    - Suponha que haja uma função bijetora $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, neste caso existe uma enumeração de $[0, 1]$
    - Suponha que os números reais possam ser representados por suas expansões decimais $x = 0, x_0 x_1 ... x_n ...$
    - Então, os números do intervalo podem ser listados (eles não precisam estar em ordem), tal que $f(a_i) = 0, a_{i1} a_{i2} a_{i3} \cdots$

# Conjuntos Enumeráveis

$$
\begin{array}{llllllll}
a_0 = & 0, & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & & \\
a_1 = & 0, & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & & \\
a_2 = & 0, & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
a_n = & 0, & a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \cdots &
\end{array}
$$

# Conjuntos Enumeráveis

- Constrói-se um novo número real $b$ que não pertence a lista, considerando-se o dígito $k$ após a virgula da expansão $a_k$ (ou seja, os dígitos da diagonal)
- A partir desses dígitos o número $b$ é construído como segue:

$$b(k) = \begin{cases} a_{nn} + 1 & \text{se } a_{nn} \leq 5 \\ a_{nn} - 1 & \text{se } a_{nn} > 5 \end{cases}$$

- O número $b$ é real e portanto deve haver um $a_n = b$, no entanto, $b$ difere de cada $a_n$ na lista pelo dígito $a_{nn}$ e portanto não está na lista.

# Conjuntos Enumeráveis

- E o conjunto de todas as linguagens sobre o alfabeto $\Sigma$ é enumerável ou não?

# Conjuntos Enumeráveis

- o conjunto de todas as linguagens não é enumerável.
  - Prova por Construção
  - Método de prova: Diagonalização de Cantor
    - Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as sequências binárias infinitas.
      - $\mathcal{B}$ é incontável (pode-se aplicar a diagonalização)
    - Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre o alfabeto $\Sigma$.
    - Seja $\Sigma^* = \{s_1, s_2, s_3, ...\}$
    - Cada linguagem $A \in \mathcal{L}$ tem uma sequência única em $\mathcal{B}$
      - $\mathcal{X}_A$ é a sequência característica de $A$
      - O i-ésimo bit da sequência é $1$ se $s_i \in A$ e $0$ caso contrário

# Conjuntos Enumeráveis

- o conjunto de todas as linguagens não é enumerável.
  - Para $A = \{w|w \in \Sigma^*$ e $w$ começa com $0\}$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\Sigma^* = \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & ,10, & 11, & 000, & 001, & \cdots\} \\
A = \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 011, & \cdots\} \\
\mathcal{X}_A = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}
$$

  - a função $f : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{B}$ é injetora e sobrejetora, sendo $\mathcal{B}$ incontável, $\mathcal{L}$ também é incontável.
- Com isso demonstramos que há algumas linguagens que não são Turing-Reconhecíveis.

# Bibliografia


- W. Carnielli e R.L. Epstein, *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Editora Unesp, 2006 (cap. 5).
- N.J. Vieira, *Linguagens e Máquinas: Uma introdução aos Fundamentos da Computação*, disponível no moodle.
- M. Sipser, *Introdução à Teoria da Computação*, Cegage Learning, 2012 (cap. 4).