



MTM3100 - Pré-cálculo

12ª lista de exercícios - Equações exponenciais e logarítmicas.

1. Resolva as equações abaixo.

(a) $3^x = \frac{1}{27}$.

(b) $4 + 3^{5x} = 8$.

(c) $2e^{12x} = 17$.

(d) $e^{1-4x} = 2$.

(e) $4(1 + 10^{5x}) = 9$.

(f) $\frac{10}{1 + e^{-x}} = 2$.

(g) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

(h) $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$.

(i) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

(j) $\ln x = 10$.

(k) $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$.

(l) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$.

2. Resolva as inequações abaixo.

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq 4$.

(b) $\ln x \geq 3$.

(c) $x^2 e^x - 2e^x < 0$.

(d) $2 < 10^x < 5$.

(e) $3 \leq \log_2 x \leq 4$.

(f) $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$.

3. Suponha que você esteja dirigindo o seu carro em um dia muito frio (temperatura ambiente de $5^\circ C$) e o motor do seu carro superaqueceu (chegou a $105^\circ C$). Você estaciona e espera o motor esfriar. A equação que governa a temperatura T (em $^\circ C$) do motor após t minutos parado é dada por

$$\ln\left(\frac{T - 5}{100}\right) = -0,11t.$$

(a) Determine $T(t)$, isto é, escreva T em função de t .

(b) Utilize o item (a) para determinar a temperatura do motor após 20 minutos.

4. Um circuito elétrico é formado por uma bateria de $60 V$, um resistor de 10Ω e um indutor de $5 H$ colocados em série. Usando cálculo e as leis físicas que governam o sistema, é possível mostrar que a corrente I (em A) t segundos após o circuito ser ligado é dada por

$$I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5}).$$

(a) Determine $t(I)$, isto é, escreva t em função de I .

(b) Após quantos segundos a corrente será de $2 A$?

5. Um cliente fez um empréstimo de valor V e pagará parcelas mensais de mesmo valor P . Se a taxa de juros (compostos) é de $1,4 \%$ ao mês, por quantos meses uma parcela deve ser antecipada para que seu valor caia pela metade? (use as aproximações $\log 2 \approx 0,3$ e $\log 1,014 \approx 0,006$)

6. A equação de Tsiolkovsky afirma que a mudança máxima na velocidade, denotada por Δv , em um foguete é dada por

$$\Delta v = v_{\text{ex}} \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right),$$

sendo m_0 a massa do foguete quando ele está com o tanque de combustível cheio, m_1 a massa do foguete quando ele está com o tanque de combustível vazio e v_{ex} a velocidade de exaustão efetiva, que mede o quão eficiente é a queima de combustível no foguete. Suponha que para um foguete entrar na órbita terrestre baixa é necessário atingir um Δv de 9600 m/s, e que esse foguete apresenta $v_{\text{ex}} = 4100$ m/s. Determine, em porcentagem, qual deve ser a proporção de combustível em relação à massa total m_0 para que o foguete entre na órbita terrestre baixa.

7. Seja $f(x) = \alpha e^{\beta x}$. Se $\ln f(0) = \ln 7$ e $\ln f(1) = \ln 7 + 14$, determine a soma $\alpha + \beta$.
8. Observe que $(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$. Usando este fato obtém-se que a maior raiz da equação

$$(17 + 12\sqrt{2})^x + (17 - 12\sqrt{2})^x = \frac{197}{14}$$

é da forma

$$x = \frac{\log n}{\log(17 + 12\sqrt{2})},$$

para algum inteiro n . Determine n .

9. Lembre que a tangente hiperbólica de x é dada por

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Se $\tanh(x) = 1/54$, qual é o valor de x (aproximadamente)?



MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 12^a lista de exercícios

Equações exponenciais e logarítmicas.

1.

(a) $x = -3$.

(b) $x = \frac{2 \log_3 2}{5}$.

(c) $x = \frac{\ln(17/2)}{12}$.

(d) $x = \frac{1 - \ln 2}{4}$.

(e) $x = \frac{\log(5/4)}{5}$.

(f) $x = -\ln(4)$.

(g) $x = \ln 3$.

(h) $x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$.

(i) $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

(j) $x = e^{10}$.

(k) $x = 5$.

(l) $x = 4$.

2.

(a) $S = [1/2 - \log_3 2, \infty)$.

(b) $S = [e^3, \infty)$.

(c) $S = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(d) $S = (\log 2, \log 5)$.

(e) $S = [8, 16]$.

(f) $S = (2, 4) \cup (7, 9)$.

3.

(a) $T(t) = 5 + 100e^{-0,11t}$.

(b) $T(20) = 5 + 100e^{-0,11 \cdot 20} \cong 16^\circ C$.

4.

(a) $t(I) = \frac{5}{13} \ln \left(\frac{60}{60 - 13I} \right)$.

(b) $t(2) = \frac{5}{13} \ln \left(\frac{30}{17} \right) s \cong 0,218 s$.

5. 50

6. 90,3813 % (aproximadamente)

7. 21

8. $n = 14$

9. $x \approx 0,0185$.