quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

(Lembre-se de que esses métodos foram usados na derivação dessas funções.) Em ambos os métodos somos levados a um produto indeterminado $g(x)\ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}\, 4x)^{\cot x}$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \text{sen}\, 4x \to 1$ e $\text{cotg}\, x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Seja

$$y = (1 + \text{sen}\, 4x)^{\cot x}$$

Então $$\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \text{sen}\, 4x)$$

logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \text{sen}\, 4x)}{\text{tg}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \text{sen}\, 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ □

■ O gráfico da função $y = x^x, x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

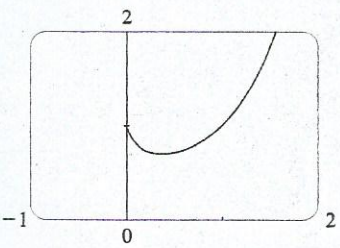

FIGURA 6

EXEMPLO 9 Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos proceder como no Exemplo 8 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$ □

4.4 EXERCÍCIOS

1–4 Dado que

$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$

$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 4x}{\text{tg}\, 5x}$