

Considere a seguinte asserção:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Nós conhecemos a propriedade associativa da lógica proposicional: $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$. Iremos tentar encontrar uma relação entre a propriedade associativa dos conjuntos com a da lógica proposicional. Uma forma de mostrar igualdade entre conjuntos é mostrar que um está dentro do outro e vice versa. Começaremos com um elemento x ; iremos mostrar que x está no conjunto à esquerda do sinal da igualdade se, e somente se, ele estiver no conjunto à direita. Para fazermos a associação com a lógica proposicional, vamos criar três proposições a respeito do x :

- $p = x \in A$ (x está no conjunto A)
- $q = x \in B$
- $r = x \in C$

Começemos com um elemento x do lado esquerdo. Aplicando a definição de união a A e $B \cup C$, temos:

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C))$$

Agora, iremos aplicar a definição de união a $(B \cup C)$:

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$$

Substituindo pelas variáveis criadas anteriormente:

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Agora, podemos aplicar a associatividade da conjunção, da lógica proposicional.

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Depois disso, é só substituir de volta as proposições e reconstruir o conjunto:

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C)$$

Aplicando a definição de união a A e B :

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \vee (x \in C)$$

Aplicando a definição de união a $(A \cup B)$ e C :

$$x \in (A \cup (B \cup C)) \leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)$$

Note que todos os passos são inversíveis, isto é, funcionam na direção contrária. Com isso, concluímos que um elemento está no conjunto à esquerda da igualdade se e somente se está a direita, mostrando que os elementos destes conjuntos são os mesmos. Portanto estes dois conjuntos são iguais.