MTM3111 e MTM5512 - Geometria Analítica

Lista de exercícios 4.8 - Distâncias entre dois pontos, um ponto a uma reta e um ponto a um plano

Semana 11

Última atualização: 3 de fevereiro de 2021

1. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância entre dois pontos.

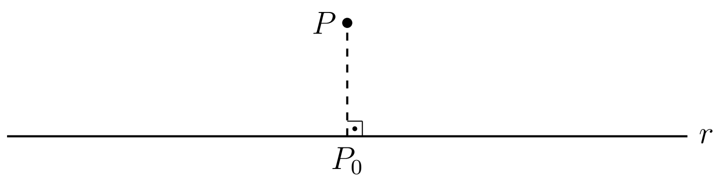
(a) Sejam A e B dois pontos. Verifique (pode ser através de um desenho), que a distância entre os pontos A e B é igual ao comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$. Em outras palavras, $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

(b) Calcule a distância entre os pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (-2, 0, 1)$.

(c) Determine m sabendo que a distância entre $A = (-2, 0, 3)$ e $B = (1, 2, m)$ é igual a $\sqrt{14}$.

2. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância de um ponto a uma reta.

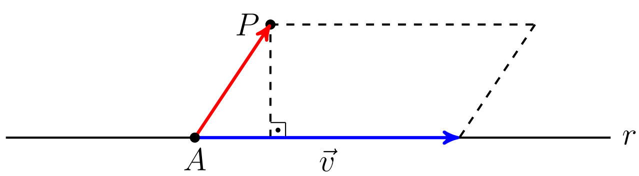
(a) Sejam P um ponto e r uma reta. Conforme figura abaixo, observe que a distância de P a r é a mesma distância entre os pontos P e P_0, em que P_0 é a projeção do ponto P sobre a reta r.



Determine uma estratégia para encontrar o ponto P_0 usando apenas conceitos vetoriais.

(b) Com a estratégia acima, determine a distância do ponto $P = (1, 2, 3)$ à reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-2, 2, -1)$.

(c) A estratégia acima não é a única e talvez nem seja a mais rápida. Neste item, veremos a fórmula mais usada para determinar a distância de um ponto P a uma reta r. Para isso, considere A um ponto conhecido de r (este ponto é um qualquer, não podemos assumir que ele é o próprio P_0 de antes) e $\vec{v}$ um vetor diretor de r. Desenhe $\vec{v}$ de forma que sua origem seja o ponto A e, a partir dos vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$, desenhe um paralelogramo, conforme figura abaixo.



Utilize a fórmula vetorial para calcular a área do paralelogramo e deduza que

$$d(P, r) = \frac{||\vec{v} \times \overrightarrow{AP}||}{||\vec{v}||}.$$

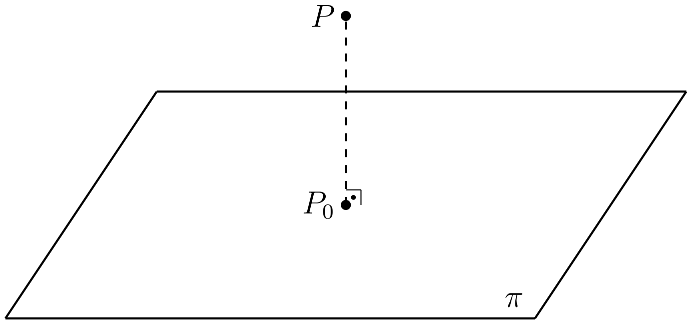
(d) Utilize a fórmula acima para refazer o item (b).

(e) Determine a distância do ponto $P = (1, 2, 3)$ a cada um dos três eixos coordenados.

(f) Determine m sabendo m é negativo e a distância entre $P = (0, 3, 3)$ e $r : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(m, -2, 1)$ é igual a 2.

3. Neste exercício, estudaremos como determinar a distância de um ponto a um plano.

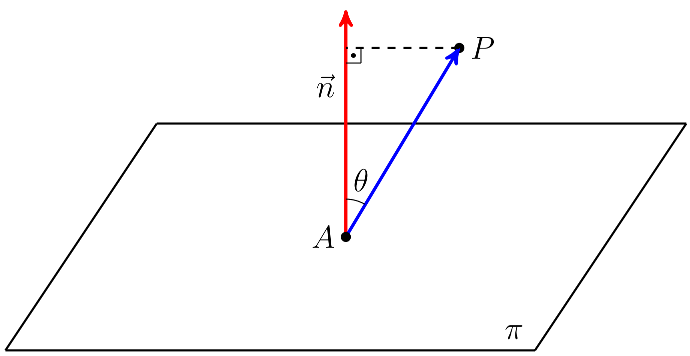
(a) Sejam P um ponto e π um plano. Conforme figura abaixo, observe que a distância de P a π é a mesma distância entre os pontos P e P_0, em que P_0 é a projeção do ponto P sobre o plano π.



Determine uma estratégia para encontrar o ponto P_0, usando apenas conceitos vetoriais.

(b) Com a estratégia acima, determine a distância do ponto $P = (1, 2, 3)$ ao plano $\pi : 2x - y + z + 1 = 0$.

(c) A estratégia acima não é a única e talvez nem seja a mais rápida. Neste item, veremos um outro caminho para determinar a distância de um ponto P a um plano π. Para isso, considere A um ponto conhecido de π (este ponto é um qualquer, não podemos assumir que ele é o próprio P_0 de antes) e $\vec{n}$ um vetor normal a π. Desenhe $\vec{n}$ de forma que sua origem seja o ponto A e desenhe também o vetor $\overrightarrow{AP}$, conforme figura abaixo.



A partir da figura, conclua que a distância de P a π é a medida da projeção do vetor $\overrightarrow{AP}$ sobre o vetor $\vec{n}$. Usando trigonometria básica, deduza que $d(P, \pi) = ||\overrightarrow{AP}||\,|\cos\theta|$ (aqui, a presença do módulo no cosseno é para corrigir o caso em que o vetor $\vec{n}$ escolhido aponta no sentido oposto). Por fim, como θ é o ângulo entre os vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{AP}$, utilize a fórmula do produto interno para concluir que

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||}.$$

(d) Utilize a fórmula acima para refazer o item (b).

(e) Há uma versão mais "amigável" para a fórmula do item (c). Suponha que uma equação do plano π seja $ax + by + cz + d = 0$ e que $P = (x_0, y_0, z_0)$. Mostre que a fórmula do item (c) pode ser reescrita como

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Esta é a fórmula mais usada para determinar a distância de um ponto a um plano.

(f) Utilize a fórmula acima para refazer o item (b).

(g) Determine m sabendo m é positivo e a distância entre $P = (-4, 2, 5)$ e $\pi : 2x + y + 2z + m = 0$ é igual a 4.