Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3111 e MTM5512 - Geometria Analítica

Lista de exercícios 3.7 - Produto escalar (produto interno), propriedades e interpretação geométrica

Semana 6

Última atualização: 29 de janeiro de 2021

1. Considere os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 0, -2)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$. Determine o que se pede.

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

(c) $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

(d) $\vec{w} \cdot \vec{u}$.

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

(f) $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

(g) $\vec{w} \cdot \vec{v}$.

(h) $(2\vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

Observação. A notação $\vec{x} \cdot \vec{y}$ representa o produto escalar (ou produto interno) entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Em outros lugares, você também encontrará a notação $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os vetores $\vec{u} = (4, a, -1)$ e $\vec{v} = (a, 2, 3)$ e os pontos $A = (4, -1, 2)$ e $B = (3, 2, -1)$. Determine a de modo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.

3. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$. Determine a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores.

(a) Usando as propriedades do produto interno, mostre que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

(b) Usando as propriedades do produto interno, mostre que

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

(c) Utilize os itens (a) e (b) para concluir que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

(d) Utilize os itens (a) e (b) para concluir que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 4(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$