4.4. Interseção e ângulo entre retas

Professores:

Alda Dayana Mattos Mortari

Christian Wagner

Giuliano Boava (autor e voz)

Leandro Batista Morgado

María Rosario Astudillo Rojas

Mykola Khrypchenko

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

- **Coincidentes.** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ paralelos.
- **Paralelas.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- **Concorrentes.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos.

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

- **Coincidentes.** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ paralelos.
- **Paralelas.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- **Concorrentes.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos.

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

- **Reversas.**

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

RECAPITULAÇÃO

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

RECAPITULAÇÃO

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Os pontos de r são dados pelas soluções das equações da reta r.

Os pontos de s são dados pelas soluções das equações da reta s.

Logo, os pontos da interseção de ambas são dados pelas soluções comuns das equações de r e s.

Conclusão: para determinar a interseção, basta resolver o sistema de equações formado pelas equações de ambas as retas.

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Os pontos de r são dados pelas soluções das equações da reta r.

Os pontos de s são dados pelas soluções das equações da reta s.

Logo, os pontos da interseção de ambas são dados pelas soluções comuns das equações de r e s.

Conclusão: para determinar a interseção, basta resolver o sistema de equações formado pelas equações de ambas as retas.

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Os pontos de r são dados pelas soluções das equações da reta r.

Os pontos de s são dados pelas soluções das equações da reta s.

Logo, os pontos da interseção de ambas são dados pelas soluções comuns das equações de r e s.

Conclusão: para determinar a interseção, basta resolver o sistema de equações formado pelas equações de ambas as retas.

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Os pontos de r são dados pelas soluções das equações da reta r.

Os pontos de s são dados pelas soluções das equações da reta s.

Logo, os pontos da interseção de ambas são dados pelas soluções comuns das equações de r e s.

Conclusão: para determinar a interseção, basta resolver o sistema de equações formado pelas equações de ambas as retas.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXEMPLO

$$r : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2 + 3y \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = 1 - 2(1 + y) \quad \Rightarrow \quad y = -1 - 2y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}.$$

$$x = 1 + (-\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

$$z = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$z = 2 + 3(-\tfrac{1}{3}) = 1.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = \frac{3(x-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-1)}{2} = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$y = 3 + 9 = 12.$$

$$z = 11 - 9 = 2.$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{12}{3} = 2 \cdot 2.$$

Logo, $(9, 12, 2)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = \frac{3(x-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-1)}{2} = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$y = 3 + 9 = 12.$$

$$z = 11 - 9 = 2.$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{12}{3} = 2 \cdot 2.$$

Logo, $(9, 12, 2)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = \frac{3(x-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-1)}{2} = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$y = 3 + 9 = 12.$$

$$z = 11 - 9 = 2.$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{12}{3} = 2 \cdot 2.$$

Logo, $(9, 12, 2)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = \frac{3(x-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-1)}{2} = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$y = 3 + 9 = 12.$$

$$z = 11 - 9 = 2.$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{12}{3} = 2 \cdot 2.$$

Logo, $(9, 12, 2)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2z \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y &= \ 3 + x \\ z &= 11 - x \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$y = \frac{3(x-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-1)}{2} = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$y = 3 + 9 = 12.$$

$$z = 11 - 9 = 2.$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{12}{3} = 2 \cdot 2.$$

Logo, $(9, 12, 2)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : 1 - x = y + 2 = \frac{z - 1}{2} \quad \text{e} \quad s : x = -y - 1 = \frac{3 - z}{2}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r : 1 - x = y + 2 = \frac{z-1}{2} \quad \text{e} \quad s : x = -y - 1 = \frac{3-z}{2}, \quad r \cap s = ?$$

$$1 - (-y - 1) = y + 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2 = y + 2.$$

$$1 - \left(\frac{3-z}{2}\right) = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

r e s são coincidentes e portanto $r \cap s = r = s : 1 - x = y + 2 = \dfrac{z-1}{2}$.

EXERCÍCIO

$$r: 1 - x = y + 2 = \frac{z-1}{2} \quad \text{e} \quad s: x = -y - 1 = \frac{3-z}{2}, \quad r \cap s = ?$$

$$1 - (-y - 1) = y + 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2 = y + 2.$$

$$1 - \left(\frac{3-z}{2}\right) = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

r e s são coincidentes e portanto $r \cap s = r = s : 1 - x = y + 2 = \dfrac{z-1}{2}$.

EXERCÍCIO

$$r: 1 - x = y + 2 = \frac{z-1}{2} \quad \text{e} \quad s: x = -y - 1 = \frac{3-z}{2}, \quad r \cap s = ?$$

$$1 - (-y - 1) = y + 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2 = y + 2.$$

$$1 - \left(\frac{3-z}{2}\right) = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

r e s são coincidentes e portanto $r \cap s = r = s : 1 - x = y + 2 = \dfrac{z-1}{2}$.

EXERCÍCIO

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 1 - 3x \\ z = 3 \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 1 - 3x \\ z = 3 \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$2 + 3t = 1 - 3(1 - t) \quad \Rightarrow \quad 2 + 3t = -2 + 3t \quad \Rightarrow \quad 2 = -2.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} y = 1 - 3x \\ z = 3 \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$2 + 3t = 1 - 3(1 - t) \quad \Rightarrow \quad 2 + 3t = -2 + 3t \quad \Rightarrow \quad 2 = -2.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 2) \quad \text{e} \quad s : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 2) \quad \text{e} \quad s : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}, \quad r \cap s = ?$$

$$r : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 + 2t \end{cases}.$$

$$\frac{(1+t)+1}{2} = (2+t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + t = 2t + 2 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$$

$$x = 1 + 0 = 1; \quad y = 2 + 0 = 2; \quad z = 3 + 0 = 3.$$

$$2 - 1 = \frac{3+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{5}{3}.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 2) \quad \text{e} \quad s : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}, \quad r \cap s = ?$$

$$r : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 + 2t \end{cases}.$$

$$\frac{(1+t)+1}{2} = (2+t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + t = 2t + 2 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$$

$$x = 1 + 0 = 1; \quad y = 2 + 0 = 2; \quad z = 3 + 0 = 3.$$

$$2 - 1 = \frac{3+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{5}{3}.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r:(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,1,2) \quad \text{e} \quad s:\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{z+2}{3}, \quad r\cap s=?$$

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & + & t \\ z & = & 3 & + & 2t \end{array}\right. .$$

$$\frac{(1+t)+1}{2}=(2+t)-1 \quad \Rightarrow \quad 2+t=2t+2 \quad \Rightarrow \quad t=0.$$

$x=1+0=1;$ $\quad y=2+0=2;$ $\quad z=3+0=3.$

$$2-1=\frac{3+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{5}{3}.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 2) \quad \text{e} \quad s : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}, \quad r \cap s = ?$$

$$r : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 + 2t \end{cases}.$$

$$\frac{(1+t)+1}{2} = (2+t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + t = 2t + 2 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$$

$$x = 1 + 0 = 1; \quad y = 2 + 0 = 2; \quad z = 3 + 0 = 3.$$

$$2 - 1 = \frac{3+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{5}{3}.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r:(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,1,2) \quad \text{e} \quad s:\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{z+2}{3}, \quad r\cap s=?$$

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & + & t \\ z & = & 3 & + & 2t \end{array}\right. .$$

$$\frac{(1+t)+1}{2}=(2+t)-1 \quad \Rightarrow \quad 2+t=2t+2 \quad \Rightarrow \quad t=0.$$

$$x=1+0=1; \quad y=2+0=2; \quad z=3+0=3.$$

$$2-1=\frac{3+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{5}{3}.$$

Logo, r e s possuem interseção vazia.

EXERCÍCIO

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

O nome do parâmetro não pode ser o mesmo!!

EXERCÍCIO

$$r:\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 2s \\ -1 - t = 4 + 4s \\ 2 + 3t = 15 + 9s \end{cases}.$$

$$t = -1 - s \quad \Rightarrow \quad -1 - (-1 - s) = 4 + 4s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{4}{3} \ \text{e} \ t = \frac{1}{3}.$$

$$2 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 15 + 9(-\tfrac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \end{cases}.$$

Logo, $(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r:\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 2s \\ -1 - t = 4 + 4s \\ 2 + 3t = 15 + 9s \end{cases}.$$

$$t = -1 - s \quad \Rightarrow \quad -1 - (-1 - s) = 4 + 4s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{4}{3} \ \text{e} \ t = \frac{1}{3}.$$

$$2 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 15 + 9(-\tfrac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \end{cases}.$$

Logo, $(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r:\begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= -1 - t \\ z &= 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 4 + 4t \\ z &= 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 2s \\ -1 - t = 4 + 4s \\ 2 + 3t = 15 + 9s \end{cases}.$$

$$t = -1 - s \quad \Rightarrow \quad -1 - (-1 - s) = 4 + 4s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{4}{3} \ \text{e} \ t = \frac{1}{3}.$$

$$2 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 15 + 9(-\tfrac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \end{cases}.$$

Logo, $(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r:\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 2s \\ -1 - t = 4 + 4s \\ 2 + 3t = 15 + 9s \end{cases}.$$

$$t = -1 - s \quad \Rightarrow \quad -1 - (-1 - s) = 4 + 4s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{4}{3} \ \text{ e } \ t = \frac{1}{3}.$$

$$2 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 15 + 9(-\tfrac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \end{cases}.$$

Logo, $(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 15 + 9t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 2s \\ -1 - t = 4 + 4s \\ 2 + 3t = 15 + 9s \end{cases}.$$

$$t = -1 - s \quad \Rightarrow \quad -1 - (-1 - s) = 4 + 4s \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{4}{3} \;\; \text{e} \;\; t = \frac{1}{3}.$$

$$2 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 15 + 9(-\tfrac{4}{3}) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \end{cases}.$$

Logo, $(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ é o único ponto na interseção de r e s.

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, -1, 2) \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

EXERCÍCIO

$$r:(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2) \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, \quad r\cap s = ?$$

$$r:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 1+t=2-2s \\ -t=-1+2s \\ 2t=2-4s \end{cases}.$$

$$\begin{cases} t=1-2s \\ t=1-2s \\ t=1-2s \end{cases}.$$

r e s são coincidentes e portanto $r\cap s=r=s:(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2)$.

EXERCÍCIO

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, -1, 2) \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, \quad r \cap s = ?$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 1 + t = 2 - 2s \\ -t = -1 + 2s \\ 2t = 2 - 4s \end{cases}.$$

$$\begin{cases} t = 1 - 2s \\ t = 1 - 2s \\ t = 1 - 2s \end{cases}.$$

r e s são coincidentes e portanto $r \cap s = r = s : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, -1, 2)$.

EXERCÍCIO

$$r:(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2) \quad \text{e} \quad s:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 2t \\ y &=& -1 &+& 2t \\ z &=& 2 &-& 4t \end{array}\right. , \quad r\cap s = ?$$

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& t \\ y &=& & & -t \\ z &=& & & 2t \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1+t=2-2s \\ -t=-1+2s \\ 2t=2-4s \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=1-2s \\ t=1-2s \\ t=1-2s \end{array}\right. .$$

r e s são coincidentes e portanto $r\cap s = r = s : (x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2)$.

EXERCÍCIO

$$r:(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2) \quad \text{e} \quad s:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 2t \\ y &=& -1 &+& 2t \\ z &=& 2 &-& 4t \end{array}\right. , \quad r\cap s=?$$

$$r:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& t \\ y &=& & & -t \\ z &=& & & 2t \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1+t=2-2s \\ -t=-1+2s \\ 2t=2-4s \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=1-2s \\ t=1-2s \\ t=1-2s \end{array}\right. .$$

r e s são coincidentes e portanto $r\cap s=r=s:(x,y,z)=(1,0,0)+t(1,-1,2)$.

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são reversas, qual é o conjunto interseção?

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são reversas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são reversas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são concorrentes, qual é o conjunto interseção?

POSIÇÕES RELATIVAS E INTERSEÇÃO

Pergunta. Se você sabe que duas retas são coincidentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. A própria reta. A equação de uma delas é uma possível resposta.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são paralelas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são reversas, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Vazio.

Pergunta. Se você sabe que duas retas são concorrentes, qual é o conjunto interseção?

Resposta. Sabemos que há um único ponto na interseção. Mas caso queiramos saber qual é esse ponto, é preciso fazer como nos exemplos anteriores.

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

Resposta. Concorrentes.

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

Resposta. Concorrentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é uma reta, qual é a posição relativa?

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

Resposta. Concorrentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é uma reta, qual é a posição relativa?

Resposta. Coincidentes.

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

Resposta. Concorrentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é uma reta, qual é a posição relativa?

Resposta. Coincidentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é o conjunto vazio, qual é a posição relativa?

INTERSEÇÃO E POSIÇÕES RELATIVAS

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é um ponto, qual é a posição relativa?

Resposta. Concorrentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é uma reta, qual é a posição relativa?

Resposta. Coincidentes.

Pergunta. Se você sabe que a interseção de duas retas é o conjunto vazio, qual é a posição relativa?

Resposta. Reversas ou paralelas. Para saber qual é o caso, devemos verificar se os vetores diretores são paralelos ou não.

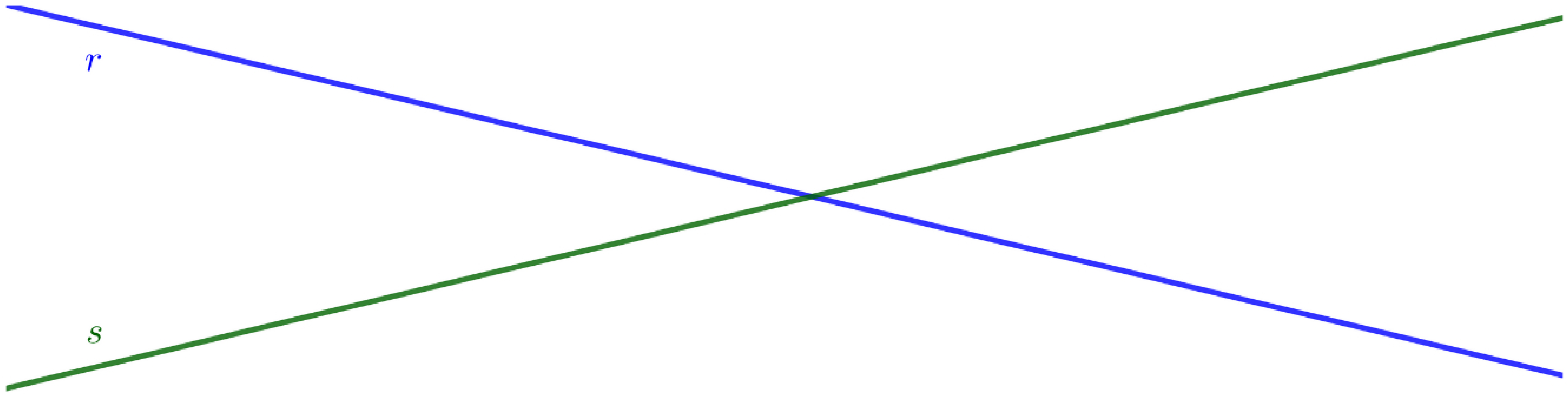
ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s retas concorrentes.

Há 4 ângulos, dois a dois iguais.

O ângulo entre as retas é o menor desses ângulos. Logo, o ângulo entre duas retas é menor ou igual a $90°$.

O ângulo entre as retas é o ângulo entre os vetores diretores.



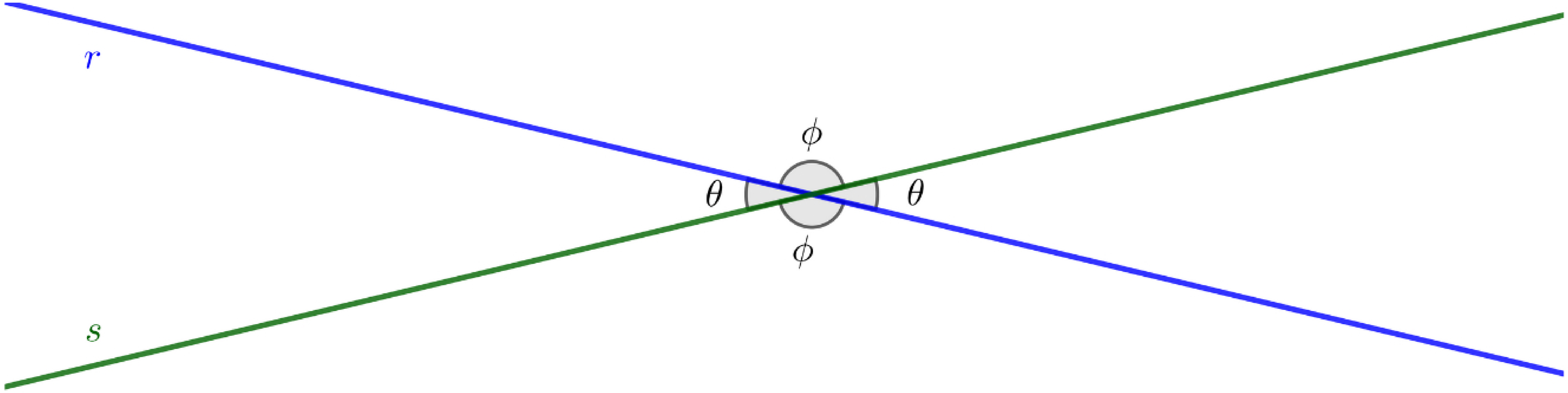
ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s retas concorrentes.

Há 4 ângulos, dois a dois iguais.

O ângulo entre as retas é o menor desses ângulos. Logo, o ângulo entre duas retas é menor ou igual a 90°.

O ângulo entre as retas é o ângulo entre os vetores diretores.



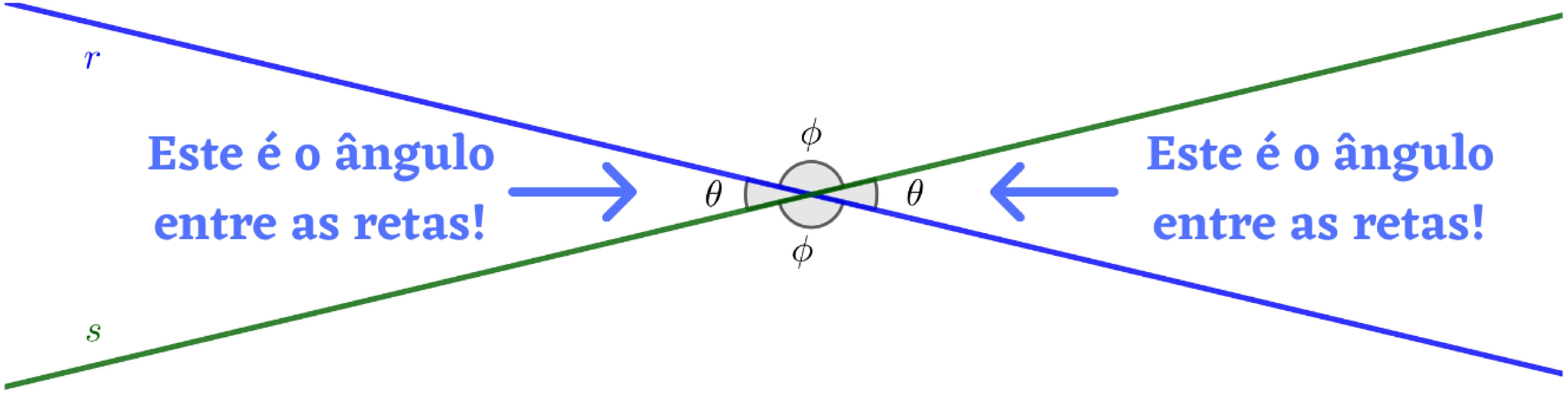
ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s retas concorrentes.

Há 4 ângulos, dois a dois iguais.

O ângulo entre as retas é o menor desses ângulos. Logo, o ângulo entre duas retas é menor ou igual a 90°.

O ângulo entre as retas é o ângulo entre os vetores diretores.



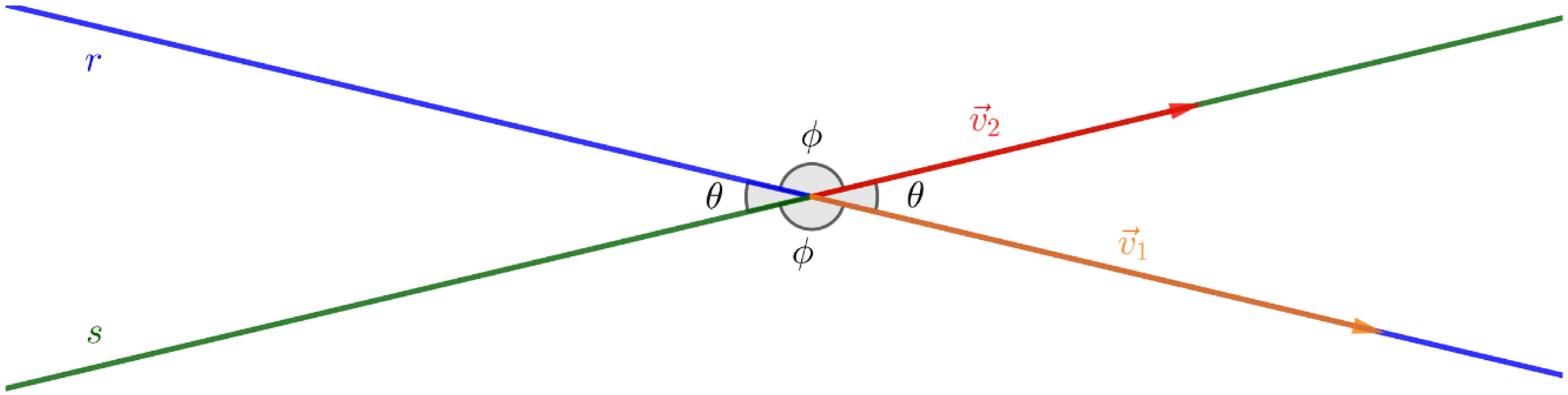
ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s retas concorrentes.

Há 4 ângulos, dois a dois iguais.

O ângulo entre as retas é o menor desses ângulos. Logo, o ângulo entre duas retas é menor ou igual a 90°.

O ângulo entre as retas é o ângulo entre os vetores diretores.



ÂNGULO ENTRE RETAS

Logo, podemos calcular o ângulo usando a fórmula $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta$.

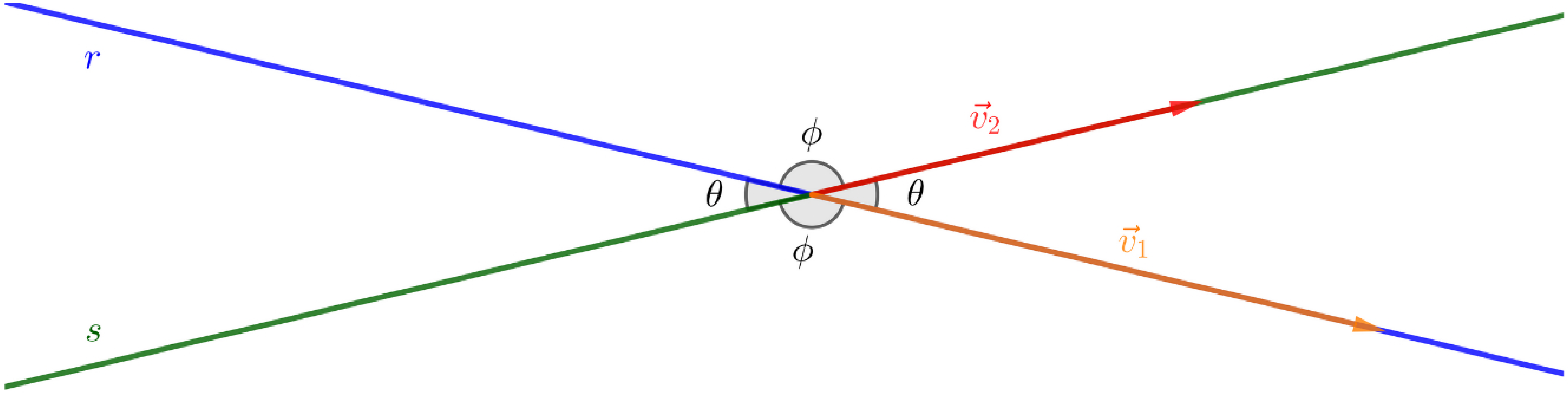
Porém, se tivéssemos a escolha de vetores diretores for outra, teríamos

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\phi.$$

Uma forma simples de evitar esse caso é ignorar o sinal negativo no resultado do produto escalar quando aparecer.

Conclusão: o ângulo entre duas retas pode ser calculado por

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



ÂNGULO ENTRE RETAS

Logo, podemos calcular o ângulo usando a fórmula $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta$.

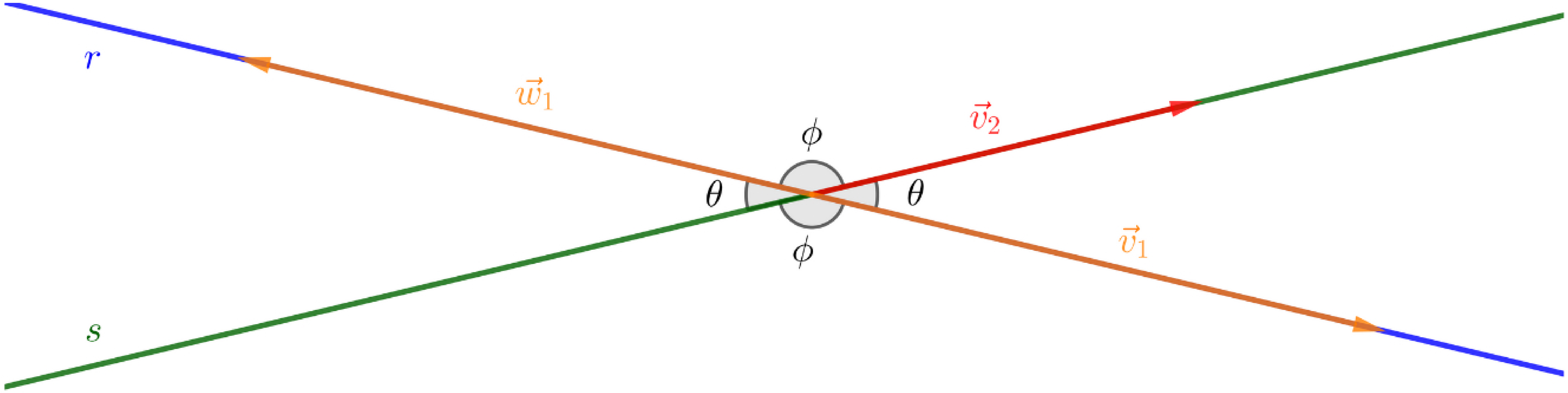
Porém, se tivéssemos a escolha de vetores diretores for outra, teríamos

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\phi.$$

Uma forma simples de evitar esse caso é ignorar o sinal negativo no resultado do produto escalar quando aparecer.

Conclusão: o ângulo entre duas retas pode ser calculado por

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



ÂNGULO ENTRE RETAS

Logo, podemos calcular o ângulo usando a fórmula $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta$.

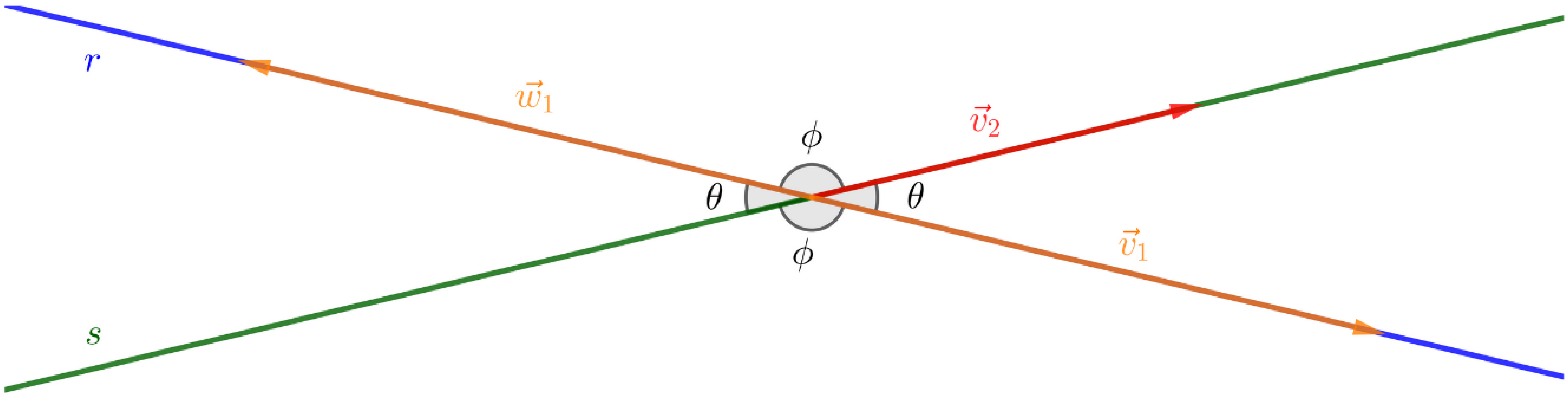
Porém, se tivéssemos a escolha de vetores diretores for outra, teríamos

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\phi.$$

Uma forma simples de evitar esse caso é ignorar o sinal negativo no resultado do produto escalar quando aparecer.

Conclusão: o ângulo entre duas retas pode ser calculado por

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



ÂNGULO ENTRE RETAS

Logo, podemos calcular o ângulo usando a fórmula $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta$.

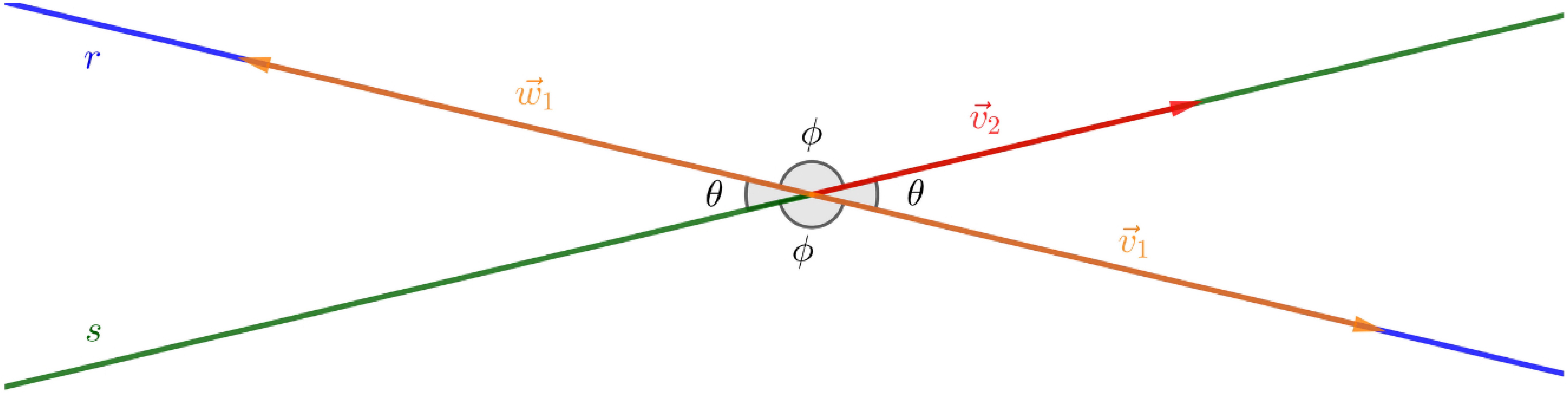
Porém, se tivéssemos a escolha de vetores diretores for outra, teríamos

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\phi.$$

Uma forma simples de evitar esse caso é ignorar o sinal negativo no resultado do produto escalar quando aparecer.

Conclusão: o ângulo entre duas retas pode ser calculado por

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$

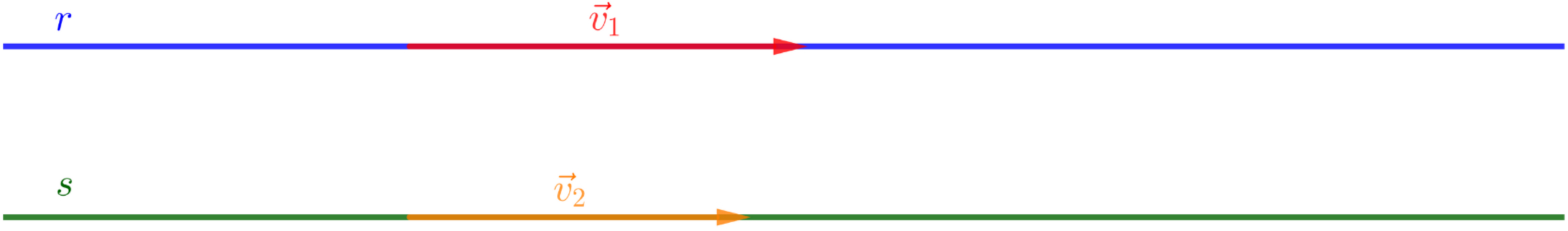


ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s paralelas ou coincidentes.

O ângulo é definido como $0°$.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:
$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



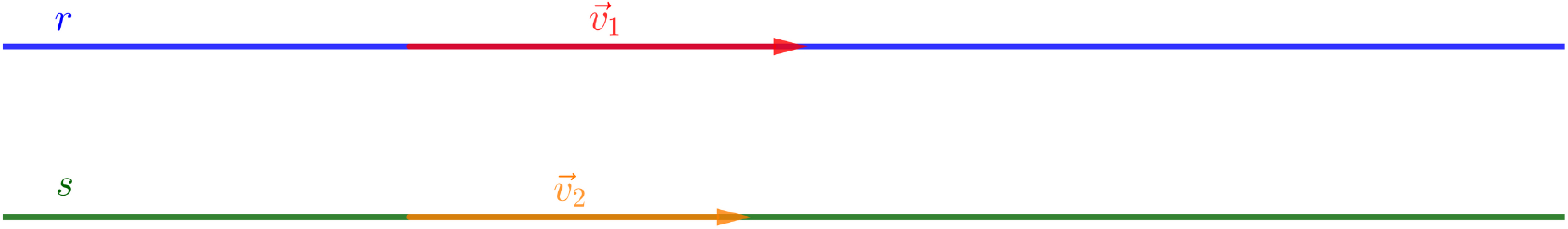
ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s paralelas ou coincidentes.

O ângulo é definido como 0°.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



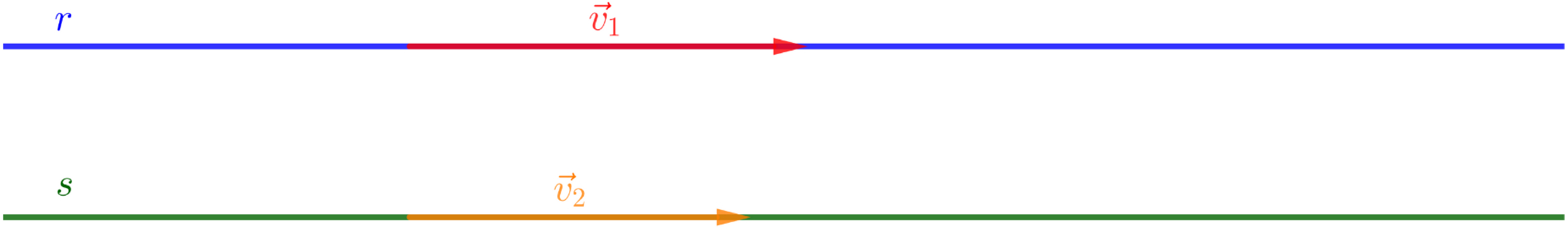
Ângulo entre retas

r e s paralelas ou coincidentes.

O ângulo é definido como 0°.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$



ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s reversas.

O ângulo é medido transladando uma até ficar coplanar à outra.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$

ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s reversas.

O ângulo é medido transladando uma até ficar coplanar à outra.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$

ÂNGULO ENTRE RETAS

r e s reversas.

O ângulo é medido transladando uma até ficar coplanar à outra.

Por sorte, a fórmula anterior também funciona aqui:

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_2:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, -1, 0).$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_2:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, -1, 0).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_2:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, -1, 0).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}.$$

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |0| = \sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_2:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, -1, 0).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}.$$

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |0| = \sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta.$$

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_3:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_3:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_3:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3| = |\vec{v}_1||\vec{v}_3| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{3} \cdot 2 \cos\theta.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_1 e r_3:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3| = |\vec{v}_1||\vec{v}_3| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{3} \cdot 2\cos\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(\tfrac{1}{\sqrt{6}}).$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_2 e r_3:

$$\vec{v}_2 = (-1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_2 e r_3:

$$\vec{v}_2 = (-1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -2, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_2 e r_3:

$$\vec{v}_2 = (-1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -2, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

$$|\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3| = |\vec{v}_2||\vec{v}_3| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |-2| = \sqrt{2} \cdot 2\cos\theta.$$

EXEMPLOS

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, -1, 1).$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-1, -1, 0).$$

$$r_3 : (x, y, z) = (3, 1, -1) + t(1, 1, \sqrt{2}).$$

Ângulo entre r_2 e r_3:

$$\vec{v}_2 = (-1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -2, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_3| = 2.$$

$$|\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3| = |\vec{v}_2||\vec{v}_3| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |-2| = \sqrt{2} \cdot 2\cos\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

$v_1 = (2, 1, -1)$.

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

$v_1 = (2, 1, -1)$.

$v_2 = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m + 2)$.

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

$v_1 = (2, 1, -1)$.

$v_2 = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m + 2)$.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1 - m, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{6}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2 + (m + 2)^2}$.

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

$v_1 = (2, 1, -1)$.

$v_2 = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m + 2)$.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1 - m, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{6}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2 + (m + 2)^2}$.

$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |-1 - m| = \sqrt{6}\sqrt{2 + (m + 2)^2} \cos(\frac{\pi}{3})$.

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, 1, -1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$.

$v_1 = (2, 1, -1).$

$v_2 = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m + 2).$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1 - m, \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{6}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{2 + (m+2)^2}.$

$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad |-1 - m| = \sqrt{6}\sqrt{2 + (m+2)^2}\cos(\frac{\pi}{3}).$

$(-1 - m)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4}(2 + (m+2)^2) \quad \Rightarrow \quad 2 + 4m + 2m^2 = 3m^2 + 12m + 18$

EXERCÍCIO

Determine o valor de m sabendo que a reta $r:(x,y,z)=(1,0,3)+t(2,1,-1)$ forma um ângulo de $\pi/3$ com a reta que passa pelos pontos $A=(3,1,-2)$ e $B=(4,0,m)$.

$v_1=(2,1,-1).$

$v_2=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-1,m+2).$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=-1-m, \qquad |\vec{v}_1|=\sqrt{6}, \qquad |\vec{v}_2|=\sqrt{2+(m+2)^2}.$

$|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|=|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\theta \quad\Rightarrow\quad |-1-m|=\sqrt{6}\sqrt{2+(m+2)^2}\cos(\frac{\pi}{3}).$

$(-1-m)^2=6\cdot\frac{1}{4}(2+(m+2)^2) \quad\Rightarrow\quad 2+4m+2m^2=3m^2+12m+18$

$\Rightarrow\quad m^2+8m+16=0 \quad\Rightarrow\quad m=-4.$

UFSC

MTM

Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.