Geometria Analítica

Videoaula 2.1

Sistemas de equações lineares

Departamento de Matemática (UFSC)

Professora ALDA MORTARI

Professor CHRISTIAN WAGNER

Professor FELIPE TASCA

Professor GIULIANO BOAVA

Professor LEANDRO MORGADO

Professora MARÍA ASTUDILLO

Professor MYKOLA KHRYPCHENKO

Definição

Uma equação linear em n variáveis $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ é uma equação da forma:

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_n\, x_n = b$$

em que $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n,\ b$ são números reais.

Exemplos

$$2x\ -\ 3y\ +\ 2z^2 = 5$$

$$x\ -\ 2y\ +\ 9z = 10$$

$$x\ +\ 3\sqrt{y} = 0$$

$$x\ +\ 3xy = 6$$

$$\sqrt{2}\, x\ +\ 7y\ +\ z = 0$$

Definição

Uma solução de uma equação linear em n variáveis é uma n-upla

$$s = (s_1 , s_2 , \ldots , s_n)$$

tal que a equação é satisfeita se substituímos $x_1 = s_1, \; x_2 = s_2, \ldots, \; x_n = s_n.$

Explicando melhor ...

Dada a equação $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$

s é solução se $a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n = b.$

Exemplo

Dada a equação linear $3x + 2y - z = 4$,

vamos identificar se s, u e v são soluções.

$s = (1,\ 2,\ 3)$ $\qquad$ $u = (2,\ 2,\ 2)$ $\qquad$ $v = (0,\ 2,\ 0)$

Definição

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares,

ou seja, um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + y^2 + z = 1 \\ 3y - 4z = 7 \end{cases}$$

Definição

Uma solução de um sistema de equações lineares é uma n-upla

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

tal que todas as equações do sistema são satisfeitas

quando substituímos $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,\ x_n = s_n$.

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases}$$

Definição

Uma solução de um sistema de equações lineares é uma n-upla

$$s = (s_1 , s_2 , \ldots , s_n)$$

tal que todas as equações do sistema são satisfeitas

quando substituímos $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,\ x_n = s_n$.

Importante !

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema.

Exemplo

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Verifique se são soluções:

$s = (0,\ 0,\ 0)$ $\qquad$ $u = (4,\ -2,\ 1)$ $\qquad$ $v = (2,\ -1,\ -3)$

Classificação Dependendo do seu conjunto solução, um sistema de equações lineares pode ser classificado em:

- Sistema possível e determinado **SPD**
- Sistema possível e indeterminado **SPI**
- Sistema impossível **SI**

Observação importante

Se um sistema de equações lineares possui duas soluções distintas, então possui infinitas soluções (SPI).

Isso vale porque ...

Se $(s_1,\ s_2,\ s_3)$ é uma solução, e (u_1, u_2, u_3) é outra solução, então:

$$\alpha \cdot (s_1,\ s_2,\ s_3)\ +\ \beta \cdot (u_1,\ u_2,\ u_3)\ ,$$

com $\alpha + \beta = 1$ também será solução.

Exemplos iniciais

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$