# 1. Matrizes

## 1.3. Determinante e propriedades.

Giuliano Boava

# Preliminares

Por que temos que aprender tantos nomes e definições em matemática?

Qual das escritas é mais legível?

- **Sem nomes e definições.** Em uma figura formada por uma linha poligonal fechada de três lados em que dois desses lados são perpendiculares, o lado oposto ao ponto de instersecção entre os lados perpendiculares tem medida maior que os outros dois lados.
- **Com nomes e definições.** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa tem medida maior que os catetos.

# Preliminares

- **Fórmula de Bhaskara.** $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- $y$ **do vértice.** $y_v = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$.
- **Quantidade que determina o número de raízes reais.** $b^2 - 4ac$.
- **Completamento do quadrado.** $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Que tal dar um nome pra essa expressão em vermelho? Acho que $\Delta$ é um bom nome!!

# Preliminares

- **Autovalores.** $\det(A - \lambda I) = 0$.
- **Volume de um paralelepípedo.** $V = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$.
- **Matriz inversa.** $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$.
- **Mudança de variável.** $\displaystyle\int_{g(U)} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_U f(g(\mathbf{u})) |\det(\mathrm{D}g)(\mathbf{u})| d\mathbf{u}$.

Imagina escrever isso aí tudo sem ter inventado o nome determinante?

# Preliminares

- **Autovalores.** $\det(A - \lambda I) = 0$.
- **Volume de um paralelepípedo.** $V = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$.
- **Matriz inversa.** $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A)$. **Nossa próxima aula!!**
- **Mudança de variável.** $\displaystyle\int_{g(U)} f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_U f(g(\mathbf{u}))|\det(\mathrm{D}g)(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$.

Imagina escrever isso aí tudo sem ter inventado o nome determinante?

# Preliminares

- Matrizes têm muitas entradas (normalmente mais de uma).

  Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- Determinante é um único número.

  Exemplos: $\det(B) = 5$, $\det C = -2$, $|D| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$.

# Preliminares

**Como calcular determinante?**

**Veremos nessa videoaula:**

- Determinante de matriz $1 \times 1$.
- Determinante de matriz $2 \times 2$.
- Determinante de matriz $3 \times 3$ usando regra de Sarrus.
- Determinante de matriz de ordem maior ou igual a 2 usando Teorema de Laplace.

Em aulas futuras, veremos como calcular determinante usando escalonamento.

# Preliminares

**Definição oficial de determinante usando permutações:**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

# Preliminares

**Definição oficial de determinante usando permutações:**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

**Não vamos vê-la nessa aula.**

# Preliminares

**Definição oficial de determinante usando permutações:**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

**Não vamos vê-la nessa aula. Não chorem por causa disso!**

# Preliminares

**Sequência seguida:**

- **1.** Determinante de matriz $1 \times 1$.
- **2.** Determinante de matriz $2 \times 2$.
- **3.** Determinante de matriz $3 \times 3$ usando regra de Sarrus.
- **4.** Teorema de Laplace.

**Lembrete.** Determinante só faz sentido para matrizes quadradas.

# Matrizes de ordem 1

$$A = [3],$$

# Matrizes de ordem 1

$$A = [3], \quad \det(A) = 3$$

# Matrizes de ordem 1

$$A = [3], \quad \det(A) = 3$$

$$B = [-5],$$

# Matrizes de ordem 1

$$A = [3], \quad \det(A) = 3$$

$$B = [-5], \quad \det(B) = -5$$

# Matrizes de ordem 1

$$A = [3], \quad \det(A) = 3$$

$$B = [-5], \quad \det(B) = -5$$

**Vai cair assim na prova??**

# Matrizes de ordem 2

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right],$$

# Matrizes de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = a \cdot d - c \cdot b.$$

# Matrizes de ordem 2

$$A = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right], \quad \det(A) = a \cdot d - c \cdot b.$$

$$B = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right],$$

# Matrizes de ordem 2

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right], \quad \det(A) = a \cdot d - c \cdot b.$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right], \quad \det(B) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

# Exercício

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$$

# Exercício

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 5 = 21.$$

# Alerta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 - 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4$$

# Alerta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 - 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4$$

**Não faça isso! Seu professor de matemática agradece.**

# Matrizes de ordem 3 (regra de Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

# Matrizes de ordem 3 (regra de Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

# Matrizes de ordem 3 (regra de Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(B) =$$

# Matrizes de ordem 3 (regra de Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(B) =$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

# Exercício

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(C) =$$

# Exercício

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(C) =$$

$$\begin{matrix} \color{blue}{3} & \color{purple}{-1} & 1 & \color{blue}{3} & \color{purple}{-1} \\ \color{blue}{1} & \color{purple}{4} & -2 & \color{blue}{1} & \color{purple}{4} \\ \color{blue}{-3} & \color{purple}{-2} & 2 & \color{blue}{-3} & \color{purple}{-2} \end{matrix}$$

# O que vem a seguir?

**Deixe-me adivinhar:** $4 \times 4$**, depois** $5 \times 5$**, depois** $6 \times 6$**, ...**

**Errou! Veremos o desenvolvimento de Laplace, que se aplica a qualquer ordem (**$\neq 1$**).**

**Antes aprenderemos o que é *menor complementar* e *cofator*.**

# Menor complementar

**Menor complementar é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Existe o menor complementar da entrada $1, 1$, da entrada $1, 2$, etc..**

# Menor complementar

**Menor complementar é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Existe o menor complementar da entrada $1,1$, da entrada $1,2$, etc..**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{1,3} =$$

# Menor complementar

**Menor complementar é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Existe o menor complementar da entrada $1,1$, da entrada $1,2$, etc..**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{1,3} =$$

$$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

# Menor complementar

**Menor complementar é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Existe o menor complementar da entrada $1,1$, da entrada $1,2$, etc..**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{1,3} =$$

$$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$[2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot (-2)] - [0 \cdot 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 3] = 33.$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{4,3} =$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{4,3} =$$

$$M_{4,3} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{4,3} =$$

$$M_{4,3} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$[2 \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 2] - [(-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)] = -5.$$

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i+j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i+j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i + j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i + j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_{1,3} = ? \quad , \quad C_{4,3} = ?$$

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i+j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i+j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_{1,3} = ? \quad , \quad C_{4,3} = ?$$

Já calculamos $M_{1,3} = 33$ e $M_{4,3} = -5$.

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i + j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i + j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_{1,3} = ? \quad , \; C_{4,3} = ?$$

Já calculamos $M_{1,3} = 33$ e $M_{4,3} = -5$.

$1 + 3 = 4$ é par, portanto $C_{1,3} = M_{1,3} = 33$.

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i + j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i + j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_{1,3} = ? \quad , \quad C_{4,3} = ?$$

Já calculamos $M_{1,3} = 33$ e $M_{4,3} = -5$.

$1 + 3 = 4$ é par, portanto $C_{1,3} = M_{1,3} = 33$.

$4 + 3 = 7$ é ímpar, portanto $C_{4,3} = -M_{4,3} = -(-5) = 5$.

# Cofator

**Cofator é um número que se calcula a partir de uma matriz e de uma entrada dessa matriz. Bem parecido com o menor complementar.**

Se $i+j$ é um número par, $C_{i,j} = M_{i,j}$. Se $i+j$ é um número ímpar, $C_{i,j} = -M_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_{1,3} = ? \quad , \ C_{4,3} = ?$$

Já calculamos $M_{1,3} = 33$ e $M_{4,3} = -5$.

$1+3 = 4$ é par, portanto $C_{1,3} = M_{1,3} = 33$.

$4+3 = 7$ é ímpar, portanto $C_{4,3} = -M_{4,3} = -(-5) = 5$.

De forma geral, $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, pois $(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i+j \text{ é par,} \\ -1, & \text{se } i+j \text{ é ímpar.} \end{cases}$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$ desenvolvimento de Laplace pela coluna 3,

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{desenvolvimento de Laplace pela coluna 3,}$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$ desenvolvimento de Laplace pela coluna 3,

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} =$$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{desenvolvimento de Laplace pela coluna 3,}$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} = a_{13}C_{13} + a_{43}C_{43} =$$

# Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{desenvolvimento de Laplace pela coluna 3,}$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

$$\det(A) = a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}+a_{43}C_{43} = a_{13}C_{13}+a_{43}C_{43} = 3\cdot 33+(-1)\cdot 5 = 94.$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24} =$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}.$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}.$$

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \text{ logo } \quad C_{2,1} = (-1)^{2+1}M_{2,1} = 1.$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}.$$

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \text{ logo} \quad C_{2,1} = (-1)^{2+1}M_{2,1} = 1.$$

$$M_{2,2} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -25, \text{ logo} \quad C_{2,2} = (-1)^{2+2}M_{2,2} = -25.$$

# Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) =$$

Usaremos o desenvolvimento pela linha 2:

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}.$$

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \text{ logo} \quad C_{2,1} = (-1)^{2+1}M_{2,1} = 1.$$

$$M_{2,2} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -25, \text{ logo} \quad C_{2,2} = (-1)^{2+2}M_{2,2} = -25.$$

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-25) = 52.$$

# Sugestão de conteúdo adicional

**Por que o desenvolvimento de Laplace dá o mesmo resultado independentemente da linha ou coluna escolhida?**

# Sugestão de conteúdo adicional

**Por que o desenvolvimento de Laplace dá o mesmo resultado independentemente da linha ou coluna escolhida?**

**Ao usar Laplace para uma matriz** $5 \times 5$ **precisamos calcular 5 cofatores. Cada cofator é um determinante** $4 \times 4$**. Mas cada determinante** $4 \times 4$ **requer o cálculo de 4 cofatores, cada um deles um determinante** $3 \times 3$**... desisto!**

# Propriedades do determinante

**Existe alguma relação entre o determinante e as operações com matrizes?**

**Existem matrizes para as quais é mais fácil calcular o determinante?**

**É possível descobrir o que acontece com o determinante quando fazemos pequenas alterações na matriz?**

**As propriedades que veremos responderão a essas perguntas.**

# Propriedade 1 (conhecida como Teorema de Binet)

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

# Propriedade 1 (conhecida como Teorema de Binet)

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 13.$$

# Propriedade 1 (conhecida como Teorema de Binet)

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 13.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = -10.$$

# Propriedade 1 (conhecida como Teorema de Binet)

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 13.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = -10.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}, \quad \det(AB) = -130.$$

# Para que serve uma propriedade?

# Para que serve uma propriedade?

1. **Resolver problemas fazendo menos conta.**

# Para que serve uma propriedade?

## 1. Resolver problemas fazendo menos conta.

**Exemplo.** Seja $A =$[qualquer coisa] e $B =$[qualquer coisa]. Calcule det($A$), det($B$) e det($AB$).

# Para que serve uma propriedade?

## 1. Resolver problemas fazendo menos conta.

**Exemplo.** Seja $A =$[qualquer coisa] e $B =$[qualquer coisa]. Calcule $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(AB)$.

**Solução mais rápida.** Pela propriedade, basta calcular $\det(A)$ e $\det(B)$ e multiplicar os resultados para obter $\det(AB)$.

# Para que serve uma propriedade?

**1. Resolver problemas fazendo menos conta.**

**Exemplo.** Seja $A =$[qualquer coisa] e $B =$[qualquer coisa]. Calcule $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(AB)$.

**Solução mais rápida.** Pela propriedade, basta calcular $\det(A)$ e $\det(B)$ e multiplicar os resultados para obter $\det(AB)$.

**2. Resolver um problema em que os valores não foram explicitados.**

# Para que serve uma propriedade?

## 1. Resolver problemas fazendo menos conta.

**Exemplo.** Seja $A =$[qualquer coisa] e $B =$[qualquer coisa]. Calcule $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(AB)$.

**Solução mais rápida.** Pela propriedade, basta calcular $\det(A)$ e $\det(B)$ e multiplicar os resultados para obter $\det(AB)$.

## 2. Resolver um problema em que os valores não foram explicitados.

**Exemplo.** Determine $\det(B)$ sabendo que $\det(A) = -7$ e $\det(AB) = 28$.

# Para que serve uma propriedade?

## 1. Resolver problemas fazendo menos conta.

**Exemplo.** Seja $A =$[qualquer coisa] e $B =$[qualquer coisa]. Calcule $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(AB)$.

**Solução mais rápida.** Pela propriedade, basta calcular $\det(A)$ e $\det(B)$ e multiplicar os resultados para obter $\det(AB)$.

## 2. Resolver um problema em que os valores não foram explicitados.

**Exemplo.** Determine $\det(B)$ sabendo que $\det(A) = -7$ e $\det(AB) = 28$.

**Solução.** Como não possuímos as matrizes $A$ e $B$, não há como resolver sem a propriedade. A solução é

$$\det(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)} = \frac{28}{-7} = -4.$$

# Propriedade 2

Se $A$ é uma matriz quadrada, então $\det(A^T) = \det(A)$.

# Propriedade 2

Se $A$ é uma matriz quadrada, então $\det(A^T) = \det(A)$.

**Exemplo.**

Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Pela propriedade, não precisamos nem calcular para saber que $\det(A^T) = \det(A)$.

# Propriedade 3

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ multiplicando uma linha de $A$ por um número $k$, então $\det(B) = k \cdot \det(A)$ (também funciona com coluna).

# Propriedade 3

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ multiplicando uma linha de $A$ por um número $k$, então $\det(B) = k \cdot \det(A)$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \det(A) = 31.$$

# Propriedade 3

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ multiplicando uma linha de $A$ por um número $k$, então $\det(B) = k \cdot \det(A)$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \det(A) = 31.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -10 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ foi obtida a partir de $A$ multiplicando a linha 2 de $A$ por 5.

Pela propriedade, $\det(B) = 5 \cdot \det(A) = 5 \cdot 31 = 155$.

# Propriedade 3

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ multiplicando uma linha de $A$ por um número $k$, então $\det(B) = k \cdot \det(A)$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \det(A) = 31.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -10 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ foi obtida a partir de $A$ multiplicando a linha 2 de $A$ por 5.

Pela propriedade, $\det(B) = 5 \cdot \det(A) = 5 \cdot 31 = 155$.

Usando a regra de Sarrus para conferir:

$\det(B) = [2{\cdot}(-10){\cdot}(-1) + (-1){\cdot}0{\cdot}2 + 4{\cdot}5{\cdot}3] - [2{\cdot}(-10){\cdot}4 + 3{\cdot}0{\cdot}2 + (-1){\cdot}5{\cdot}(-1)] = 155.$

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) = ?$$

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) = ?$$

Se só uma linha tivesse sido multiplicada por 2, então o determinante seria multiplicado por 2. Como foram 3 linhas, então o determinante será multiplicado por $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Logo, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot (-4) = 32$.

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) = ?$$

Se só uma linha tivesse sido multiplicada por 2, então o determinante seria multiplicado por 2. Como foram 3 linhas, então o determinante será multiplicado por $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Logo, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot (-4) = 32$.

Trocando 2 por um número $k$ qualquer, a fórmula ficaria $\det(k \cdot A) = k^3 \cdot \det(A)$.

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) = ?$$

Se só uma linha tivesse sido multiplicada por 2, então o determinante seria multiplicado por 2. Como foram 3 linhas, então o determinante será multiplicado por $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Logo, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot (-4) = 32$.

Trocando 2 por um número $k$ qualquer, a fórmula ficaria $\det(k \cdot A) = k^3 \cdot \det(A)$.

Mas o 3 do expoente de $k$ é a ordem da matriz $A$ que usamos.

# Propriedade 4

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) = -4.$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) = ?$$

Se só uma linha tivesse sido multiplicada por 2, então o determinante seria multiplicado por 2. Como foram 3 linhas, então o determinante será multiplicado por $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Logo, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot (-4) = 32$.

Trocando 2 por um número $k$ qualquer, a fórmula ficaria $\det(k \cdot A) = k^3 \cdot \det(A)$.

Mas o 3 do expoente de $k$ é a ordem da matriz $A$ que usamos.

Se $A$ é uma matriz quadrada de ordem $n$, então $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.

# (Não) Propriedade 5

**Esta não é uma propriedade, é um alerta!**

# (Não) Propriedade 5

**Esta não é uma propriedade, é um alerta!**

**Não** é verdade que o determinante de uma soma de matrizes é a soma do determinantes. Não existe nenhuma propriedade relacionando $\det(A + B)$ com $\det(A)$ e $\det(B)$.

# Propriedade 6

Se $A$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então o determinante de $A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

# Propriedade 6

Se $A$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então o determinante de $A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 72 & 15 \\ 0 & -2/3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# Propriedade 6

Se $A$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então o determinante de $A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 72 & 15 \\ 0 & -2/3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$A$ é triangular superior. Logo $\det(A) = (-1) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{1}{2}$.

# Propriedade 7

Se $A$ possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$ (também funciona com coluna).

# Propriedade 7

Se $A$ possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 23 & -8 & 44 \\ 1 & 13 & -10 & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 43 & -20 \\ 93 & 100 & 1 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

# Propriedade 7

Se $A$ possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 23 & -8 & 44 \\ 1 & 13 & -10 & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 43 & -20 \\ 93 & 100 & 1 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ pela propriedade.

# Propriedade 7

Se $A$ possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$ (também funciona com coluna).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 23 & -8 & 44 \\ 1 & 13 & -10 & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 43 & -20 \\ 93 & 100 & 1 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ pela propriedade.

**Ainda bem! Imagina calcular esse determinante na mão?**

# Propriedade 8

Se $A$ possui duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

# Propriedade 8

Se $A$ possui duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

# Propriedade 8

Se $A$ possui duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ pela propriedade.

# Propriedade 9

Se $A$ possui duas linhas proporcionais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

# Propriedade 9

Se $A$ possui duas linhas proporcionais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

# Propriedade 9

Se $A$ possui duas linhas proporcionais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ pela propriedade.

# Propriedade 9

Se $A$ possui duas linhas proporcionais, então $\det(A) = 0$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ pela propriedade.

**Observação.** Quando uma linha é um número vezes outra, podemos chamá-las de *proporcionais* ou *múltiplas*.

# Propriedade 10

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ trocando duas linhas de posição, então $\det(B) = -\det(A)$ (também funciona com colunas).

# Propriedade 10

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ trocando duas linhas de posição, então $\det(B) = -\det(A)$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

# Propriedade 10

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ trocando duas linhas de posição, então $\det(B) = -\det(A)$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculando, obtemos $\det(A) = -4$. Pela propriedade, $\det(B) = -\det(A) = 4$. Também pela propriedade $\det(C) = -\det(B) = \det(A) = -4$.

# Propriedade 11

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ somando um múltiplo de uma linha a uma outra linha, então $\det(B) = \det(A)$ (também funciona com colunas).

# Propriedade 11

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ somando um múltiplo de uma linha a uma outra linha, então $\det(B) = \det(A)$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Propriedade 11

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ somando um múltiplo de uma linha a uma outra linha, então $\det(B) = \det(A)$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ & & \end{bmatrix}.$$

# Propriedade 11

Se uma matriz $B$ é obtida a partir de $A$ somando um múltiplo de uma linha a uma outra linha, então $\det(B) = \det(A)$ (também funciona com colunas).

**Exemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ & & \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade, $\det(B) = \det(A)$. (Faça a conta para conferir!)

# Propriedade 12

**Exemplo.**

Considere

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

# Propriedade 12

**Exemplo.**

Considere

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Todas as linhas iguais, exceto a linha 4. Linha 4 de $A_1$ mais linha 4 de $A_2$ igual à linha 4 de $A$. Esta última propriedade diz que

$$\det(A_1) + \det(A_2) = \det(A).$$

Fim.