UFSC - CTC - INE
INE5403 - FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

LISTA DE EXERCÍCIOS COMPLETA

NOTA: Esta lista foi elaborada com base, principalmente, nas seguintes referências:
* Kolman, Busby, Ross, "Discrete Mathematical Structures", Prentice-Hall Intl,5ed, 2003.
* Rosen, "Discrete Mathematics and its Aplications", 6 ed., McGraw-Hill, 2007.
* Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, "Introduction to Algorithms", 2 ed., MIT Press, 2001.

TOTAL = 131 páginas

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Métodos de Prova

2.1) Proposições

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 2.1-ex.1)* Quais declarações abaixo são proposições?.
   (a) 2 é um número positivo?
   (b) $x^2 + x + 1 = 0$
   (c) Estude Lógica.
   (d) Vai fazer sol em janeiro.
   (e) Se tiver queda na bolsa, eu perderei dinheiro.

2. *(Kolman5-seção 2.1-exs.2 e 3)* Forneça a negação das seguintes proposições:
   (a) $2+7 \leq 11$
   (b) 2 é um inteiro par e 8 é um inteiro ímpar
   (c) Vai chover amanhã ou não vai fazer sol amanhã.
   (d) Se você dirigir, eu irei a pé.

3. *(Kolman5-seção 2.1-exs.4 e 5)* Em cada caso abaixo, forme a conjunção e a disjunção de p e q.
   (a) p: $3+1<5$ $\quad$ q: $7 = 3 \times 6$
   (b) p: eu sou rico $\quad$ q: eu sou feliz
   (c) p: eu vou de carro $\quad$ q: eu vou chegar atrasado

4. *(Kolman5-seção 2.1-ex.6)* Determine o valor verdade de cada uma das seguintes proposições:
   (a) $2<3$ e 3 é um inteiro positivo
   (b) $2\geq 3$ e 3 é um inteiro positivo
   (c) $2<3$ e 3 não é um inteiro positivo
   (d) $2\geq 3$ e 3 não é um inteiro positivo

5. *(Kolman5-seção 2.1-ex.7)* Determine o valor verdade de cada uma das seguintes proposições:
   (a) $2<3$ ou 3 é um inteiro positivo
   (b) $2\geq 3$ ou 3 é um inteiro positivo
   (c) $2<3$ ou 3 não é um inteiro positivo
   (d) $2\geq 3$ ou 3 não é um inteiro positivo

6. *(Kolman5-seção 2.1-ex.10)* Qual é a negação da proposição "2 é par e -3 é negativo"?
   (a) 2 é par e -3 não é negativo
   (b) 2 é ímpar e -3 não é negativo
   (c) 2 é par ou -3 não é negativo
   (d) 2 é ímpar ou -3 não é negativo

7. *(Kolman5-seção 2.1-ex.11)* Qual é a negação da proposição "2 é par ou -3 é negativo"?
   (a) 2 é par ou -3 não é negativo
   (b) 2 é ímpar ou -3 não é negativo
   (c) 2 é par e -3 não é negativo
   (d) 2 é ímpar e -3 não é negativo

8. *(Kolman5-seção 2.2-ex.3)* Estabeleça o converso de cada uma das seguintes implicações:
   (a) Se 2+2=4, então eu não sou o presidente do Brasil.
   (b) Se eu não sou o presidente do Brasil, então eu vou a pé para o trabalho.
   (c) Se eu estou atrasado, então eu perdi o ônibus para o trabalho.
   (d) Se eu tiver tempo e não estiver muito cansado, então eu vou para o shopping.
   (e) Se eu tiver dinheiro suficiente, então eu vou comprar um carro e vou comprar uma casa.

9. *(Kolman5-seção 2.2-ex.4)* Estabeleça a contrapositiva de cada uma das implicações do exercício anterior.

10. *(Kolman5-seção 2.2-ex.5)* Determine o valor verdade de cada uma das seguintes proposições:
   (a) Se 2 é par, então São Paulo tem uma população numerosa.
   (b) Se 2 é par, então São Paulo tem poucos habitantes.
   (c) Se 2 é ímpar, então São Paulo tem uma população numerosa.
   (d) Se 2 é ímpar, então São Paulo tem poucos habitantes.

Para os próximos 2 exercícios, assuma o seguinte:

p : Eu vou estudar estruturas discretas. q : Eu vou ao cinema. r : Eu estou de bom humor.

11. *(Kolman5-seção 2.2-ex.6)* Escreva as seguintes proposições em termos de p, q e r e de conectivos lógicos.
   (a) Se eu não estou de bom humor, então eu vou ao cinema.
   (b) Eu não vou ao cinema e eu vou estudar estruturas discretas.
   (c) Eu vou ao cinema somente se eu não estudar estruturas discretas.
   (d) Se eu não estudar estruturas discretas, então eu não estou de bom humor.

12. *(Kolman5-seção 2.2-ex.7)* Escreva em português as sentenças correspondentes às proposições:
   (a) $((\neg p) \wedge q) \Rightarrow r$
   (b) $r \Rightarrow (p \vee q)$
   (c) $(\neg r) \Rightarrow (\neg q \vee p)$
   (d) $(q \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow r$

13. *(Kolman5-seção 2.2-exs.10-12)* Examinando as tabelas-verdade, determine se cada uma das seguintes proposições é uma tautologia, uma contingência ou uma contradição.

    (a) $p \wedge \neg p$

    (b) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

    (c) $q \rightarrow (q \rightarrow p)$

    (d) $q \vee (\neg q \wedge p)$

    (e) $(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$

    (f) $(p \wedge q) \rightarrow p$

    (g) $p \rightarrow (q \wedge p)$

14. *(Kolman5-cap. 2-"Key ideas for review")* Rever todos os conceitos de lógica proposicional apresentados em aula: proposição, variável proposicional, proposição composta, conectivos lógicos, conjunção, disjunção, condicional, bicondicional, inversa, conversa, contrapositiva, equivalência, tautologia, contradição, contingência, equivalência lógica.

15. *(Extras)* Para cada par de proposições P e Q abaixo, estabelecer se $P \Leftrightarrow Q$:

    (a) $P = p, \qquad Q = p \vee q$

    (b) $P = p \wedge q, \qquad Q = \neg p \vee \neg q$

    (c) $P = p \wedge q, \qquad Q = \ p \vee \neg q$

    (d) $P = p \wedge (\neg q \vee r), \qquad Q = p \vee (q \wedge \neg r)$

    (e) $P = p \wedge (q \vee r), \qquad Q = (p \vee q) \wedge (p \wedge r)$

    (f) $P = p \rightarrow q, \qquad Q = \neg q \rightarrow \neg p$

    (g) $P = p \rightarrow q, \qquad Q = q \leftrightarrow p$

    (h) $P = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), \qquad Q = p \rightarrow r$

    (i) $P = (p \rightarrow q) \rightarrow r, \qquad Q = p \rightarrow (q \rightarrow r)$

    (j) $P = (s \rightarrow (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s), \qquad Q = p \vee t$

Para os próximos 4 exercícios, determine se os argumentos dados são válidos ou não. Se forem válidos, identifique a regra de inferência que foi utilizada.

16. *(Kolman5-seção 2.3-ex.1)*

    Se eu vou de carro para o trabalho, então eu chego cansado.

    Eu não estou cansado quando eu chego no trabalho.

    Eu não vou de carro para o trabalho.

17. *(Kolman5-seção 2.3-ex.2)*

    Se eu for de carro para o trabalho, então eu chegarei cansado.

    Eu vou de carro para o trabalho.

    Eu vou chegar cansado no trabalho.

18. *(Kolman5-seção 2.3-ex.5)*

    Eu vou ficar famoso ou eu não vou me tornar um escritor.

    Eu vou me tornar um escritor.

    Eu vou ficar famoso.

19. *(Kolman5-seção 2.3-ex.7)*

    Se eu tiver força de vontade e talento, então eu vou me tornar um músico.

    Se eu me tornar um músico, então eu serei feliz.

    Se eu não for feliz, então eu não tive força de vontade ou não tive talento.

20. *(Rosen6-seção 1.5-ex.5)* Construa um argumento usando regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Lúcio trabalha duro", "Se o Lúcio trabalha duro, então ele é uma pessoa sem graça" e "Se Lúcio é uma pessoa sem graça, ele não vai conseguir o emprego" implicam na conclusão: "Lúcio não vai conseguir o emprego".

21. *(Rosen6-seção 1.5-ex.6)* Construa um argumento usando regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Se não chover ou se não estiver nublado, então a regata ocorrerá e a demonstração de salvamento vai continuar", "Se a regata ocorrer, então o troféu vai ser entregue" e "O troféu não foi entregue" implicam na conclusão: "Choveu".

22. *(Rosen6-seção 1.5-ex.19)* Determine se cada um dos argumentos abaixo é válido. Se for, qual regra de inferência está sendo usada? Se não, qual é o erro lógico que ocorre?

    (a) Se n é um número real tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Agora suponha que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.

    (b) O número $\log_2(3)$ é irracional se não for a razão de dois inteiros. Portanto, uma vez que $\log_2(3)$ não pode ser escrito na forma a/b, aonde a e b são inteiros, ele é irracional.

    (c) Se n é um número real com $n > 3$, então $n^2 > 9$. Agora suponha que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.

    (d) Se n é um número real com $n > 2$, então $n^2 > 4$. Agora suponha que $n \leq 2$. Então $n^2 \leq 4$.

23. *(Rosen6-seção 1.5-ex.35)* Determine se o argumento a seguir é válido: "Se o Super-homem tivesse capacidade e vontade para prevenir o mal, ele o faria. Se o Super-homem fosse incapaz de prevenir o mal, ele não teria superpoderes; se ele não tivesse vontade de prevenir o mal, ele seria um mau-caráter. Ora, o Super-homem não previne o mal. Mas, se o Super-homem existe, ele tem superpoderes e não é mau-caráter. Portanto, o Super-homem não existe."

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Métodos de Prova

2.1) Proposições

Lista de Exercícios

1. São proposições: (d) e (e).
2. Negações:
   (a) Não é verdade que $2 + 7 \leq 11$ (ou: $2 + 7 > 11$)
   (b) 2 é um inteiro ímpar ou 8 é um inteiro par
   (c) Não vai chover amanhã e vai fazer sol amanhã.
   (d) Não é verdade que, se você dirigir, eu irei a pé. (Ou: Você vai dirigir e eu não irei a pé.)
3. Conjunção e disjunção de p e q:
   (a) $3 + 1 < 5$ e $7 = 3 \times 6$
   $3 + 1 < 5$ ou $7 = 3 \times 6$
   (b) Eu sou rico e eu sou feliz.
   Eu sou rico ou eu sou feliz.
   (c) Eu vou de carro e eu vou chegar atrasado.
   Eu vou de carro ou eu vou chegar atrasado.
4. Valores verdade: V, F, F, F
5. Valores verdade: V, V, V, F
6. Negação: 2 é ímpar ou -3 não é negativo.
7. Negação: 2 é ímpar e -3 não é negativo
8. Conversos:
   (a) Se eu não sou o presidente do Brasil, então 2+2=4.
   (b) Se eu vou a pé para o trabalho, então eu não sou o presidente do Brasil.
   (c) Se eu perdi o ônibus para o trabalho, então eu estou atrasado.
   (d) Se eu vou para o shopping, então eu tenho tempo e não estou muito cansado.
   (e) Se eu comprar um carro e uma casa, então eu tenho dinheiro suficiente.

9. Contrapositivas:
   (a) Se eu sou o presidente do Brasil, então $2 + 2 \neq 4$.
   (b) Se eu não vou a pé para o trabalho, então eu sou o presidente do Brasil.
   (c) Se eu não perdi o ônibus para o trabalho, então eu não estou atrasado.
   (d) Se eu não vou para o shopping, então eu não tenho tempo ou eu não estou muito cansado.
   (e) Se eu não comprar um carro ou não comprar uma casa, então eu não tenho dinheiro suficiente.

10. Valores verdade: V, F, V, V

11. Proposições em termos de p, q e r e de conectivos lógicos:
    (a) $\neg r \rightarrow q$
    (b) $\neg q \land p$
    (c) $q \rightarrow \neg p$
    (d) $\neg p \rightarrow \neg r$

12. Sentenças em português:
    (a) Se eu não estudo estruturas discretas e vou para o cinema, então eu estou de bom humor.
    (b) Se eu estou de bom humor, então eu estudo estruturas discretas ou vou para o cinema.
    (c) Se eu não estou de bom humor, então eu não vou para o cinema ou eu estudo estruturas discretas.
    (d) Eu vou para o cinema e eu estudo estruturas discretas se e somente se eu estou de bom humor.

13. Fazer as tabelas-verdade respectivas.

14. Rever os conceitos indicados.

15. *(Extras)* Fazer as tabelas respectivas para $P \leftrightarrow Q$ e verificar se são tautologias.

16. Válido, por Modus Tollens: $((c \rightarrow t) \land \neg t) \Rightarrow \neg c$

17. Válido, por Modus Ponens: $((c \rightarrow t) \land c) \Rightarrow t$

18. Válido, por Silogismo Disjuntivo: $((f \lor \neg e) \land e) \Rightarrow f$

19. Válido, por Silogismo Hipotético (+contrapositiva):

$$(((v \land t) \rightarrow m) \land (m \rightarrow f)) \quad \Rightarrow \quad ((v \land t) \rightarrow f) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg f \Rightarrow (\neg v \lor \neg t))$$

20. Hipóteses:

    (a) d
    (b) $d \to s$
    (c) $s \to \neg e$

    Argumento:

    d) s (a, b, Modus Ponens)
    e) $\neg e$ (c, d, Modus Ponens)

21. Hipóteses:

    (a) $(\neg c \vee \neg n) \to (r \wedge s)$
    (b) $r \to t$
    (c) $\neg t$

    Argumento:

    d) $\neg r$ (b, c, Modus Tollens)
    e) $\neg r \vee \neg s$ (d, Regra da adição)
    f) $c \wedge n$ (e, a, Modus Tollens)
    g) c (f, Regra da simplificação)

22. Análise dos argumentos:

    (a) Não é válido (falácia de afirmar a conclusão).
    (b) Válido, por Modus Ponens.
    (c) Válido, por Modus Tollens.
    (d) Não é válido (falácia de negar a hipótese).

23. Válido (por quê?).

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Métodos de Prova

2.2) Predicados e quantificadores

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 1.3-ex.1)* Seja $P(x)$ a declaração "$x \leq 4$". Determine os valores verdade de:
   (a) $P(0)$
   (b) $P(4)$
   (c) $P(6)$
2. *(Rosen6-seção 1.3-ex.3)* Seja $Q(x, y)$ a declaração "x é a capital de y". Quais os valores verdade de:
   (a) $Q(florianopolis, SC)$
   (b) $Q(campinas, SP)$
   (c) $Q(curitiba, PR)$
   (d) $Q(brasilia, RJ)$
3. *(Rosen6-seção 1.3-ex.5)* Seja $P(x)$ a declaração "x gasta mais do que 5 horas por dia em sala de aula", aonde o Universo de Discurso consiste de todos os estudantes. Expresse cada uma das quantificações abaixo em português:
   (a) $\exists x \ P(x)$
   (b) $\forall x \ P(x)$
   (c) $\exists x \ \neg P(x)$
   (d) $\forall x \ \neg P(x)$
4. *(Rosen6-seção 1.3-ex.8)* Traduza as proposições abaixo para o português, aonde $C(x)$ é "x é um coelho" e $S(x)$ é "x caminha pulando", sendo que o UD consiste de todos os animais.
   (a) $\forall x \ (C(x) \rightarrow S(x))$
   (b) $\forall x \ (C(x) \wedge S(x))$
   (c) $\exists x \ (C(x) \rightarrow S(x))$
   (d) $\exists x \ (C(x) \wedge S(x))$

5. *(Rosen6-seção 1.3-ex.10)* Seja $G(x)$ a declaração "x tem um gato", seja $C(x)$ a declaração "x tem um cachorro" e seja $P(x)$ a declaração "x tem um porquinho da Índia". Expresse cada uma das proposições abaixo em termos de $G(x)$, $C(x)$, $P(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O UD consiste de todos os estudantes na sua turma de fundamentos.

   (a) Um estudante na sua turma tem um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

   (b) Todos os estudantes na sua turma têm um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

   (c) Alguns estudantes na sua turma têm um gato e um porquinho da Índia, mas não um cachorro.

   (d) Nenhum estudante na sua turma tem um gato, um cachorro e um porquinho da Índia.

   (e) Para cada um dos três animais, gatos, cachorros e porquinhos da Índia, existe um estudante na sua turma que possui um destes três animais como animal de estimação.

6. *(Rosen6-seção 1.3-ex.12)* Seja $Q(x)$ a declaração "$x+1 > 2x$". Se o UD consiste de todos os inteiros, quais são os valores verdade de:

   (a) $Q(0)$

   (b) $Q(-1)$

   (c) $Q(1)$

   (d) $\exists x\ Q(x)$

   (e) $\forall x\ Q(x)$

   (f) $\exists x\ \neg Q(x)$

   (g) $\forall x\ \neg Q(x)$

7. *(Rosen6-seção 1.3-ex.13)* Determine o valor verdade de cada uma das proposições abaixo, se o UD consiste de todos os inteiros.

   (a) $\forall n(n+1 > n)$

   (b) $\exists n(2n = 3n)$

   (c) $\exists n(n = -n)$

   (d) $\forall n(n^2 \geq n)$

8. *(Rosen6-seção 1.3-ex.16)* Determine o valor verdade de cada uma das proposições abaixo, se o UD de cada variável consiste de todos os números reais.

   (a) $\exists x(x^2 = 2)$

   (b) $\exists x(x^2 = -1)$

   (c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$

   (d) $\forall x(x^2 \neq x)$

9. *(Rosen6-seção 1.3-ex.19)* Suponha que o UD da função proposicional $P(x)$ consiste dos inteiros 1,2,3,4 e 5. Expresse as declarações abaixo sem usar quantificadores use negações, disjunções e conjunções).

   (a) $\exists x P(x)$

   (b) $\forall x P(x)$

   (c) $\neg\exists x P(x)$

   (d) $\neg\forall x P(x)$

   (e) $\forall x((x \neq 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$

10. *(Rosen6-seção 1.3-ex.24)* Traduza cada uma das proposições abaixo de duas maneiras em operações lógicas utilizando predicados, quantificadores e conectivos lógicos. Primeiro, assuma que o UD consiste de todos os estudantes na sua turma; depois, assuma que o UD consiste de todas as pessoas.

    (a) Todos na sua sala possuem um telefone celular.

    (b) Existe alguém na sua sala que já assistiu um filme brasileiro.

    (c) Há uma pessoa na sua turma que não sabe nadar.

    (d) Todos os estudantes na sua sala sabem resolver equações quadráticas.

    (e) Alguns estudantes na sua sala não querem ser ricos.

11. *(Rosen6-seção 1.3-ex.31)* Suponha que o UD de $Q(x, y, z)$ consista de triplas $x, y, z,$ aonde x=0,1 ou 2, y=0 ou 1, e z=0 ou 1. Explicite as proposições abaixo utilizando disjunções e conjunções:

    (a) $\forall y Q(0, y, 0)$

    (b) $\exists x Q(x, 1, 1)$

    (c) $\exists z \neg Q(0, 0, z)$

    (d) $\exists x \neg Q(x, 0, 1)$

12. *(Rosen6-seção 1.3-ex.32)* Expresse cada uma das declarações abaixo usando quantificadores. Então, forme a negação da declaração de modo que não haja nenhuma negação à esquerda de um quantificador. A seguir, expresse a negação em português simples. (Não use apenas os termos "não é verdade que...")

    (a) Todos os cachorros têm pulgas.

    (b) Existe um cavalo que sabe somar.

    (c) Todo koala consegue subir em árvores.

    (d) Nenhum macaco sabe falar francês.

    (e) Existe um porco que sabe nadar e que consegue pegar peixes.

13. *(Rosen6-seção 1.3-ex.39)* Traduza as especificações abaixo para o português, aonde $F(p)$ é "A impressora p não está funcionando", $B(p)$ é "A impressora p está ocupada", $L(j)$ é "o job de impressão j se perdeu" e $Q(j)$ é "O job de impressão j está na fila".

    (a) $\exists p(F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists j L(j)$

    (b) $\forall p B(p) \rightarrow \exists j Q(j)$

    (c) $\exists j(Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists p F(p)$

    (d) $(\forall p B(p) \wedge \forall j Q(j)) \rightarrow \exists j L(j)$

14. *(Rosen6-seção 1.3-ex.50)* Mostre que $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ e $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

15. *(Rosen6-seção 1.3-ex.51)* Mostre que $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ e $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

16. *(Rosen6-seção 1.3-ex.52)* A notação $\exists! x P(x)$ denota a proposição: "Existe um único x tal que $P(x)$ é verdadeiro". Se o universo de discurso consiste de todos os inteiros, determine o valor verdade de:

   (a) $\exists! x(x > 1)$
   (b) $\exists! x(x^2 = 1)$
   (c) $\exists! x(x + 3 = 2x)$
   (d) $\exists! x(x = x + 1$

17. *(Rosen6-seção 1.5-ex.10)* Para cada conjunto de premissas abaixo, quais as conclusões relevantes que podem ser tiradas? Especifique as regras de inferência usadas para obter cada conclusão a partir das premissas.

   (a) "Se eu jogo futebol, então eu fico de mau humor no dia seguinte", "Eu tomo banho de banheira se eu estou de mau humor", "Eu nào tomei banho de banheira",
   (b) "Se eu trabalho, ou o dia está ensolarado ou parcialmente ensolarado", "Eu trabalhei na segunda passada ou eu trabalhei na sexta passada", "Na terça, o dia não estava ensolarado", "Na sexta, o dia não estava parcialmente ensolarado".
   (c) "Todos os insetos têm seis pernas". "Mariposas são insetos". "Aranhas não têm seis pernas". "Aranhas comem mariposas".
   (d) "Todo estudante tem Internet em casa". "Luiz Henrique não tem Internet em casa". "Rodolfo tem Internet em casa".
   (e) "Toda comida saudável tem gosto ruim". "Comer agrião é saudável". "Você só come o que tem gosto bom". "Você não come agrião". "Hambúrguers não são saudáveis".
   (f) "Eu estou sempre sonhando ou tendo alucinações", "Eu não estou sonhando", "Quando eu estou tendo alucinações, eu vejo elefantes correndo rua abaixo".

18. *(Rosen6-seção 1.5-ex.15)* Determine se cada um dos argumentos abaixo é correto ou incorreto e explique por quê.

   (a) Todos os estudantes nesta sala entendem Lógica. Luís Inácio é um estudante nesta sala. Portanto, Luís Inácio entende Lógica.
   (b) Todo formando em Ciência da Computação cursa Fundamentos. Ângela está cursando Fundamentos. Portanto, Ângela é formanda em CC.
   (c) Todo papagaio gosta de fruta. O meu pássaro de estimação não é um papagaio. Portanto, o meu pássaro de estimação não gosta de fruta.
   (d) Todo mundo que come granola todo dia é saudável. José não é saudável. Portanto, José não come granola todo dia.

19. *(Rosen6-seção 1.5-ex.17)* Determine o que está errado com argumento a seguir. Seja $H(x)$ "x está feliz". Dada a premissa $\exists x H(x)$, concluímos que $H(Ideli)$. Portanto, Ideli está feliz.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

2) MÉTODOS DE PROVA

2.2) PREDICADOS E QUANTIFICADORES

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Valores verdade: V, V, F

2. Valores verdade: V, F, V, F

3. (a) "Existe um estudante que gasta mais do que 5 horas por dia em sala de aula."
   (b) "Todos os estudantes gastam mais do que 5 horas por dia em sala de aula."
   (c) "Existe (pelo menos) um estudante que não gasta mais do que 5 horas por dia em sala de aula."
   (d) "Nenhum estudante gasta mais do que 5 horas por dia em sala de aula."

4. (a) "Todos os coelhos caminham pulando."
   (b) "Todos os animais são coelhos e caminham pulando." (??)
   (c) "Existem animais tais que, se forem coelhos, então caminham pulando."
   (NOTA: isto seria verdade para todo animal que não seja um coelho. (??))
   (d) "Existe um coelho que caminha pulando."

5. (a) $\exists x\ (G(x) \land C(x) \land P(x))$
   (b) $\forall x\ (G(x) \land C(x) \land P(x))$
   (c) $\exists x\ (G(x) \land \neg C(x) \land P(x))$
   (d) $\forall x\ \neg(G(x) \land C(x) \land P(x))$
   (e) $\forall x\ (G(x) \lor C(x) \lor P(x))$

6. Valores verdade: V, F, F, V, F, V, F

7. Valores verdade: V, F, V, V

8. Valores verdade: V, F, V, F

9. (a) $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$
   (b) $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5)$
   (c) $\neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4) \wedge \neg P(5)$
   (d) $\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4) \vee \neg P(5)$
   (e) $(P(1) \wedge P(2) \wedge P(4) \wedge P(5)) \vee (\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4) \vee \neg P(5))$

10. (a) $\forall x, C(x)$ e $\forall x, T(x) \rightarrow C(x)$
    (b) $\exists x, B(x)$ e $\exists x, T(x) \wedge B(x)$
    (c) $\exists x, \neg N(x)$ e $\exists x, (T(x) \wedge \neg N(x))$
    (d) $\forall x, Q(x)$ e $\forall x, T(x) \rightarrow Q(x)$
    (e) $\exists x, \neg R(x)$ e $\exists x, T(x) \wedge \neg R(x)$

11. (a) $Q(0,0,0) \wedge Q(0,1,0)$
    (b) $Q(0,1,1) \vee Q(1,1,1) \vee Q(2,1,1)$
    (c) $\neg Q(0,0,0) \wedge \neg Q(0,0,1)$
    (d) $\neg Q(0,0,1) \vee \neg Q(1,0,1) \vee \neg Q(2,0,1)$

12. Semelhante aos exemplos vistos de aula.

13. (a) Se existe uma impressora que não esteja funcionando e que esteja ocupada, então algum job de impressão se perdeu.
    (b) Se toda impressora está ocupada, então tem um job na fila.
    (c) Se tem algum job que está na fila e que está perdido, então alguma impressora não está funcionando.
    (d) Se toda impressora está ocupada e se todo job está na fila, então algum job se perdeu.

14. Apresente um contra-exemplo sobre um universo de discurso pequeno (ex.: $U = \{a, b\}$)

15. Apresente um contra-exemplo sobre um universo de discurso pequeno (ex.: $U = \{a, b\}$)

16. Valores verdade: F, F, V, F

17. (a) "Eu não joguei futebol".
    (b) –
    (c) "Mariposas têm 6 pernas.". "Aranhas não são insetos."
    (d) "Luiz Henrique não é estudante."
    (e) "Agrião tem gosto ruim", "Você não come agrião."
    (f) "Eu estou tendo alucinações", "Eu estou vendo elefantes correndo rua abaixo".

18. (a) Correto.
    (b) Incorreto.
    (c) Incorreto.
    (d) Correto.

19. Existe alguém que está feliz, mas não há elementos para concluir que esta pessoa é a Ideli.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Métodos de Prova

2.3) Provas matemáticas

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 1.6-ex.1)* Use uma prova direta para mostrar que a soma de dois inteiros ímpares é par.
2. *(Rosen6-seção 1.6-ex.3)* Prove que o quadrado de um número par é sempre um número par, usando uma prova direta.
3. *(Rosen6-seção 1.6-ex.6)* Use uma prova direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.
4. *(Rosen6-seção 1.6-ex.17)* Prove que se n é um inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par, usando:
   (a) uma prova indireta
   (b) uma prova por contradição
5. *(Rosen6-seção 1.6-ex.31)* Mostre que as três declarações a seguir são equivalentes:
   (i) $3x + 2$ é um inteiro par
   (ii) $x + 5$ é um inteiro ímpar
   (iii) x^2 é um inteiro par
6. *(Rosen6-seção 1.7-ex.3)* Prove que se x e y são números reais, então $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. (Dica: use uma prova por casos, em que os dois casos correspondem a $x \geq y$ e $x < y$, respectivamente.)
7. *(Rosen6-seção 1.3-ex.35)* Ache um contraexemplo, se possível, para estas asserções universalmente quantificadas, aonde o UD para todas as variáveis consiste de todos os números inteiros.
   (a) $\forall x(x^2 \geq x)$
   (b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$
   (c) $\forall x(x = 1)$
8. *(Rosen6-seção 1.6)* Mostre que a declaração "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros" é falsa.
9. *(Rosen6-seção 1.6)* Forneça uma prova direta de que se m e n são quadrados perfeitos, então nm também é um quadrado perfeito (Nota: um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b tal que $a = b^2$).
10. *(Rosen6-seção 1.7 - ex.1)* Mostre que $n^2 + 1 \geq 2^n$ se n é um inteiro positivo, com $n \leq 4$. (Dica: use uma prova exaustiva.)

11. *(Rosen6-seção 1.7)* Prove que os únicos inteiros positivos consecutivos não maiores do que 100 que são potências perfeitas são 8 e 9. (Um inteiro é uma potência perfeita se for igual a n^a, aonde a é um inteiro > 1.) (Dica: ache casos adequados.)

12. *(Rosen6-seção 1.6-ex.36)* Prove que o quadrado de um inteiro sempre termina com $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9. (Dica: note que qualquer inteiro sempre pode ser escrito na forma $n = 10.a + b$, aonde $b = 0, 1, ..., 9$.)

13. *(Rosen6-seção 1.7-ex.21)* A média harmônica de dois números reais x e y é igual a $2xy/(x + y)$. Baseado nas médias geométrica e harmônica de diferentes pares de números reais positivos, formule uma conjectura a respeito dos tamanhos relativos destas duas médias e prove a sua conjectura.

14. *(Rosen6-seção 1.7-ex.23)* Escreva os números $1, 2, \ldots, 2n$ em um quadro, aonde n é um inteiro ímpar. Pegue dois números quaisquer dentre eles, j e k, escreva $|j - k|$ no quadro e apague j e k. Continue este processo até que apenas um inteiro esteja escrito no quadro. Prove que este inteiro deve ser ímpar.

15. *(Rosen6-seção 1.7-ex.25)* Formule uma conjectura sobre os dígitos decimais que aparecem como dígitos decimais finais da quarta potência de um inteiro. Prove a sua conjectura usando uma prova por casos.

16. *(Rosen6-seção 1.7-ex.27)* Prove que não existe inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.

17. *(Rosen6-seção 1.7-ex.29)* Prove que não existem soluções em inteiros positivos x e y para a equação $x^4 + y^4 = 625$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

2) Métodos de Prova

2.3) Provas matemáticas

Lista de Exercícios

1. Seja os inteiros ímpares $n = 2k + 1$ e $m = 2l + 1$. Então $n + m = 2(k + l + 1)$ é par.
2. Suponha que n é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro k. Portanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Uma vez que escrevemos n^2 como duas vezes um inteiro, concluímos que n^2 é par.
3. Semelhante aos anteriores.
4. (a) Prova indireta: Assuma que n é ímpar, de modo que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3)$. Já que $n^3 + 5$ é duas vezes um inteiro, ele é par.
   (b) Prova por contradição: Suponha que $n^3 + 5$ é ímpar e que n é ímpar. Uma vez que o produto de dois ímpares é ímpar, segue que n^2 é ímpar e então que n^3 é ímpar. Mas então $5 = (n^3 + 5) - n^3$ teria que ser par pois é a diferença de dois ímpares. Portanto, a suposição de que $n^3 + 5$ e n eram ambos ímpares está errada.
5. Vamos mostrar que as 3 afirmações são equivalentes a x ser par. Se x é par, então $x = 2k$ para algum inteiro k. Portanto, $3x + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, o qual é par, pois foi escrito na forma $2t$. De maneira similar, $x + 5 = 2k + 5 = 2k + 4 + 1 = 2(k + 2) + 1$, de modo que $x + 5$ é ímpar. Finalmente, $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, de modo que x^2 é par. Ainda falta mostrar os conversos, para os quais usaremos provas indiretas... Assuma que x não é par. Logo, x pode ser escrito como $x = 2k + 1$ para algum inteiro k. Então, $3x + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 5 = 2(3k + 2) + 1$, o qual não é par. De modo similar, $x + 5 = 2k + 1 + 5 = 2(k + 3)$, de modo que $x + 5$ é par. O fato de que x^2 é ímpar já foi provado em aula.
6. Se $x \leq y$, então $max(x, y) + min(x, y) = y + x = x + y$. Se $x \geq y$, então $max(x, y) + min(x, y) = x + y$. Uma vez que estes são os dois únicos casos, a igualdade é válida.
7. (a) –
   (b) $x = 0$
   (c) $x = 2$
8. Contraexemplo: 3. (Os únicos quadrados perfeitos ≤ 3 são $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Não há como escrever 3 como a soma deles.)
9. Se m é quadrado perfeito, então $m = k^2$, para algum k. Da mesma forma, $n = m^2$. Daí, $mn = k^2m^2 = (km)^2 = l^2$. Desta forma, existe um inteiro l tal que $mn = l^2$ e, portanto, mn é um quadrado perfeito.
10. Verificar para $n = 1, 2, 3$ e 4.

11. Lista das potências perfeitas não maiores do que 100:

   - quadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100
   - cubos: 1, 8, 27 e 64
   - quartas potências: 1, 16 e 81
   - quintas potências: 1 e 32
   - sextas potências: 1 e 64

   Fora o 1, não há potências de inteiros positivos maiores do que a sexta que não excedam 100
   Olhando a lista, vemos que a única possibilidade de sequência é: $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$.

12. - Primeiro, note que $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$, de modo que o último dígito de n^2 é o mesmo que o de b^2
   - Por outro lado, o dígito decimal final de b^2 é o mesmo que o de $(10 - b)^2 = 100 - 20b + b^2$
   - Disto, obtemos os 6 casos $(5 + 1)$ dados por

     último dígito = $\{1 \text{ ou } 9\}$ $\Rightarrow$ Final = 1
     último dígito = $\{2 \text{ ou } 8\}$ $\Rightarrow$ Final = 4
     último dígito = $\{3 \text{ ou } 7\}$ $\Rightarrow$ Final = 9
     último dígito = $\{4 \text{ ou } 6\}$ $\Rightarrow$ Final = 6
     último dígito = $\{5\}$ $\Rightarrow$ Final = 5
     último dígito = $\{0\}$ $\Rightarrow$ Final = 0

13. "A média harmônica de 2 nros reais positivos x e y é sempre $<$ do que a sua média geométrica."

   Prova por raciocínio invertido:

   - $\frac{2xy}{(x+y)} < \sqrt{xy}$
   - multiplicando os dois lados por $\frac{(x+y)}{2\sqrt{xy}}$, obtemos $\sqrt{xy} < \frac{(x+y)}{2}$
   - daí, já foi provado em aula que "média geométrica $<$ média aritmética"

14. A paridade da soma dos números escritos no quadro nunca muda, pois:

   - $(j + k)$ e $|j - k|$ têm mesma paridade (!)
   - a cada passo reduzimos a soma de $j + k$ mas a aumentamos de $|j - k|$
   - portanto, o inteiro no final do processo deve possuir a mesma paridade que:

     $1 + 2 + \ldots + (2n) = n(2n + 1)$
   - a qual é ímpar, pois n é impar

15. Primeiras 11 quartas potências: 0, 1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000.

    Conjectura: o dígito final de uma 4^a potência é 0, 1, 5 ou 6.

    Prova: note que todo inteiro n pode ser escrito na forma $n = \pm(10k + l)$, aonde l é um inteiro entre 0 e 9. Analisando os casos possíveis, obtemos (M é algum múltiplo de 10):

    - $(10k + 0)^4 = 10000k^4 + 0$
    - $(10k + 1)^4 = 10000k^4 + M.k^3 + M.k^2 + M.k + 1$
    - $(10k + 2)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 16$
    - $(10k + 3)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 81$
    - $(10k + 4)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 256$
    - $(10k + 5)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 625$
    - $(10k + 6)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 1296$
    - $(10k + 7)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 2401$
    - $(10k + 8)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 4096$
    - $(10k + 9)^4 = 10000k^4 + M.(...) + 6561$

    Todos os casos possíveis estão listados. Logo, o dígito final é mesmo 0, 1, 5 ou 6.

16. Uma vez que $n^3 > 100$ para todo $n > 4$, só é preciso ver que $n = 1, n = 2, n = 3$ e $n = 4$ não satisfazem a igualdade.

17. Uma vez que $5^4 = 625$, tanto x como y <u>devem</u> ser menores do que 5.

    Mas: $x^4 + y^4 \ \leq\ 4^4 + 4^4 \ =\ 512 \ <\ 625$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

3) Coleções

3.1) Conjuntos

Lista de Exercícios

(Kolman-seção 1.2-exs.1,3) Para os próximos 2 exercícios, considere:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ $A = \{a, b, c, g\}$ $B = \{d, e, f, g\}$ $C = \{a, c, f\}$

1. Compute:
a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) $A \cap C$ d) $(A \cup B) - C$ e) $A - B$
f) $\overline{A}$ g) $A \oplus B$ h) $A \oplus C$ i) $(A \cap B) - C$

2. Compute:
a) $A \cup B \cup C$ b) $A \cap B \cap C$ c) $A \cap (B \cup C)$
d) $(A \cup B) \cap C$ e) $\overline{A \cup B}$ f) $\overline{A \cap B}$

(Kolman-seção 1.2-exs.5,7) Para os próximos 2 exercícios, considere:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{2, 4, 5, 9\}$
$C = \{x|$ tal que x é um inteiro positivo e $x^2 \leq 16\}$ $D = \{7, 8\}$

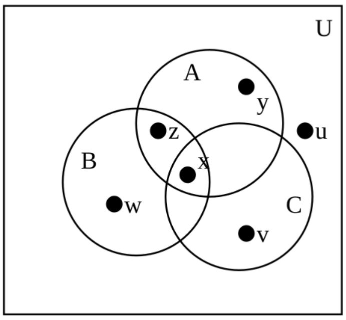
3. Compute:
a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $A \cap C$ d) $C \cap D$ e) $A - B$ f) $B - A$ g) $\overline{A}$ h) $A \oplus B$

4. Compute:
a) $A \cup B \cup C$ b) $B \cup C \cup D$ c) $A \cap B \cap C$ d) $B \cap C \cap D$ e) $\overline{A \cup A}$ f) $\overline{A \cap A}$

(Kolman-seção 1.2-ex.11) Para o exercício a seguir, considere:
U = conjunto de todos os números reais
$A = \{x|$ tal que x é uma solução de $x^2 - 1 = 0\}$ $B = \{-1, 4\}$

5. Compute: a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A \cap B}$

(Kolman-seção 1.2-exs.12,13) Os 2 exercícios a seguir se referem à seguinte figura:



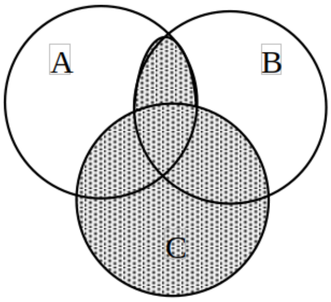
6. Responda com V ou F:

   a) $y \in A \cap B$ b) $x \in B \cup C$ c) $w \in B \cap C$ d) $u \notin C$

7. Responda com V ou F:

   a) $x \in A \cap B \cap C$ b) $y \in A \cup B \cup C$ c) $z \in A \cap C$ d) $v \in B \cap C$

8. *(Kolman-seção 1.2-ex.14)* Expresse a região sombreada na figura abaixo em termos de uniões e intersecções dos conjuntos A, B e C (várias respostas são possíveis).



9. *(Kolman-seção 1.2-ex.31)* Prove que $A \cap B \subseteq A$.

10. *(Kolman-seção 1.2-ex.35)* Suponha que $A \oplus B = A \oplus C$. Será que isto garante que $B = C$? Justifique sua resposta.

11. *(Kolman-seção 1.2-ex.37)* Se $A \cup B = A \cup C$, devemos ter $B = C$? Explique.

12. *(Kolman-seção 1.2-ex.38)* Se $A \cap B = A \cap C$, devemos ter $B = C$? Explique.

13. *(Kolman-seção 1.2-ex.39)* Prove que se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então $A \cup C \subseteq B \cup D$ e $A \cap C \subseteq B \cap D$.

14. *(Rosen6-seção 2.4-ex.31)* Determine se cada um destes conjuntos é contável ou incontável. Para aqueles que forem contáveis, mostre uma correspondência um-para-um entre eles e o conjunto dos naturais:

    a) os inteiros negativos

    b) os inteiros pares

    c) os números reais entre 0 e $\frac{1}{2}$

    d) os inteiros que são múltiplos de 7

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

3) Coleções

3.1) Conjuntos

Lista de Exercícios

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\} \quad A = \{a, b, c, g\} \quad B = \{d, e, f, g\} \quad C = \{a, c, f\}$

1. Respostas:
   a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
   b) $B \cup C = \{a, c, d, e, f, g\}$
   c) $A \cap C = \{a, c\}$
   d) $(A \cup B) - C = \{b, d, e, g\}$
   e) $A - B = \{a, b, c\}$
   f) $\overline{A} = \{d, e, f, h, k\}$
   g) $A \oplus B = \{a, b, c, d, e, f\}$
   h) $A \oplus C = \{b, f, g\}$
   i) $(A \cap B) - C = \{g\}$

2. Respostas:
   a) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
   b) $A \cap B \cap C = \emptyset$
   c) $A \cap (B \cup C) = \{a, c, g\}$
   d) $(A \cup B) \cap C = \{a, c, f\}$
   e) $\overline{A \cup B} = \{h, k\}$
   f) $\overline{A \cap B} = \{a, b, c, d, e, f, h, k\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad A = \{1, 2, 4, 6, 8\} \quad B = \{2, 4, 5, 9\}$
$C = \{x|$ tal que x é um inteiro positivo e $x^2 \leq 16\} \quad D = \{7, 8\}$

3. Respostas:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
   b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
   c) $A \cap C = \{1, 2, 4\}$
   d) $C \cap D = \{\}$
   e) $A - B = \{1, 6, 8\}$
   f) $B - A = \{5, 9\}$
   g) $\overline{A} = \{3, 5, 7, 9\}$
   h) $A \oplus B = \{1, 5, 6, 8, 9\}$

4. Respostas:
   a) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$
   b) $B \cup C \cup D = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$
   c) $A \cap B \cap C = \{2,4\}$
   d) $B \cap C \cap D = \{\}$
   e) $\overline{A \cup A} = \{3,5,7,9\}$
   f) $\overline{A \cap A} = \{3,5,7,9\}$

5. Respostas:
   a) $\overline{A} =$ todos os números reais, exceto -1 e 1.
   b) $\overline{B} =$ todos os números reais, exceto -1 e 4.
   c) $\overline{A \cup B} =$ todos os números reais, exceto -1, 1 e 4.
   d) $\overline{A \cap B} =$ todos os números reais, exceto -1.

6. Respostas: a) F b) V c) F d) V

7. Respostas: a) V b) V c) F d) F

8. Resposta: uma resposta possível é: $C \cup (A \cap B)$

9. Resposta: Seja $x \in A \cap B$. Então $x \in A$ e $x \in B$. Isto significa que $x \in A$. Portanto $A \cap B \subseteq A$.

10. Resposta: Sim. Suponha que $x \in B$. Ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Se $x \in A$, então $x \notin A \oplus B = A \oplus C$. Mas então x deve estar em C. Se $x \notin A$, então $x \in A \oplus B = A \oplus C$ e novamente x deve estar em C. Desta forma: $B \subseteq C$. Um argumento totalmente similar mostra que $C \subseteq B$. Logo: $B = C$.

11. Resposta: Não. É fácil montar um contra-exemplo: seja $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4\}$ e $C = \{3,4\}$. Neste caso, temos $A \cup B = A \cup C$, mas $B \neq C$.

12. Resposta: Não. Novamente, fácil montar um contra-exemplo: seja $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{3,4\}$. Neste caso, temos $A \cap B = A \cap C$, mas $B \neq C$.

13. Resposta:

    Parte 1: Seja $x \in A \cup C$. Então $x \in A$ ou $x \in C$, de modo que $x \in B$ ou $x \in D$ e $x \in B \cup D$. Portanto, $A \cup C \subseteq B \cup D$.

    Parte 2: Seja $x \in A \cap C$. Então $x \in A$ e $x \in C$, de modo que $x \in B$ e $x \in D$ e $x \in B \cap D$. Portanto, $A \cap C \subseteq B \cap D$.

14. Respostas
    a) Contável. $0 \leftrightarrow -1$, $1 \leftrightarrow -2$, $2 \leftrightarrow -3, \ldots$
    b) Contável. $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4, \ldots$ (basta multiplicar os naturais por 2).
    c) Incontável.
    d) Contável. $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 7$, $2 \leftrightarrow -7$, $3 \leftrightarrow 14, \ldots$ (alterna entre múltiplos de 7 positivos e negativos).

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

3) Coleções

3.2) Sequências e somas

Lista de Exercícios

(Kolman5-seção 1.3-exs.7,11,13) Para os próximos 3 exercícios, escreva os 4 primeiros termos (começando com $n = 1$) da sequência cujo termo geral está dado.

1. $a_n = 5^n$
2. $c_1 = 2.5, \;\; c_n = c_{n-1} + 1.5$
3. $e_1 = 0, \;\; e_n = e_{n-1} - 2$

(Kolman5-seção 1.3-exs.15,17,19,20) Para os próximos 4 exercícios, escreva uma fórmula para o n-ésimo termo da sequência. Identifique a sua fórmula como recursiva ou explícita.

4. $1, 3, 5, 7, \ldots$
5. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
6. $1, 4, 7, 10, 13, 16$
7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

8. *(Rosen6-seção 2.4-ex.3)* Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$, aonde a_n é:
   a) $2^n + 1$? b) $(n + 1)^{n+1}$? c) $\lfloor n/2 \rfloor$? d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$?

9. *(Rosen6-seção 2.4-ex.5)* Liste os 10 primeiros termos de cada uma das seguintes sequências:
   a) A sequência que começa com 2 e na qual cada termo sucessivo é 3 a mais do que seu precedente.
   b) A sequência que lista cada inteiro positivo 3 vezes, em ordem crescente.
   c) A sequência que lista os inteiros positivos ímpares em ordem crescente, listando cada inteiro ímpar duas vezes.
   d) A sequência cujo n-ésimo termo é $n! - 2^n$.
   e) A sequência que começa com 3, aonde cada termo sucessivo é duas vezes o seu precedente.
   f) A sequência cujos 2 primeiros termos são 1 e em que cada termo sucessivo é a soma dos 2 precedentes (esta é a famosa sequência de Fibonacci).
   g) A sequência aonde o n-ésimo termo é o número de letras na palavra em português para o índice n.

10. *(Rosen6-seção 2.4-ex.9)* Para cada uma das listas abaixo, obtenha uma fórmula simples (ou regra) que gere os termos de uma sequência de inteiros que *inicia com a lista dada*:
    a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$
    b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$
    c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$
    d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \ldots$

g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \ldots$

h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$

11. *(Rosen6-seção 2.4-ex.13)* Quais são os valores destas somas?

a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$ b) $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$ c) $\sum_{i=1}^{1}03$ d) $\sum_{j=0}^{8}2^{j+1}-2^j$

12. *(Rosen6-seção 2.4-ex.14)* Quais são os valores destas somas, aonde $S = \{1, 3, 5, 7\}$?

a) $\sum_{j\in S} j$ b) $\sum_{j\in S} j^2$ c) $\sum_{j\in S} \frac{1}{j}$ d) $\sum_{j\in S} 1$

13. *(Rosen6-seção 2.4-ex.15)* Qual é o valor de cada uma destas somas de termos de uma PG?

a) $\sum_{j=0}^{8} 3\times 2^j$ b) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$ c) $\sum_{j=2}^{8}(-3)^j$ d) $\sum_{j=0}^{8} 2\times(-3)^j$

14. *(Rosen6-seção 2.4-ex.17)* Compute cada uma destas somas duplas:

a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$ b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i+3j)$ c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} i$ d) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} i\times j$

15. *(Rosen6-seção 2.4-ex.19)* Mostre que $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, aonde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência de números reais. Este é um exemplo da chamada "soma telescópica".

16. *(Rosen6-seção 2.4-ex.21)* Some ambos os lados da identidade $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$, de $k = 1$ até $k = n$, e use o resultado do exercício anterior para encontrar:

a) Uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (a soma dos primeiros n números naturais ímpares)

b) Uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

3) Coleções

3.2) Sequências e somas

Lista de Exercícios

1. $5, 25, 125, 625$
2. $2.5, 4, 5.5, 7$
3. $0, -2, -4, -6$

4. $a_1 = 1,\ \ a_n = a_{n-1} + 2$, recursiva OU $a_n = 2n - 1$, explícita
5. $c_1 = 1,\ \ c_n = -c_{n-1}$, recursiva OU $c_n = (-1)^{n+1}$, explícita
6. $b_1 = 1,\ \ b_n = b_{n-1} + 3$, recursiva OU $b_n = 1 + (n-1) \times 3$, explícita
7. $a_1 = 1,\ \ a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1}$, recursiva OU $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, explícita

8. Respostas:
   a) $2, 3, 5, 9$
   b) $1, 4, 27, 256$
   c) $0, 0, 1, 1$
   d) $0, 1, 2, 3$

9. Respostas:
   a) $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29$
   b) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4$
   c) $1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9$
   d) $-1, -2, -2, 8, 88, 656, 4912, 40064, 362368, 3627776$
   e) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536$
   f) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ (esta é a famosa sequência de Fibonacci).
   g) $2, 4, 4, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3$

10. Respostas:
    a) "Um 1 e um 0. seguido por dois 1's e dois 0's, seguido por três 1's e três 0's, e assim por diante."
    b) "Inteiros positivos listados em ordem crescente, com cada inteiro positivo par listado 2 vezes."
    c) "Termos nas posições com índices ímpares são potências sucessivas de 2; termos nas posições pares são todos nulos."
    d) $a_n = 3 \times 2^{n-1}$
    e) $a_n = 15 - 7 \times (n - 1)$
    f) $a_n = (n^2 + n + 4)/2$
    g) $a_n = 2n^3$
    h) $a_n = n! + 1$

11. Respostas: a) 20 b) 11 c) 30 d) 511

12. Respostas: a) 16 b) 84 c) $\frac{176}{105}$ d) 4

13. Respostas: a) 1533 b) 510 c) 4923 d) 9842

14. Respostas: a) 21 b) 78 c) 18 d) 18

15. Resposta:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

(Termos internos se cancelam mutuamente e só sobram $+a_n$ e $-a_0$.)

16. Resposta:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = n^2 - 0^2 = n^2$

b) Seja $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Pelo item anterior, sabemos que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \times s - n$

Ou seja: $n^2 = 2 \times s - n$

De modo que: $s = (n^2 + n)/2 = n(n+1)/2$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

4) Indução Matemática

4.1) Princípio da indução matemática

Lista de Exercícios

(Kolman5-seção 2.4-exs.1-7) Para os próximos 7 exercícios, prove que a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^+$, usando indução matemática.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$
3. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
4. $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$
7. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ para $r \neq 1$
8. *(Kolman5-seção 2.4-ex.15)* Prove por indução matemática que, se um conjunto A possui n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.
9. *(Kolman5-seção 2.4-ex.18)* Mostre por indução matemática que, se $A_1, \ldots, A_n$ e B são subconjuntos quaisquer de um conjunto U, então:
$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap B = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap B)$$
10. Seja $P(n)$ a afirmação "$\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ n^2 + n$ é um número ímpar".
    (a) Prove que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é uma tautologia.
    (b) Verifique se é verdadeira a proposição $\forall n\, P(n)$. Justifique sua resposta.
11. *((Kolman5-seção 2.4-ex.23)* Explique a falha na "prova" a seguir de que "Todos os caminhões são da mesma cor".

    "Prova": Seja $P(n)$: "Todo conjunto de n caminhões consiste de caminhões da mesma cor."

    - Passo básico: é certo que $P(1)$ é V, pois há apenas um caminhão neste caso.
    - Passo indutivo:
        - Vamos usar $P(k)$: "Todo conjunto de k caminhões consiste de caminhões da mesma cor" para mostrar $P(k+1)$: "Todo conjunto de $k+1$ caminhões consiste de caminhões da mesma cor"
        - Escolha um caminhão do conjunto de $k+1$ caminhões e considere o conjunto de k caminhões que resta: de acordo com $P(k)$, todos estes possuem a mesma cor.
        - Agora reponha o caminhão escolhido e pegue um outro:
            * por $P(k)$, os caminhões que restam são todos da mesma cor.
        - Ora, mas os caminhões não mudaram de cor neste procedimento.
        - De modo que todos os $k+1$ caminhões devem ser da mesma cor...

4) Indução Matemática

4.1) Princípio da indução matemática

Lista de Exercícios

1. $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$
   - Passo básico ($n=1$): $P(1):\ 1.(2)=1.(1+1)$, o que é V
   - Passo indutivo:

     $P(k): 2+4+\cdots+2k=k(k+1)$

     $P(k+1): 2+4+\cdots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$ (??)
   - Lado esquerdo de $P(k+1):\ (2+4+\cdots+2k)+2(k+1)=$

     $=k(k+1)+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

   o que corresponde exatamente ao lado direito de $P(k+1)$ $\Box$

2. Semelhante à questão 5 (ver abaixo).

3. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$
   - Passo básico ($n=0$): $P(0):\ 2^0=2^{0+1}-1$, o que é V
   - Passo indutivo:
   - O lado esquerdo P $de(k+1):\ (1+2^1+2^2+\cdots+2^k)+2^{k+1}=(2^{k+1}-1)+2^{k+1}$

     $=2\times 2^{k+1}-1=2^{k+2}-1$

   o que corresponde exatamente ao lado direito de $P(k+1)$ $\Box$

4. Note que $5+10+15+\cdots+5n=\frac{5}{2}(2+4+6+\cdots+2n)=\frac{5}{2}n(n+1)$ (ver questão 1, acima)

5. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   - Passo básico ($n=1$): $P(1):\ 1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$, o que é V
   - Passo indutivo:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6(k+1)) \\
&= \frac{(k+1)}{6}(2k^2+7k+6) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}
$$

   o que corresponde exatamente ao lado direito de $P(k+1)$ $\Box$

6. Semelhante à questão 3 (ver acima).

7. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ para $r \neq 1$

- Passo básico ($n = 1$): $P(1): \ a = \frac{a(1-r^1)}{1-r}$, o que é V
- Passo indutivo: lado esquerdo de $P(k+1): \ a + ar + \cdots + ar^{k-1} + ar^k = \frac{a(1-r^k)}{1-r} + ar^k =$

$$= \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$

o que corresponde exatamente ao lado direito de $P(k+1)$ $\square$

8.
- Passo básico ($n = 0$): Neste caso, $A = \emptyset$ e $P(A) = \{\emptyset\}$, de modo que $|P(A)| = 2^0$ e $P(0)$ é V.
- Passo indutivo: vamos usar

  $P(k):$ "Se $|A| = k$, então $|P(A)| = 2^k$ "

  para mostrar:

  $P(k+1):$ "Se $|A| = k+1$, então $|P(A)| = 2^{k+1}$ " (??)

  Prova:

* Suponha que $|A| = k + 1$.

* Ponha de lado um elemento x de A.

* Então $|A - \{x\}| = k$ e $A - \{x\}$ tem 2^k subconjuntos.

- Note que todos estes subconjuntos são também subconjuntos de A.

* Agora, podemos formar <u>outros</u> 2^k subconjuntos de A formando a união de $\{x\}$ com cada subconjunto de $A - \{x\}$.

- Note que nenhum destes conjuntos é uma duplicata.

* Então, A tem $2^k + 2^k$, ou 2^{k+1}, subconjuntos. $\square$

9. Semelhante a exercício visto em aula.

10. Resposta:

(a) Provando que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é uma tautologia:

- Hipótese: $k^2 + k$ é ímpar, ou seja, $k^2 + k = 2m + 1$ para algum inteiro m
- Queremos saber o que ocorre com $(k+1)^2 + (k+1)$
- Mas $(k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + 2k + 1) + (k+1) = (k^2 + k) + 2k + 2 = (2m+1) + 2k + 2 = 2(m + k + 1) + 1$
- Ou seja, $P(k+1)$ é V.

(b) Verificando se é V a proposição $\forall n \, P(n)$:

- É falsa, pois, por exemplo, $3^2 + 3 = 12$, que não é ímpar.
- Ocorre que a prova anterior está incompleta, pois faltou o passo básico.
- Note que $P(1)$ é F, pois $1^2 + 1 = 2$, que não é ímpar.

11. O erro está em ir do caso base $n = 1$ para o próximo caso, $n = 2$:

- Neste caso, a hipótese indutiva só indica que cada um dos 2 caminhões é da mesma cor que <u>ele mesmo</u>.
- A hipótese indutiva <u>não</u> indica que cada caminhão é da mesma cor que <u>o outro</u>.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

4) Indução Matemática

4.2) Indução forte

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 4.2-ex.5)*

   a) Determine quais os valores postais que podem ser formados usando-se apenas selos de 4 centavos e de 11 centavos.

   b) Prove a sua resposta ao item (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de explicitar claramente a sua hipótese indutiva no passo indutivo.

   c) Prove a sua resposta ao item (a) usando o princípio da indução forte. Explique como a hipótese indutiva nesta prova difere daquela que foi usada na prova por indução matemática.

2. *(Rosen6-seção 4.2-ex.7)* Um certo caixa automático possui apenas notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00. Determine quais as quantias que esta máquina pode fornecer, assumindo que ela possui um suprimento ilimitado destas duas notas? Prove a sua resposta usando uma forma da indução matemática.

3. *(Rosen6-seção 4.2-ex.29)* O que está errado com esta "prova" por indução forte?

   - "Teorema": Para todo inteiro não-negativo n, $5n = 0$.
   - Passo básico: $5.0 = 0$.
   - Passo indutivo: suponha que $5j = 0$ para todos os inteiros não-negativos j com $0 \leq j \leq k$. Escreva $k + 1 = i + j$, onde i e j são números naturais menores do que $k + 1$. Pela hipótese de indução, $5(k + 1) = 5(i + j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

4) Indução Matemática

4.2) Indução forte

Lista de Exercícios

1. Respostas:

   (a) $4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28$ e todos os valores maiores ou iguais a 30.

   (b) Seja $P(n)$ a afirmação de que "podemos formar n centavos de postagem usando apenas selos de 4 centavos e de 11 centavos" - queremos provar que $\forall n \geq 30, P(n)$ é V.

   - Passo básico: $30 = 11 + 11 + 4 + 4$
   - Passo indutivo: Hipótese indutiva: assuma que podemos formar k centavos de postagem
     - (Vamos mostrar que, a partir disto, podemos formar $k + 1$ centavos de postagem)
     - Se os k centavos incluíram um selo de 11 centavos, substitua-o por 3 selos de 4 centavos
     - Senão, os k centavos foram formados apenas com selos de 4 centavos:
       * Aí, uma vez que $k \geq 30$, foram envolvidos pelo menos 8 selos de 4 centavos: Substitua 8 selos de 4 centavos por 3 selos de 11 centavos
     - Em qualquer caso, é possível formar o valor de postagem $k + 1$.

   (c) Seja $P(n)$ a afirmação de que "podemos formar n centavos de postagem usando apenas selos de 4 centavos e de 11 centavos" - queremos provar que $\forall n \geq 30, P(n)$ é V.

   - Passo básico: $30 = 11+11+4+4$, $31 = 11+4+4+4+4+4$, $32 = 4+4+4+4+4+4+4+4$, $33 = 11 + 11 + 11$
   - Passo indutivo:
     - Assuma que $\forall j,\ 30 \leq j \leq k,\ P(j)$ é V , onde $k \geq 33$ é um inteiro arbitrário
     - Uma vez que $k - 3 \geq 30$, sabemos que $P(k - 3)$ é V, ou seja, sabemos que podemos formar valores postais de $k - 3$ centavos.
     - Coloque mais um selo de 4 centavos junto e teremos formado $k + 1$ centavos. $\square$
     - Note que assumimos que $P(j)$ era V para todos os valores de j desde 30 até k (e não que apenas $P(30)$ era V).

2. Podemos formar qualquer quantia, exceto R$ 1,00 e R$ 3,00.
   Seja $P(n)$: "Podemos formar n reais usando apenas notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00". Queremos provar que $\forall n \geq 4,\ P(n)$ é V.

   - Passo básico: $4 = 2 + 2$, $5 = 5$
   - Passo indutivo:
     - Fixe um $k \geq 5$ arbitrário
     - Assuma que $\forall j,\ 4 \leq j \leq k,\ P(j)$ é V
     - Uma vez que $k - 1 \geq 4$, sabemos que $P(k - 1)$ é V, ou seja, sabemos que podemos formar valores de $k - 1$ reais.
     - Coloque mais uma nota de R$ 2,00 e teremos formado $k + 1$ reais. $\square$

3. O erro está em ir do caso base $n = 0$ para o próximo caso, $n = 1$:
   NÃO é possível escrever 1 como a soma de dois nros naturais menores do que ele.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

5) RECURSÃO

5.1) DEFINIÇÕES RECURSIVAS

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. *(Rosen6-seção 4.3-ex.1)* Encontre $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ se $f(n)$ é definida recursivamente por $f(0) = 1$ e, para $n = 0, 1, 2, \ldots$:
   (a) $f(n+1) = f(n) + 2$
   (b) $f(n+1) = 3.f(n)$
   (c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$
   (d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

2. *(Rosen6-seção 4.3-ex.3)* Encontre $f(2)$,$f(3)$,$f(4)$ e $f(5)$ se f é definida recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e, para $n = 1, 2, \ldots$:
   (a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$
   (b) $f(n+1) = f(n)^2 f(n-1)$
   (c) $f(n+1) = 3.f(n)^2 - 4f(n-1)^2$
   (d) $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$

3. *(Rosen6-seção 4.3-ex.5)* Determine se cada uma das definições propostas abaixo é uma definição recursiva válida de uma função f do conjunto dos inteiros não-negativos para o conjunto dos inteiros. Se f for bem definida, encontre uma fórmula para $f(n)$ (n inteiro não-negativo) e prove que a sua fórmula é válida.
   (a) $f(0) = 0$, $f(n) = 2f(n-2)$, para $n \geq 1$
   (b) $f(0) = 1$, $f(n) = f(n-1) - 1$, para $n \geq 1$
   (c) $f(0) = 2, f(1) = 3$, $f(n) = f(n-1) - 1$, para $n \geq 2$
   (d) $f(0) = 1, f(1) = 2$, $f(n) = 2f(n-2)$, para $n \geq 2$
   (e) $f(0) = 1$, $f(n) = 3f(n-1)$, se n é ímpar e $n \geq 1$ e $f(n) = 9f(n-2)$ se n é par e $n \geq 2$.

4. *(Rosen6-seção 4.3-ex.7)* Forneça uma definição recursiva da sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, se:

   (a) $a_n = 6n$

   (b) $a_n = 2n + 1$

   (c) $a_n = 10^n$

   (d) $a_n = 5$

5. *(Rosen6-seção 4.3-ex.11)* Forneça uma definição recursiva de $P_m(n)$, o produto do inteiro m pelo inteiro não-negativo n.

6. *(Rosen6-seção 4.3-ex.13)* Seja f_n o n-ésimo número de Fibonacci. Prove que $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$, para todo n inteiro e positivo.

7. *(Rosen6-seção 4.3-ex.23)* Forneça uma definição recursiva do conjunto dos inteiros positivos que são múltiplos de 5.

5) Recursão

5.1) Definições recursivas

Lista de Exercícios

1. (a) $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 7,\ f(4) = 9$
   (b) $f(1) = 3,\ f(2) = 9,\ f(3) = 27,\ f(4) = 81$
   (c) $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 16,\ f(4) = 65536$
   (d) $f(1) = 3,\ f(2) = 13,\ f(3) = 183,\ f(4) = 33673$

2. (a) $f(2) = -1,\ f(3) = 5,\ f(4) = 2,\ f(5) = 17$
   (b) $f(2) = -4,\ f(3) = 32,\ f(4) = -4096,\ f(5) = 536870912$
   (c) $f(2) = 8,\ f(3) = 176,\ f(4) = 92672,\ f(5) = 25764174848$
   (d) $f(2) = -\frac{1}{2},\ f(3) = -4,\ f(4) = \frac{1}{8},\ f(5) = -32$

3. (a) Não é válida.
   (b) $f(n) = 1 - n$. Prova:
   - Passo básico: $f(0) = 1 = 1 - 0$
   - Passo indutivo: se $f(k) = 1 - k$, então $f(k+1) = f(k) - 1 = 1 - k - 1 = 1 - (k+1)$ (OK)

   (c) $f(0) = 2$ e $f(n) = 4 - n$, para $n > 0$. Prova:
   - Passo básico: $f(0) = 2$ e $f(1) = 4 - 1 = 3$
   - Passo indutivo (para $k \geq 1$): se $f(k) = f(k) - 1 = (4 - k) - 1 = 4 - (k + 1)$ (OK)

   (d) $f(n) = 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Prova:
   - Passo básico: $f(0) = 1 = 2^{\lfloor (0+1)/2 \rfloor}$ e $f(1) = 2 = 2^{\lfloor (1+1)/2 \rfloor}$
   - Passo indutivo (para $k \geq 1$): se $f(k+1) = 2f(k-1) = 2 \times 2^{\lfloor k/2 \rfloor} = 2^{\lfloor k/2+1 \rfloor} = 2^{\lfloor ((k+1)+1)/2 \rfloor}$ (OK)

   (e) $f(n) = 3^n$
   - Passo básico: $f(0) = 1$
   - Passo indutivo:
     Para n ímpar: $f(n) = 3f(n-1) = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$
     Para n par (≥ 2): $f(n) = 9f(n-2) = 9 \times 3^{n-2} = 3^n$

4. Há muitas respostas corretas, entre elas:

   (a) $a_1 = 6$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 6$
   (b) $a_1 = 3$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$
   (c) $a_1 = 10$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 10a_n$
   (d) $a_1 = 5$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n$

5. Para um dado valor de m:

   - $P_m(0) = 0$
   - $P_m(n) = P_m(n-1) + m$, para $n \geq 1$

6. Prova por indução:

   - Seja $P(n)$: "$f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$"
   - Passo básico: $P(1)$ é V, pois: $f_1 = 1 = f_2$
   - Passo indutivo: assuma que $P(k)$ é V
   - então: $f_1 + f_3 + ... + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k+2} = f_{2(k+1)}$ (OK)

7. Definição recursiva:

   - $5 \in S$
   - se $x, y \in S$, então $x + y \in S$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

5) Recursão

5.2) Algoritmos recursivos

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 4.4-ex.7)* Forneça um algoritmo recursivo para computar nx usando apenas adição, sendo n um inteiro positivo e x um inteiro.

2. *(Rosen6-seção 4.4-ex.9)* Forneça um algoritmo recursivo para computar a soma dos primeiros n inteiros positivos ímpares.

3. *(Rosen6-seção 4.4-ex.11)* Forneça um algoritmo recursivo para computar o mínimo de um conjunto finito de inteiros, usando o fato de que o mínimo de n inteiros é igual ao menor entre o último inteiro na lista e o mínimo dos primeiros $n-1$ inteiros na lista.

4. *(Rosen6-seção 4.4-ex.13)* Forneça um algoritmo recursivo para encontrar $n! \, mod \, m$, aonde n e m são inteiros positivos.

5. *(Rosen6-seção 4.4-ex.21)* Prove que o algoritmo recursivo que você encontrou no exercício 1 (Rosen6-seção 4.4-ex.7) está correto.

6. *(Rosen6-seção 4.4-ex.29)* Forneça um algoritmo *recursivo* para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida por:

   $a_0 = 1, \; a_1 = 2, \;$ e $\; a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \;$ para $\; n = 2, 3, 4, \ldots$

7. *(Rosen6-seção 4.4-ex.30)* Forneça um algoritmo *iterativo* para encontrar o n-ésimo termo da mesma sequência definida no exercício anterior.

8. *(Rosen6-seção 4.4-ex.32)* Forneça um algoritmo *recursivo* para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida por:

   $a_0 = 1, \; a_1 = 2, \; a_2 = 3, \;$ e $\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \;$ para $\; n = 3, 4, 5 \ldots$

9. *(Rosen6-seção 4.4-ex.33)* Forneça um algoritmo *iterativo* para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida no exercício anterior.

10. *(Rosen6-seção 4.4-ex.35)* Forneça um algoritmo recursivo e um iterativo para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida por:

    $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ \text{ e }\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}^2 \cdot a_{n-3}^3$

11. *(Rosen6-seção 4.4-ex.45)* Aplique o algoritmo Merge-Sort ao problema de ordenar a lista dada por:

    $b, d, a, f, g, h, z, p, o, k$

    Mostre todos os passos executados pelo algoritmo.

12. *(Rosen6-seção 4.4-ex.46)* Determine quantas comparações são requeridas para mesclar os pares de listas abaixo usando o algoritmo Merge visto em aula:

    (a) 1,3,5,7,9; 2,4,6,8,10
    (b) 1,2,3,4,5; 6,7,8,9,10
    (c) 1,5,6,7,8; 2,3,4,9,10

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

5) Recursão

5.2) Algoritmos recursivos

Lista de Exercícios

1. Algoritmo recursivo:

```
function mult(n, x)
  if n == 1
    return x
  else
    return mult(n-1,x) + x
```

2. Algoritmo recursivo:

```
function somaimpares(n)
  if n == 1
    return 1
  else
    return somaimpares(n-1) + (2.n - 1)
```

3. Algoritmo recursivo:

function minint(n)   % (Retorna o mínimo dos n 1ros nros da lista)
  if n == 1
    return a_1
  else
    return min(minint(n-1), a_n)

4. Algoritmo recursivo:

```
function fatmod(n, x)
  if n == 1
    return 1
  else
    return (n.fatmod(n-1,m)) mod m
```

5. Prova por indução:

- Passo básico: Se $n = 1$, então $nx = x$ e o algoritmo retorna, corretamente, x.
- Passo indutivo:

  - assuma que o algoritmo computa $k.x$ corretamente

  - para computar $(k+1).x$, ele computa recursivamente o produto de $k+1-1 = k$ e x e então adiciona x

  - pela hipótese indutiva, este produto é computado corretamente

  - de modo que a resposta retornada é $kx + x = (k+1)x$, a qual está correta $\square$

6. Algoritmo recursivo:

```
function a(n)
  if n == 0 return 1
  if n == 1 return 2
  if n >= 2
    return  a(n-1) × a(n-2)
```

7. Algoritmo iterativo:

```
function a(n):
  if (n == 0) return 1
  if (n == 1) return 2
  if (n >= 2)
    x = 1;    y = 2;
    for i = 2 to n
      z = x  *  y
      x = y
      y = z
    end
    return z
  end
```

8. Algoritmo recursivo:

```
function a(n)
  if (n == 0) return 1
  if (n == 1) return 2
  if (n == 2) return 3
  if (n >= 3)
    return a(n-1) + a(n-2) + a(n-3)
```

9. Algoritmo iterativo:

```
function aiter(n)
  if (n == 0) return 1
  if (n == 1) return 2
  if (n == 2) return 3
  if (n >= 3)
    x = 1;   y = 2;   z = 3;
    for i = 3 to n
      w = x + y + z
      x = y
      y = z
      z = w
    end
    return w
  end
```

10. Algoritmo recursivo:

```
function a(n)
  if n ¡= 2
    return (2.n+1)
  else
    return a(n-1) * (a(n-2))^2 * (a(n-3))^3
  end
```

Algoritmo iterativo:

```
function aiter(n)
  if n == 0 return 1
  if n == 1 return 3
  if n == 2 return 5
  if n >= 3
    x = 1;   y = 3;   z = 5
    for i = 3 to n
      w = z * y^2 * x^3
      x = y
      y = z
      z = w
    end
    return w
  end
```

11.

```
               bdafghzpok
           /               \
      bdafg                hzpok
      /      \             /     \
    bda      fg          hzp      ok
   /   \     / \        /   \     / \
  bd    a   f  g       hz    p   o   k
 /  \   |   |  |      / \    |   |   |
b   d   a   f  g     h   z   p   o   k
 \  /   |   |  |      \  /   |   |   |
  bd    a   f  g       hz    p   o   k
   \   /    \  /        \    /   \   /
    abd      fg           hpz      ko
      \      /              \      /
        abdfg                 hkopz
             \              /
                abdfghkopz
```

12. (a) 9 comparações
    (b) 5 comparações
    (c) 8 comparações

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

6) RELAÇÕES

6.1) Relações e Digrafos

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. *(Kolman5-seção 4.1-exs.1 e 2)* Para cada item abaixo, encontre x ou y de modo que os pares ordenados fiquem iguais.
   (a) $(x, 3) = (4, 3)$
   (b) $(a, 3y) = (a, 9)$
   (c) $(3x + 1, 2) = (7, 2)$
   (d) $(C{+}{+}, python) = (y, python)$

2. *(Kolman5-seção 4.1-exs.5 e 6)* Seja $A = \{a, b\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$.
   (a) Liste os elementos em $A \times B$
   (b) Liste os elementos em $B \times A$
   (c) Liste os elementos em $A \times A$
   (d) Liste os elementos em $B \times B$

3. *(Kolman5-seção 4.1-ex.10)* Se $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. e $C = \{\#, *\}$, liste todos os elementos em $A \times B \times C$.

4. *(Kolman5-seção 4.1-ex.15)* Se $A = \{a | a \text{ é } \textit{real e } -2 \leq a \leq 3\}$. e $B = \{b | b \text{ é } \textit{real e } 1 \leq b \leq 5\}$, esboce o conjunto $B \times A$ no plano cartesiano.

5. *(Kolman5-seção 4.1-ex.24)* Se A_1 = conjunto de todos os inteiros positivos e A_2 = conjunto de todos os inteiros negativos, será que $\{A_1, A_2\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$?

6. *(Kolman5-seção 4.1-ex.29)* Liste todas as partições do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Para os próximos 4 exercícios, encontre o domínio, a imagem, a matriz, e, quando $A = B$, o digrafo da relação R.

7. *(Kolman5-4.2-ex.4)* $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 1)\}$

8. *(Kolman5-seção 4.2-ex.7)* $A = \{1, 2, 3, 4, 8\} = B$; $a\ R\ b$ se e somente se $a = b$.

9. *(Kolman5-seção 4.2-ex.9)* $A = \{1, 2, 3, 4, 6\} = B$; $a\ R\ b$ se e somente se a é múltiplo de b.

10. *(Kolman5-seção 4.2-ex.11)* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $a\ R\ b$ se e somente se $b < a$.

11. *(Kolman5-seção 4.2-ex.13)* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} = B$; $a\ R\ b$ se e somente se $b = a+1$.

12. *(Kolman5-seção 4.2-ex.15)* Seja $A = B = \mathbb{R}$. Considere a seguinte relação R sobre A: $a\ R\ b$ se e somente se $a^2 + b^2 = 25$. Encontre $\mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(R)$.

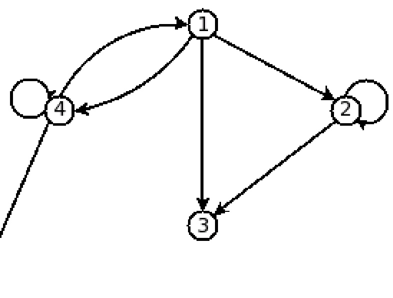
13. *(Kolman5-seção 4.2-ex.23)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Forneça a relação R sobre A determinada pela matriz abaixo e o seu digrafo:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. *(Kolman5-seção 4.2-ex.24)* Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$. Forneça a relação R sobre A determinada pela matriz abaixo e o seu digrafo:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. *(Kolman5-seção 4.2-ex.26)* Encontre a relação determinada pela figura abaixo e forneça a sua matriz.



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.1) Relações e Digrafos

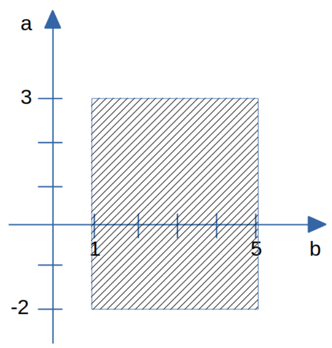
Lista de Exercícios

1. Respostas:
   (a) $x = 4$
   (b) $y = 3$
   (c) $x = 2$
   (d) $y = C{+}{+}$

2. Respostas:
   (a) $A \times B = \{(a,4),(a,5),(a,6),(b,4),(b,5),(b,6)\}$
   (b) $B \times A = \{(4,a),(4,b),(5,a),(5,b),(6,a),(6,b)\}$
   (c) $A \times A = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$
   (d) $B \times B = \{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

3. Resposta: $A \times B \times C = \{(a,1,\#),(a,1,*),(a,2,\#),(a,2,*),(b,1,\#),(b,1,*),(b,2,\#),(b,2,*),(c,1,\#),(c,1,*),(c,2,\#),(c,2,*)\}$

4. Resposta:



5. Resposta: Não (pois ainda falta incluir o zero).

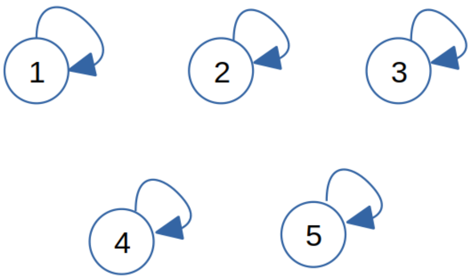
6. Resposta: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, $\{\{1,2,3\}\}$

7. Domínio$= \{a, b, c, d\}$, Imagem$= \{1, 2\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

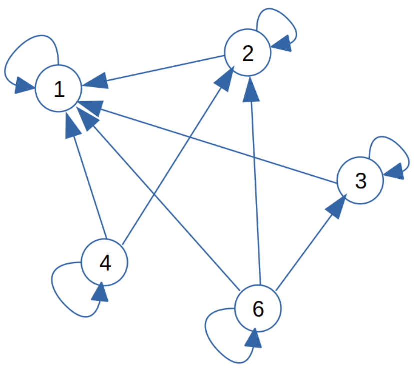
8. Domínio$= \{1, 2, 3, 4, 8\}$, Imagem$= \{1, 2, 3, 4, 8\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



9. Domínio$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$, Imagem$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

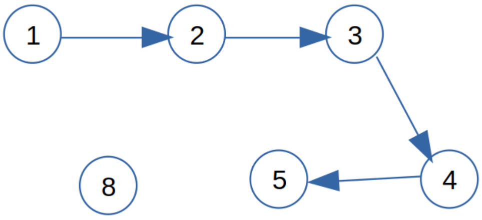


10. Domínio$= \{3, 5, 7, 9\}$, Imagem$= \{2, 4, 6, 8\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

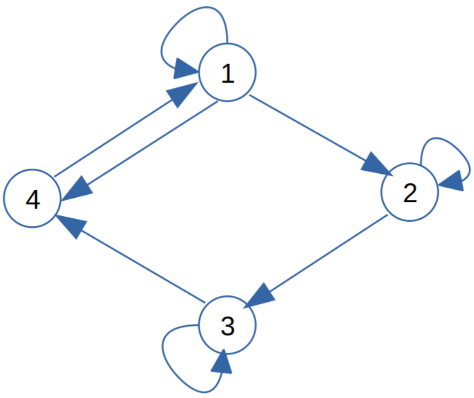
11. Domínio= $\{1, 2, 3, 4\}$,   Imagem= $\{2, 3, 4, 5\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



12. Resposta: $Dom(R) = [-5, 5]$, $Im(R) = [-5, 5]$

13. Resposta: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$



14. Resposta: $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (e, a)\}$

15. Resposta: $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 5)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

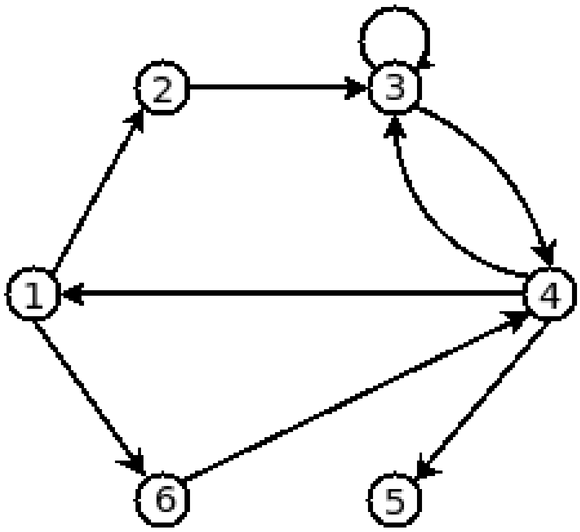
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.2) Caminhos em Relações e Digrafos

Lista de Exercícios

Para os próximos 6 exercícios, seja R a relação cujo dígrafo é dado por:



1. *(Kolman5-seção 4.3-ex.1)* Liste todos os caminhos de comprimento 1.
2. *(Kolman5-seção 4.3-ex.3a)* Liste todos os caminhos de compr. 3 que começam no vértice 3.
3. *(Kolman5-seção 4.3-ex.3b)* Liste todos os caminhos de comprimento 3.
4. *(Kolman5-seção 4.3-ex.5)* Encontre um ciclo começando no vértice 6.
5. *(Kolman5-seção 4.3-ex.7)* Encontre M_{R^2}
6. *(Kolman5-seção 4.3-ex.8b)* Encontre M_{R^∞}

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.2) Caminhos em Relações e Digrafos

Lista de Exercícios

1. Resposta: 1,2 1,6 2,3 3,3 3,4 4,3 4,5 4,1 6,4.
2. Resposta: 3,3,3,3 3,3,4,3 3,3,4,5 3,4,1,6 3,4,1,2 3,4,3,3 3,4,3,4 3,3,4,1 3,3,3,4
3. Resposta: além dos caminhos do item anterior, temos: 1,2,3,3 1,2,3,4 1,6,4,1 1,6,4,5 2,3,3,3 2,3,3,4 2,3,4,3 2,3,4,5 4,1,2,3 4,1,6,4 6,4,3,3 6,4,3,4 6,4,1,2 6,4,1,6 1,6,4,3 2,3,4,1 4,3,3,3 4,3,4,3 4,3,4,1 4,3,4,5 4,3,3,4.
4. Resposta: Um ciclo é 6,4,1,6.
5. Resposta:
$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
6. Resposta:
$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Relações

6.3) Propriedades de Relações

Lista de Exercícios

Para os próximos 4 exercícios, seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine se a relação é reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica ou transitiva.

1. *(Kolman5-seção 4.4-ex.1)*

   $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

2. *(Kolman5-seção 4.4-ex.3)*

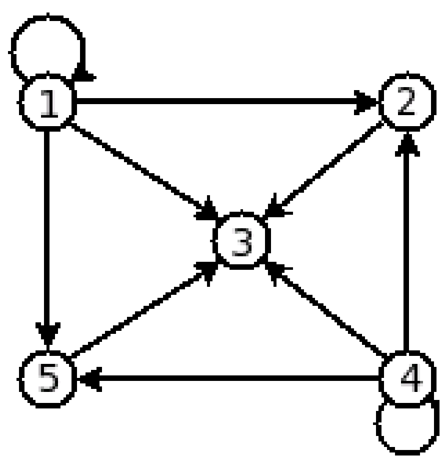
   $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

3. *(Kolman5-seção 4.4-ex.5)* $R = \emptyset$

4. *(Kolman5-seção 4.4-ex.7)*

   $R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 2), (3, 4)\}$

5. *(Kolman5-seção 4.4-ex.9)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine se a relação cujo dígrafo é dado abaixo é reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica ou transitiva.



6. *(Kolman5-seção 4.4-ex.11)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine se a relação cuja matriz M_R é dada abaixo é reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica ou transitiva.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os próximos 4 exercícios, determine se a relação R sobre o conjunto A é reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica ou transitiva.

7. *(Kolman5-seção 4.4-ex.13)* $A = \mathbb{Z}$; $a\ R\ b$ se e somente se $a \leq b + 1$.

8. *(Kolman5-seção 4.4-ex.15)* $A = \mathbb{Z}^+$; $a\ R\ b$ se e somente se $a = b^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}^+$.

9. *(Kolman5-seção 4.4-ex.17)* $A = \mathbb{Z}$; $a\ R\ b$ se e somente se $|a - b| = 2$.

10. *(Kolman5-seção 4.4-ex.19)* $A = \mathbb{Z}^+$; $a\ R\ b$ se e somente se $mdc(a, b) = 1$, ou seja, se e somente se o 1 é o único fator que a e b possuem em comum (neste caso, dizemos que a e b são relativamente primos).

11. *(Kolman5-seção 4.4-ex.25)* Seja R a seguinte relação simétrica sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$. Desenhe o dígrafo de R.

12. *(Kolman5-seção 4.4-ex.31)* Mostre que, se uma relação sobre um conjunto A é transitiva e irreflexiva, então ela é assimétrica.

13. *(Kolman5-seção 4.4-ex.33)* Seja R uma relação não-vazia sobre um conjunto A Suponha que R é simétrica e transitiva. Mostre que R não é irreflexiva.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.3) Propriedades de Relações

Lista de Exercícios

1. Resposta: Reflexiva, simétrica, transitiva.

2. Resposta: Nenhuma.

3. Resposta: Irreflexiva ("nenhum par do tipo (x, x) está na relação"), simétrica, assimétrica, antissimétrica, transitiva (nos últimos 4 casos: "a hipótese da definição e F e, portanto, a definição é V").

4. Resposta: Transitiva.

5. Resposta: Antissimétrica, transitiva.

6. Resposta: Irreflexiva, simétrica.

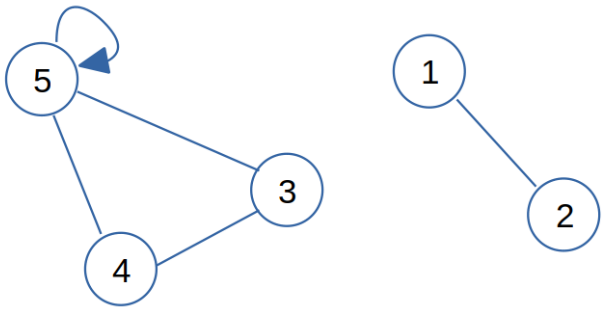
7. Resposta: Reflexiva (pois $a \leq a + 1$). Não irreflexiva. Não simétrica (pois, por exemplo, $5 \leq 7 + 1$, mas 7 não é $\leq 5 + 1$). Não assimétrica (pois é reflexiva). Não antissimétrica (pois "tem alguma simetria": por exemplo, $6 \leq 5 + 1$ e $5 \leq 6 + 1$). Não transitiva (pois, por exemplo, $6 \leq 5 + 1$ e $5 \leq 4 + 1$, mas 6 não é $\leq 4 + 1$).

8. Resposta: Reflexiva (pois $a = a^1$). Não irreflexiva, portanto. Não simétrica (pois $a = b^{k_1}$ e $b = a^{k_2} \Rightarrow a = a^{(k_1 \times k_2)}$, o que ocorre sse $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$, ou seja, sse $a = b$) (logo, para $a \neq b$, temos que: ou NÃO $a\ R\ b$ ou NÃO $b\ R\ a$). Não assimétrica (pois é reflexiva). Antissimétrica (ver não simetria). Transitiva (pois $a = b^{k_1}$ e $b = c^{k_2} \Rightarrow a = c^{(k_2 \times k_1)} \Rightarrow a\ R\ c$).

9. Resposta: Irreflexiva, simétrica.

10. Resposta: Simétrica.

11. Resposta: (Assuma que uma linha sem seta representa duas setas ao mesmo tempo, nos dois sentidos.)



12. Resposta: Prova por contradição (em $p \to q$, assuma que "p é V" e "q é F"): Seja R transitiva e irreflexiva e seja R não assimétrica. Como R é não assimétrica, temos que existe algum par (a, b) para o qual temos tanto $a\ R\ b$ como $b\ R\ a$. Mas então $a\ R\ a$, pois R é transitiva. Mas isto contradiz o fato de que R é irreflexiva. Portanto, "q" não pode ser F, ou seja, R é assimétrica.

13. Resposta: Seja $R \neq \emptyset$ simétrica e transitiva. Então, se temos $(x, y) \in R$, temos também que $(y, x) \in R$. Mas, uma vez que R é transitiva, temos que $(x, x) \in R$. Portanto, R não pode ser irreflexiva.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

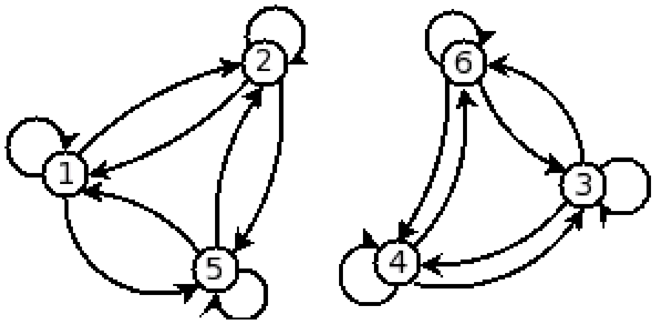
6) Relações

6.4) Relações de Equivalência

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 4.5-ex.1)* Seja $A = \{a, b, c\}$. Determine se a relação R cuja matriz M_R é dada abaixo é uma relação de equivalência.
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *(Kolman5-seção 4.5-ex.3)* Determine se a relação cujo digrafo é dado abaixo é uma relação de equivalência.



Nos próximos 4 exercícios, determine se a relação R sobre o conjunto A dado é de equivalência.

3. *(Kolman5-seção 4.5-ex.5)* $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}$

4. *(Kolman5-seção 4.5-ex.7)* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (1, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

5. *(Kolman5-seção 4.5-ex.9)* $A =$ o conjunto dos membros do Clube de compras do "Nanosoftware-do-mês"; $a\ R\ b$ se e somente se a e b compram atualizações dos mesmos programas todo mês.

6. *(Kolman5-seção 4.5-ex.21)* Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $A = S \times S$. Defina a seguinte relação sobre A: $(a, b)\ R\ (a', b')$ se e somente se $ab' = a'b$.

   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

   (b) Compute A/R.

6) Relações

6.4) Relações de Equivalência

Lista de Exercícios

1. Resposta: Sim: a diagonal é composta de 1's, a matriz é simétrica e, por multiplicação booleana, vemos que $M_R \otimes M_R = M_R$.

2. Resposta: Sim. O digrafo mostra que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

3. Resposta: Não, pois não é simétrica.

4. Resposta: Não, pois não é simétrica.

5. Resposta: Sim. Esta relação é reflexiva (x compra do mesmo modo que ele mesmo), simétrica (se x compra do mesmo modo que y, então y compra do mesmo modo que x) e transitiva (se x compra o mesmo que y e y compra o mesmo que z, então x compra o mesmo que z).

6. Resposta:

   (a) R é reflexiva, pois $(a, b)\ R\ (a, b)$, já que $ab = ba$.
   R é simétrica: se $(a, b)\ R\ (a', b')$, então $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, o que leva a $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ e, portanto, a $(a', b')\ R\ (a, b)$.
   R é transitiva:
   - Se $(a, b)\ R\ (a', b')$, então $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.
   - Agora, se $(a', b')\ R\ (a'', b'')$, então $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$.
   - Logo, $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$ e, portanto, $(a, b)\ R\ (a'', b'')$.

   (b) $$\begin{aligned} A/R = \{\ & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\},\\ & \{(1,2),(2,4)\},\\ & \{(1,3)\},\ \{(1,4)\},\ \{(1,5)\},\\ & \{(2,1),(4,2)\},\\ & \{(2,3)\},\ \{(2,5)\},\ \{(3,1)\},\ \{(3,2)\},\ \{(3,4)\},\ \{(3,5)\},\\ & \{(4,1)\},\ \{(4,3)\},\ \{(4,5)\},\\ & \{(5,1)\},\ \{(5,2)\},\ \{(5,3)\},\ \{(5,4)\}\ \ \} \end{aligned}$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.5.1) Manipulação e Fecho de Relações

Lista de Exercícios

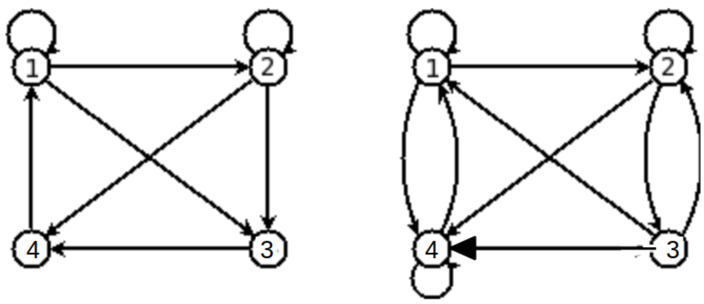
1. *(Kolman5-seção 4.7-ex.1)* Dados $A = B = \{1, 2, 3\}$ e dadas as relações R e S de A para B a seguir:

   $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
   $S = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

   Compute:

   (a) $\overline{R}$
   (b) $R \cap S$
   (c) $R \cup S$
   (d) S^{-1}

2. *(Kolman5-seção 4.7-ex.7)* Sejam R e S duas relações cujos digrafos correspondentes são mostrados abaixo. Compute: (a) $\overline{R}$; (b) $R \cap S$; (c) $R \cup S$; (d) S^{-1}



3. *(Kolman5-seção 4.7-ex.9)* Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Sejam R e S relações de A para B cujas matrizes são dadas abaixo. Compute (a) $\overline{S}$; (b) $R \cap S$; (c) $R \cup S$; (d) R^{-1}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *(Kolman5-seção 4.7-ex.12)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Dadas as matrizes M_R e M_S abaixo, das relações R e S de A para B, compute:
(a) $M_{R \cap S}$; (b) $M_{R \cup S}$; (c) $M_{R^{-1}}$; (d) $M_{\overline{S}}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *(Kolman2-seção 4.7-ex.17)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e sejam as relações de equivalência sobre A dadas por:
$R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 6), (4, 4), (6, 4), (6, 6), (5, 5)\}$
Compute a partição correspondente a a $R \cap S$.

6. *(Kolman5-seção 4.7-ex.22)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$
$S = \{(3, 1), (4, 4), (2, 3), (2, 4), (1, 1), (1, 4)\}$

   (a) Será que $(1, 3) \in R \circ R$?
   (b) Será que $(4, 3) \in S \circ R$?
   (c) Será que $(1, 1) \in R \circ S$?
   (d) Compute $R \circ R$.
   (e) Compute $S \circ R$.
   (f) Compute $R \circ S$.
   (g) Compute $S \circ S$.

7. *(Kolman5-seção 4.7-ex.25)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sejam M_R e M_S matrizes das relações R e S sobre A.
Compute (a) $M_{R \circ R}$; (b) $M_{S \circ R}$; (c) $M_{R \circ S}$; (d) $M_{S \circ S}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.5.1) Manipulação e Fecho de Relações

Lista de Exercícios

1. Resposta:
   (a) $\overline{R} = \{(1,3),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}$
   (b) $R \cap S = \{(3,1)\}$
   (c) $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
   (d) $S^{-1} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$
2. Resposta:
   (a) $\overline{R} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4),(1,4)\}$
   (b) $R \cap S = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(3,4)\}$
   (c) $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
   (d) $S^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(1,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
3. Resposta:
   (a) $\overline{S} = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$
   (b) $R \cap S = \{(1,2),(2,4),(3,1),(3,2)\}$
   (c) $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
   (d) $R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(4,1),(4,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$
4. Resposta:
   (a) $$M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   (b) $$M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (c) $$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (d) $$M_{\overline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Resposta:

$R \cap S = \{(1,2),(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$A/(R \cap S) = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$

6. Respostas:
   (a) Sim.
   (b) Sim.
   (c) Sim.
   (d) $M_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (e) $M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (f) $M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   (g) $M_{S\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Resposta:

   (a) $$M_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) $$M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) $$M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (d) $$M_{S\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.5.2) Fecho de Relações transitivas

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 4.8-ex.1)* Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.
   (a) Compute a matriz M_{R^∞}, do fecho transitivo de R, usando a fórmula:
   $M_{R^\infty} = M_R \vee (M_R)^2_\odot \vee (M_R)^3_\odot$
   (b) Liste a relação R^∞ cuja matriz foi computada na parte (a).

2. *(Kolman5-seção 4.8-ex.3)* Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e seja R uma relação sobre A cuja matriz é:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = W_0$$

   Compute as matrizes W_1, W_2 e W_3 que seriam geradas pelo algoritmo de Warshall neste caso.

3. *(Kolman5-seção 4.8-ex.5)* Seja $A = \mathbb{Z}^+$ e seja R a relação sobre A definida por:
   $a\ R\ b$ se e somente se $b = a + 1$. Forneça o fecho transitivo de R.

Nos próximos 2 exercícios, seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Para a relação R cuja matriz é dada, encontre a matriz do fecho transitivo usando o algoritmo de Warshall.

4. *(Kolman5-seção 4.8-ex.9)* $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. *(Kolman5-seção 4.8-ex.11)* $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações

6.5.2) Fecho de Relações transitivas

Lista de Exercícios

1. Resposta:

   (a) $M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $R^\infty = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

2. Resposta:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = W_2 = W_3$$

3. Resposta: $a\ R^\infty\ b$ se e somente se $b > a$

4. Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

7) Funções

7.1) Definições e Tipos

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 5.1-ex.1)* Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Determine se cada uma das relações R de A para B abaixo é uma função. Se for uma função, forneça a sua imagem.
   (a) $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$;
   (b) $R = \{(a, 1), (b, 2), (a, 2), (c, 1), (d, 2)\}$;

2. *(Kolman5-seção 5.1-exs.5 e 7)* Comprove que a fórmula dada efetivamente produz uma função de A para B:
   (a) $A = B = \mathbb{Z}$; $f(a) = a^2$
   (b) $A = \mathbb{R}$, $B = \{0, 1\}$. Para todo número real a:

$$f(a) = \begin{cases} 0 & se \quad a \notin \mathbb{Z} \\ 1 & se \quad a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. *(Kolman5-seção 5.1-ex.9)* Sejam $A = B = C = \mathbb{R}$ e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definidas por $f(a) = a - 1$ e $g(b) = b^2$. Encontre:
   (a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(2)$
   (c) $(g \circ f)(x)$ (d) $(f \circ g)(x)$
   (e) $(f \circ f)(y)$ (f) $(g \circ g)(y)$

4. *(Kolman5-seção 5.1-ex.11)* Em cada item abaixo, são dados conjuntos A e B e uma função de A para B. Determine se esta função é injetora ou sobrejetora.
   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\} = B$; $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$
   (b) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c, d\}$ $f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$

5. *(Kolman5-seção 5.1-ex.13)* Em cada item abaixo, são dados conjuntos A e B e uma função de A para B. Determine se esta função é injetora ou sobrejetora.
   (a) $A = B = \mathbb{Z}$; $f(a) = a - 1$
   (b) $A = \mathbb{R}$; $B = \{x |\ x \text{ é real e } x \geq 0\}$; $f(a) = |a|$

6. *(Kolman5-seção 5.1-ex.15)* Em cada item abaixo, são dados conjuntos A e B e uma função de A para B. Determine se esta função é injetora ou sobrejetora.

   (a) $A = B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad f((a,b)) = (a+b, a-b)$

   (b) $A = \mathbb{R}$; $B = \{x |\ x$ é real e $x \geq 0\}$; $\quad f(a) = a^2$

7. *(Kolman5-seção 5.1-ex.19)* Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Verifique que $g = f^{-1}$:

   (a) $A = B = \mathbb{Z}; \quad f(a) = \frac{a+1}{2},\ \ g(b) = 2b - 1$

   (b) $A = \{x |\ x$ é real e $x \geq 0\}$; $B = \{y |\ y$ é real e $y \geq -1\}$; $f(a) = a^2 - 1,\ \ g(b) = \sqrt{b+1}$

8. *(Kolman5-seção 5.1-ex.26)* Sejam $A = B = C = \mathbb{R}$ e considere as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definidas por $f(a) = 2a + 1$, $g(b) = b/3$, verifique o seguinte teorema visto em aula: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

9. *(Kolman5-seção 5.1-ex.27)* Se um conjunto A tem n elementos, quantas funções existem de A para A?

10. *(Kolman5-seção 5.1-ex.29)* Se A tem m elementos e B tem n elementos, quantas funções existem de A para B?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

7) Funções

7.1) Definições e Tipos

Lista de Exercícios

1. Resposta:
   (a) Sim. $Im(R) = \{1, 2\}$
   (b) Não.

2. Respostas:
   (a) Todo inteiro pode gerar só um quadrado que também é inteiro.
   (b) Ou um real é inteiro ou não é.

3. Respostas:
   (a) $(f \circ g)(2) = 3$
   (b) $(g \circ f)(2) = 1$
   (c) $(g \circ f)(x) = (x-1)^2$
   (d) $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$
   (e) $(f \circ f)(y) = y - 2$
   (f) $(g \circ g)(y) = y^4$

4. Respostas:
   (a) Ambos.
   (b) Nenhum dos dois.

5. Respostas:
   (a) Ambos.
   (b) Sobrejetora.

6. Respostas:
   (a) Ambos.
   (b) Sobrejetora.

7. Respostas:
   (a) $(g \circ f)(a) = g\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2\left(\frac{a+1}{2}\right) - 1 = a$
   (b) $(g \circ f)(a) = g(a^2 - 1) = \sqrt{a^2 - 1 + 1} = |a| = a$ (pois $a \geq 0$)

8. Resposta:
   $(g \circ f)(a) = \frac{2a+1}{3} \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(b) = \frac{3b-1}{2}$
   $g^{-1}(a) = 3a$ e $f^{-1}(b) = \frac{b-1}{2} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1} \circ g^{-1})(b) = \frac{3b-1}{2} = (g \circ f)^{-1}(b)$

9. Resposta: n^n

10. Resposta: n^m

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

7) Funções

7.2) Crescimento de funções

Lista de Exercícios

(Kolman5-seção 5.3-exs.1-2) Para os próximos 2 exercícios, seja f uma função que descreve o número de passos requerido para executar um certo algoritmo. O número de itens a ser processado é dado por n. Para cada função, descreva o que acontece com o número de passos se o número de itens é dobrado.

1. (a) $f(n) = 1001$
   (b) $f(n) = 3n$
   (c) $f(n) = 5n^2$
   (d) $f(n) = 2.5n^3$

2. (a) $f(n) = 1.4\,log\,n$
   (b) $f(n) = 2^n$
   (c) $f(n) = n.log\,n$
   (d) $f(n) = 100n^4$

3. *(Kolman5-seção 5.3-ex.5)* Mostre que $f(n) = 8n + log(n)$ é $O(n)$.

4. *(Kolman5-seção 5.3-ex.6)* Mostre que $f(n) = n^2(7n - 2)$ é $O(n^3)$.

5. *(Kolman5-seção 5.3-ex.7)* Mostre que $f(n) = nlog\,n$ é $O(g)$ para $g(n) = n^2$ mas g não é $O(f)$.

6. *(Kolman5-seção 5.3-ex.8)* Mostre que $f(n) = n^{100}$ é $O(g)$ para $g(n) = 2^n$ mas g não é $O(f)$.

7. *(Kolman5-seção 5.3-ex.9)* Mostre que f e g possuem a mesma ordem para $f(n) = 5n^2 + 4n + 3$ e $g(n) = n^2 + 100n$.

8. *(Kolman5-seção 5.3-ex.10)* Mostre que f e g possuem a mesma ordem para $f(n) = log(n^3)$ e $g(n) = log_5(6n)$.

9. *(Kolman5-seção 5.3-ex.11)* Classifique as funções abaixo segundo sua ordem (coloque-as em conjuntos contendo funções de mesma ordem):

$f_1(n) = 5nlog\,n$	$f_2(n) = 6n^2 - 3n + 7$	$f_3(n) = 1.5^n$
$f_4(n) = log(n^4)$	$f_5(n) = 13463$	$f_6(n) = -15n$
$f_7(n) = log(log(n))$	$f_8(n) = 9n^{0.7}$	$f_9(n) = n!$
$f_{10}(n) = n + log\,n$	$f_{11}(n) = \sqrt{n} + 12n$	$f_{12}(n) = log(n!)$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

7) Funções

7.2) Crescimento de funções

Lista de Exercícios

1. Respostas:
   (a) O número de passos permanece sempre em 1001.
   (b) O número de passos dobra.
   (c) O número de passos quadruplica.
   (d) O número de passos fica 8 vezes maior.

2. Respostas: (considere que $log(x) = log_2(x)$)
   (a) O número de passos aumenta de um valor constante igual a 1.4.
   (b) O número de passos fica 2^n vezes maior (passa para 2^{2n}).
   (c) O número de passos fica mais do que o dobro (passa para $2n(logn + 1)$).
   (d) O número de passos fica 16 vezes maior.

3. Resposta: $|8n + log(n)| \leq |8n + n| = |9n|,\ n \geq 1 \quad (c = 9,\ k = 1)$

   Nota: lembre que $log(n) \leq n \ \Leftrightarrow\ n \leq 2^n$ (algo que foi provado por indução)

4. Resposta: $7n^3 - 2n^2 \ \leq\ 7n^3 + 2n^2 \ \leq\ 7n^3 + 2n^3 \ =\ 9n^3\ ,\ n \geq 1 \quad (c = 9,\ k = 1)$

5. Resposta:
   - $nlog\,n$ é $O(n^2)$:
     $n.log(n) < n.n = n^2,\ n \geq 1$ (NOTA: $log(n) < n$ provado por indução)
   - Por outro lado:
     - suponha que existam C e K tais que: $n^2 \leq C.n.logn,\quad n \geq K$
     - então escolha $N \geq K$ com $N > C.logN$ também
     - daí, teríamos: $N^2 \leq C.N.logN < N^2$ (contradição)
     - NOTA: sempre existe $N \geq K$ tal que $N/logN > C$, não importa quão grande seja C, pois o Cálculo mostra que: $lim_{N \longrightarrow \infty} N/logN = \infty$

6. Resposta:

- Primeiro, vamos provar que n^{100} é $O(2^n)$:

  Proposição: $n^{100} \leq 2^n$ (para $n = 997, 998, \ldots$)

  - Passo básico: $997^{100} \leq 2^{997}$ OK (usar python)
  - Passo indutivo:
    * Hipótese: $k^{100} \leq 2^k$ $(k \geq 997)$
      · Será que: $(k+1)^{100} \leq 2^{k+1}$??
    * Temos: $(k+1)^{100} = k^{100} + [(k+1)^{100} - k^{100}]$
      · Agora, será que: $[(k+1)^{100} - k^{100}] \leq k^{100}$??
      · Ou, será que: $(k+1)^{100} \leq 2.k^{100}$??
      · Ou ainda, será que: $(1 + \frac{1}{k})^{100} \leq 2$??
    * Ora, $(1 + \frac{1}{k})^{100}$ tende a valer 1, quando k cresce sem parar
      · Logo, deve existir um k a partir do qual $(1 + 1/k)^{100} \leq 2$ $(k >= 997)$
      · Ou seja, existe $k >= 997$ a partir do qual $((k+1)^{100} - k^{100}) \leq k^{100}$
      · Trabalharemos acima deste k
    * Voltando: $(k+1)^{100} = k^{100} + ((k+1)^{100} - k^{100}) \leq k^{100} + k^{100}$
    * Usando a hipótese indutiva, temos:
      $(k+1)^{100} \leq k^{100} + k^{100} \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ (OK)

- Agora, temos que provar que 2^n não é $O(n^{100})$:

  Prova por contradição:

  - Vamos assumir que existem C e K tais que: $2^n \leq C.n^{100}, \quad \forall n \geq K$
  - Então escolhemos: $N \geq K$ tal que $\frac{2^N}{N^{100}} > C$
  - Substituindo: $2^N \leq C.N^{100} < \frac{2^N}{N^{100}} \times N^{100} = 2^N$ (contradição)
  - NOTA: sempre existe este N tal que $\frac{2^N}{N^{100}} > C$, pois:
    * usando o Cálculo, vemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{2^N}{N^{100}} = \infty$

7. Resposta:

- Primeiro, vamos provar que f é $O(g)$:

  $|5n^2 + 4n + 3| \leq |5n^2 + 500n| \leq 5|n^2 + 100n|, \quad (n \geq 1) \quad (C = 5, K = 1)$

- Por outro lado, temos que:

  $|n^2 + 100n| = |n^2 + 4 \times 25n| \leq |5n^2|, \quad n \geq 25$ (NOTA: $n^2 + 4 \times 25n = 5n^2$ para $n = 25$)

  Além disto: $|5n^2| \leq |5n^2 + 4n + 3|$

  Logo: g é $O(f)$, com $(K = 25, C = 1)$

8. Resposta: (NOTA: quando não especificado, foi usado $log_2(n)$)

$$f(n) = log(n^3) = 3logn$$
$$g(n) = log_5(6n) = log_5(6) + \frac{logn}{log(5)} = g(n)$$

- Primeiro, f é $O(g)$:

  Temos que, para $n \geq 1$:

  $$3logn \;=\; (3 \times log(5)) \times \frac{logn}{log(5)} \leq (3 \times log(5)) \times (log_5(6) + \frac{logn}{log(5)})$$

  Logo, f é $O(g)$, com $K = 1$ e $C = 3 \times \lceil log(5) \rceil)$

- Por outro lado:

  $$log_5(6) + \frac{logn}{log(5)} \;\leq\; \frac{2}{log(5)}logn \quad (n \geq 6)$$

  Mas: $\frac{2}{log(5)}logn \leq 3logn \quad (n \geq 6)$

  Logo, temos que:

  $$log_5(6) + \frac{logn}{log(5)} \;\leq\; 3logn \quad (n \geq 6)$$

  Ou seja: g é $O(f)$, com $K = 6$ e $C = 1$

9. Resposta: $\{f_5\}, \{f_6, f_{10}, f_{11}\}, \{f_7\}, \{f_4\}, \{f_8\}, \{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3\}, \{f_9\}, \{f_{12}\}$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

O Princípio do Pombal

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 3.3-ex.1)* Se 13 pessoas são reunidas em uma sala, mostre que pelo menos duas delas devem fazer aniversário no mesmo mês.

2. *(Rosen6-seção 5.2-ex.15)* Quantos números devem ser selecionados do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para garantir que pelo menos um par destes números forneça uma soma igual a 7?

3. *(Kolman5-seção 3.3-ex.5)* Mostre que, se 7 cores são usadas para pintar 50 bicicletas, pelo menos oito bicicletas ficarão com a mesma cor.

4. *(Kolman5-seção 3.3-ex.7)* Indo para o cinema, seis amigos descobrem que eles estão levando um total de R$21,61. Mostre que um ou mais entre eles deve(m) ter pelo menos R$3,61.

5. *(Kolman5-seção 3.3-ex.11)* Quantos amigos você deve ter para garantir que pelo menos 5 deles façam aniversário no mesmo mês?

6. *(Rosen6-seção 5.2-ex.29)* Mostre que existem pelo menos 6 pessoas na Califórnia (população = 36 milhões) que possuem as mesmas 3 iniciais e que nasceram no mesmo dia do ano (mas não necessariamente no mesmo ano). Assuma que todos têm nomes com 3 iniciais.

7. *(Kolman5-seção 3.3-ex.13)* Seja A uma matriz Booleana 8×8. Se a soma dos elementos de A é 51, prove que existe uma linha i e uma coluna j em A tais que a soma dos elementos nesta linha i com esta coluna j totaliza mais do que 13.

8. *(Kolman5-seção 3.3-ex.15)* Prove que se quaisquer 14 inteiros de 1 a 25 são escolhidos, então um deles é um múltiplo de um outro.

9. *(Kolman5-seção 3.3-ex.21)* Prove que qualquer sequência de seis inteiros deve conter uma subsequência cuja soma é divisível por 6. (Dica: considere as somas $c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3, \ldots$ e os possíveis restos quando dividindo por 6.)

10. *(Kolman5-seção 3.3-ex.23)* Mostre que qualquer conjunto de 6 inteiros positivos, repetidos ou não, cuja soma é 13 deve conter um subconjunto cuja soma é 3. (Dica: considere as possíveis quantidades de números "1" na formação da soma.)

11. *(Kolman5-seção 3.3-ex.25)* O laboratório de computação tem 12 PCs e 5 impressoras. Qual é o mínimo número de conexões que devem ser feitas para garantir que qualquer conjunto de 5 PCs ou menos possa acessar impressoras ao mesmo tempo?

12. *(Rosen6-seção 5.2-ex.37)* Em um certo campeonato de queda de braço, o campeão teve que enfrentar no mínimo um adversário por hora, mas não teve mais do que 125 confrontos, ao longo de um período de 75 horas. (Aqui uma hora significa um período iniciando em uma hora exata e indo até a hora seguinte.) Sabendo disto, mostre que existe um período de horas consecutivas durante o qual o campeão teve exatamente 24 confrontos.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

O Princípio do Pombal

Lista de Exercícios

1. Considere os meses de nascimento como pombos e os meses do calendário como casas de pombo. Então temos 13 pombos e 12 casas de pombo. Pelo Princípio do Pombal, pelo menos duas pessoas nasceram no mesmo mês.

2. Resp.: 4. Considere as casas de pombo como sendo $\{(1,6),(2,5),(3,4)\}$. Todo número selecionado deve cair em uma destas "casas". Pelo PP, se pegarmos 4 ou mais números, pelo menos uma destas 3 casas deverá estar ocupada e todas as casas somam 7.

3. Pelo Princípio do Pombal Estendido, neste caso, pelo menos $\lfloor \frac{50-1}{7} \rfloor + 1 = 8$ bicicletas terão a mesma cor.

4. Considere os 2161 centavos como os pombos e os 6 amigos como as casas de pombo. Então, pelo menos um amigo possui $\lfloor \frac{2161-1}{6} \rfloor + 1 = 361$ centavos.

5. Pelo menos 49. Neste caso, pelo PPE, pelo menos $\lfloor \frac{49-1}{12} \rfloor + 1 = 5$ farão aniversário no mesmo mês (note que, com 48 amigos ou menos, isto não é garantido).

6. Note que existem $6432816 = 26^3 \times 366$ possibilidades para 3 iniciais e data de nascimento. Então, pelo PPE, existem pelo menos $\lfloor 36000000/6432816 \rfloor + 1 = 6$ pessoas com mesmas iniciais e dia de nascimento

7. Considere as 8 linhas: uma linha deve conter, pelo menos, sete 1's, pois há 51 1's no total.
   Da mesma forma, há uma coluna com, pelo menos, 7 1's.
   A soma dos valores nesta linha e nesta coluna fornece, pelo menos, 13.

8. Rotule as casas de pombo com $1, 3, 5, \ldots, 25$ (os nros ímpares de 1 a 25).
   Associe cada um dos 14 nros selecionados à casa de pombo rotulada com a sua parte ímpar.
   Existem apenas 13 casas de pombo, de modo que, pelo PP, 2 números terão que ter a mesma parte ímpar. Um deles será múltiplo do outro.
   (Ver exemplo semelhante nas notas em aula.)

9. Considere as somas: $c_1, c_1 + c_2, \ldots, c_1 + c_2 + \ldots + c_6$
   - Se uma destas já dá resto zero quando dividida por 6, está feito
   - Se nenhuma dá resto zero quando dividida por 6, então, pelo PP, há duas delas que dão o mesmo resto (pois só sobram 5 restos possíveis)
   - A diferença positiva destas duas corresponde a uma subsequência cuja soma é divisível por 6.

10. Temos que considerar os casos em que há:
    - três ou mais 1's: FEITO
    - dois 1's:
      - se não tivesse nenhum 2: a soma seria, no mínimo, $1 + 1 + 4 \times 3$, o que não serve
      - então tem que ter, no mínimo, um 2 para somar 13: FEITO
    - um 1:
      - se não tivesse nenhum 2: a soma seria, no mínimo, $1 + 5 \times 3$, o que não serve
      - então, novamente, tem que ter, no mínimo, um 2: FEITO
    - nenhum 1:
      - se não tivesse nenhum 3: então a soma seria 6×2 ou, no mínimo, $5 \times 2 + 4$
      - ou seja: seria $= 12$ ou ≥ 14 (não tem nada entre estes dois)
      - nenhum destes dois casos serve
      - então tem que ter um 3 para poder somar 13: FEITO

11. Vai ser preciso ter, pelo menos, 40 conexões. Se uma impressora tiver 7 ou menos conexões aos PCs, então poderá haver um conjunto de 5 PC's solicitando acesso a impressoras, mas apenas 4 delas estarão disponíveis.

12. Seja a_i o nro de confrontos completados na hora i.
    - Então $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{75} \leq 125$.
    - Além disto: $25 \leq a_1 + 24 < a_2 + 24 < \ldots < a_{75} + 24 \leq 149$.
    - São 150 nros $a_1, ..., a_{75}$, $a_1 + 24, ..., a_{75} + 24$.
    - Pelo PP, pelo menos dois são iguais.
    - Como todos são distintos, devemos ter: $a_i = a_j + 24$ para algum $i > j$

      (a_i do 1o bloco e $a_j + 24$ do 2^o bloco).
    - Logo, no período da $(j + 1)$-ésima à i-ésima hora, ocorrem exatamente 24 confrontos.

8) Contagem I

8.2) Contagem de conjuntos

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 5.1-ex.1)* Em uma certa universidade, há 18 formandos em Matemática e 325 formandos em Ciência da Computação. Pergunta-se:
   (a) De quantos modos se pode escolher dois alunos representantes de maneira que um seja formando em Matemática e o outro seja formando em Ciência da Computação?
   (b) De quantos modos se pode escolher um aluno representante que seja formando em Matemática ou formando em Ciência da Computação?

2. *(Rosen6-seção 5.1-ex.11)* Quantas strings de 10 bits começam e terminam com um 1?

3. *(Rosen6-seção 5.1-ex.13)* Quantas strings de bits de comprimento $\leq n$, aonde n é um inteiro positivo, consistem inteiramente de 1s?

4. *(Rosen6-seção 5.1-ex.17)* Quantas strings com 5 caracteres ASCII contêm o caracter `@` pelo menos uma vez? (Nota: existem 128 caracteres ASCII diferentes.)

5. *(Rosen6-seção 5.1-ex.21)* Quantos inteiros positivos entre 100 e 999 (inclusive)
   (a) são divisíveis por 7?
   (b) são ímpares?
   (c) possuem os mesmos 3 dígitos decimais?
   (d) não são divisíveis por 4?
   (e) são divisíveis por 3 ou 4?
   (f) não são divisíveis nem por 3 nem por 4?
   (g) são divisíveis por 3 mas não por 4?
   (h) são divisíveis por 3 e 4?

6. *(Rosen6-seção 5.1-ex.23)* Quantas strings com 3 dígitos decimais
   (a) não contêm o mesmo dígito 3 vezes?
   (b) começam com um dígito ímpar?
   (c) possuem exatamente 2 dígitos que são 4?

7. *(Rosen6-seção 5.1-ex.35)* Quantas funções existem do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, aonde n é um inteiro positivo, para o conjunto $\{0, 1\}$

   (a) que são injetoras?

   (b) que atribuem 0 tanto a 1 como a n?

   (c) que atribuem 1 a exatamente um dos inteiros positivos menores do que n?

8. *(Rosen6-seção 5.1-ex.39)* Um *palíndromo* é uma string cujo reverso é idêntico à string. Quantas strings de bits de comprimento n são palíndromos? (Exemplo de palíndromo sobre o português: "Socorram-me, subi no ônibus em Marrocos".)

9. *(Rosen6-seção 5.1-ex.53)* De quantas formas é possível arranjar as letras a, b, c e d de maneira que o a nunca seja seguido imediatamente pelo b?

10. *(Rosen6-seção 7.5-ex.5)* Encontre o número de elementos em $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ se existem 100 elementos em cada conjunto e se:

    (a) os conjuntos são disjuntos dois a dois;

    (b) existem 50 elementos comuns em cada par de conjuntos e nenhum elemento é comum aos 3 conjuntos;

    (c) existem 50 elementos comuns em cada par de conjuntos e 25 elementos comuns a todos os conjuntos;

    (d) os conjuntos são iguais.

11. *(Rosen6-seção 7.5-ex.11)* Encontre o número de inteiros positivos não maiores do que 100 que são ímpares ou são quadrados de um inteiro.

12. *(Rosen6-seção 7.5-ex.13)* Quantas strings de bits de comprimento 8 não contêm 6 zeros consecutivos?

13. *(Rosen6-seção 7.5-ex.15)* Quantas permutações de 10 dígitos decimais começam com os 3 dígitos 987, contêm os dígitos 45 na quinta e na sexta posições ou terminam com os 3 dígitos 123?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem I

8.2) Contagem de conjuntos

Lista de Exercícios

1. Respostas:
   (a) $5850 = 18 \times 325$.
   (b) $343 = 18 + 325$.

2. Resposta: 2^8 (para o 1ro e o último bits, só tem uma opção - para os outros 8 bits, tem duas opções)

3. Resposta: $n + 1$ (uma string de 1's para cada comprimento ℓ, $1 \leq \ell \leq n$, e mais a string vazia).

4. $128^5 - 127^5 =$ "todas as strings com 5 caracteres" - "strings que nunca têm zero"
   - Também pode ser: $\binom{5}{1} \times 127^4 + \binom{5}{2} \times 127^3 + \binom{5}{3} \times 127^2 + \binom{5}{4} \times 127^1 + \binom{5}{5} \times 1$
   - Pois: $\binom{5}{0} \times 127^5 + \binom{5}{1} \times 127^4 + \binom{5}{2} \times 127^3 + \binom{5}{3} \times 127^2 + \binom{5}{4} \times 127^1 + \binom{5}{5} \times 1 = (127 + 1)^5$

5. Resposta:
   (a) $128 = \lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14$
   (b) $450 = \frac{900}{2}$
   (c) os 9 números $\{111, 222, 333, \ldots, 999\}$
   (d) $675 = 900 -$ "divisíveis por 4" $= 900 - (\lfloor \frac{999}{4} \rfloor - \lfloor \frac{999}{4} \rfloor) = 900 - (249 - 24)$
   (e) $450 = (\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor) + (\lfloor \frac{999}{4} \rfloor - \lfloor \frac{99}{4} \rfloor) - (\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{999}{12} \rfloor) = 300 + 225 - 75$
   (f) $450 = 900 - 450$
   (g) $225 = 300 - 75 =$ ("[divisíveis por 3] - [divisíveis por 3 e por 4]")
   (h) $75 = \lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8$

6. Resposta:
   (a) $990 = 1000 - 10$
   (b) $500 = 5 \times 10 \times 10$
   (c) $27 = \binom{3}{1} \times 9$

7. Resposta:

   (a) 2, se $n = 1$: $(1 \to 0$ ou $0 \to 1)$

   2, se $n = 2$: $(1 \to 0$ e $2 \to 1)$ ou $(1 \to 1$ e $2 \to 0)$

   0, se $n \geq 3$

   (b) 1, se $n = 1$ e 2^{n-2}, para $n > 1$

   (c) $2(n-1)$:

   - os menores do que n estão restritos cada vez que um é fixado (os outros devem ser 0)
   - além disto, tem $n-1$ variações envolvendo os menores do que n (cada um deles apontando para 1 de cada vez)
   - mas multiplica por 2 porque o n pode ir para 0 ou para 1

8. Resposta: Se n é par: $2^{n/2}$; se n é ímpar: $2^{(n+1)/2} = 2^{(n-1)/2} \times 2^1$

9. Resposta: $18 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 2 - 2 - 2$

   "total de sequências" − "as 2 sequências do tipo $ab{*}{*}$"
   − "as 2 sequências do tipo ${*}ab{*}$"
   − "as 2 sequências do tipo ${*}{*}ab$"

10. Resposta:

    (a) $300 = 100 + 100 + 100$

    (b) $150 = 100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50$

    (c) $175 = 100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 25$

    (d) $100 = 100 + 100 + 100 - 100 - 100 - 100 + 100$ (ou direto)

11. $55 = \lfloor 100/2 \rfloor + 10 - 5 =$ "[ímpares] + [quads de int] - [ímpares e quad de int]"

12. $248 = 256 - 8 =$ [total de strings de 8 bits] - [strings com 6 zeros consecutivos]
    Cálculo do nro de strings com 6 zeros consecutivos:
    seja $A = \{x \mid 6$ bits iniciais de $x = 000000\}$
    seja $B = \{x \mid 6$ bits do meio de $x = 000000\}$
    seja $C = \{x \mid 6$ bits finais de $x = 000000\}$
    Então: $|AUBUC| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
    $= 4 + 4 + 4 - 2 - 1 - 2 + 1 = 8$ contêm 6 zeros consecutivos

13. $50138 = 7! + 8! + 7! - 5! - 4! - 5! + 2!$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

8.3) Arranjos e Combinações

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 3.1-ex.1)* Uma senha de banco consiste de duas letras do alfabeto seguidas por dois dígitos. Quantas senhas diferentes existem?

2. *(Kolman5-seção 3.1-ex.8)* Compute os seguintes valores:
   (a) ${}_4P_4$
   (b) ${}_6P_5$
   (c) ${}_7P_2$

3. *(Kolman5-seção 3.1-ex.9)* Compute o seguinte:
   (a) ${}_nP_{n-1}$
   (b) ${}_nP_{n-2}$
   (c) ${}_{n+1}P_{n-1}$

4. *(Rosen6-seção 5.3-ex.11)* Quantas strings de bits de comprimento 10 contêm:
   (a) exatamente 4 1s?
   (b) no máximo 4 1s?
   (c) no mínimo 4 1s?
   (d) um número igual de 0s e 1s?

5. *(Kolman5-seção 3.1-ex.19)* Quantos arranjos diferentes das letras da palavra BOUGHT podem ser formados se as vogais devem ser mantidas lado a lado?

6. *(Kolman5-seção 3.1-ex.25)* De quantas maneiras diferentes podem n pessoas se sentar em volta de uma mesa circular?

7. *(Kolman5-seção 3.1-ex.26)* Forneça uma prova do seu resultado para o exercício anterior.

8. *(Kolman5-seção 3.1-ex.29)* Prove que $n \cdot_{n-1} P_{n-1} =_n P_n$.

9. *(Kolman5-seção 3.1-ex.33)* Quantos zeros existem no final de 12! ? E no final de 26! ? E no final de 53! ?

10. *(Kolman5-seção 3.1-ex.34)* Forneça um procedimento para determinar o número de zeros no final de $n!$. Justifique o seu procedimento.

11. *(Kolman5-seção 3.2-ex.1)* Compute o seguinte:
    (a) ${}_7C_7$
    (b) ${}_7C_4$
    (c) ${}_{16}C_5$

12. *(Kolman5-seção 3.2-ex.3)* Mostre que ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

    OU: Mostre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

13. *(Kolman5-seção 3.2-ex.7)* Um empresário está desenvolvendo uma campanha publicitária. Para veicular sua campanha, ele está considerando seis revistas, 3 jornais, duas estações de televisão e quatro estações de rádio. Sabendo disto, determine de quantas formas ele pode distribuir 6 propagandas se:

    (a) todas as seis devem aparecer em revistas?
    (b) duas devem aparecer em revistas, duas em jornais, uma em televisão e uma em rádio?

14. *(Rosen6-seção 5.3-ex.13)* Um grupo contém n homens e n mulheres. De quantos modos se pode arranjar estas pessoas em uma fila com homens e mulheres alternados? (A ordem importa.)

15. *(Kolman5-seção 3.2-ex.9)*

    (a) Encontre o número de subconjuntos de cada tamanho possível para um conjunto contendo 4 elementos.

    (b) Encontre o número de subconjuntos de cada tamanho possível para um conjunto contendo n elementos.

16. *(Kolman5-seção 3.2-ex.21)* Cinco moedas não viciadas são lançadas e os resultados registrados.

    (a) Quantas sequências diferentes de caras e coroas são possíveis?
    (b) Quantas das sequências do item (a) contêm exatamente 1 cara registrada?
    (c) Quantas das sequências do item (a) contêm exatamente 3 caras registradas?

17. *(Rosen6-seção 5.3-ex.21)* Quantas permutações das letras ABCDEFG contêm:

    (a) a string BCD?
    (b) a string CFGA?
    (c) as strings BA e GF?
    (d) as strings ABC e DE?
    (e) as strings ABC e CDE?
    (f) as strings CBA e BED?

18. *(Rosen6-seção 5.3-ex.23)* De quantos modos se pode formar uma fila de 8 homens e 5 mulheres de modo que não haja duas mulheres juntas? (Dica: 1ro posicione os homens e então considere posições possíveis para as mulheres)

19. *(Kolman5-seção 3.2-ex.23)* Se n moedas não viciadas são lançadas e os resultados registrados, determine:

    (a) quantas sequências são possíveis?
    (b) quantas sequências contêm exatamente 3 coroas, assumindo que $n \geq 3$?
    (c) quantas sequências contêm exatamente k caras, assumindo que $n \geq k$?

20. *(Kolman5-seção 3.2-ex.33)* Jair quer comprar um livro de poemas. Se ele quer ler um conjunto diferente de 3 poemas todo dia ao longo de um ano, qual é o número mínimo de poemas que o livro deve conter?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

8.3) Arranjos e Combinações

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 3.1-ex.1)* Uma senha de banco consiste de duas letras do alfabeto seguidas por dois dígitos. Quantas senhas diferentes existem?

2. $67600 \ = \ 26 \times 26 \times 10 \ times 10$

3. Resposta:

   (a) $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
   (b) $720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
   (c) $42 = 7 \times 6$

4. Resposta:

   (a) $n!$
   (b) $n!/2$
   (c) $(n+1)!/2$

   (a) $210 \ = \ \binom{10}{4}$
   (b) $386 \ = \ \binom{10}{4} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0} = 210 + 120 + 45 + 10 + 1$
   (c) $848 \ = \ 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} - \binom{10}{3} = 1024 - 1 - 10 - 45 - 120$
   (d) $252 \ = \ \binom{10}{5}$

5. $240 \ = \ 4! \times 5 \times 2$
   $=$ 4! "permutações de [BGHT]" X 5 "posições possíveis para OU" X 2 (para "UO")

6. Resposta: $(n-1)!$

   - "Fixa 1 qualquer e gira os outros $n-1$"
     - Não adianta mudar o fixo, pois obtém uma das permutações anteriores.
   - Ou: como não importa o giro, em $n!$ cada arranjo de n elementos é repetido n vezes (1 vez começando com cada um dos n):
     - Ex.: $\underline{1}23 - 132 - \underline{2}31 - 213 - \underline{3}12 - 321$
     - Ou seja: temos n permutações iguais (apenas giradas) e por isto é preciso fazer $n!/n$.

7. Resposta:
   - Resposta 1:
     - Dos n objetos, o 1ro pode ocupar qualquer posição na mesa circular (e isto não influi)
     - Ex.: qualquer posição é equivalente e então só existe um modo de 1 se sentar à mesa
     - Restam então, (n-1) posições, que poderão ser ocupadas de

       $$1 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1 = (n-1)! \text{ formas distintas.}$$
   - Resposta 2:
     - Se considerarmos $n!$, cada permutação será repetida n vezes, apenas variando o 1ro da fila
     - Ou seja, pode-se escrever a mesma permutação começando com qualquer um dos n
     - Em uma mesa circular isto não importa e então é preciso fazer $n!/n$

8. $n \times_{n-1} P_{n-1} \ = \ n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots 2 \cdot 1 \ = \ {}_nP_n$

9. $2, 6$ e 12

   Sugestão: usar python (import math / print(math.factorial(53)))

10. Resposta:

    k = 0
    i = 5
    while (i $\leq$ n)
      k = k + $\lfloor n/i \rfloor$
      i = i $\times$ 5
    end

    Justificativa:
    - Note que a formação de um 0 resulta de uma multiplicação por $10 = 2 \times 5$.
    - Ao longo do fatorial, para que um 10 seja produzido, é suficiente que ocorra uma multiplicação por um múltiplo de 5, pois existem mais pares do que múltiplos de 5.
    - Mas contar simplesmente os múltiplos de 5 não é suficiente para saber o número de zeros, pois, à medida que potências de 5 maiores do que 5^1 são consideradas, mais fatores 5 ficam disponíveis
    - Desta forma, o algoritmo acima acumula a quantidade de múltiplos de todas as potências de 5 que cabem em n.

11. Resposta:
    (a) 1
    (b) $35 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}$
    (c) $4368 = \frac{16!}{11!\times5!}$

12. Resposta: ${}_nC_r \ = \ \frac{n!}{r!(n-r)!} \ = \ \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} \ = \ {}_nC_{n-r}$

13. Resposta:
    (a) 1
    (b) $360 \ = \ \binom{6}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1}$

14. Resposta: $2 \times (n!)^2$

- Ilustração:
  - Para $n = 2$, teríamos $2! \times 2!$ arranjos entre 2 homens e 2 mulheres a fazer:
    $$\begin{aligned} &\{H1, H2\}! \times \{M1, M2\}! \\ &\qquad = \{\{H1, H2\} \times \{M1, M2\}\} \\ &\qquad\ \ \cup \{\{H1, H2\} \times \{M2, M1\}\} \\ &\qquad\ \ \cup \{\{H2, H1\} \times \{M1, M2\}\} \\ &\qquad\ \ \cup \{\{H2, H1\} \times \{M2, M1\}\} \end{aligned}$$
  - Fornecendo as filas:
    $$\begin{aligned} &H1, M1, H2, M2, \\ &H1, M2, H2, M1, \\ &H2, M1, H1, M2, \\ &H2, M2, H1, M1 \end{aligned}$$
  - E também: tudo de novo, começando com as mulheres.

- A justificativa da resposta para n homens e n mulheres é uma simples generalização deste argumento:
  - Considere n homens e n mulheres intercalados, em uma fila começando com um homem.
  - Internamente, os n homens podem ser arranjados de $n!$ modos (idem para as n mulheres)
  - Qualquer um dos arranjos internos dos n homens pode ser intercalado com qualquer um dos arranjos internos das n mulheres, de modo que há $(n!)^2$ situações possíveis a considerar neste caso.
  - Há um mesmo número de situações a considerar em uma fila que comece com uma mulher.
  - Logo, no total serão $2 \times (n!)^2$ filas possíveis.

15. Resposta:

    (a) 1 de tamanho 0, 4 de tamanho 1, 6 de tamanho 2, 4 de tamanho 3, 1 de tamanho 4

    (b) $\binom{n}{r}$ subconjuntos de tamanho r.

16. Resposta:

    (a) $32 = 2^5$
    (b) $5 = \binom{5}{1}$
    (c) $10 = \binom{5}{3}$

17. Resposta:

    (a) 120 = 5 posições para BCD $\times$ 4!
    (b) 24 = 4 posições para CFGA $\times$ 3!
    (c) 120 = 20 posições para BA-GF $\times$3!

        - Nota: as 20 vêm de:

          `BA-----` : 4 posições para `GF` +

          `-BA----` : 3 posições para `GF` +

          `--BA---` : 3 posições para `GF` +

          `---BA--` : 3 posições para `GF` +

          `----BA-` : 3 posições para `GF` +

          `-----BA` : 4 posições para `GF`

    (d) 24 = $12 \times 2!$ = $(3+2+2+2+3) \times 2!$
    (e) 6 = 3 posições para ABCDE $\times$2!
    (f) 0 (não dá para ter BA e BE ao mesmo tempo)

18. Resposta: 609638400 = $\binom{9}{5} \times 8! \times 5!$

    - Pois: tem 9 lugares possíveis para as mulheres, ou seja, entre os homens ou nas pontas:

      $|H_1|H_2|H_3|H_4|H_5|H_6|H_7|H_8|$ ($|$ = "lugar bom")

    - Destes 9, escolhe-se 5 para colocar as 5 mulheres
    - Além disto, tem 8! permutações internas dos homens e 5! das mulheres a considerar.

19. Resposta:

    (a) 2^n
    (b) $\binom{n}{3}$
    (c) $\binom{n}{k}$

20. Resposta: 15, pois:

    - $\binom{15}{3} = 455$ e $\binom{14}{3} = 364$
    - Ou seja: 15 é o primeiro valor que garante 365 opções ou mais.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

8.4) Coeficientes Binomiais

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 5.4-ex.3)* Encontre a expansão de $(x + y)^6$
2. *(Rosen6-seção 5.4-ex.5)* Quantos termos há na expansão de $(x + y)^{100}$ depois que os termos semelhantes forem reunidos?
3. *(Rosen6-seção 5.4-ex.7)* Qual é o coeficiente de x^9 em $(2 - x)^{19}$?
4. *(Rosen6-seção 5.4-ex.13)* Qual é a linha do triângulo de Pascal que contém os coeficientes binomiais $\binom{9}{k}$, $0 \leq k \leq 9$?
5. *(Rosen6-seção 5.4-ex.15)* Mostre que $\binom{n}{k} \leq 2^n$ para todos os inteiros positivos n e todos os inteiros k, com $0 \leq k \leq n$.
6. *(Rosen6-seção 5.4-ex.17)* Mostre que se n e k são inteiros com $1 \leq k \leq n$, então $\binom{n}{k} \leq n^k/2^{k-1}$
7. *(Rosen6-seção 5.4-ex.19)* Prove a Identidade de Pascal algebricamente, usando a fórmula para $\binom{n}{r}$.
8. *(Rosen6-seção 5.4-ex.23)* Mostre que se n e k são inteiros positivos, então:

   $$\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}/k$$

   Use esta identidade para construir uma definição recursiva dos coeficientes binomiais.
9. *(Rosen6-seção 5.4-ex.25)* Seja n um inteiro positivo. Mostre que $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+2}{n+1}/2$
10. *(Rosen6-seção 5.4-ex.31)* Mostre que a quantidade de subconjuntos com tamanho ímpar de um conjunto não vazio é igual à quantidade dos seus subconjuntos com tamanho par.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

8.4) Coeficientes Binomiais

Lista de Exercícios

1. Resposta: $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

2. Resposta: 101

3. Resposta: $-2^{10} \times \binom{19}{9}$

4. Resposta: 1 9 36 84 126 84 36 9 1

5. A soma de <u>todos</u> os números positivos $\binom{n}{k}$ é igual a 2^n, para k indo de 0 até n, de modo que nenhum deles pode ser maior do que esta soma.

6. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2} \leq \frac{n \cdot n \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} = n^k/2^{k-1}$

7. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \cdot [k + (n-k+1)] = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$

8. $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)}{k}\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} = (n+1)\binom{n}{k-1}/k$. Esta identidade fornece uma definição recursiva, junto com a condição inicial $\binom{n}{0} = 1$.

9. Usando a identidade de Pascal duas vezes, e lembrando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

   $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}\right] = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$

10. Considere que este conjunto possui n elementos. Por um corolário do Teorema Binomial visto em aula, sabemos que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

* Segue que: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$
* O lado esquerdo fornece a quantidade de subconjuntos com um número par de elementos;
* O lado direito fornece a quantidade de subconjuntos com um número ímpar de elementos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

8) CONTAGEM

8.5) Arranjos e Combinações Generalizados (Contagem de Multiconjuntos)

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. *(Kolman5-seção 3.1-ex.23)* Encontre o número de permutações distintas das letras em REQUIREMENTS.

2. *(Rosen6-seção 5.5-ex.1)* De quantos modos diferentes se pode selecionar 5 elementos em ordem de um conjunto de 3 elementos quando é permitido repetição?

3. *(Rosen6-seção 5.5-ex.5)* De quantos modos se pode atribuir 3 tarefas a cinco empregados se cada empregado pode executar mais de uma tarefa?

4. *(Rosen6-seção 5.5-ex.7)* Quantas maneiras existem de selecionar 3 elementos, sem ordem, de um conjunto com 5 elementos quando é permitido repetição?

5. *(Rosen6-seção 5.5-ex.9)* Uma padaria vende pães temperados, pães com gergelim, pães integrais, pães salgados, pães de centeio, pães com uvas passas, pães com erva doce e pães comuns. Quantos modos existem para escolher:
   (a) 6 pães?
   (b) uma dúzia de pães?
   (c) duas dúzias de pães?
   (d) uma dúzia de pães com no mínimo um de cada tipo?
   (e) uma dúzia de pães com no mínimo 3 pães integrais e não mais do que 2 pães salgados?

6. *(Rosen6-seção 5.5-ex.15)* Quantas soluções existem para a equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, aonde cada x_i é um inteiro não negativo tal que:
   (a) $x_1 \geq 1$?
   (b) $x_i \geq 2$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
   (c) $0 \leq x_1 \leq 10$?
   (d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$ e $x_3 \geq 15$?

7. *(Rosen6-seção 5.5-ex.17)* Quantas strings de 10 dígitos ternários (0, 1 ou 2) existem e que contêm exatamente dois 0s, três 1's e cinco 2s?

8. *(Rosen6-seção 5.5-ex.25)* Quantos inteiros positivos menores do que 1000000 possuem a soma dos seus dígitos = 19?

9. *(Rosen6-seção 5.5-ex. 27)* Há 10 questões em um exame final de Matemática Discreta. De quantos modos se pode atribuir escores aos problemas se a soma dos escores é 100 e cada questão vale pelo menos 5 pontos?

10. *(Kolman5-seção 3.2-ex.17)* Um certificado de bônus em uma livraria permite que quem o recebe escolha 6 livros de uma lista combinada dos 10 livros de ficção mais vendidos e dos 10 livros de não-ficção mais vendidos. De quantas maneiras diferentes a seleção de 6 livros pode ser feita, se cada escolha pode ser repetida?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

8) CONTAGEM

8.5) Arranjos e Combinações Generalizados (Contagem de Multiconjuntos)

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $39916800 = 12!/(2!3!) = 11!$

2. $243 = 3^5$

   NOTA: As seleções são: $\{aaaaa, aaaab, aaaac, \ldots, ccccc\}$, ou seja, o exercício pede para determinar quantos números existem de 00000 a 22222 em base 3, o que vale $(22222+1)_3 = (100000)_3 = 3^5$

3. $125 = 5^3$ (NOTA: Cada tarefa só pode ser executada por um empregado)

   Mapeamento entre: Tarefa1 (5 opções) - Empregado1
   Tarefa2 (5 opções) - Empregado2
   Tarefa3 (5 opções) - Empregado3
   Empregado4
   Empregado5

4. $35 = \binom{(5-1)+3}{3}$

5. Respostas: (são 8 tipos de pães)

   (a) $1716 = \binom{(8-1)+6}{6}$

   (b) $50388 = \binom{(8-1)+12}{7}$

   (c) $2629575 = \binom{(8-1)+24}{7}$

   (d) $330 = \binom{(8-1)+4}{4}$ (8 comprometidos, de modo que sobram 4 a escolher de 8)

   (e) 9724

   [$p_3 \geq 3 \Rightarrow$ máx de 9 pães a escolher] E [$p_4 \leq 2 \Rightarrow$ 3 casos: $p_4 = \{0, 1, 2\}$]:

   - $p_3 \geq 3$ integrais e $p_4 = 0$ salgados: ainda tem que escolher 9 pães entre 7 opções, o que pode ser feito de $\binom{9+7-1}{6} = \binom{15}{6} = 5005$ modos
   - $p_3 \geq 3$ integrais e $p_4 = 1$ salgado: ainda tem que escolher 8 pães entre 7 opções, o que pode ser feito de $\binom{8+7-1}{6} = \binom{14}{6} = 3003$ modos
   - $p_3 \geq 3$ integrais e $p_4 = 2$ salgados: ainda tem que escolher 7 pães entre 7 opções, o que pode ser feito de $\binom{7+7-1}{6} = \binom{13}{6} = 1716$ modos

     NOTA: são só 7 opções porque não incluem os salgados
   - TOTAL $= 5005 + 3003 + 1716 = 9724$ modos de escolher os pães

6. Respostas:

   (a) $10626 \; = \; \binom{20+5-1}{20}$

   (b) $1365 \; = \; \binom{11+5-1}{11}$

   (c) Seja $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 > 10\}$

   Queremos: $N - N(P_1') \; = \; \binom{21+(5-1)}{4} - \binom{10+(5-1)}{4} \; = \; 12650 - 1001 \; = \; 11649$

   (d) Resposta: 106

   - Como $x_3 \geq 15$, restam apenas 6 a escolher
   - Além disto, devemos ter: $x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ E $x_2 \in \{1, 2, 3\}$
   - de modo que teremos apenas 3 tipos para escolher (1 e 2 estarão fixos)
   - Assim, serão 12 casos, divididos em 6 grupos:

(x_1, x_2)	#-individual	#-total
$(0,1)$	$\binom{5+(3-1)}{2} = 21$	1×21
$(0,2) \vee (1,1)$	$\binom{4+(3-1)}{2} = 15$	2×15
$(2,1) \vee (1,2) \vee (0,3)$	$\binom{3+(3-1)}{2} = 10$	3×10
$(1,3) \vee (2,2) \vee (3,1)$	$\binom{2+(3-1)}{2} = 6$	3×6
$(2,3) \vee (3,2)$	$\binom{1+(3-1)}{2} = 3$	2×3
$(3,3)$	$\binom{0+(3-1)}{2} = 1$	1×1

$TOTAL = 106$

7. $2520 = \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{5}$

8. 30492

   Solução 1:

   - É um problema de escolher as quantidades para 6 opções, de modo que a soma destas quantidades leve a 19 (só que nenhuma das qtdes pode passar de 9)
     - Problema: o total $\binom{19+(6-1)}{(6-1)}$ inclui escolhas em que cada dígito é $10, 11, \ldots, 19$
   - Como a soma é 19, sabemos que $\binom{19+(6-1)}{(6-1)}$ já não inclui situações em que dois dígitos são $10, 11, \ldots, 19$ (pois aí passaria imediatamente de 19)
   - Então só temos que retirar do total as qtdes correspondentes a termos um dígito $= 10, 11, \ldots 19$, em qualquer uma das 6 posições possíveis:

   Resposta $= |total| - |\text{algum } d_i > 9|$ (com mais de um $d_i > 9$ dá zero)

   $$\text{Resposta} = |total| - 6\times\Big(|d_i\!=\!10| + |d_i\!=\!11| + |d_i\!=\!12| + |d_i\!=\!13| + |d_i\!=\!14| + $$
   $$+ |d_i\!=\!15| + |d_i\!=\!16| + |d_i\!=\!17| + |d_i\!=\!18| + |d_i\!=\!19| \Big)$$
   $$= \binom{19+(6-1)}{5} - 6\times\left(\binom{9+(5-1)}{4} + \binom{8+(5-1)}{4} + \binom{11}{4} + \binom{10}{4} + \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} + \binom{4}{4} \right)$$
   $$= 42504 - 6 \times (715 + 495 + 330 + 210 + 126 + 70 + 35 + 15 + 5 + 1) = \underline{30492}$$

     - Não precisa especificar as posições (é só multiplicar por 6)
     - Em cada posição: Fixa um d_i em ≥ 10 e aí tem $19 - d_i$ para escolher das 5 opções restantes

Solução 2:

- Seja $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_i \geq 10\}$
- Queremos:

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'P_6') &= N_{total} \; - \; (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) + N(P_4) + N(P_5) + N(P_6)) \\ &= \binom{19+(6-1)}{5} \; - \; 6 \times \binom{9+(6-1)}{5} \\ &= 42504 - 6 \times 2002 = \underline{30492} \end{aligned}$$

  - NOTA: não tem intersecções a serem consideradas
    (pois, como acima, com mais de um $x_i \geq 10$, não tem como a soma dar 19)

9. 12565671261 $= \binom{50+(10-1)}{50} = \binom{59}{50}$

10. 177100 $= \binom{6+(20-1)}{6}$ (pode repetir)

8) Contagem

8.6) Princípio da Inclusão-Exclusão Generalizado

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 7.5-ex.19)* Escreva explicitamente a fórmula dada pelo Princípio da Inclusão-Exclusão para o número de elementos na união de 5 conjuntos.

2. *(Rosen6-seção 7.6-ex.3)* Quantas soluções possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, aonde x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos menores do que 6?

3. *(Rosen6-seção 7.6-ex.5)* Encontre o número de primos < 200 usando o Princípio da Inclusão-Exclusão.

4. *(Rosen6-seção 7.6-ex.9)* De quantas maneiras se pode distribuir 6 brinquedos diferentes para 3 crianças diferentes de modo que cada uma das crianças ganhe pelo menos um brinquedo.

5. *(Rosen6-seção 7.6-ex.11)* De quantos modos se pode atribuir 7 tarefas diferentes a 4 funcionários diferentes de modo que cada funcionário receba pelo menos uma tarefa e de modo que a tarefa mais difícil seja atribuída ao melhor funcionário? (NOTA: cada funcionário pode receber mais do que uma tarefa, mas cada tarefa só pode ser executada por um funcionário.)

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

8) Contagem

8.6) Princípio da Inclusão-Exclusão Generalizado

Lista de Exercícios

1. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|$

$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3|$$
$$-|A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5|$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5|$$
$$+|A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

2. $6 =$ "todos - menos as soluções para os ≥ 6"
$$= \binom{13+3-1}{13} - \binom{7+3-1}{7} \times 3 + \binom{1+3-1}{1} \times 3 + 0$$
$$= \binom{15}{13} - \binom{9}{7} \times 3 + \binom{3}{1} \times 3$$
$$= 15 \times 14/2 - (9 \times 8/2) \times 3 + 3 \times 3$$
$$= 105 - 108 + 9$$

3. 46

   - Note que $\sqrt{200} \leq 14$, de modo que um inteiro < 200 é primo se não for divisível por $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ (ver cap. 12)
   - Então, sejam: P_1 : "um inteiro é divisível por 2", etc
   - Resposta $= 6 + N(P_1' P_2' P_3' P_4' P_5' P_6')$
$$= 6 + \Big[198 - \lfloor \tfrac{199}{2} \rfloor - \lfloor \tfrac{199}{3} \rfloor - \lfloor \tfrac{199}{5} \rfloor - \lfloor \tfrac{199}{7} \rfloor - \lfloor \tfrac{199}{11} \rfloor - \lfloor \tfrac{199}{13} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{199}{2\times3} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{2\times5} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{2\times7} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{2\times11} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{2\times13} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{199}{3\times5} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{3\times7} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{3\times11} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{3\times13} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{199}{5\times7} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{5\times11} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{5\times13} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{199}{7\times11} \rfloor + \lfloor \tfrac{199}{7\times13} \rfloor$$
$$+ \lfloor \tfrac{199}{9\times13} \rfloor \ldots \Big]$$

4. $540 = 3^6 - \binom{3}{1} \times 2^6 + \binom{3}{2} \times 1^6$
$=$ "Quantidade de funções sobrejetoras de 6 elementos para 3 elementos"

5. A tarefa T_1 já está atribuída e as 6 tarefas restantes (de T_2 a T_7) são atribuídas incluindo o melhor funcionário ou excluindo-o:

$$\begin{array}{lcl} T_1 & \longrightarrow & F_1 \\ T_2 & & F_2 \\ T_3 & & F_3 \\ T_4 & & F_4 \\ T_5 & & \\ T_6 & & \\ T_7 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Resp.} &= \text{“}6 \to 3\text{”} \;+\; \text{“}6 \to 4\text{”} \quad \text{(6 tarefas restantes são atribuídas sem/com o melhor funcionário)} \\ &= 540 \text{ (ver exerc. anterior) } + \left(4^6 - \tbinom{4}{1}\times 3^6 + \tbinom{4}{2}\times 2^6 - \tbinom{4}{3}\times 1^6\right) \\ &= 540 + \left(4096 - 4\times 729 + 6\times 64 - 4\times 1\right) \\ &= 2100 \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

9) Contagem II

9.1) Relações de Recorrência

Lista de Exercícios

Nos 3 exercícios a seguir, forneça os 4 primeiros termos e identifique se a relação de recorrência dada é "homogênea linear" ou não. Se a relação for linear homogênea, forneça o seu grau:

1. *(Kolman5-seção 3.5-ex.1)* $a_n = 2.5a_{n-1},\ \ a_1 = 4$
2. *(Kolman5-seção 3.5-ex.3)* $c_n = 2^n.c_{n-1},\ \ c_1 = 3$
3. *(Kolman5-seção 3.5-ex.5)* $e_n = 5.e_{n-1} + 3,\ \ e_1 = 1$
4. *(Kolman5-seção 3.5-ex.7)* Seja $A = \{0, 1\}$. Forneça uma relação de recorrência para o número de strings de comprimento n em A^* que não contêm 01.
5. *(Kolman5-seção 3.5-ex.9)* No primeiro dia de cada mês o Sr. Martinez deposita R$100,00 em uma conta-poupança que paga 6% anuais compostos mensalmente. Assumindo que nenhuma retirada é feita, forneça uma relação de recorrência para a quantidade total de dinheiro na conta ao final de n meses.
6. *(Kolman5-seção 3.5-ex.11)* Em um certo jogo, um marcador deve ser movido para a frente 2 ou 3 passos em um caminho linear. Seja c_n o número de modos diferentes em que um caminho de comprimento n pode ser coberto. Forneça uma relação de recorrência para c_n.
7. *(Kolman5-seção 3.5-ex.31)* Para a sequência de Fibonacci, prove que, para $n \geq 2$, $f_{n+1}^2 - f_n^2 = f_{n-1}f_{n+2}$.

Para os próximos 3 exercícios, use a técnica de backtracking para encontrar uma fórmula explícita para a sequência definida pela relação de recorrência e condições iniciais dadas.

8. *(Kolman5-seção 3.5-ex.13)* $b_n = 5.b_{n-1} + 3,\ \ b_1 = 3$
9. *(Kolman5-seção 3.5-ex.15)* $d_n = -1.1d_{n-1},\ \ d_1 = 5$
10. *(Kolman5-seção 3.5-ex.17)* $g_n = ng_{n-1},\ \ g_1 = 6$

Para os próximos 3 exercícios, resolva cada uma das relações de recorrência.

11. *(Kolman5-seção 3.5-ex.19)* $b_n = -3b_{n-1} - 2b_{n-2},\ \ b_1 = -2,\ \ b_2 = 4$
12. *(Kolman5-seção 3.5-ex.21)* $d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2},\ \ d_1 = 1,\ \ d_2 = 7$
13. *(Kolman5-seção 3.5-ex.23)* $g_n = 2g_{n-1} - 2g_{n-2},\ \ g_1 = 1,\ \ g_2 = 4$
14. *(Kolman5-seção 3.5-ex.35)* Resolva a relação de recorrência $a_n = -2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4a_{n-3},\ \ a_1 = 0,$ $a_2 = 2,\ \ a_3 = 8$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

9) Contagem II

9.1) Relações de Recorrência

Lista de Exercícios

1. $4, 10, 25, 62.5$, sim, grau 1
2. $3, 12, 24, 48$, não
3. $1, 8, 43, 216$, não
4. $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_n = s_{n-1} + 1$ ("para cada n, os válidos começam com `1` ou são todos `0`")
5. Ao final do 1ro mês: $A_1 = 100 \times (1 + \frac{0.06}{12})$
   Ao final do mês n: $A_n = (1 + \frac{0.06}{12}) \times (A_{n-1} + 100)$
6. $c_n = c_{n-2} + c_{n-3}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$
7. Para $n \geq 2$, $f_{n+1}^2 - f_n^2 = (f_{n+1} - f_n)(f_{n+1} + f_n) = f_{n-1}f_{n+2}$
8. $b_n = 3 \times 5^{n-1} + \frac{3}{4}(5^{n-1} - 1)$
9. $d_n = 5(-1.1)^{n-1}$
10. $g_n = n! \times 6$
11. $b_n = (-2)^n$
12. $d_n = -\frac{3}{4} \times 2^n + \frac{5}{4} \times n \times 2^n$
13. Equação característica: $r^2 - 2r + 2 = 0$, com raízes: $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$
    Fórmula explícita: $g_n = u(1+i)^n + v(1-i)^n$
    Com as condições iniciais, obtemos: $g_1 = u(1+i) + v(1-i) = 1$ e $g_2 = u(1+i)^2 + v(1-i)^2 = 4$
    Resolvendo este sistema, obtemos: $u = \frac{-1-2i}{2}$, $v = \frac{-1+2i}{2}$
    Fórmula explícita final: $\boxed{g_n = \left(\frac{-1-2i}{2}\right)\left(1+i\right)^n + \left(\frac{-1+2i}{2}\right)\left(1-i\right)^n}$

14. Equação característica: $r^3 + 2r^2 - 2r - 4 = 0$, com raízes: $r_1 = -2$, $r_2 = +\sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$

- NOTA: a raiz -2 é obtida por inspeção. Com ela, a equação pode ser reduzida para o 2^o grau e as outras duas raízes podem ser obtidas.
- Com isto, temos a fórmula explícita: $a_n = u(-2)^n \; + \; v(\sqrt{2})^n \; + \; w(-\sqrt{2})^n$
- Com as condições iniciais, obtemos:

$$-2u + \sqrt{2}v - \sqrt{2}w = 0$$
$$4u + 2v + 2w = 2$$
$$-8u + 2\sqrt{2}v - 2\sqrt{2}w = 8$$

- Resolvendo este sistema (fácil de eliminar u e reduzir a um sistema 2×2), obtemos:
  $u = -2$, $v = \frac{5}{2} - \sqrt{2}$, $w = \frac{5}{2} + \sqrt{2}$
- Chegando à seguinte fórmula final:

$$\boxed{a_n = -2(-2)^n \; + \; (\frac{5}{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2})^n \; + \; (\frac{5}{2} + \sqrt{2})(-\sqrt{2})^n}$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 6.1-ex.1)* Determine se a relação R dada abaixo é um ordenamento parcial sobre o conjunto A.

   (a) $A = \mathbb{Z}$, e $a\ R\ b$ sse $a = 2b$

   (b) $A = \mathbb{Z}$, e $a\ R\ b$ sse $b^2 | a$

2. *(Kolman5-seção 6.1-ex.3)* Determine se a relação R dada abaixo é um ordenamento linear sobre o conjunto A.

   (a) $A = \mathbb{R}$, e $a\ R\ b$ sse $a \leq b$

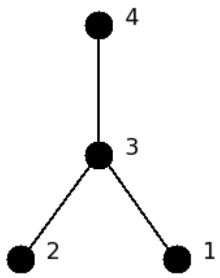
   (b) $A = \mathbb{R}$, e $a\ R\ b$ sse $a \geq b$

3. *(Kolman5-seção 6.1-ex.5)* Sobre o conjuto $A = \{a, b, c\}$, encontre todas as ordens parciais $\leq$ nas quais $a \leq b$.

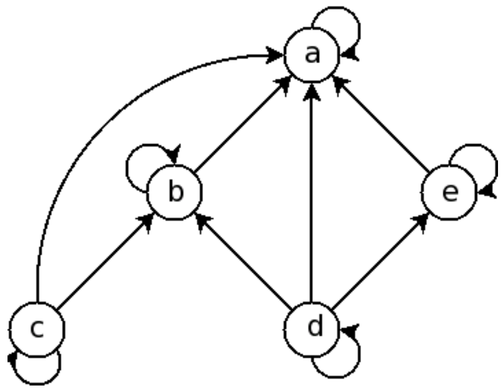
4. *(Kolman5-seção 6.1-ex.9)* Determine o diagrama de Hasse da relação R dada por:

   $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (1,3), (3,3), (3,4), (1,4), (4,4)\}$

5. *(Kolman5-seção 6.1-ex.11)* Descreva os pares ordenados que estão na relação determinada pelo seguinte diagrama de Hasse sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:



6. *(Kolman5-seção 6.1-ex.13)* Determine o diagrama de Hasse da ordem parcial que possui o seguinte dígrafo:



7. *(Kolman5-seção 6.1-ex.15)* Determine o diagrama de Hasse da relação sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuja matriz é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. *(Kolman5-seção 6.1-ex.19)* Seja $A = \{\square, A, B, C, E, O, M, P, S\}$, com a ordem alfabética usual, aonde $\square$ representa um caracter em branco e aonde $\square \leq x$, $\forall x \in A$. Arranje o seguinte em ordem lexicográfica (como elementos de $A \times A \times A \times A$):

   (a) MOP$\square$ (b) MOPE (c) CAP$\square$
   (d) MAP$\square$ (e) BASE (f) ACE$\square$
   (g) MACE (h) CAPE

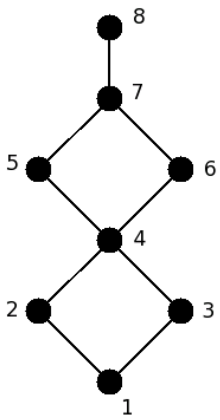
Para os próximos 2 exercícios, considere a ordem parcial de divisibilidade sobre A. Desenhe o diagrama de Hasse do poset e determine se ele é linearmente ordenado.

9. *(Kolman5-seção 6.1-ex.21)* $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

10. *(Kolman5-seção 6.1-ex.23)* $A = \{3, 6, 12, 36, 72\}$.

11. *(Kolman5-seção 6.1-ex.25)* Descreva como usar M_R para determinar se R é um ordenamento parcial.

12. *(Kolman5-seção 6.1-ex.29)* Desenhe o diagrama de Hasse de um ordenamento topológico do seguinte poset:



13. *(Kolman5-seção 6.1-ex.37)* Seja $B = \{2, 3, 6, 9, 12, 18, 24\}$ e seja $A = B \times B$. Defina a seguinte relação sobre A: $(a, b) \prec (a', b')$ sse $a|a'$ e $b \leq b'$, aonde $\leq$ é a ordem parcial usual. Mostre que $\prec$ é um ordenamento parcial.

14. *(Kolman5-seção 6.1-ex.39)* Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ e considere a ordem parcial $\leq$, da divisibilidade sobre A. Ou seja, defina $a \leq b$ como significando que $a|b$. Seja $A' = P(S)$, onde $S = \{e, f, g\}$, um poset com order parcial $\subseteq$. Mostre que $(A, \leq)$ e $(A', \subseteq)$ são isomórficos.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

Lista de Exercícios

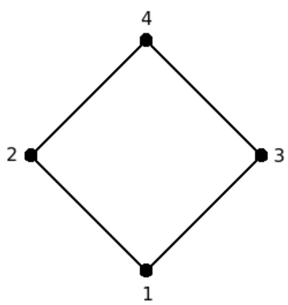
1. Respostas: (a) Não. (b) Não.

2. Respostas: (a) Sim. (b) Sim.

3. Resposta:

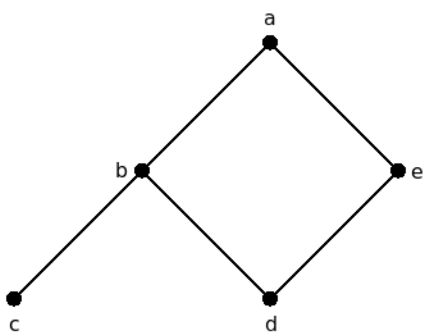
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$$
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c)\}$$
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(c,b)\}$$
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$$
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(c,b),(c,a)\}$$
$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,b),(a,b)\}$$

4. Resposta:



5. Resposta: $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

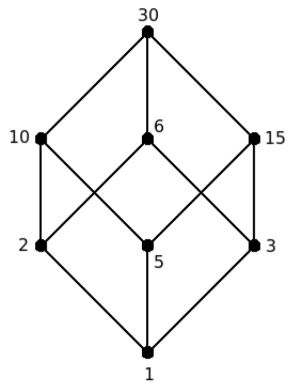
6. Resposta:



7. Resposta:

8. Resposta: ACE, BASE, CAP, CAPE, MACE, MAP, MOP, MOPE.

9. Resposta:



10. Resposta:

11. Resposta:

- A diagonal de M_R deve ser toda de 1's (para que R seja reflexiva);
- Sempre que $m_{ij} = 1$, para $i \neq j$, em M_R, então m_{ji} deverá ser 0 (pois R deve ser antissimétrica);
- $M_R \odot M_R$ deve ser igual a M_R (pois R tem que ser transitiva).

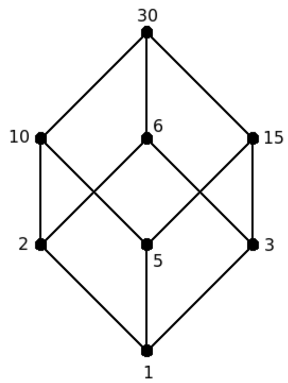
  (Note que aqui vale a igualdade entre M_{R^2} e M_R, pois, em uma relação de ordenamento, "sempre que tem caminho de tamanho 1 entre 2 nós, também tem caminho de tamanho 2".)

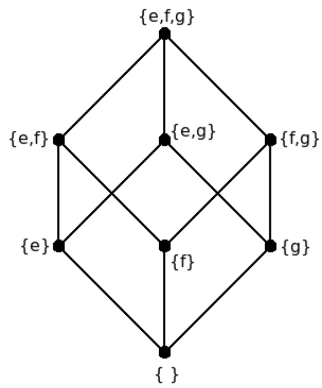
12. Resposta:

13. Resposta:

- $\prec$ é reflexiva: $(a, b) \prec (a, b)$, pois $a|a$ e $b \leq b$
- $\prec$ é antissimétrica: suponha que $(a, b) \prec (c, d)$ e que $(c, d) \prec (a, b)$. Então $a|c$ e $c|a$, de modo que $a = c$. Além disto, $b \leq d$ e $d \leq b$, de modo que $b = d$. Logo, $(a, b) = (c, d)$.
- $\prec$ é transitiva: suponha que $(a, b) \prec (c, d)$ e que $(c, d) \prec (e, f)$. Então $a|c$ e $c|e$, de modo que $a|e$. Além disto, $b \leq d$ e $d \leq f$, de modo que $b \leq f$. Logo, $(a, b) \leq (e, f)$.

14. Resposta: ambos possuem o mesmo diagrama de Hasse:





Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

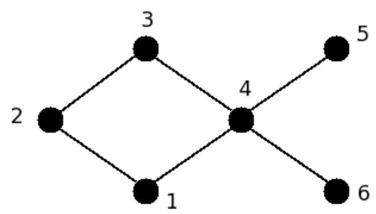
10) Relações de Ordenamento

10.2) Extremos de Posets

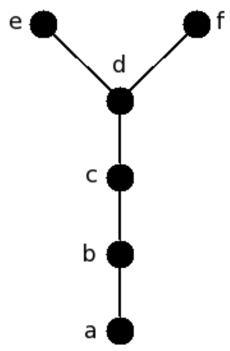
Lista de Exercícios

Nos próximos 4 exercícios, determine todos os elementos maximais e minimais de cada poset.

1. *(Kolman5-seção 6.2-ex.1)*:



2. *(Kolman5-seção 6.2-ex.3)*:

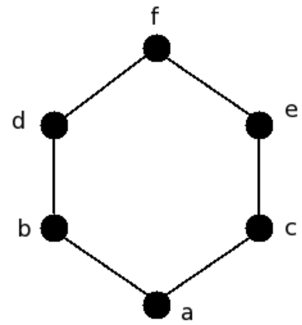


3. *(Kolman5-seção 6.2-ex.5)* $A = \mathbb{R}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

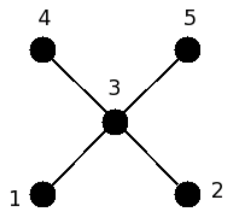
4. *(Kolman5-seção 6.2-ex.7)* $A = \{x \mid x \text{ é um número real e } 0 < x \leq 1\}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

Nos próximos 4 exercícios, determine o maior e o menor elementos, se existirem, de cada poset.

5. *(Kolman5-seção 6.2-ex.9)*:



6. *(Kolman5-seção 6.2-ex.11)*:



7. *(Kolman5-seção 6.2-ex.13)* $A = \{x \mid x \text{ é um número real e } 0 < x < 1\}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

8. *(Kolman5-seção 6.2-ex.15)* $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72\}$, com a ordem parcial de divisibilidade.

9. *(Kolman5-seção 6.2-ex.17)* Determine se as declarações a seguir são equivalentes. Justifique sua conclusão.

   (a) Se $a \in A$ é um elemento maximal, então não existe $c \in A$ tal que $a < c$.

   (b) Se $a \in A$ é um elemento maximal, então $\forall b \in A, b \leq a$.

10. *(Kolman5-seção 6.2-ex.19)* Determine se as declarações abaixo são verdadeiras ou falsas, Explique o seu raciocínio.

   (a) Um poset finito não-vazio tem um elemento maximal.

   (b) Um poset finito não-vazio tem um maior elemento.

   (c) Um poset finito não-vazio tem um elemento minimal.

   (d) Um poset finito não-vazio tem um menor elemento.

11. *(Kolman5-seção 6.2-ex.21)* Prove que se $(A, \leq)$ tem um menor elemento, então este menor elemento é único.

Nos próximos 5 exercícios, encontre, se existirem:

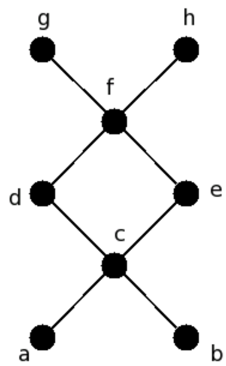
(a) todas as cotas superiores de B

(b) todas as cotas inferiores de B

(c) a menor cota superior de B

(d) a maior cota inferior de B

12. *(Kolman5-seção 6.2-ex.23)*: $B = \{c, d, e\}$



13. *(Kolman5-seção 6.2-ex.25)*: $B = \{b, c, d\}$

14. *(Kolman5-seção 6.2-ex.27)* $(A, \leq)$ é o poset do exerc. 12; $B = \{b, g, h\}$.

15. *(Kolman5-seção 6.2-ex.29)* $A = \mathbb{R}$ e $\leq$ denota a ordem parcial usual; $B = \{x \mid x$ é um número real e $1 < x < 2\}$

16. *(Kolman5-seção 6.2-ex.31)* A é o conjunto das matrizes Booleanas 2×2 e $\leq$ denota a relação R com $M\ R\ N$ sse $m_{ij} \leq n_{ij}$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq i \leq 2$; B é o conjunto das matrizes em A com exatamente dois uns.

17. *(Kolman5-seção 6.2-ex.33)* Construa o diagrama de Hasse de um ordenamento topológico do poset cujo diagrama de Hasse é mostrado no exercício 12. Use o algoritmo SORT.

18. *(Kolman5-seção 6.2-ex.35)* Seja R um ordenamento topológico sobre um conjunto finito A. Descreva como usar M_R para encontrar o menor e o maior elementos de A, se eles existirem.

19. *(Kolman5-seção 6.2-ex.37)* Seja $A = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$, com a ordem parcial de divisibilidade.
    (a) Quantos elementos maximais $(A, \leq)$ possui?
    (b) Forneça um subconjunto de A que seja uma ordem linear sob divisibilidade e que seja tão grande quanto possível.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.2) Extremos de Posets

Lista de Exercícios

1. Resposta: Maximal: 3,5   Minimal: 1,6

2. Resposta: Maximal: e,f   Minimal: a

3. Resposta: Maximal: nenhum   Minimal: nenhum

4. Resposta: Maximal: 1   Minimal: nenhum

5. Resposta: Maior: f   Menor: a

6. Resposta: Maior: não tem   Menor: não tem

7. Resposta: Maior: não tem   Menor: não tem

8. Resposta: Maior: 72   Menor: 2

9. Resposta: Não são equivalentes, pois a pode ser maximal e pode existir um elemento b de A tal que a e b não sejam comparáveis.

10. Resposta:
    (a) V. Não pode ocorrer $a_1 < a_2 < \cdots$, pois A é finito.
    (b) F. Nem todos os elementos precisam ser comparáveis.
    (c) V. Não pode ocorrer $\cdots < a_2 < a_1$, pois A é finito.
    (d) F. Nem todos os elementos precisam ser comparáveis.

11. Resposta: Suponha que tanto a como b sejam menores elementos de $(A, \leq)$. Então $a \leq b$ e $b \leq a$. Uma vez que $\leq$ é antissimétrica, temos que $a = b$.

12. Resposta:
    (a) f, g, h
    (b) a, b, c
    (c) f
    (d) c

13. Resposta:
    (a) d, e, f
    (b) b, a
    (c) d
    (d) b

14. Resposta:
    (a) Não tem
    (b) b
    (c) Não tem
    (d) b

15. Resposta:
    (a) $x \in [2, \infty)$
    (b) $x \in (-\infty, 1]$
    (c) 2
    (d) 1

16. Respostas:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. Resposta:

18. Resposta: O menor elemento de A é o rótulo da linha que é toda composta de 1's. O maior elemento de A é o rótulo na coluna que é toda composta de 1's.

19. Respostas:
    (a) 50: a partir do 51 até o 100 (nenhum deles divide nenhum outro elemento de A).
    (b) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ $\rightarrow$ tem que começar pelo menor elemento possível (2) e tem que progredir com o menor fator possível (2), para conseguir a maior quantidade de elementos possível.

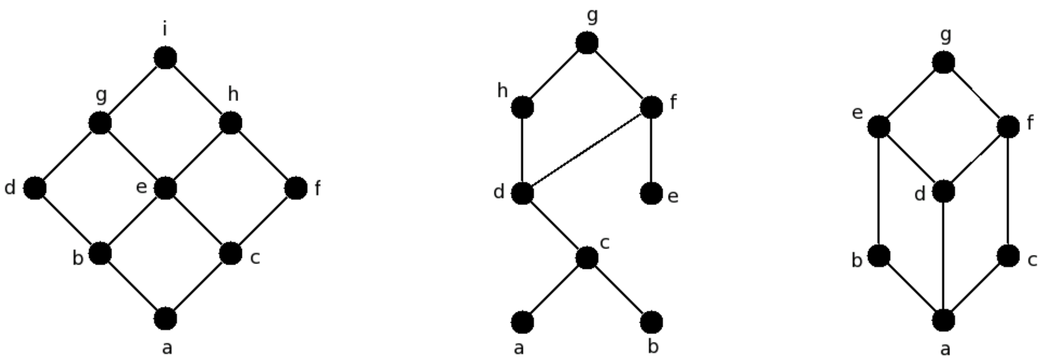
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.3) Reticulados

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 6.3-exs.1, 3 e 5)* Determine se os diagramas de Hasse mostrados abaixo representam reticulados:



2. *(Kolman5-seção 6.3-ex.7)* Será que o poset $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36, 72\}$, sob a relação de divisibilidade, é um reticulado?

3. *(Kolman5-seção 6.3-ex.9)* Seja A o conjunto das matrizes 2×2, com $M\ R\ N$ se e somente se $m_{ij} \leq n_{ij},\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2$. Determine se (A, R) é um reticulado.

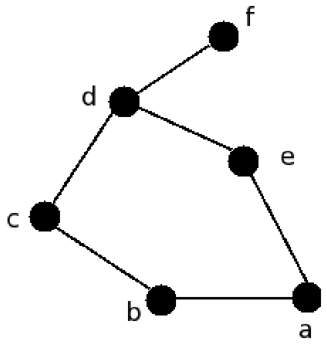
4. *(Kolman5-seção 6.3-ex.13)* Seja $L = P(S)$ o reticulado de todos os subconjuntos de um conjunto S sob a relação de inclusão. Seja T um subconjunto de S. Mostre que $P(T)$ é um sub-reticulado de L.

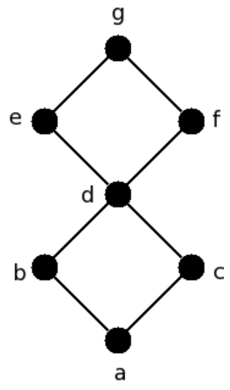
5. *(Kolman5-seção 6.3-ex.15)* Mostre que um subconjunto de um poset linearmente ordenado é um sub-reticulado.

6. *(Kolman5-seção 6.3-ex.17)* Forneça os diagramas de Hasse de todos os reticulados não-isomórficos que possuem um, dois, três, quatro ou cinco elementos.

7. *(Kolman5-seção 6.3-ex.27)* Encontre o complemento de cada elemento em D_{42}.

8. *(Kolman5-seção 6.3-exs.29 e 31)* Determine se cada reticulado abaixo é distributivo, complementado, ou ambos.





9. Seja L um reticulado limitado. Mostre que, para toda tripla $a, b, c \in L$, se $a \leq b$, temos que $a \vee c \leq b \vee c$.

10. *(Kolman5-seção 6.3-ex.33)* Seja L um reticulado limitado com pelo menos dois elementos. Mostre que nenhum elemento de L é o seu próprio complemento.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.3) Reticulados

Lista de Exercícios

1. Respostas: (a) SIM. (b) Não. Por exemplo, o ínfimo de $\{e, c\}$ não existe. (c) SIM.

2. Resposta: Não. Note que não existe o ínfimo de $\{2, 3\}$.

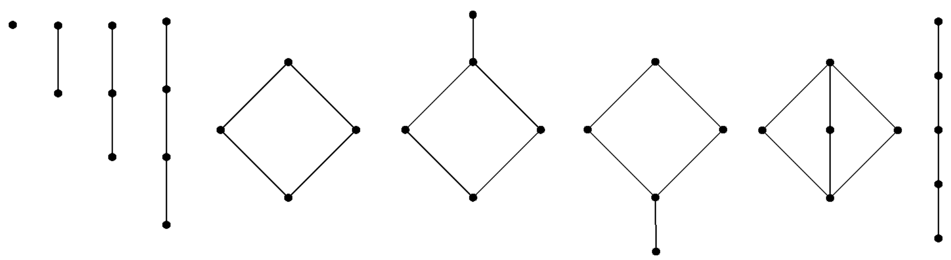
3. Resposta: Sim. Temos que:

   supremo(M,N)=$[a_{ij} = max\{m_{ij}, n_{ij}\}]$ e ínfimo(M,N)=$[a_{ij} = min\{m_{ij}, n_{ij}\}]$.

4. Resposta: Para todo $T_1, T_2 \subseteq T$, temos que $T_1 \cap T_2$ e $T_1 \cup T_2$ são subconjuntos de T, de modo que $P(T)$ é um sub-reticulado de $P(S)$.

5. Resposta: Para quaisquer elementos x, y de um poset lienarmente ordenado, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$. Digamos que seja $x \leq y$. Então $x \wedge y = x$ e $x \vee y = y$. Portanto, todo subconjunto de um poset linearmente ordenado é um sub-reticulado.

6. Resposta:



7. Resposta: $1' = 42$, $42' = 1$, $2' = 21$, $21' = 2$, $3' = 14$, $14' = 3$, $7' = 6$, $6' = 7$

8. Resposta: (a) Nenhum dos dois. (b) Distributivo, mas não complementado.

9. Resposta: Temos: $b \leq b \vee c$ e $c \leq b \vee c$.

   - Então, como $a \leq b$, temos que $a \leq b \vee c$.
   - Daí, como $a \leq b \vee c$ e $c \leq b \vee c$, temos que $b \vee c$ é <u>uma</u> cota superior de a e de c.
   - Logo: $a \vee c \leq b \vee c$. $\square$

10. Resposta: Se $x = x'$, então $x = x \vee x = I$ e $x = x \wedge x = O$. Mas, como L possui pelo menos dois elementos, temos que $O \neq I$. Portanto, $x \neq x'$. $\square$

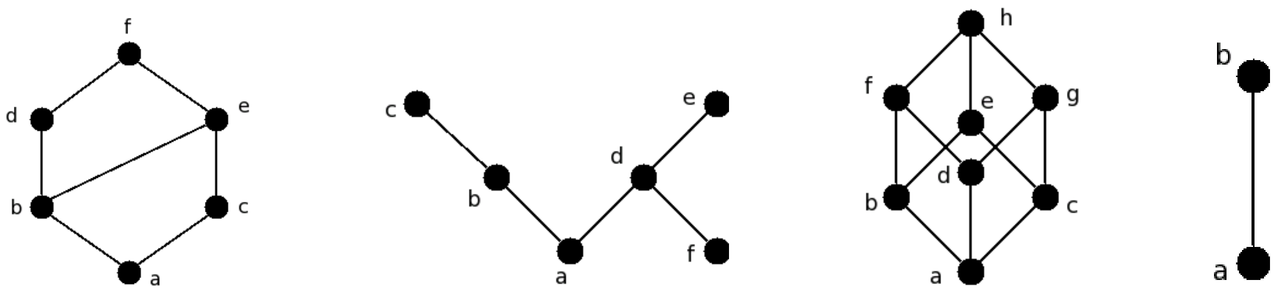
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.4) Álgebras Booleanas Finitas

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 6.4-exs.1, 3, 5 e 7)* Determine se cada poset mostrado abaixo é uma álgebra Booleana. Explique.



2. *(Kolman5-seção 6.4-ex.9)* Determine se o poset dado por D_{385} é uma álgebra Booleana. Explique.

3. *(Kolman5-seção 6.4-ex.11)* Existem álgebras Booleanas com 3 elementos? Por que ou por que não?

4. *(Kolman5-seção 6.4-ex.13)* Mostre que, em uma álgebra Booleana, para todo a e b, $a = b$ se e somente se $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = 0$.

5. *(Kolman5-seção 6.4-ex.15)* Mostre que, em uma álgebra Booleana, para todo a, b e c, se $a \leq b$, então $a \wedge c \leq b \wedge c$.

6. *(Kolman5-seção 6.4-ex.17)* Mostre que, em uma álgebra Booleana, para todo a e b,
$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a$.

7. *(Kolman5-seção 6.4-ex.19)* Mostre que, em uma álgebra Booleana, para todo a e b,
$(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

10) Relações de Ordenamento

10.4) Álgebras Booleanas Finitas

Lista de Exercícios

1. Respostas:
   - Não. Ele tem 6 elementos e $6 \neq 2^n$.
   - Não. Ele tem 6 elementos e $6 \neq 2^n$.
   - Sim. É o próprio B_3.
   - Sim. É o próprio B_1.

2. Resposta: Sim. Pois $385 = 5 \times 7 \times 11$ (não tem primos repetidos na fatoração).

3. Resposta: Não. Toda álgebra Booleana deve ter 2^n elementos.

4. Resposta:
   - Primeiro, suponha que $a = b$. Então:
     $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (b \wedge b') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0.$
   - Agora, suponha que $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = 0$. Então $a \wedge b' = 0$ e $a' \wedge b = 0$.
     Mas sabemos que $I = O' = (a \wedge b')' = a' \vee b$.
     De modo que a' é o complemento de b, ou seja, $b' = a'$. $\square$

5. Resposta: Suponha que $a \leq b$. Então $a \wedge c \leq a \leq b$ e $a \wedge c \leq c$, de modo que $a \wedge c \leq b \wedge c$. $\square$

6. Resposta: $(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge (b \vee b') = a \wedge I = a$ $\square$

7. Resposta: $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee I) \wedge (b \wedge c) = I \wedge (b \wedge c) = b \wedge c$ $\square$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.1) Operações Binárias

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.1-exs.1, 3, 5 e 7)* Em cada exercício abaixo, determine se a descrição dada para $*$ é uma definição válida de uma operação binária sobre o conjunto.

   (a) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{R}$ como ab (multiplicação comum).

   (b) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{Z}$ como a^b.

   (c) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{Z}^+$ como $a - b$.

   (d) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{R}$ como o maior número racional que é menor do que ab.

2. *(Kolman5-seção 9.1-exs.9 a 19)* Em cada exercício abaixo, determine se a operação binária $*$ é comutativa e se ela é associativa sobre o conjunto.

   (a) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{Z}^+$ como $a + b + 2$.

   (b) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{R}$ como $a \times |b|$.

   (c) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{R}$ como o mínimo de a e b.

   (d) $a * b$ é definida sobre $\mathbb{R}$ como $ab/3$.

   (e) $a * b$ é definida sobre um reticulado A como $a \vee b$.

   (f) $a * b$ é definida sobre o conjunto dos números racionais como $a * b = \frac{a+b}{2}$.

3. *(Kolman5-seção 9.1-ex.21)* Prove que é verdadeiro (ou falso) afirmar que a operação binária do exercício (19) possui a propriedade de idempotência.

4. *(Kolman5-seção 9.1-ex.23)* Preencha a tabela a seguir de modo que a operação binária $*$ seja comutativa e possua a propriedade de idempotência.

*	a	b	c
a		c	
b			
c	c	a	

5. *(Kolman5-seção 9.1-ex.25)* Considerando a operação binária $*$, definida sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ pela seguinte tabela:

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

   compute:

(a) $c * d$ e $d * c$

(b) $b * d$ e $d * b$

(c) $a * (b * c)$ e $(a * b) * c$

(d) A operação $*$ é comutativa? E associativa?

6. *(Kolman5-seção 9.1-ex.27)* Complete a tabela dada abaixo de modo que a operação binária $*$ seja associativa.

*	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	c	d
c				
d	d	c	c	d

7. *(Kolman5-seção 9.1-ex.29)* Seja um conjunto A com n elementos. Quantas operações binárias comutativas podem ser definidas sobre A?

8. *(Kolman5-seção 9.1-ex.30)* Seja $A = \{a, b\}$.

(a) Construa uma tabela para cada uma das 16 operações binárias que podem ser definidas sobre A.

(b) Usando as tabelas que você construiu, identifique as operações binárias sobre A que são comutativas.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.1) Operações Binárias

Lista de Exercícios

1. Respostas: (a) Sim. (b) Não. (c) Não. (d) Não.

2. Respostas:
   (a) Comutativa e associativa.
   (b) Não comutativa, mas associativa.
   (c) Comutativa e associativa.
   (d) Comutativa e associativa.
   (e) Comutativa e associativa.
   (f) Comutativa, mas não associativa.

3. Resposta: Sim, a operação tem a propriedade de idempotência, pois $a * a = \frac{a+a}{2} = a$.

4. Resposta:

*	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	a
c	c	a	c

5. Respostas:
   (a) $c * d = a$ e $d * c = a$
   (b) $b * d = c$ e $d * b = b$
   (c) $a * (b * c) = c$ e $(a * b) * c = a$
   (d) Nem comutativa e nem associativa (por exemplo, $(a * d) * d \neq a * (d * d)$).

6. Resposta: como $db = c$, db é a base para achar os resultados da linha c:
   - $(db)a = ca = d(ba) = db = c \Rightarrow ca = c$
   - $(db)b = cb = d(bb) = da = d \Rightarrow cb = d$
   - $(db)c = cc = d(bc) = dc = c \Rightarrow cc = c$
   - $(db)d = cd = d(bd) = dd = d \Rightarrow cd = d$

7. Resposta: $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ operações comutativas podem ser definidas.

8. Respostas:

(a) Operações binárias que podem ser definidas sobre A:

*	a	b
a	a	a
b	a	a

*	a	b
a	a	a
b	a	b

*	a	b
a	a	a
b	b	a

*	a	b
a	a	a
b	b	b

*	a	b
a	a	b
b	a	a

*	a	b
a	a	b
b	a	b

*	a	b
a	a	b
b	b	a

*	a	b
a	a	b
b	b	b

*	a	b
a	b	a
b	a	a

*	a	b
a	b	a
b	a	b

*	a	b
a	b	a
b	b	a

*	b	b
a	a	a
b	b	b

*	b	b
a	b	b
b	a	a

*	b	b
a	b	b
b	a	b

*	b	b
a	b	b
b	b	a

*	b	b
a	b	b
b	b	b

(b) Operações binárias sobre A que são comutativas:

*	a	b
a	a	a
b	a	a

*	a	b
a	a	a
b	a	b

*	a	b
a	a	b
b	b	a

*	a	b
a	a	b
b	b	b

*	a	b
a	b	a
b	a	a

*	a	b
a	b	a
b	a	b

*	b	b
a	b	b
b	b	a

*	b	b
a	b	b
b	b	b

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.2) Semigrupos

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.2-ex.1)* Seja $A = \{a, b\}$. Qual das tabelas a seguir define um semigrupo sobre A? E qual define um monóide sobre A?

(a)

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

(b)

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

2. *(Kolman5-seção 9.2-ex.3)* Seja $A = \{a, b\}$. Qual das tabelas a seguir define um semigrupo sobre A? E qual define um monóide sobre A?

(a)

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

(b)

$*$	a	b
a	b	b
b	a	a

3. *(Kolman5-seção 9.2-exs.5-15)* Em cada exercício a seguir, determine se o conjunto com a operação binária mostrada é um semigrupo, um monóide ou nenhum deles. Se for um monóide, especifique a identidade. Se for um semigrupo ou um monóide, determine se é comutativo.

- (5) $\mathbb{Z}^+$, aonde $a * b$ é definido como $\max\{a, b\}$
- (7) $\mathbb{Z}^+$, aonde $a * b$ é definido como a
- (9) $P(S)$, aonde S é um conjunto e $*$ é definida como intersecção.
- (11) $S = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, aonde $a * b$ é definido como $\text{MDC}(a, b)$
- (13) $\mathbb{Z}$, aonde $a * b = a + b - ab$
- (15) O conjunto das matrizes 2×1, aonde: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d+1 \end{bmatrix}$

4. *(Kolman5-seção 9.2-ex.17)* Determine se a tabela a seguir define um semigrupo ou um monóide:

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	c	b
c	a	b	c

5. *(Kolman5-seção 9.2-ex.19)* Complete a tabela a seguir de maneira a obter um semigrupo.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c			a

6. *(Kolman5-seção 9.2-ex.21)* Seja $S = \{a, b\}$. Escreva a tabela de operações para o semigrupo S^S. Este semigrupo é comutativo?

7. *(Kolman5-seção 9.2-ex.29)* Seja $A = \{a, b\}$. Determine se existem dois *semigrupos* $(A, *)$ e $(A, *')$ que *não são* isomórficos.

8. *(Kolman5-seção 9.2-ex.35)* Seja R^+ o conjunto de todos os números reais positivos. Mostre que a função $f : R^+ \rightarrow R$ definida por $f(x) = ln(x)$ é um isomorfismo do semigrupo $(R^+, \times)$ para o semigrupo $(R, +)$, aonde $\times$ e $+$ são a multiplicação comum e a adição comum.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
INE5403-FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.2) Semigrupos

Lista de Exercícios

1. Resposta: (b) define tanto um monóide como um semigrupo.

2. Resposta: (a) define um semigrupo. Nenhuma das duas define um monóide.

3. Respostas:
   - Monóide com identidade dada por 1, comutativo.
   - Semigrupo.
   - Monóide com identidade dada por S, comutativo.
   - Monóide com identidade dada por 12, comutativo.
   - Monóide com identidade dada por 0, comutativo.
   - Monóide com identidade dada por $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, comutativo.

4. Resposta: nenhum dos dois.

5. Resposta:

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

6. Resposta:
   - Elementos de S^S:
     $f_1(a) = a,\ \ f_1(b) = a$
     $f_2(a) = a,\ \ f_2(b) = b$
     $f_3(a) = b,\ \ f_3(b) = a$
     $f_4(a) = b,\ \ f_4(b) = b$
   - Tabela de operações:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_1
f_4	f_1	f_4	f_4	f_4

   - Não é comutativo.

7. Resposta: Sim. Por exemplo, os dois semigrupos do exercício 1:

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

8. Resposta:

- Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$.
- Sabemos que $ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)$, de modo que ln é um homomorfismo.
- Agora, suponha que $x \in \mathbb{R}$.
- Então $e^x \in \mathbb{R}^+$ e $ln(e^x) = x$, de modo que ln é sobrejetora sobre $\mathbb{R}^+$.
- Suponha também que $ln(x) = ln(y)$: então, $e^{ln(x)} = e^{ln(y)}$ e $x = y$, de modo que ln é injetora.
- Logo, ln é um isomorfismo entre $(\mathbb{R}^+, \times)$ e $\mathbb{R}, +$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.3) Grupos

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.4-exs.1-11)* Em cada exercício abaixo, determine se o conjunto com a operação binária mostrada é um grupo. Se for um grupo, determine se é Abeliano e especifique a identidade e a inversa de um elemento genérico.
   - (1) $\mathbb{Z}$, aonde $*$ é a multiplicação comum.
   - (3) $\mathbb{Q}$, o conjunto de todos os números racionais, sob a operação de adição.
   - (5) $\mathbb{R}$, sob a operação de multiplicação.
   - (7) $\mathbb{Z}^+$, sob a operação de adição.
   - (9) O conjunto dos inteiros ímpares sob a operação de multiplicação.
   - (11) Se S é conjunto não-vazio, o conjunto $P(S)$, aonde $A * B = A \oplus B$.

2. *(Kolman5-seção 9.4-ex.21)* Seja G um grupo finito com identidade e, e seja a um elemento arbitrário de G. Prove que existe um inteiro não-negativo n tal que $a^n = e$.

3. *(Kolman5-seção 9.4-ex.23)* Seja G o grupo dos inteiros sob a operação de adição, e seja $H = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$. Determine se H é um subgrupo de G.

4. *(Kolman5-seção 9.4-ex.25)* Seja G um grupo e seja $H = \{x | x \in G \text{ e } xy = yx, \ \forall y \in G\}$. Prove que H é um subgrupo de G.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

11) Tópicos em Estruturas Algébricas

11.3) Grupos

Lista de Exercícios

1. Respostas:
    - (1) Não.
    - (3) Sim, Abeliano, identidade é 0, $a^{-1} = -a$.
    - (5) Não.
    - (7) Não.
    - (9) Não.
    - (11) Sim, Abeliano, identidade é $\{\}$, $a^{-1} = a$.

2. Resposta:
    - Considere a sequência: $e, a, a^2, a^3, \ldots$;
    - Como G é finito, nem todos os termos desta sequência podem ser distintos;
    - Ou seja: para algum $i \leq j$, temos $a^i = a^j$.
    - Então: $(a^{-1})^i a^i = (a^{-1})^i a^j$ e temos: $e = a^{j-i}$.
    - (Note que $j - i \geq 0$.

3. Resposta: Sim.

4. Resposta:
    - Primeiro, é claro que $e \in H$;
    - Agora, sejam $a, b \in H$
    - Temos que: $(ab)y = a(by) = a(yb) = (ay)b = (ya)b = y(ab),\ \forall y \in G$
    - Portanto, H é fechado sob multiplicação e é um subgrupo de G. $\square$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.1) Noções Elementares

Lista de Exercícios

(Kolman5-seção 1.4-exs.1-4) Para os próximos 4 exercícios, para os inteiros m e n dados, escreva m como $qn + r$, com $0 \leq r < n$.

1. $m = 20,\ n = 3$
2. $m = 64,\ n = 37$
3. $m = 3,\ n = 22$
4. $m = 48,\ n = 12$

5. *(Kolman5-seção 1.4-ex.5)* Escreva cada um dos inteiros abaixo como um produto de potências de primos:

   (a) 828 (b) 1666 (c) 1781 (d) 1125 (e) 107

6. *(Kolman5-seção 1.4-ex.23)* Sejam a e b inteiros. Prove que se p é um número primo e $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$. (Dica: se $p \not| a$, então $1 = MDC(a, p)$; daí use o teorema adequado para escrever $1 = sa + tp$).

7. *(Cormen2-seção 31.1-ex.1)* Prove que existem infinitos primos. (Dica: mostre que nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ divide $(p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$)

8. *(Cormen2-seção 31.1-ex.2)* Prove que se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

9. *(Cormen2-seção 31.1-ex.4)* Prove que, $\forall n, a, b \in \mathbb{Z}^+$, se $n|ab$ e $mdc(a, n) = 1$, então $n|b$.

10. Determine a quantidade de divisores dos seguintes números:

    (a) 14 (b) 7 (c) 57 (d) 42 (e) 64

11. *(OBM)* O produto de três números naturais é 105 e a sua soma é a *maior possível*. Qual é esta soma?

12. *(OBM)* Qual das alternativas abaixo apresenta um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?

    (a) 42 (b) 105 (c) 52 (d) 85 (e) 45 (f) 28

13. *(OBM)* Quantos inteiros positivos menores do que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

14. *(OBM)* Quantos divisores positivos de 120 são múltiplos de 6?

15. *(OBM)* Quantos números inteiros maiores que zero e menores que 100 possuem algum divisor cuja soma dos dígitos seja 5?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.1) Noções Elementares

Lista de Exercícios

1. $20 = 6 \times 3 + 2$
2. $64 = 1 \times 37 + 27$
3. $3 = 06 \times 22 + 3$
4. $48 = 4 \times 12 + 0$

5. Respostas:
   (a) $828 = 2^2 \times 3^2 \times 23$ (b) $1666 = 2 \times 7^2 \times 17$
   (c) $1781 = 13 \times 137$ (d) $1125 = 3^2 \times 5^3$ (e) 107

6. Resposta:
   - Assuma que $p|ab$.
   - Se $p|a$, está feito. Então vamos assumir que p não divide a.
   - Os únicos divisores de p são $\pm p$ e ± 1, de modo que, se p não divide a, $1 = MDC(a, p)$, o que, pelo teorema visto em aula, permite escrever que $1 = sa + tp$.
   - Multiplique ambos os lados desta expressão por b, obtendo: $b = sab + tpb$
   - Por hipótese, $p|sab$ e (evidentemente) $p|tpb$.
   - Se p divide o lado direito da equação, então ele deve dividir o lado esquerdo também e temos que $p|b$. $\square$

7. Resposta: (por contradição)
   - Assuma que o número de primos é finito e que só existem os k primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
   - Considere o inteiro: $m = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$.
   - Agora, m é primo ou então tem que ter um divisor primo.
   - Mas nenhum dos primos $p_1, p_2, \cdots p_k$ pode dividir m, senão este primo teria que dividir também:

     $m - p_1 p_2 \cdots p_k$

     ou seja, este primo teria que dividir 1 (absurdo)
   - Logo, m tem que ter um divisor primo que *não estava na lista*
   - Contradição! (Tal lista não pode ser formada.) $\square$

8. Resposta: Temos que $b = ak$ e $c = bm$. Substituindo b, obtemos $c = akm$, de modo que $a|c$. $\square$

9. Resposta: $ax + ny = 1$, de modo que $abx + nby = b$. Por hipótese, $n|abx$ e é claro que $n|nby$, de modo que $n|b$. $\square$

10. Respostas: 4 (b) 2 (c) 4 (d) 8 (e) 7

11. Resposta: 107.

12. Resposta: (e)

13. Resposta: 9. São os números $2^1 \times 3^1$, $2^1 \times 5^1$, $2^1 \times 7^1$, $2^1 \times 11^1$, $2^1 \times 13^1$, $3^1 \times 5^1$, $3^1 \times 7^1$, 2^3, 3^3 (não existe nenhuma outra maneira de produzir um inteiro positivo com exatamente 4 divisores positivos).

14. Resposta: 6. Note que $120 = 2^3 \times 3 \times 5 = (2 \times 3) \times 2^2 \times 5^1$.

15. Resposta: 34.

    - São os múltiplos de 5, que nesse intervalo são 19;
    - os múltiplos de 14, que são 6 (pois o 70 já foi contado);
    - os múltiplos de 23, que são 4;
    - os múltiplos de 32, que são 3;
    - e, finalmente, os múltiplos de 41, que são 2.
    - Note que o único múltiplo de 50 no intervalo, que é o próprio 50, já foi contado nos múltiplos de 5.
    - Portanto, ao todo são $19 + 6 + 4 + 3 + 2 = 34$ números.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.2) MDCs e algoritmo de Euclides

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 3.6-exerc. 23)* Use o algoritmo de Euclides para encontrar:
   (a) $mdc(12, 18)$
   (b) $mdc(111, 201)$
   (c) $mdc(1001, 1331)$
   (d) $mdc(12345, 54321)$
   (e) $mdc(1000, 5040)$
   (f) $mdc(9888, 6060)$

2. *(Rosen6-seção 3.6-exerc. 26)* Determine quantas divisões são necessárias para encontrar $mdc(34, 55)$ usando o algoritmo de Euclides.

3. *(Kolman5-seção 1.4-exs.6-9)* Encontre o máximo divisor comum d dos inteiros a e b dados abaixo e escreva d como $sa + tb$.
   (a) $a = 60,\ b = 100$
   (b) $a = 45,\ b = 33$
   (c) $a = 34,\ b = 58$
   (d) $a = 77,\ b = 128$

4. *(Cormen2-seção 31.2-ex.2)* Compute os valores (d, x, y) retornados pela chamada EUCLIDES-Estendido(899, 493).

5. *(Cormen2-seção 31.2-ex.3)* Prove que $\forall a, k, n \in \mathbb{Z}$, vale: $mdc(a, n) = mdc(a + kn, n)$.

6. *(Cormen2-seção 31.2-ex.8**)* Defina $lcm(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como o *mínimo múltiplo comum* dos n inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ou seja, o mínimo inteiro não negativo que é múltiplo de cada a_i. Mostre como computar $lcm(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de maneira eficiente usando a operação mdc como subrotina.

7. *(Kolman5-seção 1.4-exs.10-13)* Encontre o mínimo múltiplo comum dos inteiros dados abaixo.
   (a) 72, 108
   (b) 150, 70
   (c) 175, 245
   (d) 32, 27

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.2) MDCs e algoritmo de Euclides

Lista de Exercícios

1. Respostas:
   (a) $mdc(12, 18) = mdc(18, 12) = mdc(12, 6) = mdc(6, 0) = 6$
   (b) $mdc(111, 201) = mdc(201, 111) = mdc(111, 90) = mdc(90, 21) = mdc(21, 6) = mdc(6, 3) = mdc(3, 0) = 3$
   (c) $mdc(1001, 1331) = mdc(1331, 1001) = mdc(1001, 330) = mdc(330, 11) = mdc(11, 0) = 11$
   (d) $mdc(12345, 54321) = mdc(54321, 12345) = mdc(12345, 4941) = mdc(4941, 2463) = mdc(2463, 15) = mdc(15, 3) = mdc(3, 0) = 3$
   (e) $mdc(1000, 5040) = mdc(5040, 1000) = mdc(1000, 40) = mdc(40, 0) = 40$
   (f) $mdc(9888, 6060) = mdc(6060, 3828) = mdc(3828, 2232) = mdc(2232, 1596) = mdc(1596, 636) = mdc(636, 324) = mdc(324, 312) = mdc(312, 12) = mdc(12, 0) = 12$

2. Resposta: são necessárias 10 divisões.

   $mdc(34, 55) = mdc(55, 34) = mdc(34, 21) = mdc(21, 13) = mdc(13, 8) = mdc(8, 5) = mdc(5, 3) = mdc(3, 2) = mdc(2, 1) = mdc(1, 0) = 1$

3. Respostas:
   (a) $mdc(60, 100) = 20 = 2 \times 60 - 1 \times 100$
   (b) $mdc(45, 33) = 3 = 3 \times 45 - 4 \times 33$
   (c) $mdc(34, 58) = 2 = 12 \times 34 - 7 \times 58$
   (d) $mdc(77, 128) = 1 = 5 \times 77 - 3 \times 128$

4. Resposta: $(29, -6, 11)$

5. Resposta: $mdc(a + kn, n) = mdc(n, (a + kn)\%n) = mdc(n, a) = mdc(a, n)$

6. Resposta:

- Como vimos em aula, pode-se computar $mdc(a,b)$ a partir das fatorações em primos de a e b:
  - Sejam: $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ $b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$

    (expoentes nulos tornam idênticos os conjuntos de primos)
  - Então: $mdc(a,b) = p_1^{min(e_1,f_1)} p_2^{min(e_2,f_2)} \cdots p_r^{min(e_r,f_r)}$
  - Da mesma forma: $mmc(a,b) = p_1^{max(e_1,f_1)} p_2^{max(e_2,f_2)} \cdots p_r^{max(e_r,f_r)}$
  - Logo: $\boxed{a \times b = mdc(a,b) \times mmc(a,b)}$
- O mmc generalizado é definido da seguinte forma:

  $$\boxed{mmc(a_1, a_2, \ldots, a_n) \; = \; mmc(\; mmc(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \;, \; a_n)}$$
  - Exemplo:

    $mmc(2,6,10) = mmc(mmc(2,6),10) = mmc(6,10) = 30 = \frac{6 \times 10}{mdc(6,10)}$
- Isto permite construir o seguinte algoritmo recursivo:

```
function m = mmc(a, b)
   n = length(a)
   if n == 1
      return a(1) * b / mdc(a(1), b)
   endif
   return mmc(mmc(a(1:n-1), a(n)), b)
endfunction
```

  - Nesta função, a é um vetor com n elementos e b é um escalar
  - A chamada inicial para $mmc(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é: $mmc([a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n)$
  - Exemplo: para computar o mmc de $\{2, 6, 10\}$, faríamos: $mmc([2,6], 10)$
- Este algoritmo requer n chamadas de $mdc(a,b)$, cada uma a um custo de $O(logb)$.

7. Respostas:

   (a) $mmc(72,108) = \frac{72 \times 108}{mdc(72,108)} = \frac{7776}{36} = 216$

   (b) $mmc(150,70) = \frac{150 \times 70}{mdc(150,70)} = \frac{10500}{10} = 1050$

   (c) $mmc(175,245) = \frac{175 \times 245}{mdc(175,245)} = \frac{42875}{35} = 1225$

   (d) $mmc(32,27) = \frac{32 \times 27}{mdc(32,27)} = \frac{864}{1} = 864$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.3) Aritmética Modular

Lista de Exercícios

1. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 3)* Mostre que 15 é uma inversa de 7 módulo 26.

2. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 6)* Encontre a inversa de 2 módulo 17.

3. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 8)* Encontre a inversa de 144 módulo 233.

4. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 12)* Resolva a congruência $2x \equiv 7 \ (mod\ 17)$

5. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 14)*:

   (a) Mostre que os inteiros positivos menores do que 11, exceto 1 e 10, podem ser quebrados em pares de inteiros tais que cada par consiste de inteiros que são inversas um do outro módulo 11.

   (b) Use a parte (a) para mostrar que $10! \equiv -1 \ (mod\ 11)$.

   Nota: este resultado pode ser generalizado para: $(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p)$

6. *(Rosen6-seção 3.7-exerc. 15)* Mostre que se p é primo, as únicas soluções de $x^2 \equiv 1 \ (mod\ p)$ são inteiros x tais que $x \equiv 1 \ (mod\ p)$ ou $x \equiv -1 \ (mod\ p)$.

7. Determine quais são os 2 últimos dígitos de 9^{643}.

8. *(OBM)* A sequência $1, 5, 4, 0, 5, \ldots$ é formada pelos algarismos das unidades das somas a seguir

   $1^2 = \underline{1}$
   $1^2 + 2^2 = \underline{5}$
   $1^2 + 2^2 + 3^2 = 1\underline{4}$
   $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3\underline{0}$
   $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 5\underline{5}$
   $\ldots$
   $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots = \ldots ?\underline{?}$

   (a) Escreva a sequência formada pelos algarismos das unidades das dez primeiras somas obtidas da forma descrita acima.

   (b) Qual é o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \ldots + 2011^2$?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.3) Aritmética Modular

Lista de Exercícios

1. Resposta: $15 \times 7 \equiv 1 \ (mod\ 26)$

2. Resposta: Por tentativas (comparando 18 com 17), temos que: $2^{-1} = 9 \ (mod\ 17)$.

3. Resposta: Agora é preciso utilizar o algoritmo de Euclides Estendido (ver seção anterior):
   - Aplicando EE, obtemos que: $1 = 144 \times 89 \ + \ 233 \times (-55)$
   - Logo: $144^{-1} \ = \ 89 \ (mod\ 233)$
   - (Verificando: $144 \times 89 \equiv 1 \ (mod\ 233)$)

4. Resposta: De acordo com o exercício 2, temos que: $2^{-1} = 9 \ (mod\ 17)$.
   - Agora, multiplicando os dois lados da congruência dada por 9, obtemos:
     $9 \times 2x \equiv 9 \times 7 \ (mod\ 17)$
   - Ou seja, $x \equiv 63 \equiv 12 \ (mod\ 17)$
   - (Verificando: $2 \times 12 \equiv 24 \equiv 7 \ (mod\ 17)$)

5. Resposta:

   (a) Os 8 números de 2 a 9 podem ser agrupados em 4 duplas, da seguinte forma:
   $2 \times 6 \equiv 1 \ (mod\ 11)$
   $3 \times 4 \equiv 1 \ (mod\ 11)$
   $5 \times 9 \equiv 1 \ (mod\ 11)$
   $7 \times 8 \equiv 1 \ (mod\ 11)$

   Nota1: como 11 é primo, todo os inteiros positivos < 11 possuem inversa "mod 11".
   Nota2: todas as inversas "mod 11" são únicas.

   (b) $$\begin{aligned} 10! &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 10 \times (9 \times 5) \times (8 \times 7) \times (6 \times 2) \times (3 \times 4) \times 1 \\ &\equiv -1 \times (1) \times (1) \times (1) \times (1) \times 1 \equiv -1 \ (mod\ 11) \quad \text{(ver item anterior)} \end{aligned}$$

   Nota: este resultado pode ser generalizado para: $(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p)$

6. Resposta:

$$x^2 \equiv 1 \ (mod \ p) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \equiv 0 \ (mod \ p) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1) \times (x+1) \equiv 0 \ (mod \ p)$$

- Esta equação tem solução se e somente se:
  $(x-1) \equiv 0 \ (mod \ p)$ ou $(x+1) \equiv 0 \ (mod \ p)$
  ou seja, se e somente se:
  $x \equiv 1 \ (mod \ p)$ ou $x \equiv -1 \ (mod \ p)$

7. Resposta: queremos determinar $9^{643} \ mod \ 100$
   - Conforme visto em aula, sabemos que: $\phi(100) = 100 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$
   - Além disto, uma vez que $mdc(9, 100) = 1$, temos que: $9^{\phi(100)} \equiv 1 \ (mod \ 100)$
   - Então: $9^{643} \equiv 9^{16 \times 40 + 3} \equiv 9^3 \equiv 729 \equiv 29 \ (mod \ 100)$
   - Logo, os 2 últimos dígitos de 9^{643} são 29

8. Respostas:
   (a) Para calcular os termos, basta considerar os dígitos das unidades nas parcelas e nas somas.
   - Assim, como os dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$ são $1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0$, então, começando por 1, temos:

$$\begin{aligned}
&1 = \underline{1} \\
&1 + 4 = \underline{5} \\
&5 + 9 = 1\underline{4} \\
&4 + 6 = 1\underline{0} \\
&0 + 5 = \underline{5} \\
&5 + 6 = 1\underline{1} \\
&1 + 9 = 1\underline{0} \\
&0 + 4 = \underline{4} \\
&4 + 1 = \underline{5} \\
&5 + 0 = \underline{5}
\end{aligned}$$

   - Logo os 10 primeiros termos da seqüência são $1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5, 5$.

   (b) Continuando com o raciocínio do item anterior:
   - Note que, a partir do 11^o termo, vamos começar a somar novamente os dígitos 1,4,9,6,5,6,9,4,1 e 0,
     - pois os dígitos das unidades de $11^2, 12^2 \ldots, 20^2$ são os mesmos dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$.
   - Em $1^2 + 2^2 + \ldots + 2011^2$, as somas dos dígitos das unidades de 1^2 a 10^2 aparecem:

$$\lfloor 2011/10 \rfloor = 201 \text{ vezes}$$

     e fica faltando só adicionar o 1 de 2011^2.
   - Assim, o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \ldots + 2011^2$ é o mesmo algarismo das unidades de:

$$[201 \times (1{+}4{+}9{+}6{+}5{+}6{+}9{+}4{+}1{+}0) + 1],$$

     o qual é dado por:

$$\begin{aligned}
&[201 \times (1{+}4{+}9{+}6{+}5{+}6{+}9{+}4{+}1{+}0) + 1] \ mod \ 10 = \\
&\quad = (1 \times 25 + 1) \ mod \ 10 \\
&\quad = \underline{6}
\end{aligned}$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.4) O Sistema Criptográfico RSA

Lista de Exercícios

1. *(Trappe & Washington, "Introduction to Cryptography with Coding Theory", 2002)*
   (a) Resolva: $7d \equiv 1\ (mod\ 30)$
   (b) Suponha que você escreva uma mensagem como um número m $(mod\ 31)$. Depois de cifrar m como "$m^7\ mod\ 31$", como você faria para decifrar o texto cifrado obtido?
   Dica1: para decifrar, pode-se elevar m^7 a uma certa potência e depois tirar mod 31.
   Dica2: o teorema de Fermat pode ser útil.

2. Sabendo que $x^{600907} \equiv 5933\ (mod\ 903307)$, encontre o valor de x.
   (Dica: o esquema RSA pode ser útil para resolver este exercício.)

3. Seja a operação $y = x^7\ mod\ n$, aonde $n = p.q$ é dado pelo produto de 2 números primos:
   (a) Com base no que foi visto em aula sobre o RSA, descreva uma forma *eficiente* (melhor do que testar todas as possibilidades) de se obter x a partir de um valor dado y (ou seja, explique como obter de maneira eficiente a "raiz sétima modular" de um valor y dado).
   (b) Com base no procedimento descrito no item anterior, obtenha o valor de x que satisfaz:
   $x^7 \equiv 4\ (mod\ 33)$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística
INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

12) Números Inteiros

12.4) O Sistema Criptográfico RSA

Lista de Exercícios

1. Respostas:

   (a) Solução:
   - Primeiro, note que $7^{-1} \equiv 13 \ (mod\ 30)$
   - Então, multiplicando ambos os lados da equação dada por 13, obtemos:
     $(13 \times 7)d \ \equiv \ d \ \equiv \ (13 \times 1) \ (mod\ 30)$
   - Logo, $d \ \equiv \ 13 \ (mod\ 30)$

   (b) Solução: esta "decifragem" pode ser feita da seguinte forma:
   - Como 31 é primo, pelo Teorema de Fermat, sabemos que: $m^{31-1} \equiv 1 \ (mod\ 31)$
   - Seja a mensagem cifrada dada por: $y = m^7 \ mod\ 31$
   - Conforme o item anterior, sabemos que: $7 \times 13 \equiv 1 \ (mod\ 30)$
     ou seja: $7 \times 13 = k \times 30 + 1$
   - Desta forma, para obtermos m de volta a partir de y, podemos fazer:
     $y^{13} \ = \ m^{7\times 13} \ = \ m^{k\times 30+1} \ = \ (m^{30})^k \times m \ \equiv \ (1)^k \times m \ \equiv \ \underline{m} \ (mod\ 31)$
   - Note que trocamos a operação de "tirar a raiz sétima" módulo 31 pela operação de elevar y a uma potência específica (algo que já sabíamos que pode ser feito de maneira eficiente).

2. Resposta:

   - Primeiro, note que: $n = 761 \times 1187$
     - NOTA: Como n não é um número grande, um dos fatores pode ser facilmente encontrado com algo semelhante a:

```
n = 903307
i = 2
while i*i <= n:
   if n % i == 0:
      print(i)
      break
   i = i + 1
```

   - Com isto, podemos determinar: $\phi(n) = (761 - 1) \times (1187 - 1) = 901360$
   - Daí, utilizando Euclides Estendido, obtemos (em 5 passos) que:

     $$1 \ = \ 600907 \times (3) - 2 \times (901360)$$

     ou seja: $600907^{-1} \ \equiv \ 3 \ (mod\ 901360)$
   - Isto significa que, de acordo com o esquema do RSA, para obter x, só precisamos fazer:
     $5933^3 \ = \ 5933^2 \times 5933 \ \equiv \ 874823 \times 5933 \ = \ 5190324859 \ \equiv \ \underline{826144} \ (mod\ 903307)$
   - NOTA: para verificar, teríamos que fazer $826144^{600907} \ mod\ 903307$:
     - isto pode ser feito de maneira eficiente, utilizando-se o algoritmo "quadrado-e-multiplica".

3. Respostas:

   (a) Conforme o que foi visto em aula, para obter x, é só elevar y à inversa de 7 módulo $\phi(n)$ e depois fazer o resultado $mod\ n$.

   (b) Solução:

   - Primeiro, note que: $\phi(33) = (3-1) \times (11-1) = 20$
   - Além disto, é fácil ver que: $7^{-1}\ mod\ 20\ =\ 3$ (pois: $7 \times 3 = 21$)
   - Logo, para obter x, precisamos fazer: $x = 4^3\ =\ 64\ \equiv\ \underline{31}\ (mod\ 33)$
   - Verificando:
     $31^7 = (31^2)^3 \times 31 = (961)^3 \times 31 \equiv 4^3 \times 31 \equiv 31 \times 31 \equiv 4\ (mod\ 33)$ (OK)