Autômatos Finitos

Prof^{a} Jerusa Marchi

Departamento de Informática e Estatística

Universidade Federal de Santa Catarina

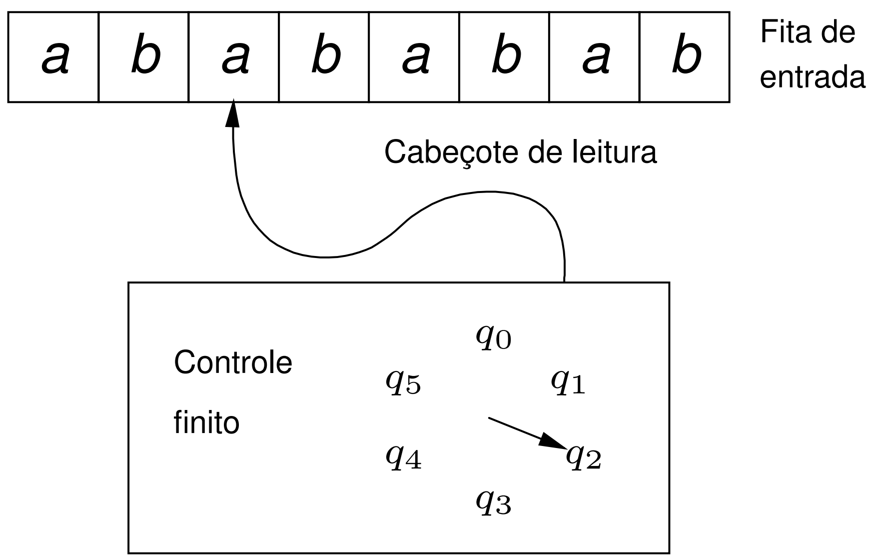
e-mail: jerusa@inf.ufsc.br

Autômatos Finitos

- Aplicações:
  - Lâmpada
  - Implementação de sistemas de controle simples baseados em estados (máquinas de refrigerante, jornais, salgadinhos, chocolates e elevadores).
  - porta automática
  - Análise léxica (compiladores)
  - Busca em texto

Autômatos Finitos

- Dispositivo simples
  - fita de entrada
  - cabeçote de leitura
  - unidade central de processamento (estados)
  - memória limitada - conceito de estado



Autômatos Finitos

- Há dois tipos de máquinas de estados finitos:
  - transdutores de linguagens - com entrada e saída
  - reconhecedores de linguagens - com duas saídas possíveis
    - aceitação
    - rejeição

Autômatos Finitos

- Podem ser:
  - Determinímisticos
  - Não Determinísticos

Autômatos Finitos Determinísticos

- Um autômato finito (AFD) é um quíntupla:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

  Onde:
  - K = conjunto finito de estados
  - Σ = conjunto finito de símbolos de entrada
  - $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$ = função de transição
  - s = estado inicial ($s \in K$)
  - F = conjunto de estados finais ($F \subseteq K$)

Autômatos Finitos Determinísticos

- O autômato é dito determinístico pois pela definição da função de transição δ, cada par (*estado*, *símbolo*) mapeia para **exatamente** *um* estado.
  - $q, p \in K$ e $a \in \Sigma$

$$\delta(q, a) = p$$

Autômatos Finitos Não Determinísticos

- Um autômato finito não determinístico (AFND) é um quíntupla:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

  Onde:
  - K = conjunto finito de estados
  - Σ = conjunto finito de símbolos de entrada
  - $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$ = função de transição
  - s = estado inicial ($s \in K$)
  - F = conjunto de estados finais ($F \subseteq K$)

Autômatos Finitos Não Determinísticos

- O autômato é dito não determinístico se há pelo menos uma transição δ, para um par (*estado*, *símbolo*) que mapeia para um **subconjunto de estados.**
  - $q, p, r \in K$ e $a \in \Sigma$

$$\delta(q, a) = \{p, r\}$$

Autômatos Finitos

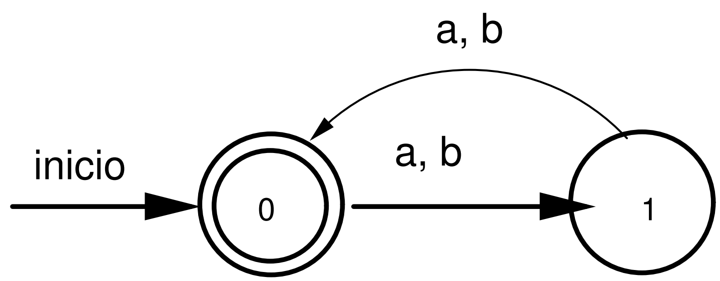
- Há duas formas de representar um AF:
  - Diagrama de transição
  - Tabela de transição

Autômatos Finitos

- Diagrama de Transição:
  - é um grafo direcionado e rotulado
  - os vértices representam os estados (círculos)
  - o estado inicial é diferenciado por uma seta
  - os estados finais são representados por círculos duplos
  - as arestas representam as transições $\delta(p, a) \rightarrow q$

Autômatos Finitos

- Exemplo: $L_1 = \{w \mid \in \Sigma^{\star} = \{a, b\}$ e $\mid w \mid$ é par $\}$
  Diagrama de transição



Autômatos Finitos

- Tabela de Transição
  - forma tabular de representar um AF onde a primeira coluna lista os estados e a primeira linha, os símbolos do alfabeto. O conteúdo da posição (q, a) será p se existir uma transição $\delta(q, a) \rightarrow p$.

Autômatos Finitos

- Exemplo: $L_1 = \{w \mid \in \Sigma^\star = \{a, b\}$ e $\mid w \mid$ é par $\}$

δ	a	b
$\rightarrow *q_0$	q_1	q_1
q_1	q_0	q_0

Autômatos Finitos

- Configuração:
  - uma configuração é determinada pelo estado corrente e pela parte ainda não processada da palavra

$$[q_0, abab]$$

que representa a configuração inicial para a palavra $w = abab$

Autômatos Finitos

- Computação:
  - é uma sequência de configurações
  - usa-se a relação $\vdash$ (resulta em) para indicar que a máquina passa de uma configuração à outra. Diz-se que:

$$[q_1, w] \vdash [q_2, y]$$

  se e somente se existe uma transição de q_1 para q_2 sob a, onde $a \in \Sigma$ e $w = ay$
    - Exemplo:

$$[q_0, abab] \vdash [q_1, bab] \vdash [q_0, ab] \vdash [q_1, b] \vdash [q_0, \varepsilon]$$

Autômatos Finitos

- Uma sentença w é aceita por um autômato finito $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sse $\widehat{\delta}(q_0, w) \to q$ e $q \in F$, ou seja, há uma computação

$$[q_0, w] \vdash_M^* [q, \varepsilon]$$

- A linguagem reconhecida por um autômato M é aquela cujo conjunto de sentenças é aceito por M

$$L(M) = \{w \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \to q \text{ e } q \in F\}$$

- Dois autômatos finitos M_1 e M_2 são ditos equivalentes sse $L(M_1) = L(M_2)$
- Uma linguagem é **regular** sse ela for aceita por um autômato finito

Determinização de Autômatos

- AFND e AFD representam a mesma classe de linguagens
- Portanto, há uma relação entre AFND e AFD

  Para todo Autômato Finito Não Determinístico há um Autômato Finito Determinístico equivalente.

Determinização de Autômatos

- Dado um AFND $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, um AFD $M' = (K', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ é construido a partir de M como segue:
  - $K' = \rho(K) = 2^K$, ou seja, o conjunto das partes do conjunto de estados de M
  - $q'_0 = \{q_0\}$ onde $\{q_0\} \in K'$
  - $F' = \rho(k) \in K'$ tal que $\rho(k) \cap F \neq 0$, ou seja serão estados finais de M' todos os subconjuntos de K' que contém pelo menos um estado final de M
  - δ' - para $\rho(k) \in K'$ e $a \in \Sigma$, seja

$$\delta'(\rho(k), a) = \{q \in K \mid q \in \delta(k, a)\}$$

para algum $k \in \rho(k)$. Ou seja

$$\delta'(\rho(k), a) = \bigcup_{k \in \rho(k)} \delta(k, a)$$

Determinização de Autômatos

- Ainda precisamos considerar transições ε. Para qualquer estado $\rho(k)$ de M', define-se *fecho*($\rho(k)$) como a coleção de estados que poder ser alcançados somente por transições ε, incluindo os próprios membros de $\rho(k)$. Formalmente para $\rho(k) \subseteq K$ seja

$$\begin{aligned}\varepsilon\text{-fecho}(\rho(k)) = \quad & \{q \mid q \text{ pode ser alcançado a partir de } \rho(k) \\ & \text{somente por transições } \varepsilon\}\end{aligned}$$

A função de transição de M' é modificada para considerar essas transições, subtituindo $\delta(k,a)$ por ε-fecho$(\delta(k,a))$, consequentemente:

$$\delta'(\rho(k),a) = \bigcup_{k\in\rho(k)} \varepsilon\text{-fecho}(\delta(k,a))$$

Determinização de Autômatos

- $L_1 = \{w \mid w \in \Sigma = \{a, b\}^*$ e w termina com $abb\}$
- $L_2 = \{w \mid w \in \Sigma = \{0, 1\}^*$ e $|w| \geq 2$ e começa e termina com o mesmo dígito$\}$
- $L_3 = \{w \mid w \in \Sigma = \{0\}^*$ e $w = 0^k$ para k múltiplo de 2 ou $3\}$