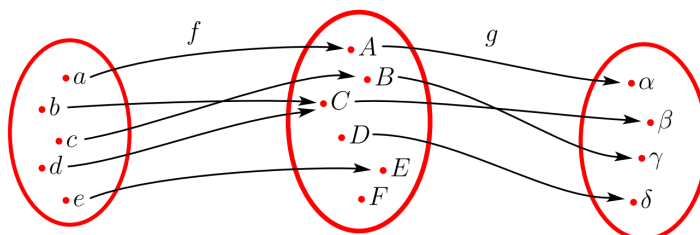


MTM3100 - Pré-cálculo

6ª lista de exercícios - Funções

1. Sejam f e g funções dadas como no diagrama abaixo.



As funções f e g são injetoras? E sobrejetoras? Qual é o domínio de g ? Qual é o maior subconjunto S do domínio de f tal que $g \circ f$ fica bem definida quando restringimos f a S ? Qual é a imagem de $g \circ f : S \rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$?

2. Suponha que você tem um cupom de R\$50 para comprar um aparelho de celular novo. Além disso, uma determinada loja está oferecendo um desconto de 20% no aparelho que você deseja. Se você pode usar o cupom e o desconto, então qual a composição mais vantajosa, o preço com 20% de desconto menos R\$ 50 ou subtrair R\$ 50 do preço e depois dar o desconto de 20%?
3. Numa determinada rodovia a velocidade máxima permitida é de 100 km/h, e a mínima é 60 km/h. A multa M por violar esses limites é de R\$ 50 para cada quilometro acima da velocidade máxima ou abaixo da velocidade mínima. Determine o valor da multa M em função da velocidade x e encontre $M(50)$, $M(70)$ e $M(120)$.
4. Marque V se a função está bem definida ou F caso contrário. Lembre-se que $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.
- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.
 - (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$
 - (c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.
 - (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.
 - (e) $f : [5/3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.
 - (f) $f : [5/3, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.
 - (g) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.
5. Qual é o maior subconjunto de \mathbb{R} onde a função $f(x) = \sqrt{(-6x + 30)(22 - 2x)^5(6x + 4)^8}$ está bem definida?
6. Uma fábrica de peças automotivas tem um custo de operação fixo de R\$8745,00 por mês e gasta R\$35,00 para produzir cada peça. Suponha ainda que a fábrica vende cada peça por R\$86,00 mas paga um total de R\$0,89 em impostos sobre cada peça vendida. Deduza qual é a função lucro $L : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ o lucro obtido pela fábrica quando ela produz e vende n peças. Quantas peças, no mínimo, a fábrica precisa produzir (e vender) em um mês para que não fique em prejuízo?

7. Em cada item abaixo, determine o maior subconjunto de \mathbb{R} onde a função está bem definida.

(a) $f(x) = 3x + 2$.

(b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$.

(e) $f(x) = \frac{x^2-3}{|x-2|-3}$.

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+1}{x^2-2x-15}}$.

8. Considere a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{625}{25+x}.$$

A soma $f(x) + f\left(\frac{625}{x}\right)$ é uma constante. Qual?

9. Em cada item, determine as funções $f+g$, $f-g$, fg , f/g e $2f$ e encontre o maior subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ onde a cada uma está bem definida.

(a) $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$.

(c) $f(x) = \frac{2}{x+1}$ e $g(x) = \frac{4}{x+1}$.

10. Imagine que um tanque está sendo preenchido de combustível por uma bomba e que o volume V (em litros) de combustível no tanque seja dado em função da profundidade d (em centímetros) por

$$V(d) = 5(735d^2 + 2)^2 - 20.$$

Suponha que a profundidade de combustível, por sua vez, é dada em função do tempo t (em segundos) por

$$d(t) = \frac{1}{7\sqrt{15}}\sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Quanto litros de combustível haverá no tanque no tempo $t = 6$ s?

11. Nos itens abaixo, determine $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e o maior subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ onde a cada uma está bem definida.

(a) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$.

(b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

(c) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x-3}$.

12. Expresse as funções abaixo como $f \circ g$ ou $f \circ g \circ h$ para funções f , g e h apropriadas.

(a) $F(x) = (x^2 - 1)^4$.

(b) $F(x) = \sqrt{x+1}$.

(c) $F(x) = (4 + \sqrt[3]{x+1})^9$.

(d) $F(x) = \frac{2}{(3-x+x^3)^6}$.

13. Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais e considere a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 35$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz:

$$\begin{cases} f(2n) = 2f(n) + 1, \\ f(2n+1) = 2f(n). \end{cases}$$

Quanto vale $f(30)$?



MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 6ª lista de exercícios

Funções

1. A função g é injetora e f não. A função g é sobrejetora e f não. O domínio de g é $\{A, B, C, D\}$. O subconjunto S é $\{a, b, c, d\}$. A imagem de $g \circ f$ é $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

2. É melhor ter 20% de desconto no preço e depois subtrair R\$50.

3.

$$M(x) = \begin{cases} 50(60 - x) & \text{se } 0 \leq x < 60 \\ 0 & \text{se } 60 \leq x \leq 100 \\ 50(x - 100) & \text{se } x > 100. \end{cases} \quad M(50) = 500, \quad M(70) = 0, \quad M(120) = 1000.$$

4.

- | | |
|-------|-------|
| (a) F | (b) V |
| (c) V | (d) F |
| (e) V | (f) V |
| (g) F | |

5. $(-\infty, 5] \cup [11, +\infty)$

6. $L(n) = 50, 11n - 8745$. A fábrica deve produzir e vender ao menos 175 peças no mês para não ficar em prejuízo.

7.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $D(f) = \mathbb{R}$. | (b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. |
| (c) $D(f) = [1, \infty)$. | (d) $D(f) = [-2, \infty) - \{-1\}$. |
| (e) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 5\}$. | (f) $D(f) = (-3, -1] \cup [1, 5)$. |

8. 25

9.

- (a)
- $(f + g)(x) = 4x^2 + 2x - 1$, $D(f + g) = \mathbb{R}$.
 - $(f - g)(x) = -2x^2 + 2x + 1$, $D(f - g) = \mathbb{R}$.
 - $(fg)(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 2x$, $D(fg) = \mathbb{R}$.
 - $(f/g)(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x^2 - 1}$, $D(f/g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.
 - $(2f)(x) = 2x^2 + 4x$, $D(2f) = \mathbb{R}$.
- (b)
- $(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x + 1}$, $D(f + g) = [-1, 2]$.

- $(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{x + 1}$, $D(f - g) = [-1, 2]$.
 - $(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}\sqrt{x + 1}$, $D(fg) = [-1, 2]$.
 - $(f/g)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{x + 1}}$, $D(f/g) = (-1, 2]$.
 - $(2f)(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$, $D(2f) = [-2, 2]$.
- (c)
- $(f + g)(x) = \frac{6}{x + 1}$, $D(f + g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
 - $(f - g)(x) = -\frac{2}{x + 1}$, $D(f - g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
 - $(fg)(x) = \frac{8}{(x + 1)^2}$, $D(fg) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
 - $(f/g)(x) = \frac{1}{2}$, $D(f/g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
 - $(2f)(x) = \frac{4}{x + 1}$, $D(2f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

10. 105 Litros.

11.

- (a)
- $(f \circ g)(x) = 8x + 1$, $D(f \circ g) = \mathbb{R}$.
 - $(g \circ f)(x) = 8x + 11$, $D(g \circ f) = \mathbb{R}$.
 - $(f \circ f)(x) = 4x + 9$, $D(f \circ f) = \mathbb{R}$.
 - $(g \circ g)(x) = 16x - 5$, $D(g \circ g) = \mathbb{R}$.
- (b)
- $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$, $D(f \circ g) = \mathbb{R}$.
 - $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$, $D(g \circ f) = \mathbb{R}$.
 - $(f \circ f)(x) = x^4$, $D(f \circ f) = \mathbb{R}$.
 - $(g \circ g)(x) = x + 2$, $D(g \circ g) = \mathbb{R}$.
- (c)
- $(f \circ g)(x) = x - 3$, $D(f \circ g) = [3, \infty)$.
 - $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $D(g \circ f) = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$.
 - $(f \circ f)(x) = x^4$, $D(f \circ f) = \mathbb{R}$.
 - $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x - 3} - 3}$, $D(g \circ g) = [12, \infty)$.

12. As soluções apresentadas aqui não são únicas.

(a) $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 - 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$.

(c) $f(x) = x^9$, $g(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$ e $h(x) = x + 1$.

(d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x^6$ e $h(x) = 3 - x + x^3$.

13. $f(30) = 561$