Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

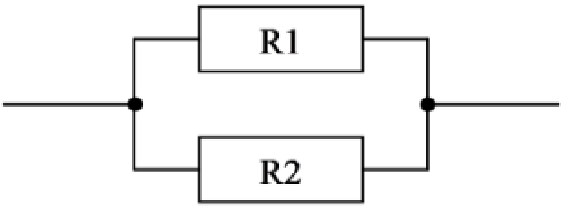
MTM3100 - Pré-cálculo

3ª lista de exercícios - Expressões racionais

1. Se dois resistores elétricos com resistências R_1 e R_2 são conectados em paralelo (veja a figura abaixo), então a resistência total R é dada por

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Simplifique a expressão acima e calcule R se $R_1 = 10$ ohms e $R_2 = 20$ ohms.



2. Para um polinômio $p(x)$, sabe-se que $p(0) = 23$ e $p(-1) = -47$. Suponha que o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 + x$ se escreve como $ax + b$. Determine a e b.

3. Escreva as expressões abaixo na forma de uma única fração sem fatores comuns, seguindo o exemplo abaixo.

Exemplo: $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)-2}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$.

(a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1}$.

(b) $\dfrac{x+2}{x^2+x} - \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x}$.

(c) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1+x} + \dfrac{3}{1-x^2}$.

4. Simplifique as expressões abaixo sob a forma de uma única fração sem fatores comuns.

(a) $\left(\dfrac{3}{1-2x} - \dfrac{7}{1+2x} - \dfrac{5-22x}{4x^2-1}\right) \cdot \left(\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{5}{2x+4}\right)$.

(b) $\left(\dfrac{x^2\left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\left(\dfrac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right)} - 2\right) \cdot (x+1)$.

5. Reescreva a expressão

$$\frac{\dfrac{6+x}{6-x} - 1}{8 - \dfrac{8}{1+x}}$$

na forma $\dfrac{2+2x}{u+vx}$.

6. Racionalize os denominadores das frações abaixo.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **(c)** $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$.

7. Em um exercício da lista de pré-cálculo, pedia-se para racionalizar a fração $S = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$. Gabriel resolveu-o da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{\sqrt[6]{2}-1} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}\cdot\frac{\sqrt[6]{2}+1}{\sqrt[6]{2}+1} \overset{(2)}{=} \frac{\sqrt[6]{2}+1}{(\sqrt[6]{2})^2-1^2} \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt[6]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1} \overset{(4)}{=} \frac{\sqrt[6]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{(\sqrt[6]{2}+1)(\sqrt[6]{2^4}+\sqrt[6]{2^2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3} \overset{(6)}{=} \sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{2}+1$$

Determine a validade de cada uma das igualdades de (1) a (6).

8. Determine os números a e b tais que a expressão $\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ se escreve na forma $(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{b}\right)$.

9. É um fato matemático que o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $q(x) = x - a$ é zero se, e somente se, $p(a) = 0$. Neste caso dizemos que a divisão é exata. Determine quais das divisões abaixo são exatas.

(a) $(x^2+2x-15)\div(x-3)$

(b) $(x^2+2x-15)\div(x+5)$

(c) $(x^2-1)\div(x-2)$

(d) $(x^2-2x-3)\div(x-1)$

(e) $(x^2+(1-\pi)x-\pi)\div(x-\pi)$

(f) $(x^2+1)\div(x-a)$, $a\in\mathbb{R}$.

10. Se $x = 1$ é raíz do polinômio $2x^3-26x^2+88x-64$, qual é a soma das outras duas raízes?

11. Efetue a divisão do polinômio $x^6+17x+39$ por x^2-x+1.

12. Existe algum valor de a que torna a expressão

$$\frac{-56x^2+37x-65}{ax-2} = 3-8x-\frac{59}{ax-2}$$

verdadeira para todo $x \neq \dfrac{2}{a}$?

MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 3ª lista de exercícios

Expressões racionais

1. $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ e $R = 20/3$.

2. $a = 23 + 47$ e $b = 23$.

3.

(a) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$. **(b)** $\dfrac{1 - x}{x(x+1)}$. **(c)** $-\dfrac{3x + 2}{(x-1)(x+1)}$.

4.

(a) $\dfrac{1}{2(x+2)}$. **(b)** $2(x^2 - 1)$.

5. $u = 48$ e $v = -8$.

6.

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **(b)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

(c) $2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. **(d)** $\dfrac{7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{6} + 12}{23}$.

7. Todas estão corretas.

8. $a = 1$ e $b = 3$.

9.

(a) exata **(b)** exata

(c) não exata **(d)** não exata

(e) exata **(f)** não exata

10. 12

11. $x^6 + 17x + 39 = (x^4 + x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1) + (17x + 40)$

12. Sim, $a = 7$.