

Linguagens Formais e Compiladores: Gramáticas

Jerusa Marchi

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística

3 de agosto de 2021

Linguagens Formais

Tipos de Linguagens

- Regulares

- Livres de Contexto

- Sensíveis ao Contexto

- Recursivas

- Recursivamente Enumeráveis

Máquinas

- Autômato Finito (AF)

- Autômato de Pilha (AP)

- Autômatos Linearmente Limitados (ALL)

- Máquinas de Turing (MT)

Mecanismos Geradores

- Gramáticas

Gramáticas

Definição

Mecanismo de Reescrita \rightarrow Memória de trabalho + Regras

S

$$\text{Regras} \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow ABC \\ A \rightarrow aA|a \\ B \rightarrow bB|b \\ C \rightarrow cC|c \end{array} \right.$$

Observação

| significa **ou**. "Substituir a cabeça pelo corpo da regra."

Definição Formal

Definição

$$G: (N, T, P, S)$$

N: conjunto de varáveis (Não Terminais)

T: Conjunto de constantes (Terminais)

P: Conjunto de Regras (Produções)

S: Símbolo inicial (Conteúdo da MT)

Observação

Produções assumem a forma: $(N \cup T)^+ \rightarrow (N \cup T)^*$ de modo **irrestrito**.

Tipos de Gramáticas

Tipo 0: Irrestrita

$$(N \cup T)^+ \rightarrow (N \cup T)^*$$

Tipo 1: Sensível ao Contexto

$$(N \cup T)^+ \rightarrow (N \cup T)^+ \\ |\alpha| \leq |\beta|$$

Tipo 2: Livres de Contexto

$$N \rightarrow (N \cup T)^+$$

Tipo 3: Regulares

$$N \rightarrow a|aN, a \in T$$

Projetando Gramáticas

Observar o tipo da Linguagem

Regular \rightarrow Autômato finito

Livre de Contexto \rightarrow Autômato de Pilha

Sensível ao Contexto \rightarrow Máquinas de Turing

Observar as Regras de Formação de cada tipo de Gramática (slide anterior)

Construir G do **maior** tipo possível!

Observação

G. Irrestritas \rightarrow Recursivamente Enumeráveis \rightarrow Máquinas de Turing

Exemplos

Linguagem

$$L_1 = \{w \mid w \in \Sigma = \{a, b\}^* \text{ e } |w| \text{ é ímpar}\}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a \mid b \mid aA \mid bA \\ A &\rightarrow aS \mid bS \end{aligned}$$

$$S \rightarrow aA \rightarrow aaS \rightarrow aaS \rightarrow aab$$

Observação

$$\Sigma = T = \{a, b\}$$

$$N = \{S, A\}$$

Exemplos

Linguagem

$$L_2 = \{w \mid w \in \Sigma = \{a, b\}^* \text{ e } |w| \text{ é par}\}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon \mid aA \mid bA \\ A &\rightarrow aB \mid bB \mid a \mid b \\ B &\rightarrow aA \mid bA \end{aligned}$$

Observação

$S \rightarrow \varepsilon$ pois $\varepsilon \in L_2$ mas $|\alpha| \geq |\beta|$ não se aplica. Então, se $\varepsilon \in L$, $S \rightarrow \varepsilon$ em um único passo e S não deve aparecer a direita em nenhuma produção

Exemplos

Linguagem

$$L_3 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$S \rightarrow \varepsilon \mid ab \mid aAb$$

$$A \rightarrow aAb \mid ab$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow ab$$

$$S \rightarrow aAb \rightarrow aabb$$

Observação

Respeita as regras:

$$S \rightarrow \varepsilon$$

S não aparece à direita de nenhuma produção

$$|\alpha| \leq |\beta|$$

Exemplos

Linguagem

$$L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$S \rightarrow aABC \mid abc \mid \varepsilon$
 $A \rightarrow aABC \mid aBC$
 $CB \rightarrow BC \leftarrow \text{produção de troca}$
 $aB \rightarrow ab$
 $bB \rightarrow bb$
 $bC \rightarrow bc$
 $cC \rightarrow cc$

Derivação:

$S \rightarrow aABC \rightarrow aaABCBC \rightarrow$
 $\underbrace{a \dots a}_n \underbrace{BCBC \dots BC}_n \rightarrow \dots$
(usa produções de troca)
 $\rightarrow a^{n-1}bB^{n-1}C^n \rightarrow \dots$
 $\rightarrow a^n b^n cC^{n-1} \rightarrow \dots \underline{a^n b^n c^n}$
(usa demais produções)

Exemplos

Linguagem

$L_5 = \{w \mid w \in \Sigma = \{1, 2, A, B, X, *\}$ e w corresponde a multiplicação unária dos vetores representados na memória de trabalho}

Derivação:

- 1: $X 1^* \rightarrow B^*$
- 2: $1 X 11 \rightarrow 1A X 1$
- 3: $1A \rightarrow A21$
- 4: $2A \rightarrow A2$
- 5: $1B \rightarrow B1$
- 6: $2B \rightarrow B1$
- 7: $*A \rightarrow *$
- 8: $*B \rightarrow *$

$MT = *11 X 11^*_2 \rightarrow *11A X 1^*_3 \rightarrow$
 $*1A21 X 1^*_1 \rightarrow *1A21B^*_3 \rightarrow$
 $*A2121B^*_5 \rightarrow *A212B1^*_6 \rightarrow$
 $*A21B11^*_5 \rightarrow *A2B111^*_6 \rightarrow$
 $*AB1111^*_7 \rightarrow *B1111^*_8 \rightarrow *1111^*$

Exemplos

Linguagem

$$L_6 = \{a^i b^j c^i \mid i, j \geq 0\}$$

$$S \rightarrow \underline{A} \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow \underline{aAc} \mid \underline{ac} \mid \underline{B} \leftarrow \text{Produções Livre de Contexto}$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

Linguagem

$$L_7 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid c$$

Derivação:

$$S \rightarrow aSa \rightarrow abSba \rightarrow abbSbba \rightarrow \underbrace{abb}_w c \underbrace{bba}_{w^R}$$

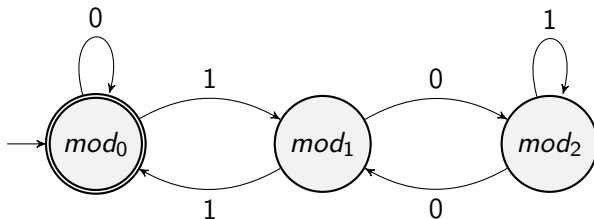
Exemplos

Linguagem

$L_8 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ e } w \text{ seja um binário múltiplo de } 3\}$

$$\begin{array}{l} S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 0 \\ A \rightarrow 1S \mid 1 \mid 0B \\ B \rightarrow 1B \mid 0A \end{array}$$

Autômato:



Exemplos

Linguagem

$L_9 = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ e } \#a's \text{ é par e } \#b's \text{ é par}\}$

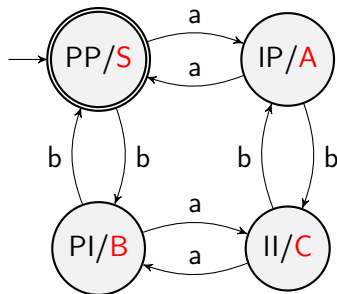
$S' \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon$

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aS \mid bC \mid a$

$B \rightarrow bS \mid aC \mid b$

$C \rightarrow bA \mid aB$



Observação

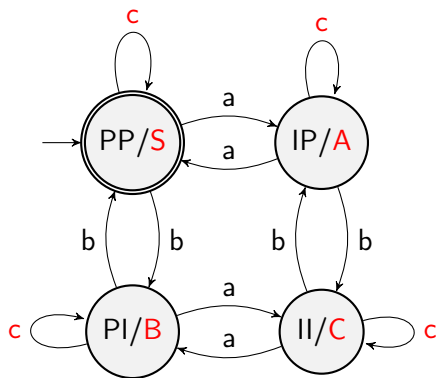
Se criou uma nova regra S' para que valesse a condição: " $S \rightarrow \varepsilon$ então S não deve aparecer a direita de nenhuma produção".

Exemplos

Linguagem

$L_{10} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \text{ e } \#a's \text{ é par e } \#b's \text{ é par}\}$

$S' \rightarrow aA \mid bB \mid \epsilon \mid cS \mid c$
 $S \rightarrow aA \mid bB \mid cs \mid c$
 $A \rightarrow aS \mid bC \mid a \mid cA$
 $B \rightarrow bS \mid aC \mid b \mid cB$
 $C \rightarrow bA \mid aB \mid cC$



Exemplos

Linguagem

$$L_{11} = \{w\#w \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

1, 2, 3: $S \rightarrow \# \mid aSA \mid bSB$

4: $\#A \rightarrow \#a$

5: $\#B \rightarrow \#b$

6: $aA \rightarrow Aa$

7: $aB \rightarrow Ba$

8: $bA \rightarrow Ab$

9: $bB \rightarrow Bb$

Derivação:

$\underline{S}_2 \rightarrow a\underline{S}A_3 \rightarrow ab\underline{S}BA_2 \rightarrow$

$aba\underline{S}ABA_3 \rightarrow abab\underline{S}BABA_1 \rightarrow$

$abab\underline{\#}BABA_5 \rightarrow abab\underline{\#}bABA_8 \rightarrow$

$abab\underline{\#}AbBA_9 \rightarrow abab\underline{\#}ABbA_8 \rightarrow$

$abab\underline{\#}ABAb_4 \rightarrow abab\underline{\#}aBAb_7 \rightarrow$

$abab\underline{\#}BaAb_6 \rightarrow abab\underline{\#}BAab_5 \rightarrow$

$abab\underline{\#}bAab_8 \rightarrow abab\underline{\#}Abab_4 \rightarrow$

$abab\#abab$