Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

14ª lista de exercícios - Outras funções trigonométricas.

1. O matemático grego Eratóstenes (276-195 a.C.) mediu o raio da Terra usando o seguinte experimento. Em um certo dia do ano, ao meio-dia os raios de luz emitidos pelo Sol são perpendiculares à superfície da Terra na cidade de Assuã (Egito). No mesmo dia e horário, os raios formam um ângulo de $\pi/25$ com relação à perpendicular à superfície na cidade de Alexandria. Considerando que Assuã fica a 800 km ao sul de Alexandria ele pode aproximar o raio da Terra. Que aproximação ele obteve?

2. Resolva as equações abaixo.

(a) $\operatorname{tg} x = 0$. **(b)** $\operatorname{tg} x = 1$. **(c)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3. A partir da fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, deduza as seguintes abaixo.

(a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. **(b)** $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$.

Explicação de conteúdo. Expressões envolvendo funções trigonométricas possuem diversas escritas equivalentes. Por exemplo, usando as relações básicas, é possível reescrever a função cotangente de diversas formas:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{cossec} x}{\sec x}.$$

Um possível caminho para encontrar outras escritas expressões é reescrever toda a expressão em termos de seno e cosseno e depois simplificar. Como exemplo, simplifiquemos a expressão $\cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$:

$$\cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x = \cos x + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \operatorname{sen} x = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

4. Reescreva as expressões abaixo usando apenas seno e cosseno e, em seguida, simplifique.

(a) $\cos x \operatorname{tg} x$. **(b)** $\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x$. **(c)** $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

(d) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. **(e)** $\dfrac{1 + \cos x}{1 + \sec x}$. **(f)** $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$.

5. Mostre que $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

6. Utilize as fórmulas trigonométricas para soma de arcos para calcular o que se pede.

(a) $\operatorname{sen} 75°$. **(b)** $\cos 105°$. **(c)** $\operatorname{tg} 15°$.

(d) $\cos(17\pi/12)$. **(e)** $\operatorname{tg}(-\pi/12)$. **(f)** $\operatorname{sen}(-5\pi/12)$.

7. Considere a função $f(x) = a \sec(bx)$. Se os pontos $(0, 3)$ e $(\pi/2, -6)$ estão no gráfico da função, e sabe-se que $0 < b < 2$, determine a e b.

8. Usando o exercício 6 com $x = y$ e o exercício 3(a), determine a solução da equação

$$\ln(2\ \operatorname{tg}(x)) - \ln(2 - \sec^2(x)) = \ln(\sqrt{3})$$

no intervalo $(0, \pi/2)$.

9. Resolva as equações abaixo.

(a) $\sqrt{2}\,\operatorname{sen} x + 1 = 0$. **(b)** $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$. **(c)** $2\cos(3x) = 1$.

(d) $\operatorname{tg}(x/4) + \sqrt{3} = 0$.

10. Usando a fórmula para $\cos(2y)$ e a identidade $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, faça a substituição $y = x/2$ para mostrar que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

e

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Usando isso conclua que $\operatorname{tg}(x/2) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e então determine a solução da equação

$$\operatorname{tg}(-45°) = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

no intervalo $(-180°, 180°)$.

11. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\sin 1°}{\cos k° \cos(k-1)°} &= \frac{\sin(k° - (k-1)°)}{\cos k° \cos(k-1)°} = \frac{\sin k° \cos(k-1)° - \cos k° \sin(k-1)°}{\cos k° \cos(k-1)°} \\ &= \frac{\sin k° \cos(k-1)°}{\cos k° \cos(k-1)°} - \frac{\cos k° \sin(k-1)°}{\cos k° \cos(k-1)°} \\ &= \tan k° - \tan(k-1)°.\end{aligned}$$

Utilizando este fato, determine $x, y \in [0, 90]$ tais que

$$\frac{1}{\cos 8° \cos 9°} + \frac{1}{\cos 9° \cos 10°} + \cdots + \frac{1}{\cos 67° \cos 68°} = \frac{\tan x° - \tan y°}{\sin 1°}.$$

12. Determine $\theta \in [\pi/38, 3\pi/38]$ tal que $2\operatorname{sen}(19 \cdot \theta) = 1$.

13. Determine $\theta \in [0, \pi/72]$ tal que $\operatorname{tg}(18 \cdot \theta) + \cot(18 \cdot \theta) = 4/\sqrt{3}$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 14ª lista de exercícios

Outras funções trigonométricas.

1. $R = \dfrac{800 \cdot 50}{2\pi}\,\text{km} \cong 6366{,}2\,\text{km}.$

2.

(a) $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ **(b)** $S = \{\pi/4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ **(c)** $x = \dfrac{\pi}{3}.$

3.

(a) $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ **(b)** $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$

4.

(a) $\cos x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x.$ **(b)** $\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = -1.$ **(c)** $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x.$

(d) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 1.$ **(e)** $\dfrac{1 + \cos x}{1 + \sec x} = \cos x.$ **(f)** $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \operatorname{sen}^2 x.$

5.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} \pm \frac{\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \mp \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.\end{aligned}$$

6.

(a) $\operatorname{sen} 75° = \dfrac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}.$

(b) $\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}.$

(c) $\operatorname{tg} 15° = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$

(d) $\cos(17\pi/12) = \dfrac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}.$

(e) $\operatorname{tg}(-\pi/12) = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$

(f) $\operatorname{sen}(-5\pi/12) = -\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}.$

7. $a = 3$ e $b = 4/3$

8. $\pi/6$

9.

- **(a)** $S = \{5\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- **(b)** $S = \{-\pi/6 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/6 + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- **(c)** $S = \{\pi/9 + 2k\pi/3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/9 + 2k\pi/3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- **(d)** $S = \{8\pi/3 + 4k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

10. $u = -90°$.

11. $x = 68$ e $y = 8$.

12. $\theta = 5\pi/114$

13. $\theta = \pi/108$