$$= \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \tfrac{3}{32}$$

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1)$$
$$= 4 - (x + 1)^2$$

Isso sugere a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\,du$$

Agora substituímos $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, obtendo $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$. Dessa forma

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta}\, 2 \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\,d\theta$$

$$= -2 \cos \theta - \theta + C$$

$$= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$$ □

■ A Figura 5 mostra o gráfico do integrando do Exemplo 7 e o de uma integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

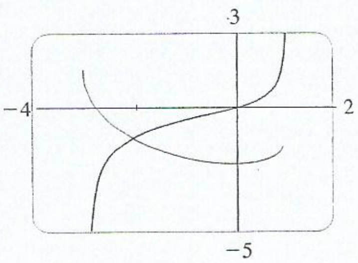

FIGURA 5

7.3 EXERCÍCIOS

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\,dx$; $x = 3 \sec \theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\,dx$; $x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx$; $x = 3 \operatorname{tg} \theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$