



5.3. Parábola

Professores:

Alda Dayana Mattos Mortari

Christian Wagner

Giuliano Boava (autor e voz)

Leandro Batista Morgado

María Rosario Astudillo Rojas

Mykola Khrypchenko

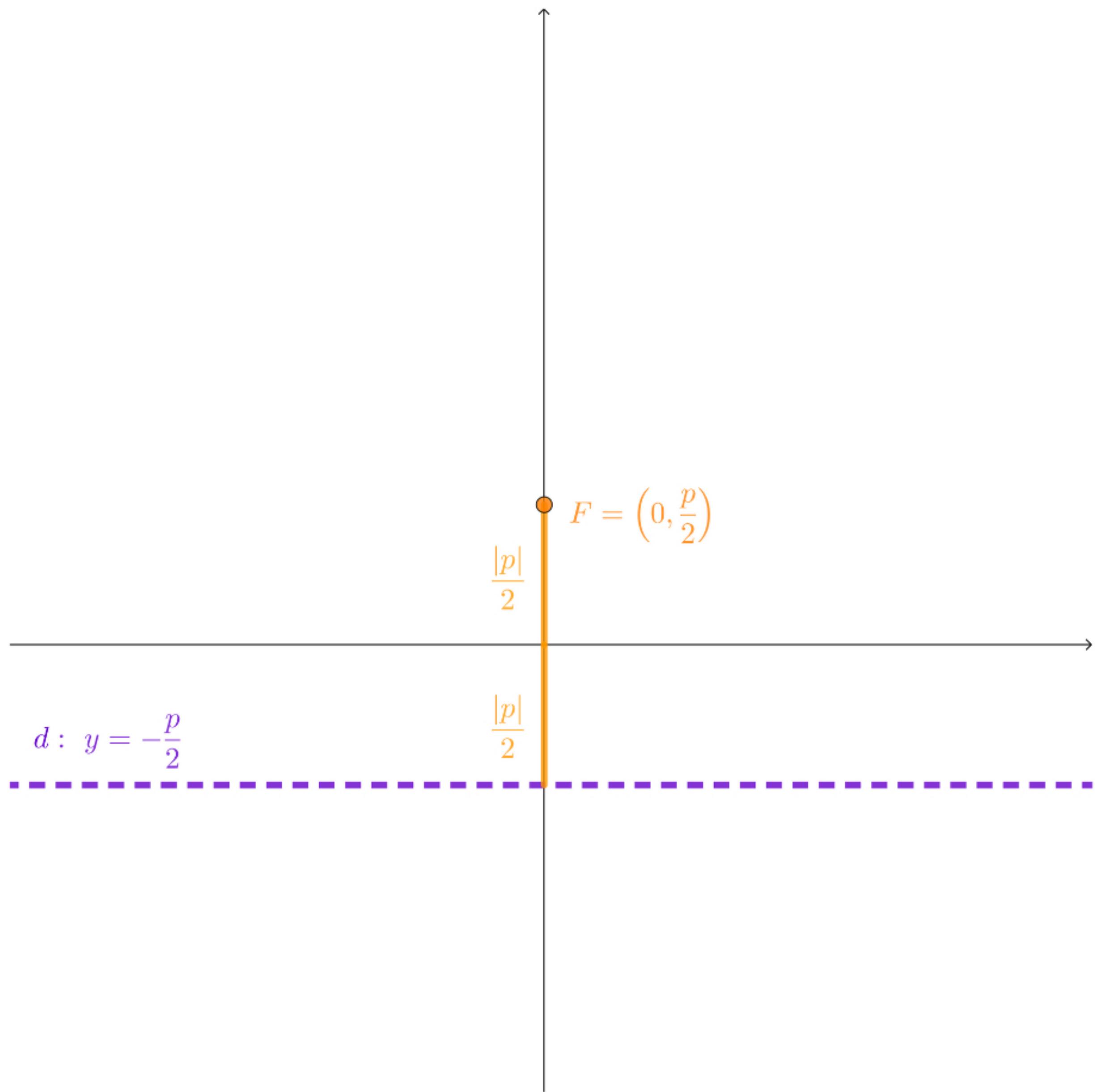
DEFINIÇÃO

Definição. Sejam d uma reta e F um ponto não pertencente a d (ambos no plano). A parábola com foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico dos pontos equidistantes entre F e d .

Vídeo

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA

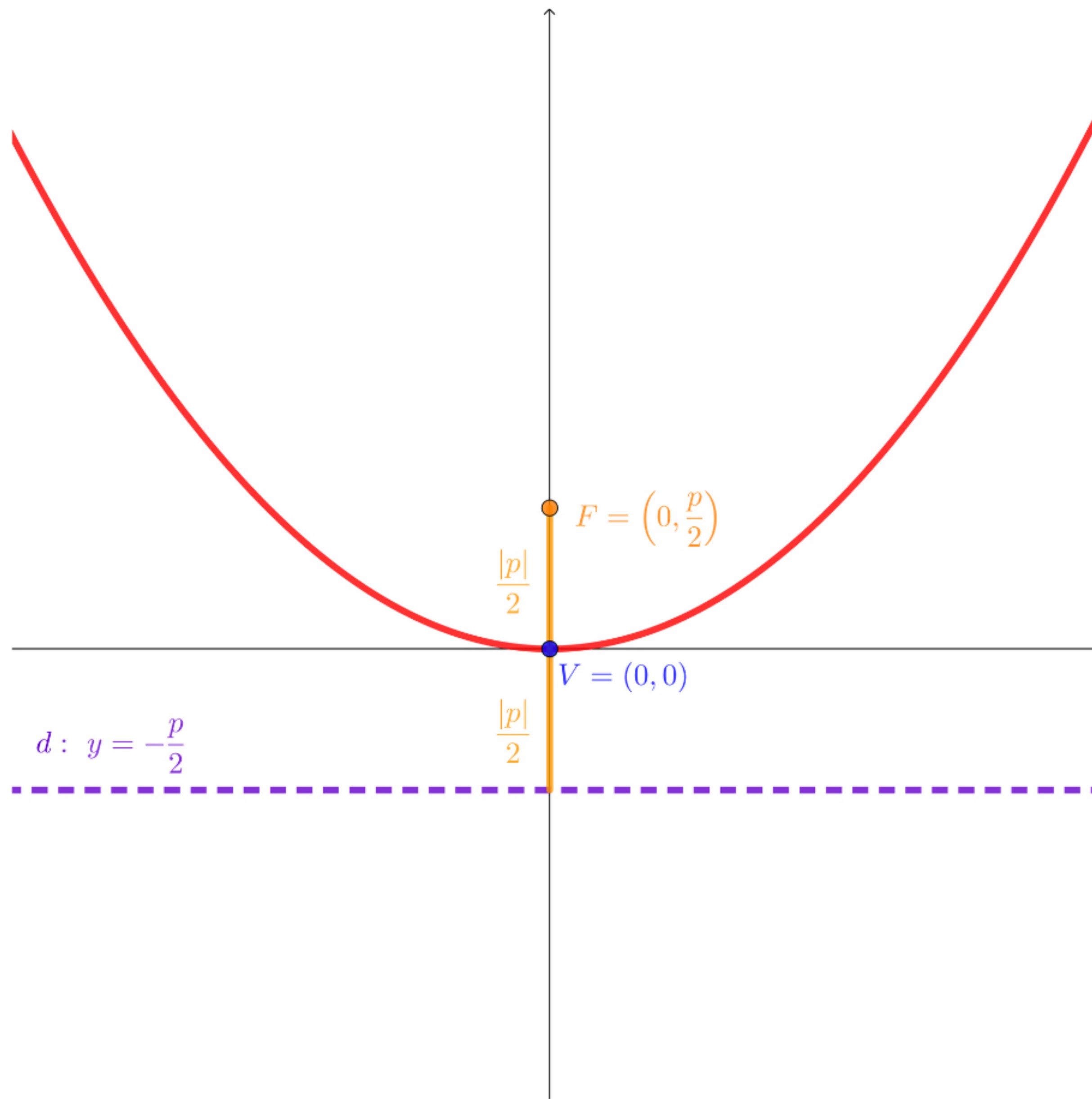


Reta diretriz d horizontal

$$\text{Equação de } d : y = -\frac{p}{2}$$

$$\text{Foco em } F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



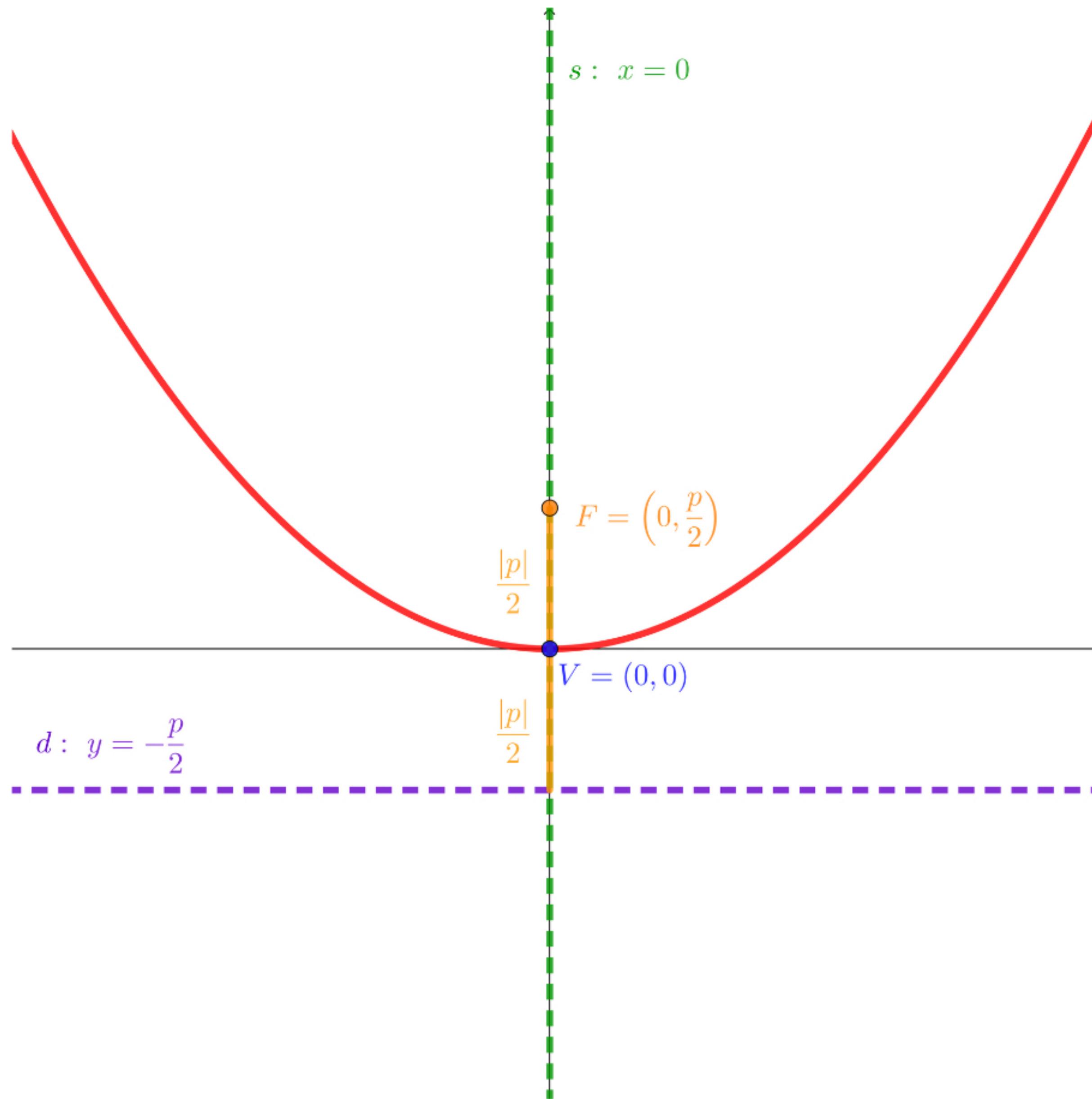
Reta diretriz d horizontal

$$\text{Equação de } d : y = -\frac{p}{2}$$

$$\text{Foco em } F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

Vértice na origem

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



Reta diretriz d horizontal

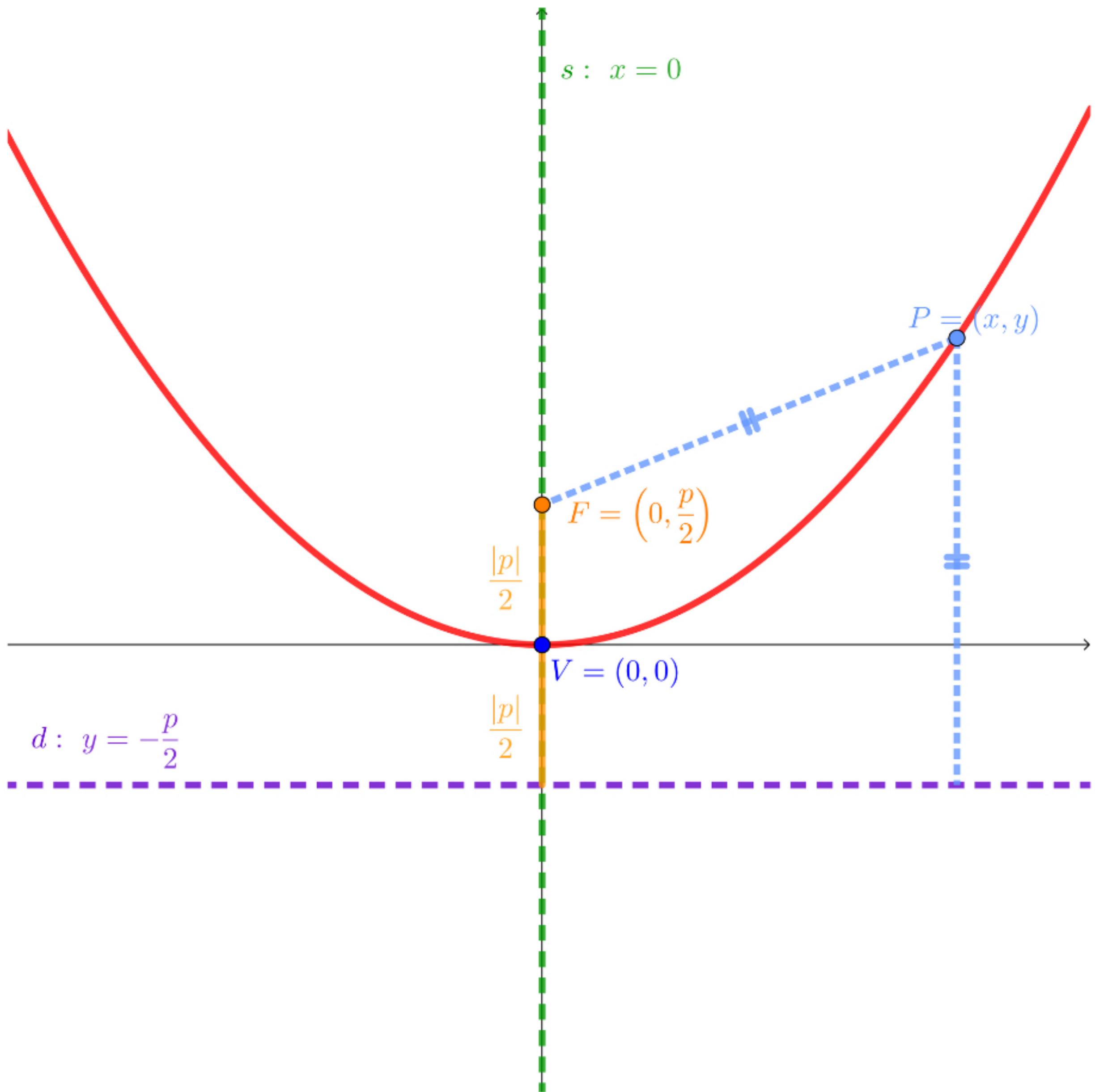
$$\text{Equação de } d : y = -\frac{p}{2}$$

$$\text{Foco em } F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

Vértice na origem

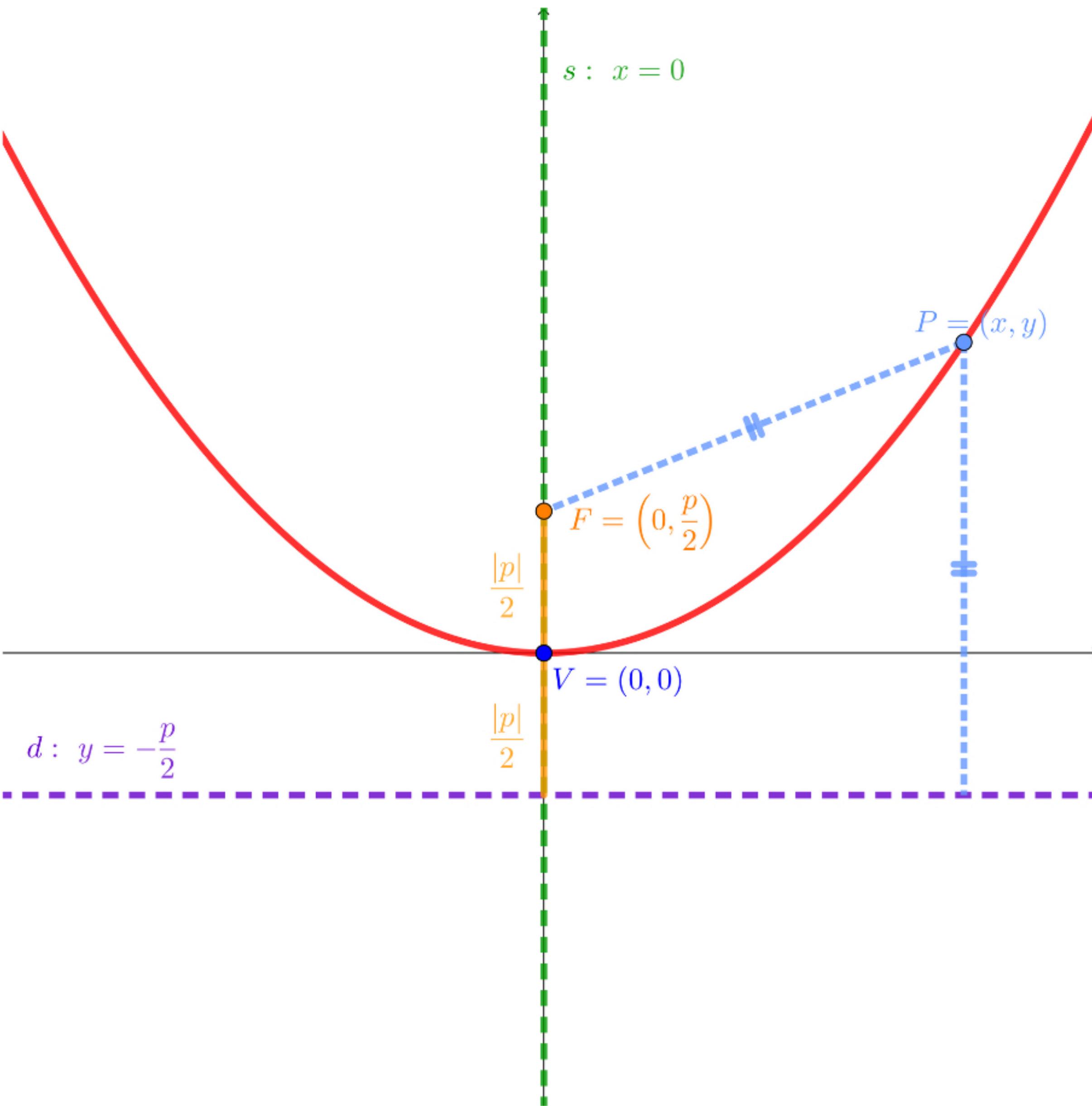
$$\text{Eixo de simetria: } s : x = 0$$

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$d(P, F) = d(P, d)$$

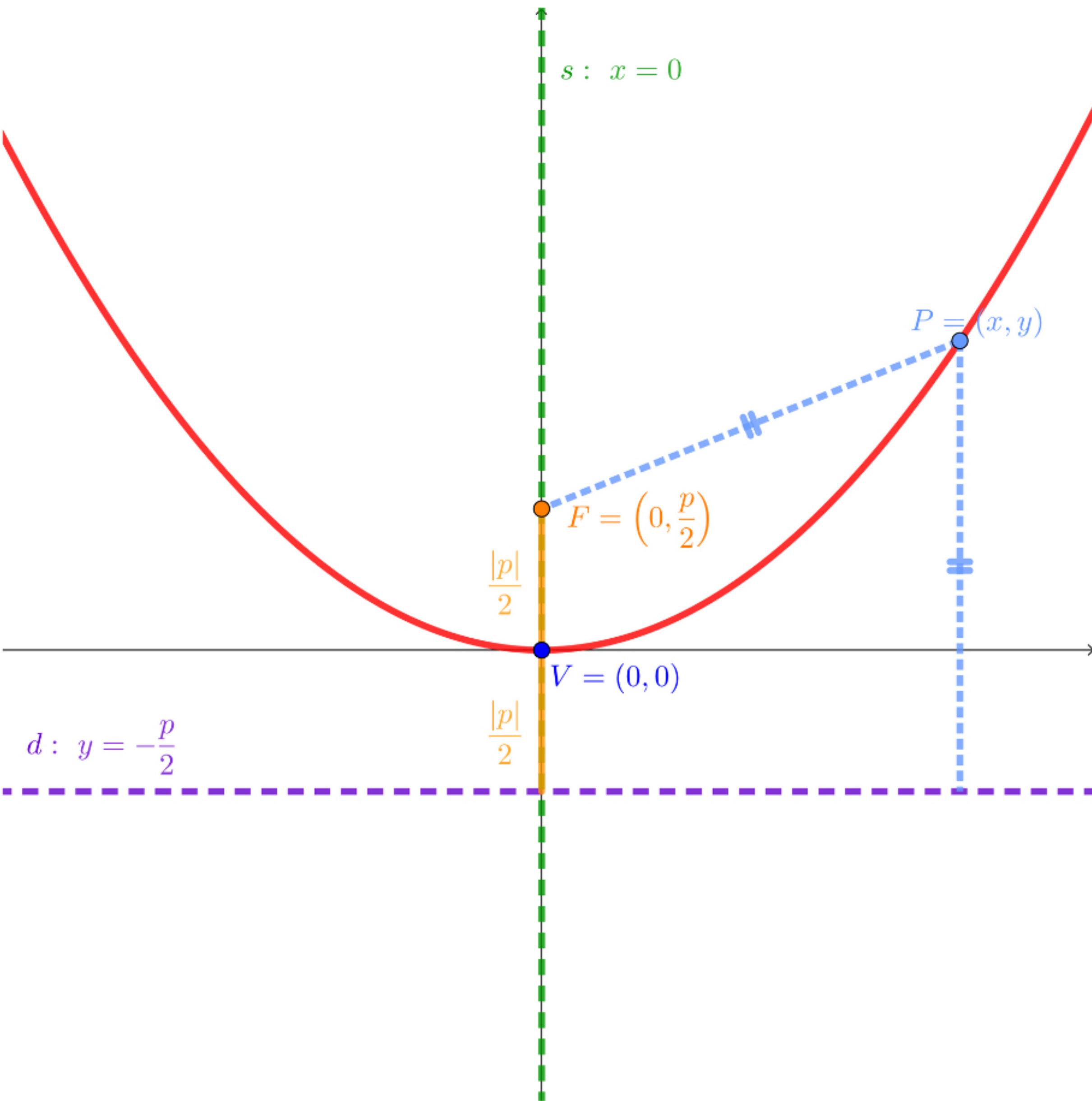
NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2|$$

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA

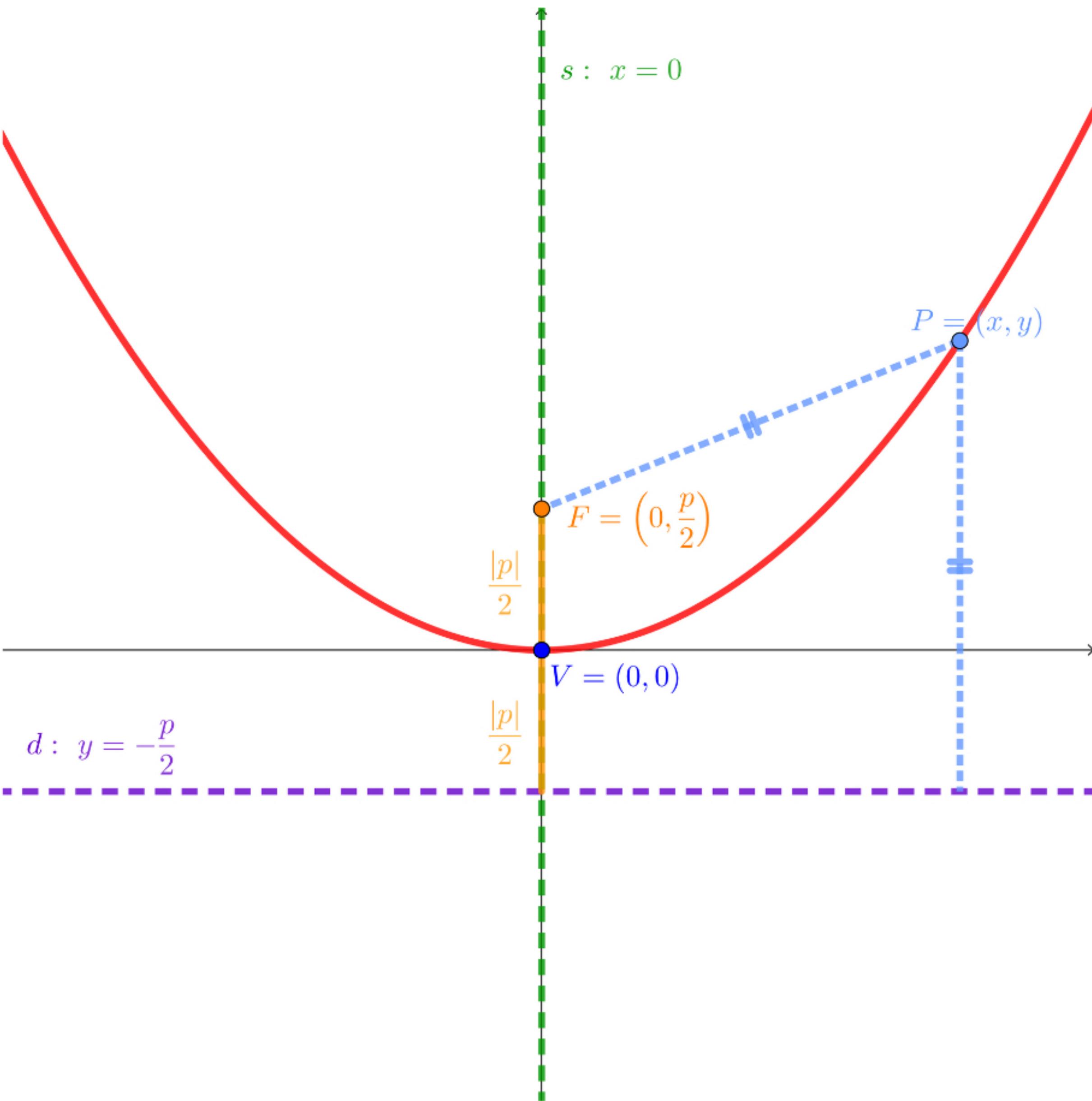


$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2|$$

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



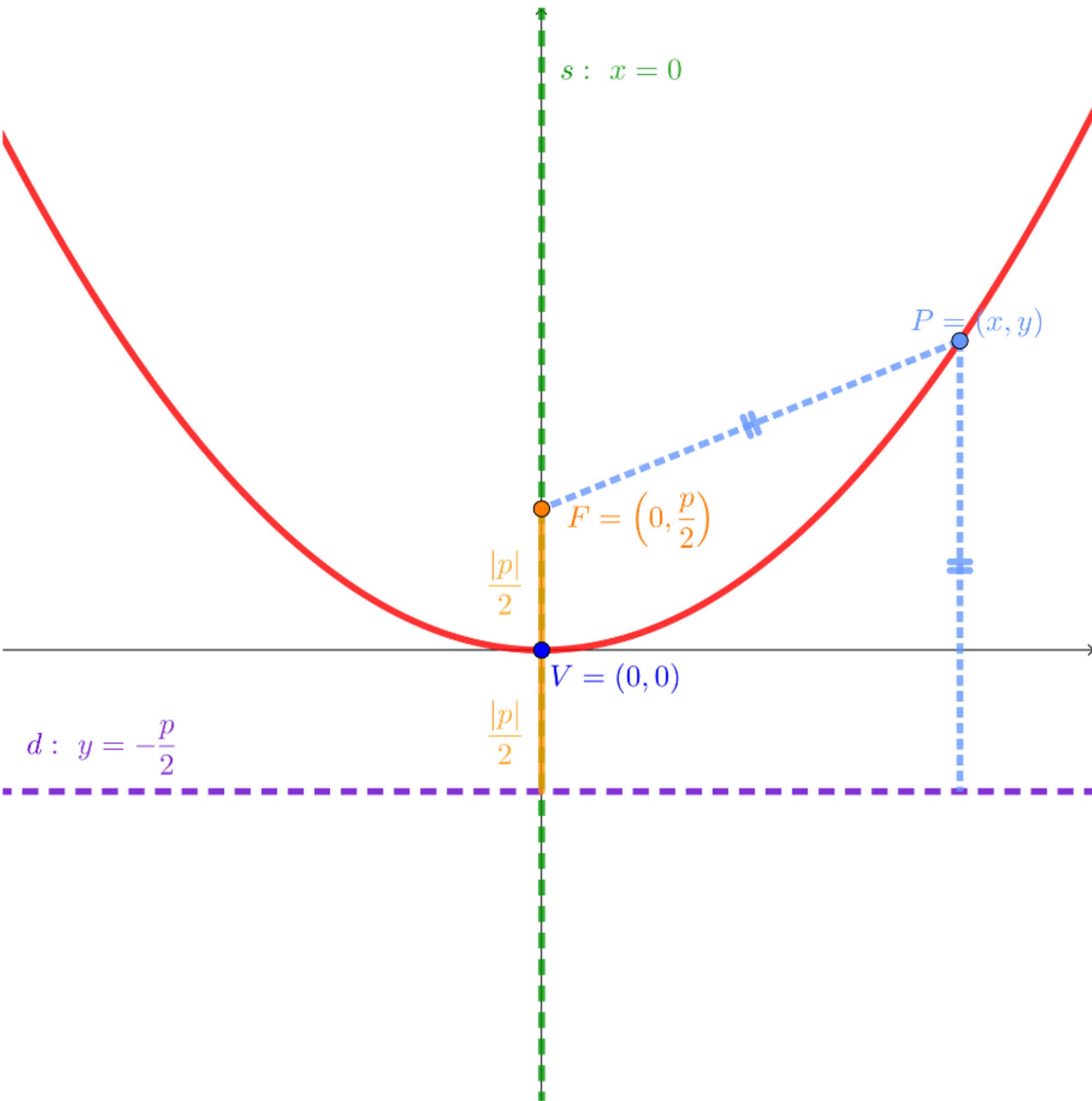
$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2|$$

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

NOMENCLATURA E DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2|$$

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

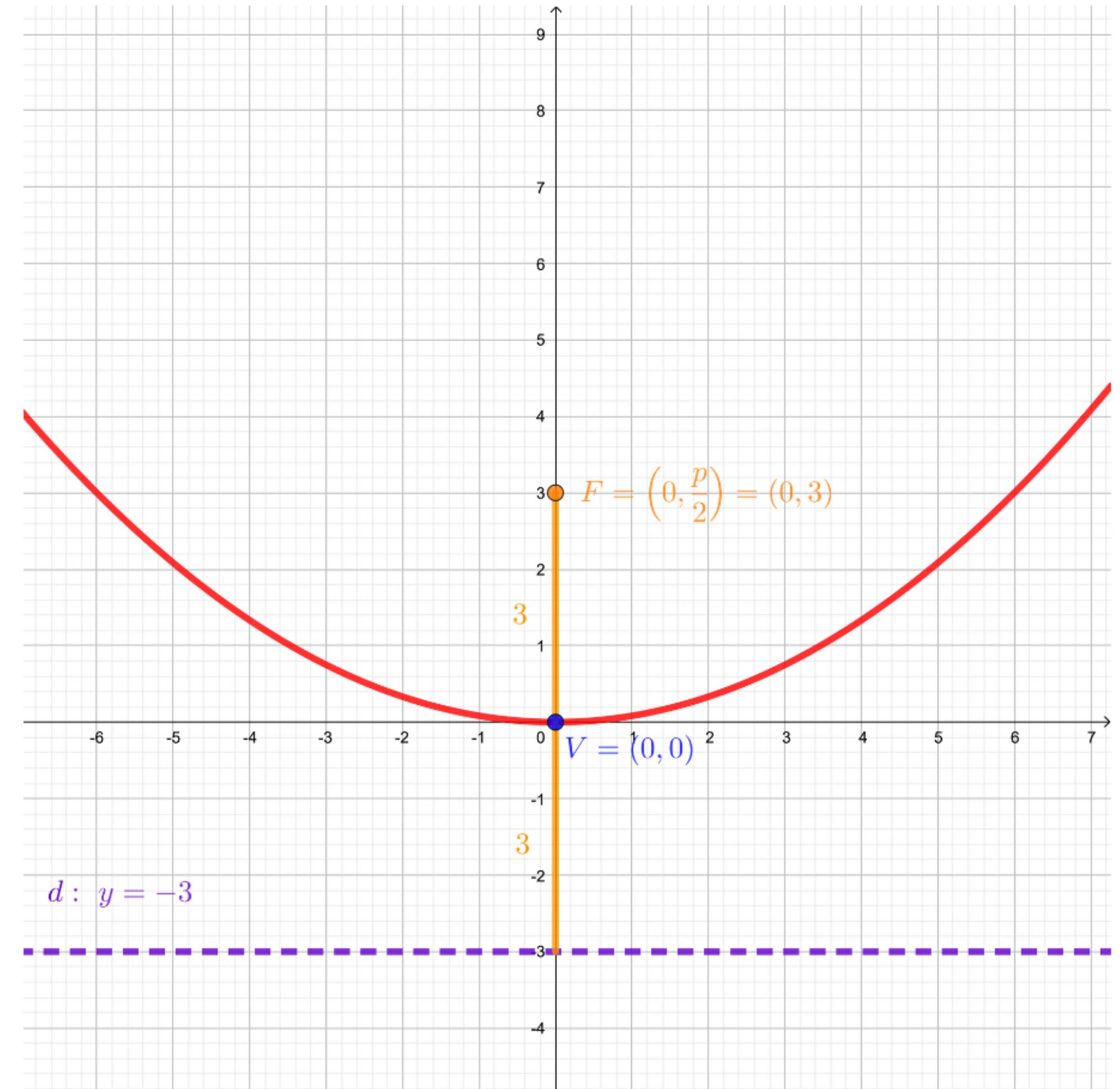
$$2py = x^2$$

EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem, concavidade voltada para cima e foco em $F = (0, 3)$.

EXEMPLOS

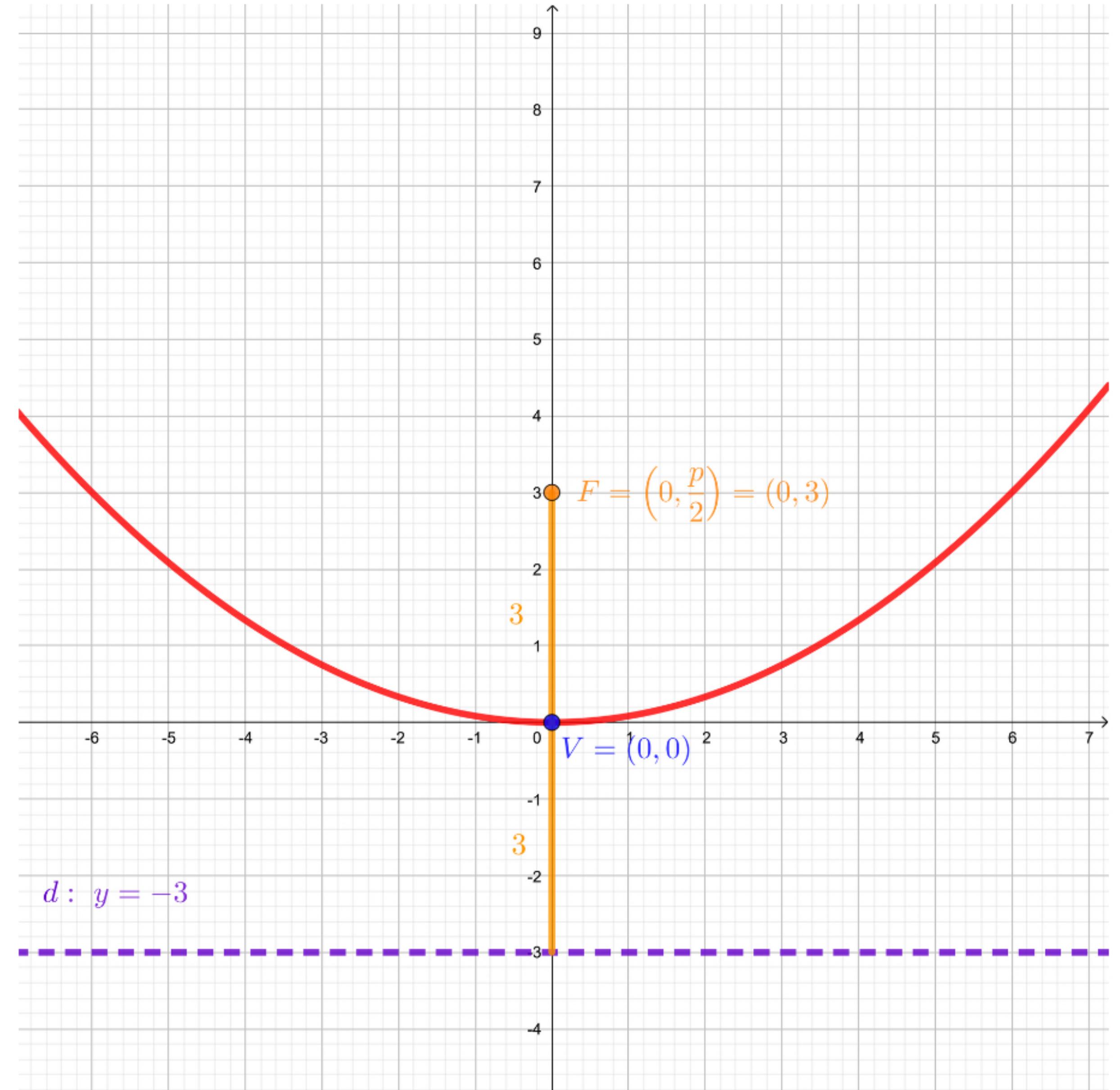
Determine uma equação da parábola com vértice na origem, concavidade voltada para cima e foco em $F = (0, 3)$.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem, concavidade voltada para cima e foco em $F = (0, 3)$.

Solução. $\frac{p}{2} = 3$, logo $p = 6$. Portanto, $2 \cdot 6y = x^2$ ou $12y = x^2$.

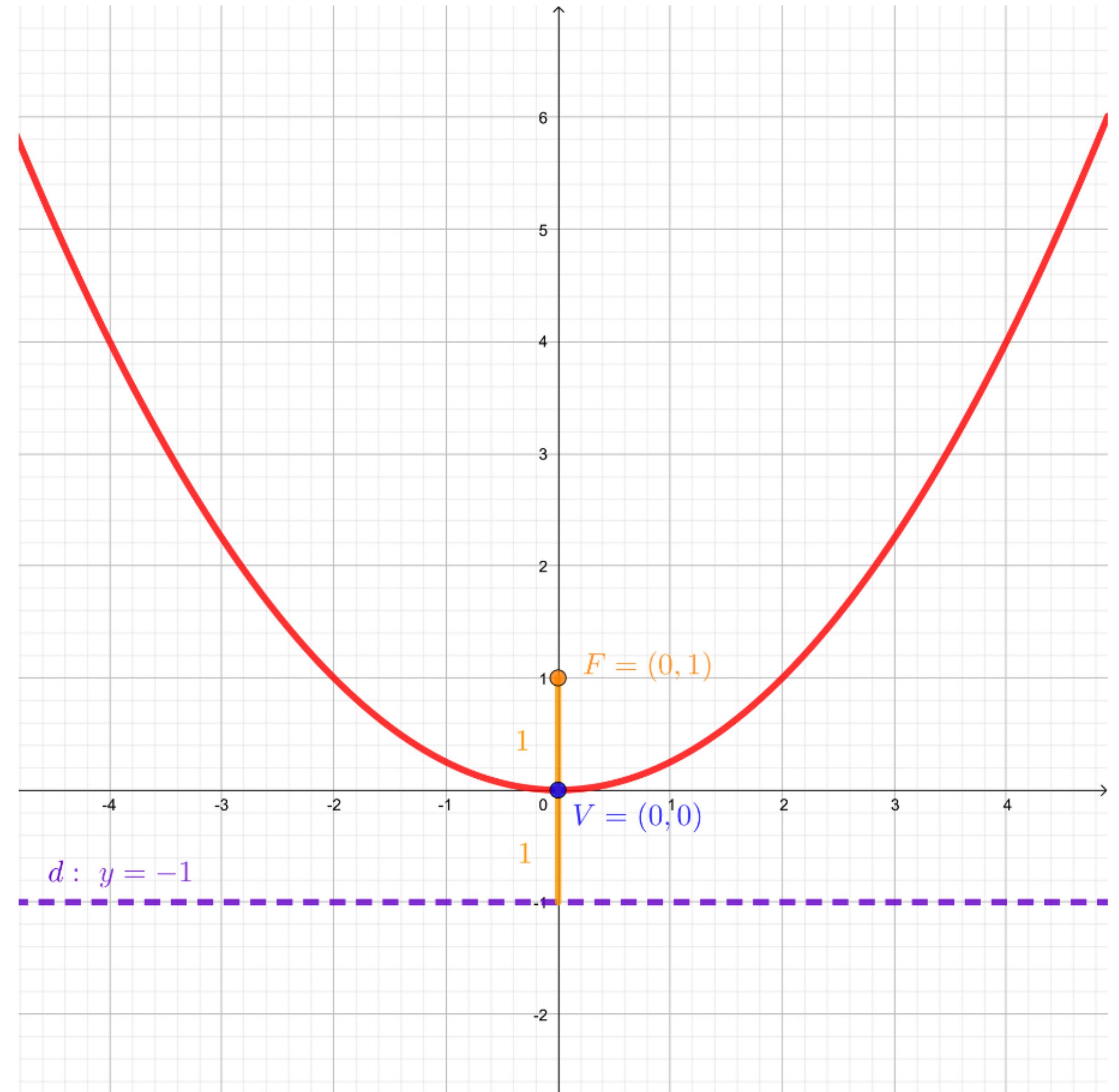


EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = -1$.

EXEMPLOS

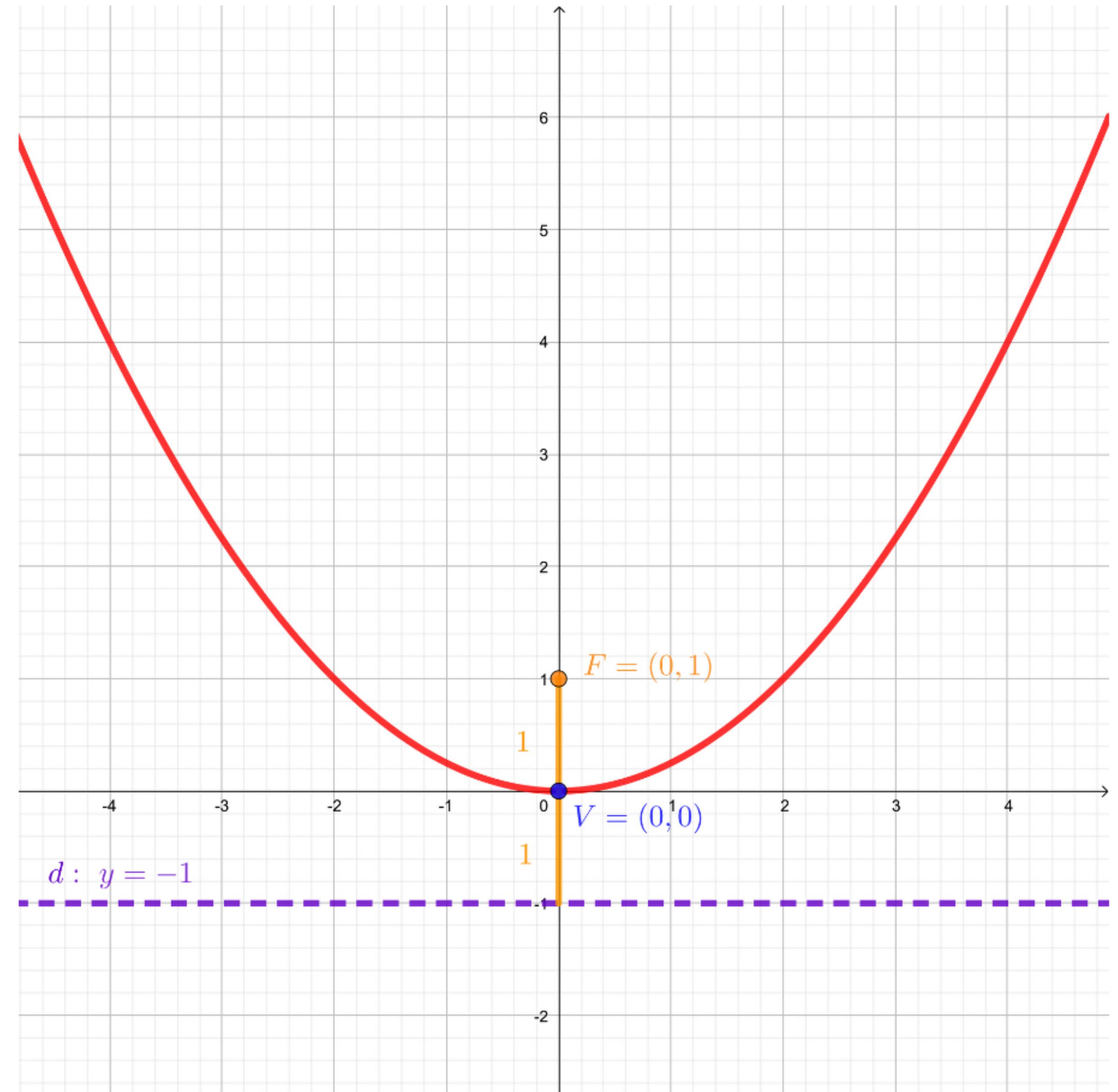
Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = -1$.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = -1$.

Solução. $-\frac{p}{2} = -1$, logo $p = 2$. Portanto, $2 \cdot 2y = x^2$ ou $4y = x^2$.

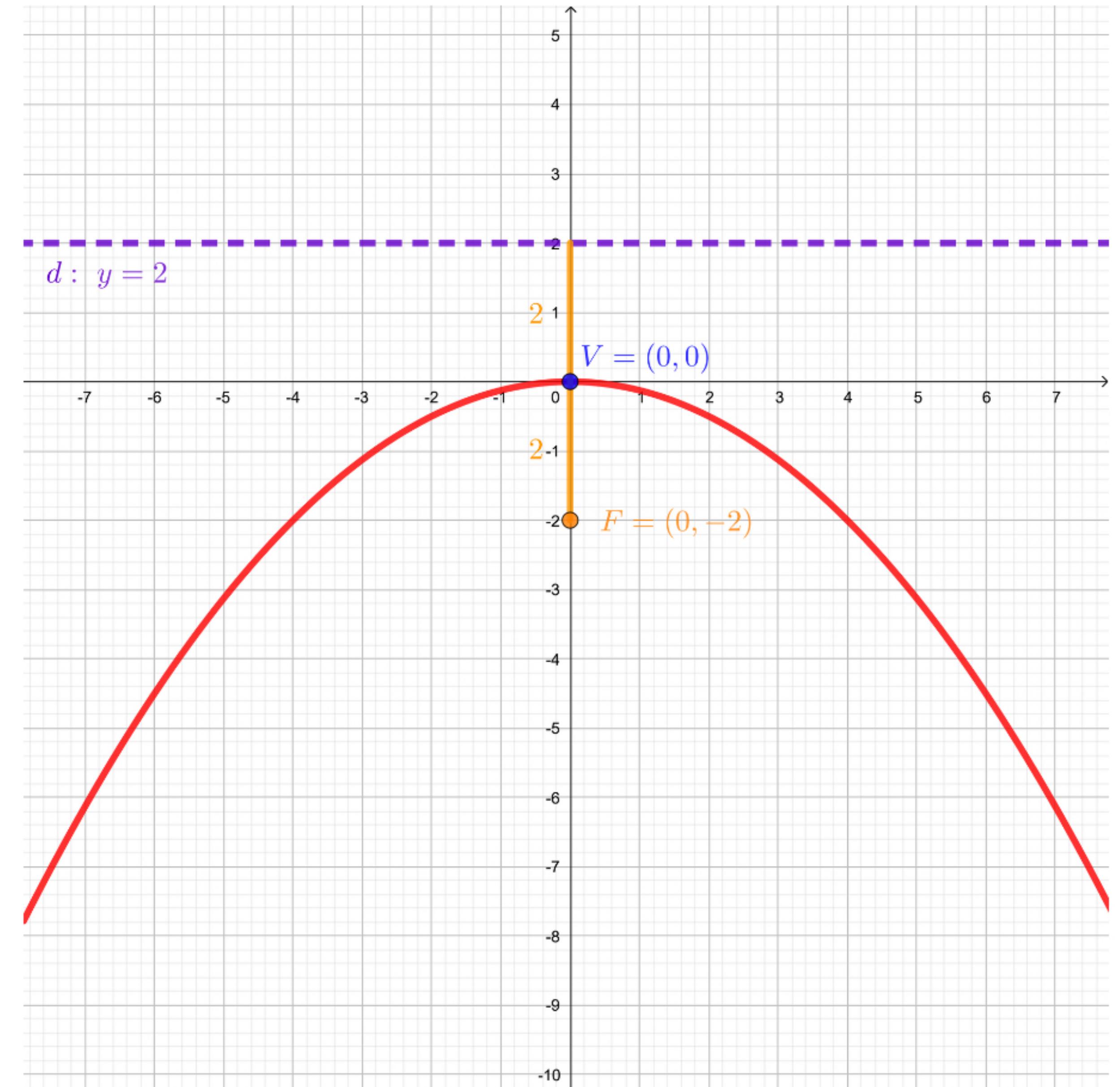


EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.

EXEMPLOS

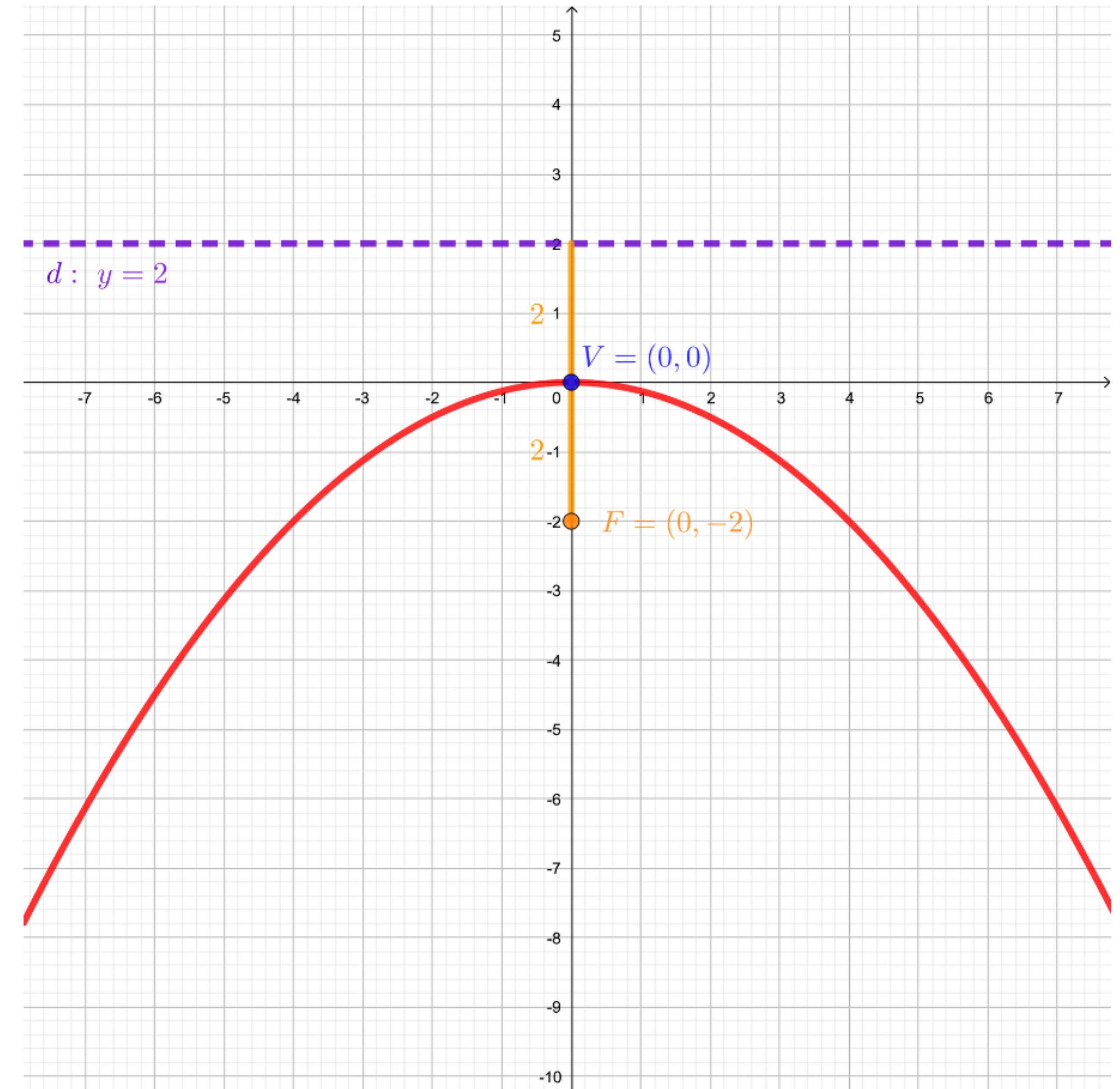
Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com vértice na origem e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.

Solução. $-\frac{p}{2} = 2$, logo $p = -4$. Portanto, $2 \cdot (-4)y = x^2$ ou $-8y = x^2$. Além disso, $F = (0, \frac{p}{2}) = (0, -2)$.



EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $y = -x^2$.

EXEMPLOS

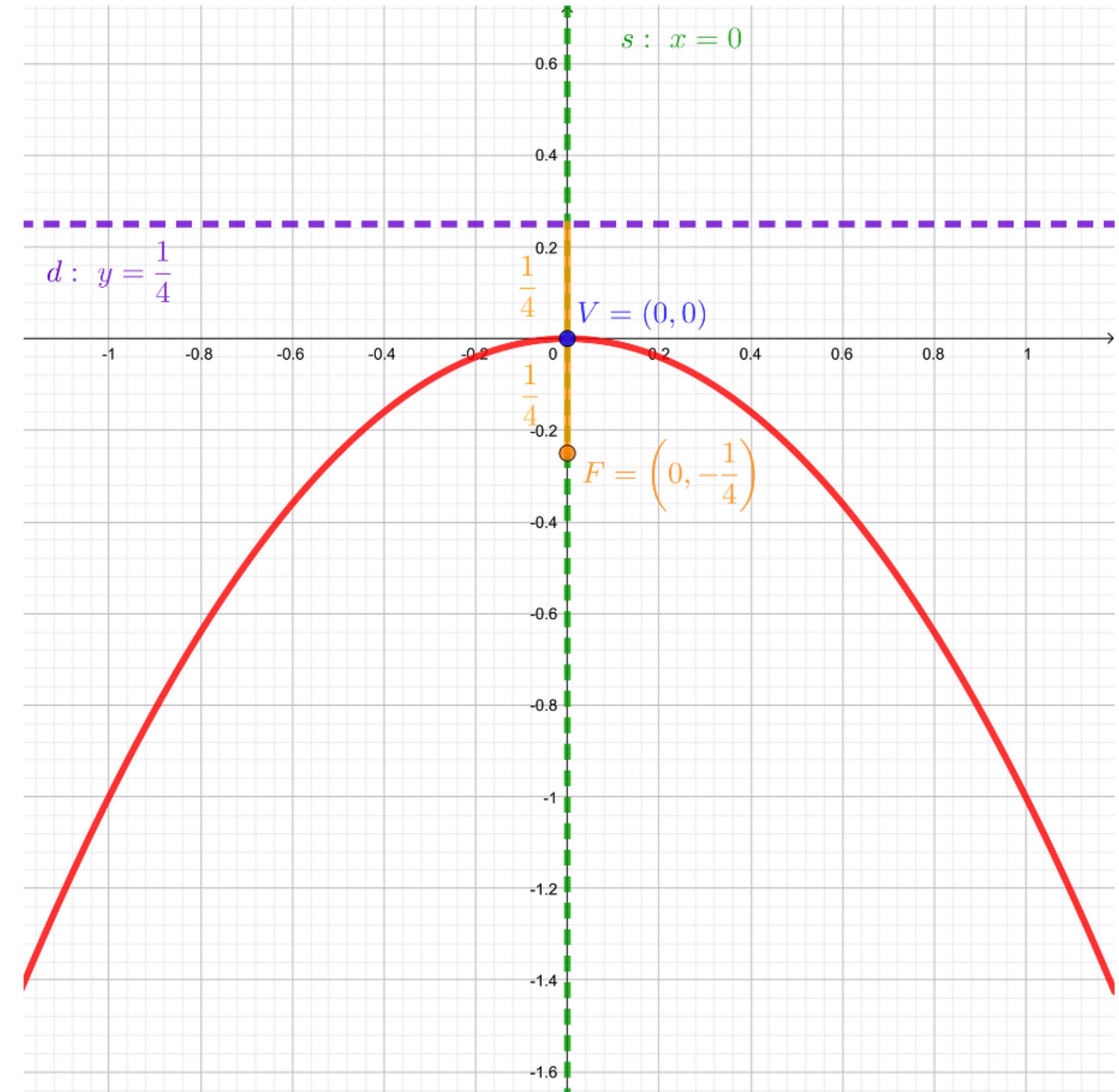
Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $y = -x^2$.

Solução. Escrevendo no formato padrão: $2(-\frac{1}{2})y = x^2$. Portanto, $p = -\frac{1}{2}$. Nossa equação foi deduzida com o vértice na origem, então $V = (0, 0)$.

EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $y = -x^2$.

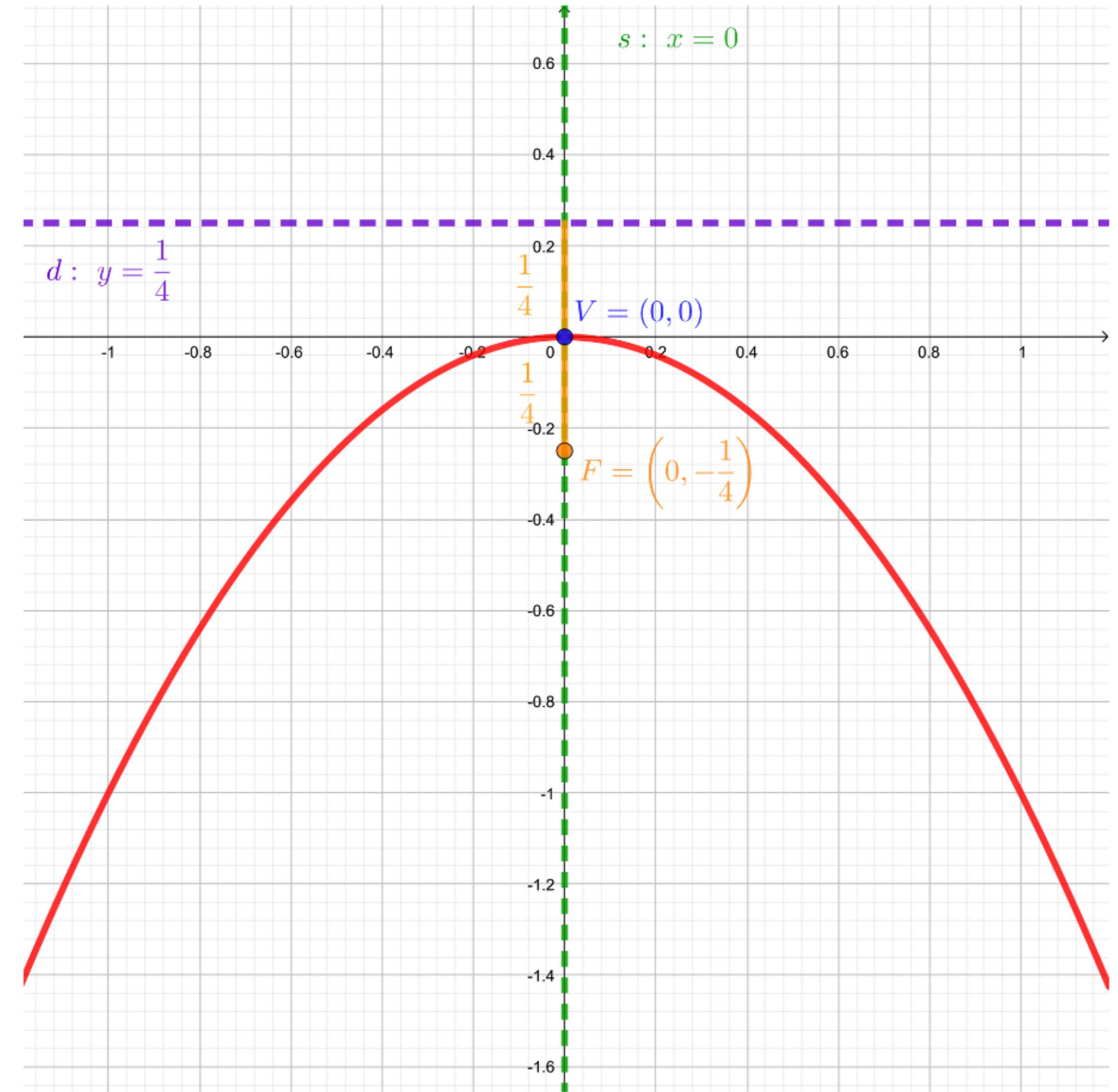
Solução. Escrevendo no formato padrão: $2(-\frac{1}{2})y = x^2$. Portanto, $p = -\frac{1}{2}$. Nossa equação foi deduzida com o vértice na origem, então $V = (0, 0)$.



EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $y = -x^2$.

Solução. Escrevendo no formato padrão: $2(-\frac{1}{2})y = x^2$. Portanto, $p = -\frac{1}{2}$. Nossa equação foi deduzida com o vértice na origem, então $V = (0, 0)$. O foco é $F = (0, \frac{p}{2}) = (0, -\frac{1}{4})$ e a reta diretriz é $d : y = \frac{1}{4}$. Por fim, o eixo de simetria é $s : x = 0$.



EXEMPLOS

Faça o gráfico de $4y = x^2$.

EXEMPLOS

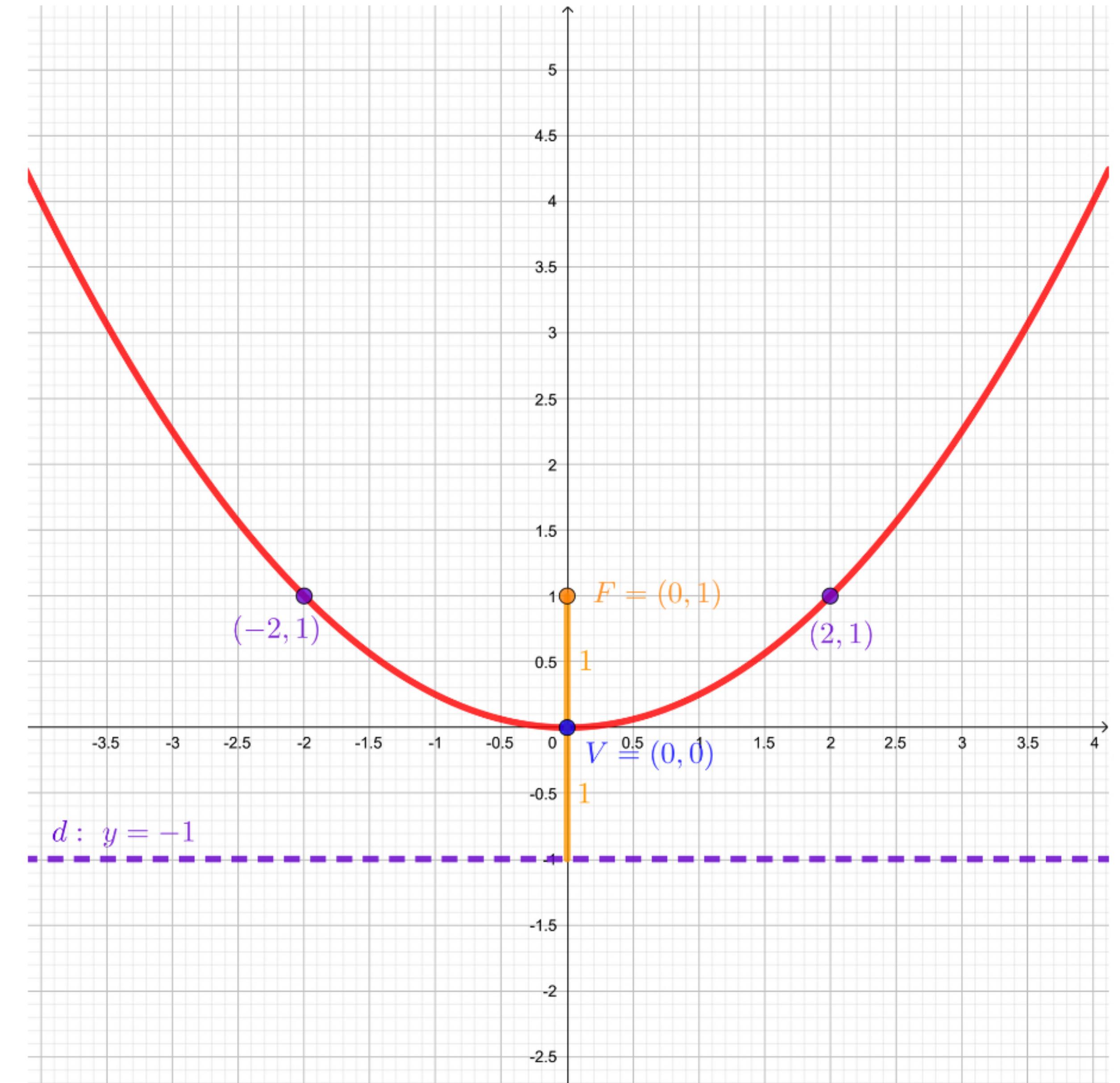
Faça o gráfico de $4y = x^2$.

Solução. Parábola com concavidade para cima, $V = (0, 0)$, $p = 2$.

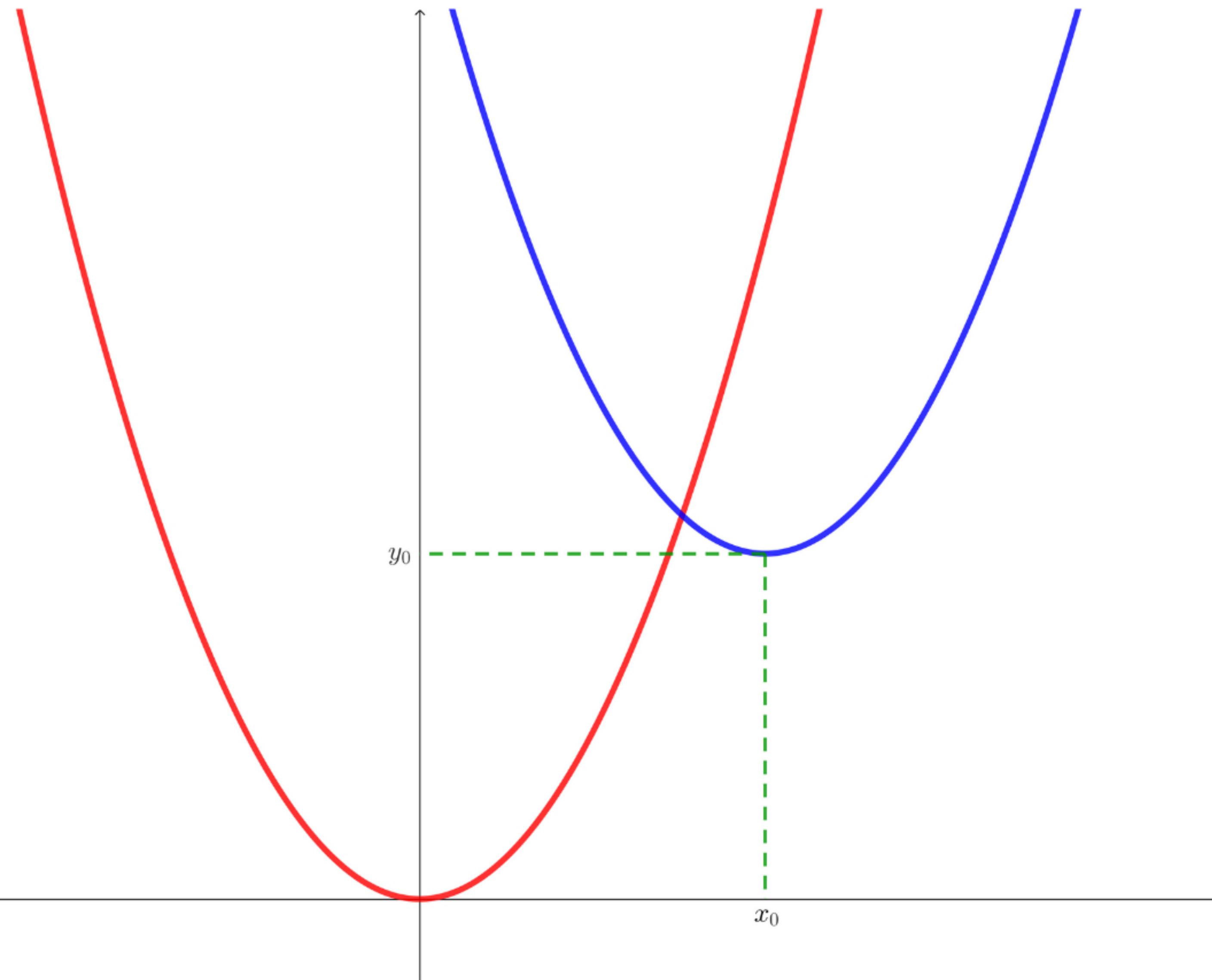
EXEMPLOS

Faça o gráfico de $4y = x^2$.

Solução. Parábola com concavidade para cima, $V = (0, 0)$, $p = 2$.



EQUAÇÃO COM VÉRTICE EM QUALQUER POSIÇÃO



Vértice: $V = (0, 0)$

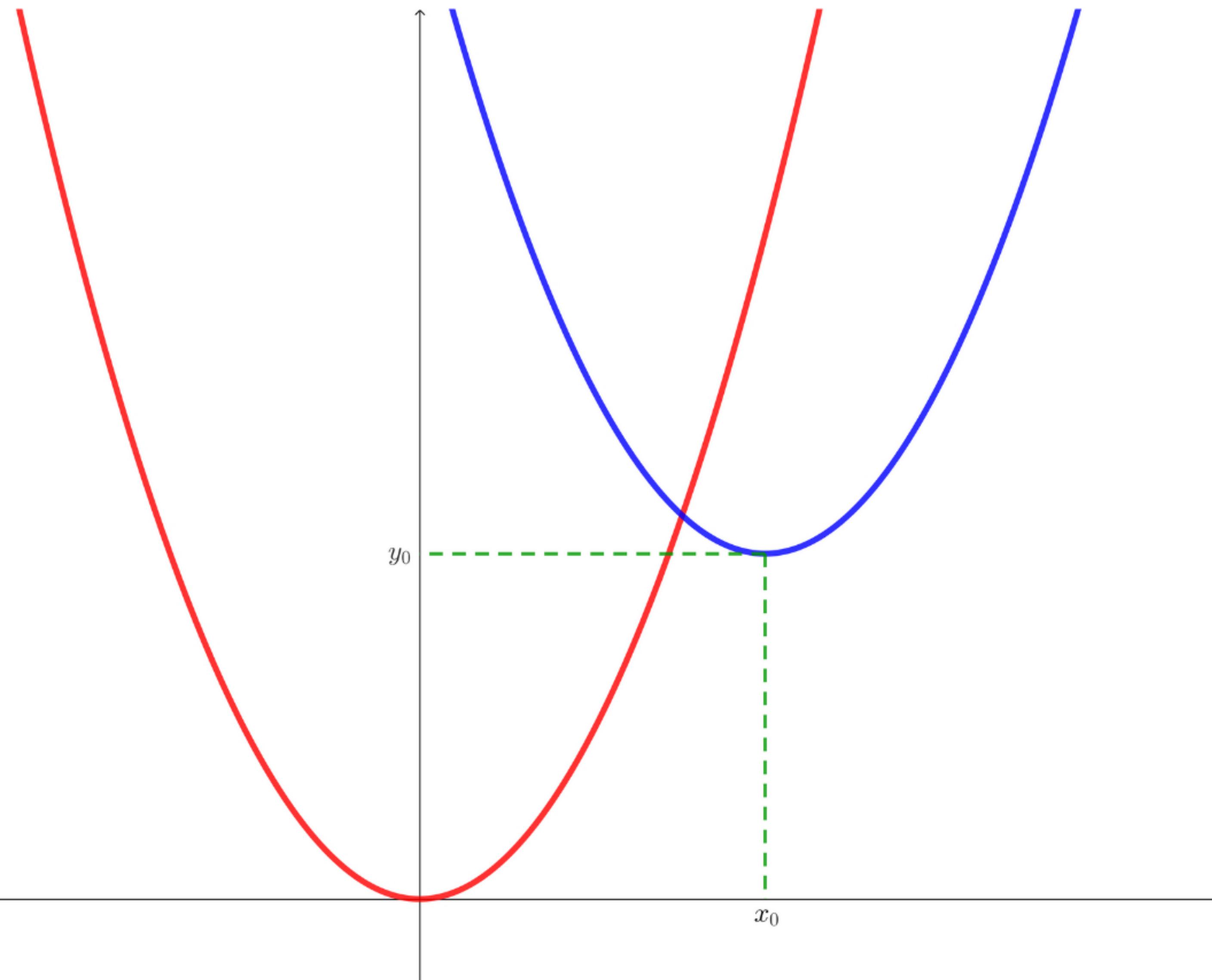
Eixo de simetria: vertical

Equação: $2py = x^2$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Eixo de simetria: vertical

EQUAÇÃO COM VÉRTICE EM QUALQUER POSIÇÃO



Vértice: $V = (0, 0)$

Eixo de simetria: vertical

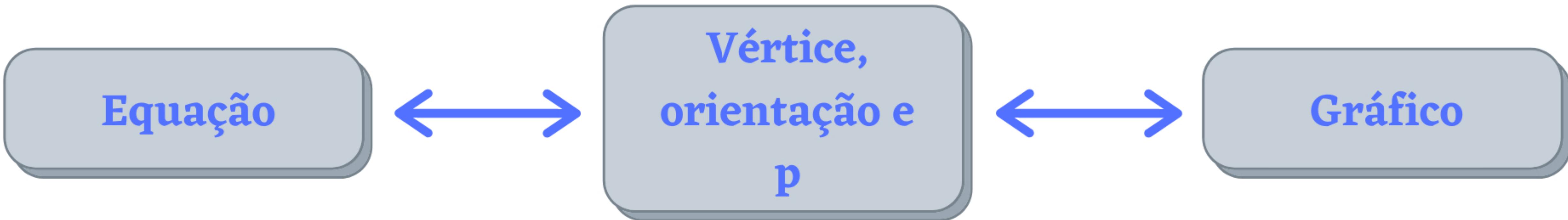
Equação: $2py = x^2$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

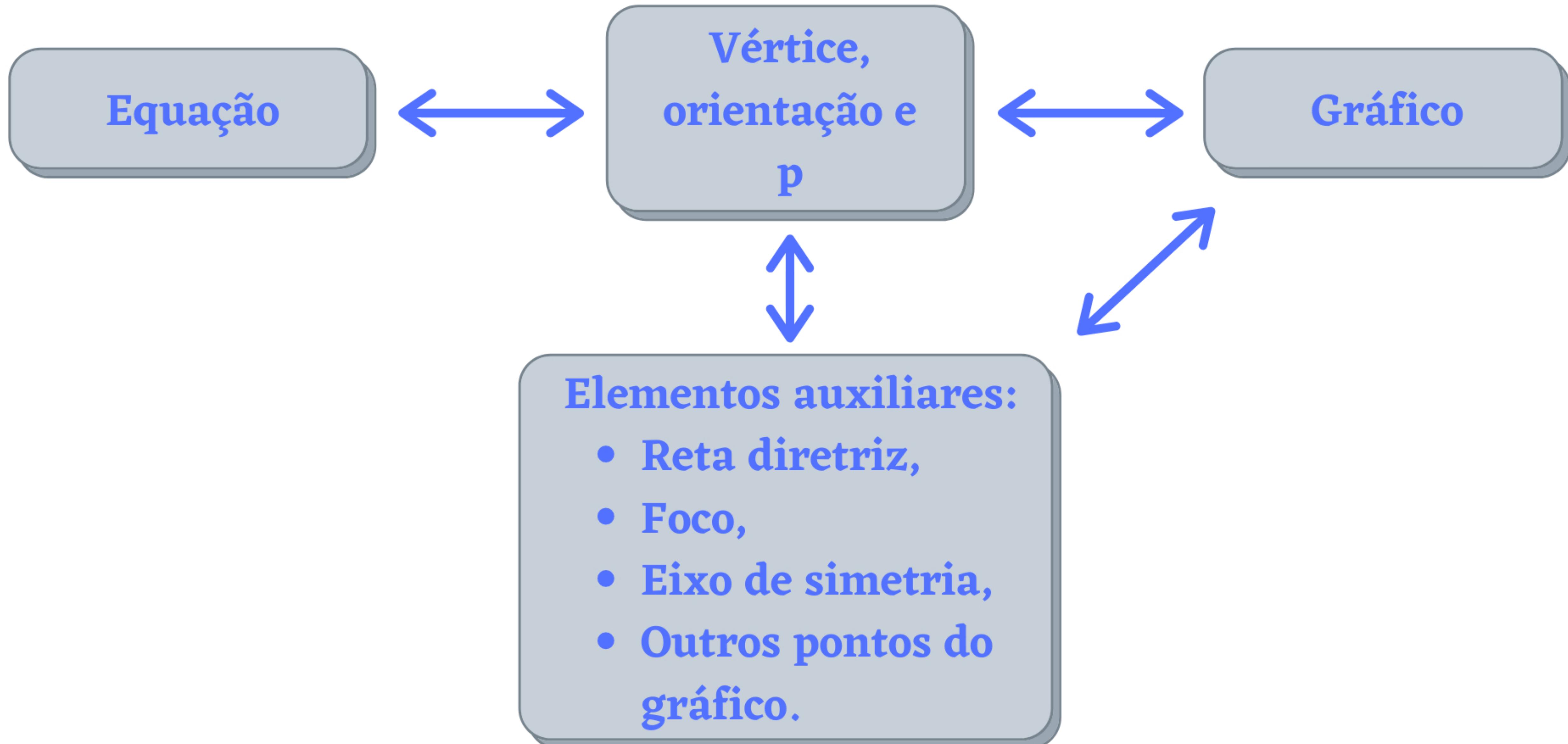
Eixo de simetria: vertical

Equação: $2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE



OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

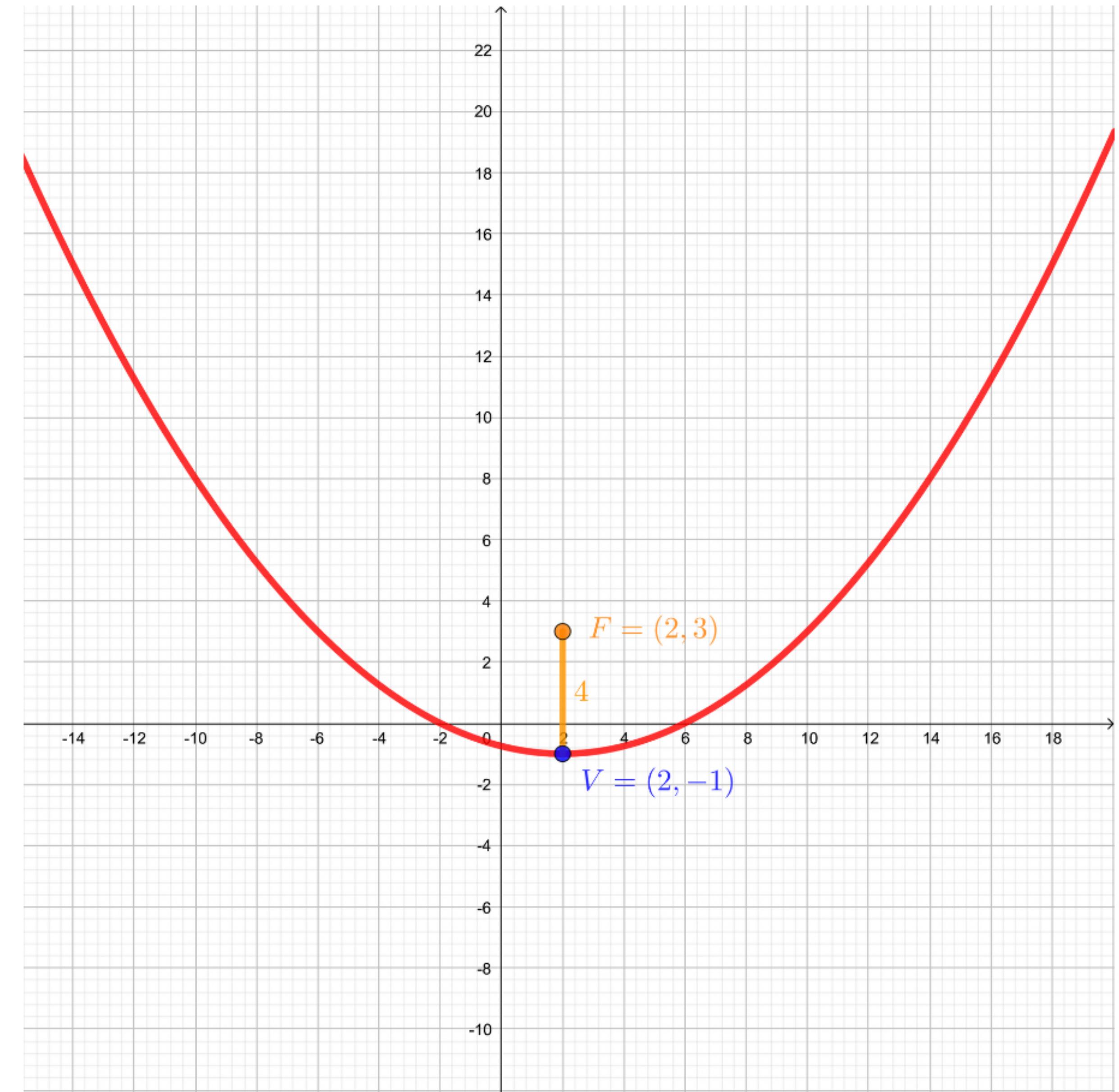


EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (2, -1)$, concavidade voltada para cima e foco em $F = (2, 3)$.

EXEMPLOS

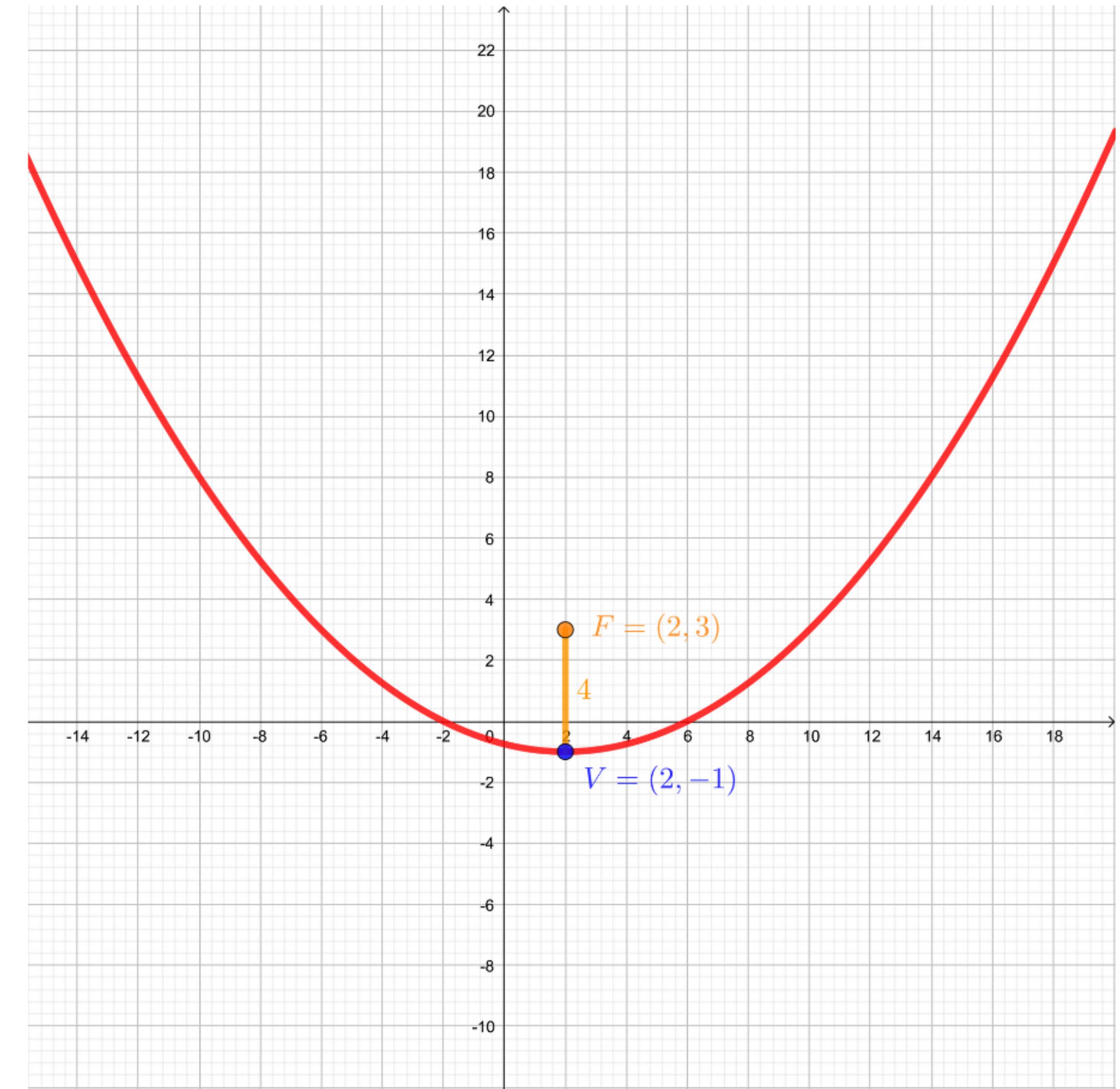
Determine uma equação da parábola com $V = (2, -1)$, concavidade voltada para cima e foco em $F = (2, 3)$.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (2, -1)$, concavidade voltada para cima e foco em $F = (2, 3)$.

Solução. $\frac{p}{2} = 3 - (-1)$, logo $p = 8$.
Portanto, $2 \cdot 8(y + 1) = (x - 2)^2$ ou
 $16(y + 1) = (x - 2)^2$.

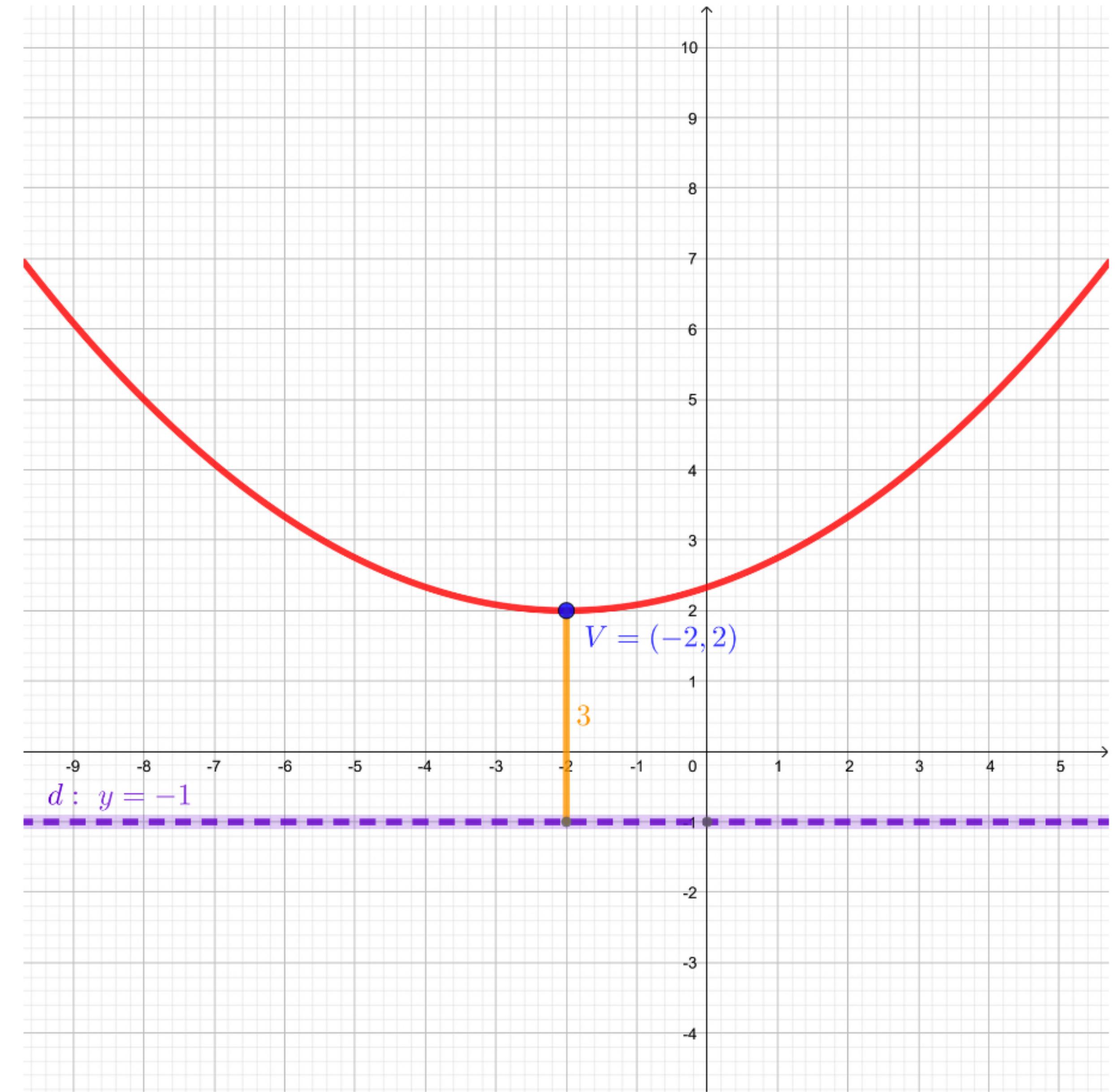


EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (-2, 2)$ e reta diretriz $y = -1$.

EXEMPLOS

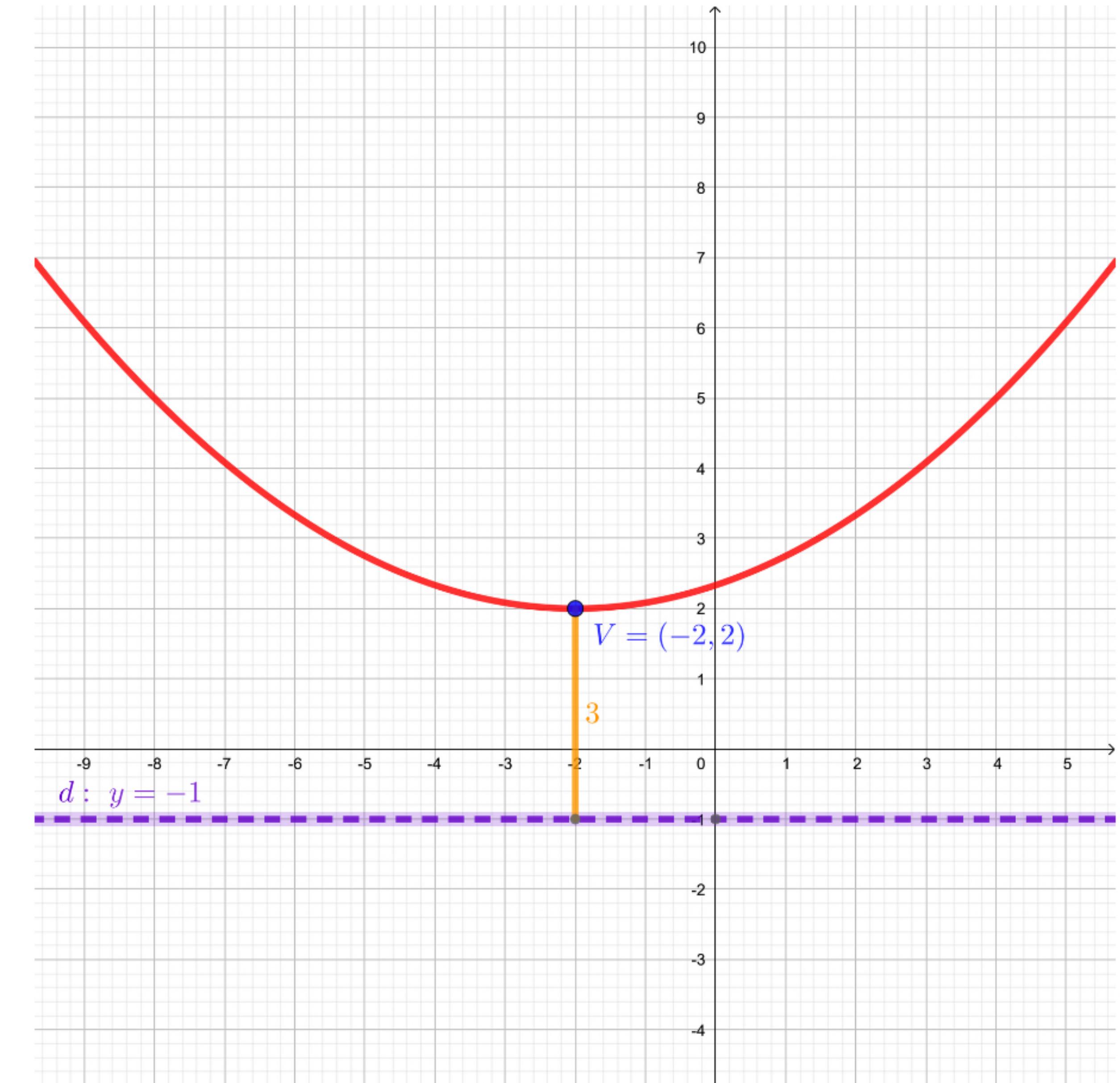
Determine uma equação da parábola com $V = (-2, 2)$ e reta diretriz $y = -1$.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (-2, 2)$ e reta diretriz $y = -1$.

Solução. $\frac{p}{2} = 2 - (-1)$, logo $p = 6$.
Portanto, $2 \cdot 6(y - 2) = (x + 2)^2$ ou
 $12(y - 2) = (x + 2)^2$.

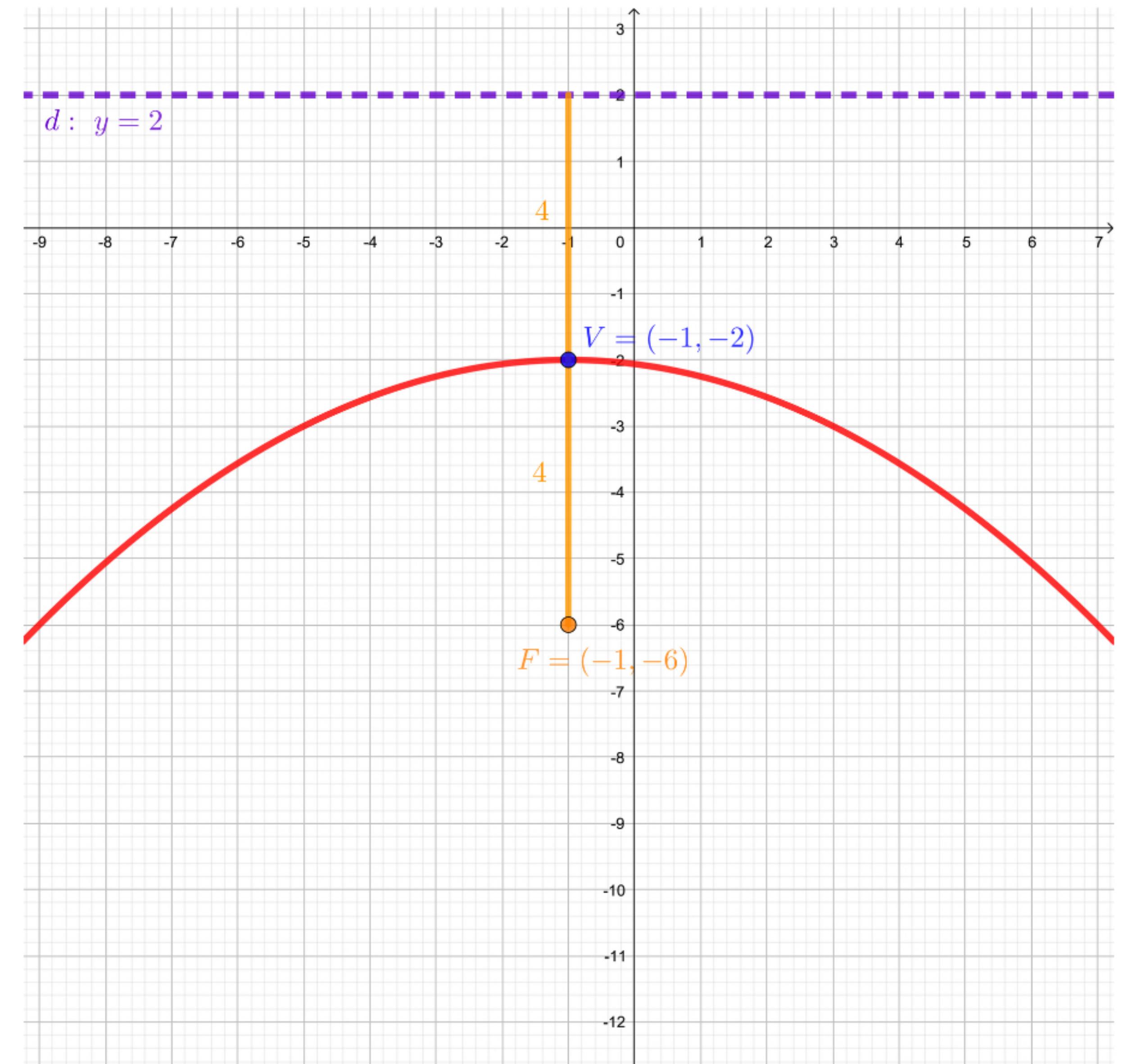


EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (-1, -2)$ e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.

EXEMPLOS

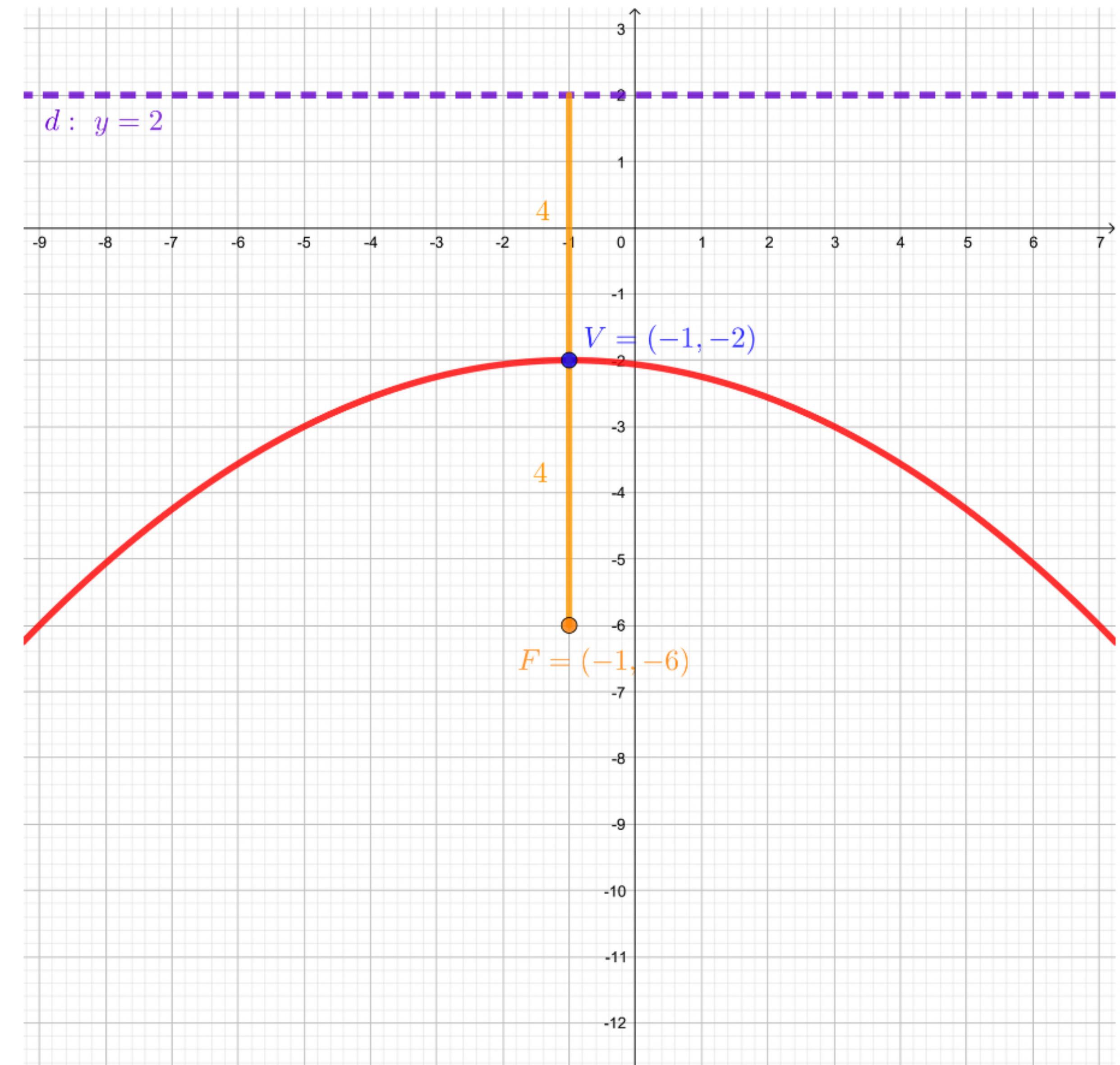
Determine uma equação da parábola com $V = (-1, -2)$ e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.



EXEMPLOS

Determine uma equação da parábola com $V = (-1, -2)$ e reta diretriz $y = 2$. Determine também o foco.

Solução. $\frac{p}{2} = -2 - 2$, logo $p = -8$.
Portanto, $2 \cdot (-8)(y+2) = (x+1)^2$ ou
 $-16(y+2) = (x+1)^2$. Além disso,
 $F = (-1, -2 + \frac{p}{2}) = (-1, -6)$.



EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $6(y - 1) = (x + 2)^2$.

EXEMPLOS

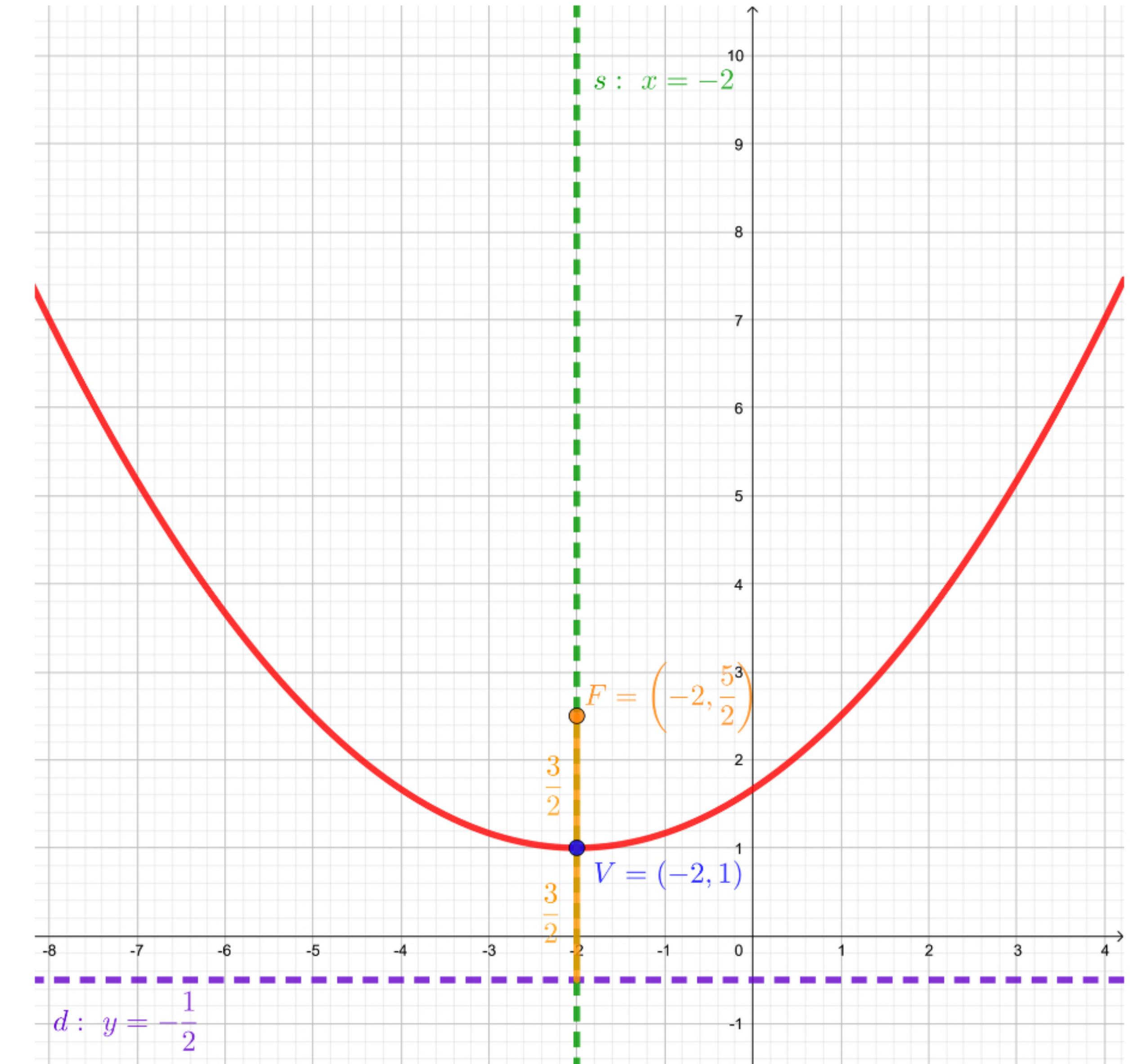
Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $6(y - 1) = (x + 2)^2$.

Solução. Extraindo da equação, obtemos $p = 3$ e $V = (-2, 1)$.

EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $6(y - 1) = (x + 2)^2$.

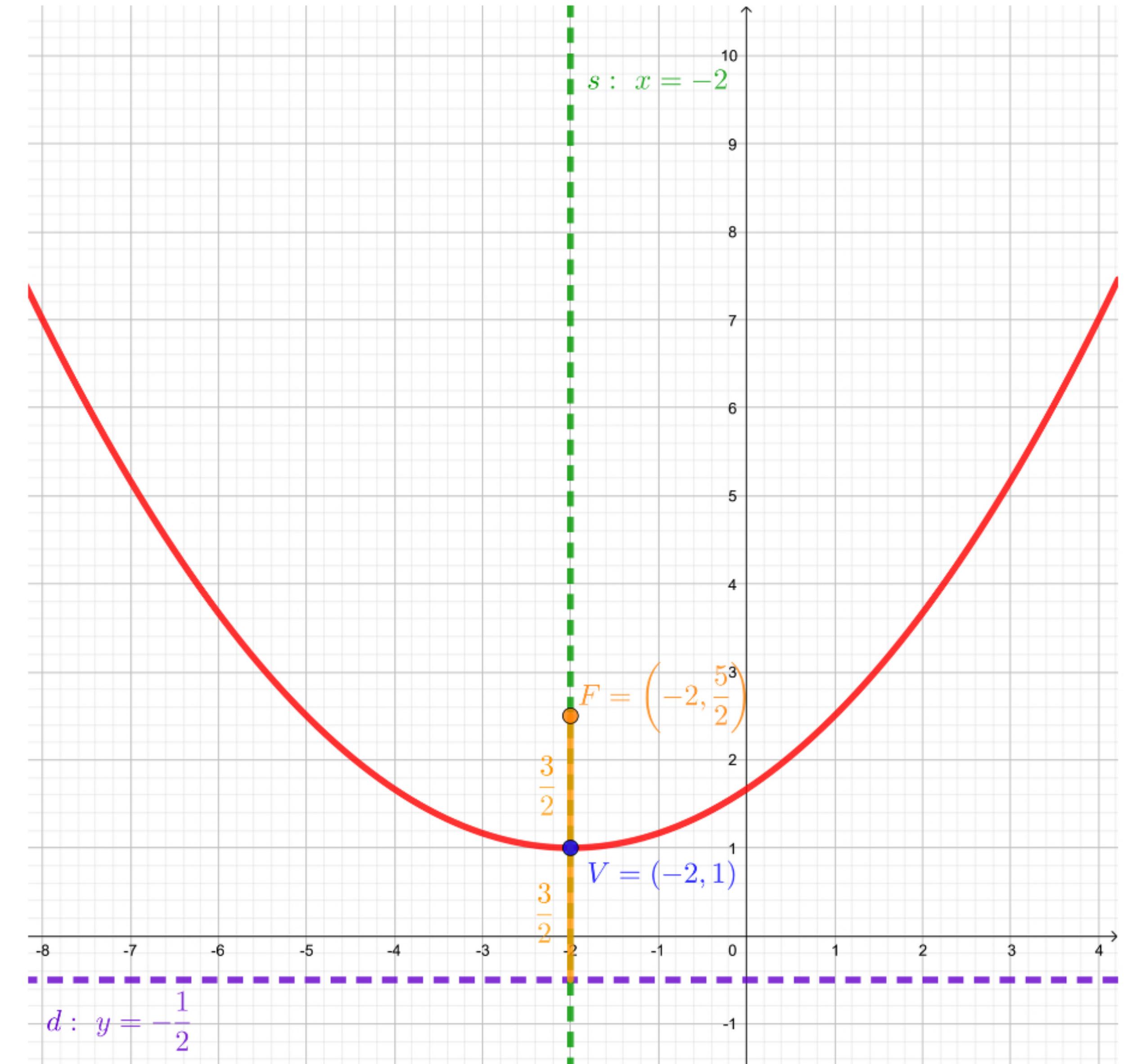
Solução. Extraindo da equação, obtemos $p = 3$ e $V = (-2, 1)$.



EXEMPLOS

Determine p , o foco, o vértice, a reta diretriz e o eixo de simetria da parábola $6(y - 1) = (x + 2)^2$.

Solução. Extraindo da equação, obtemos $p = 3$ e $V = (-2, 1)$. O foco é $F = (-2, 1 + \frac{p}{2}) = (-2, \frac{5}{2})$ e a reta diretriz é $d : y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$. Por fim, o eixo de simetria é $s : x = -2$.



EXEMPLOS

Faça o gráfico de $-8(y+1) = (x-2)^2$.

EXEMPLOS

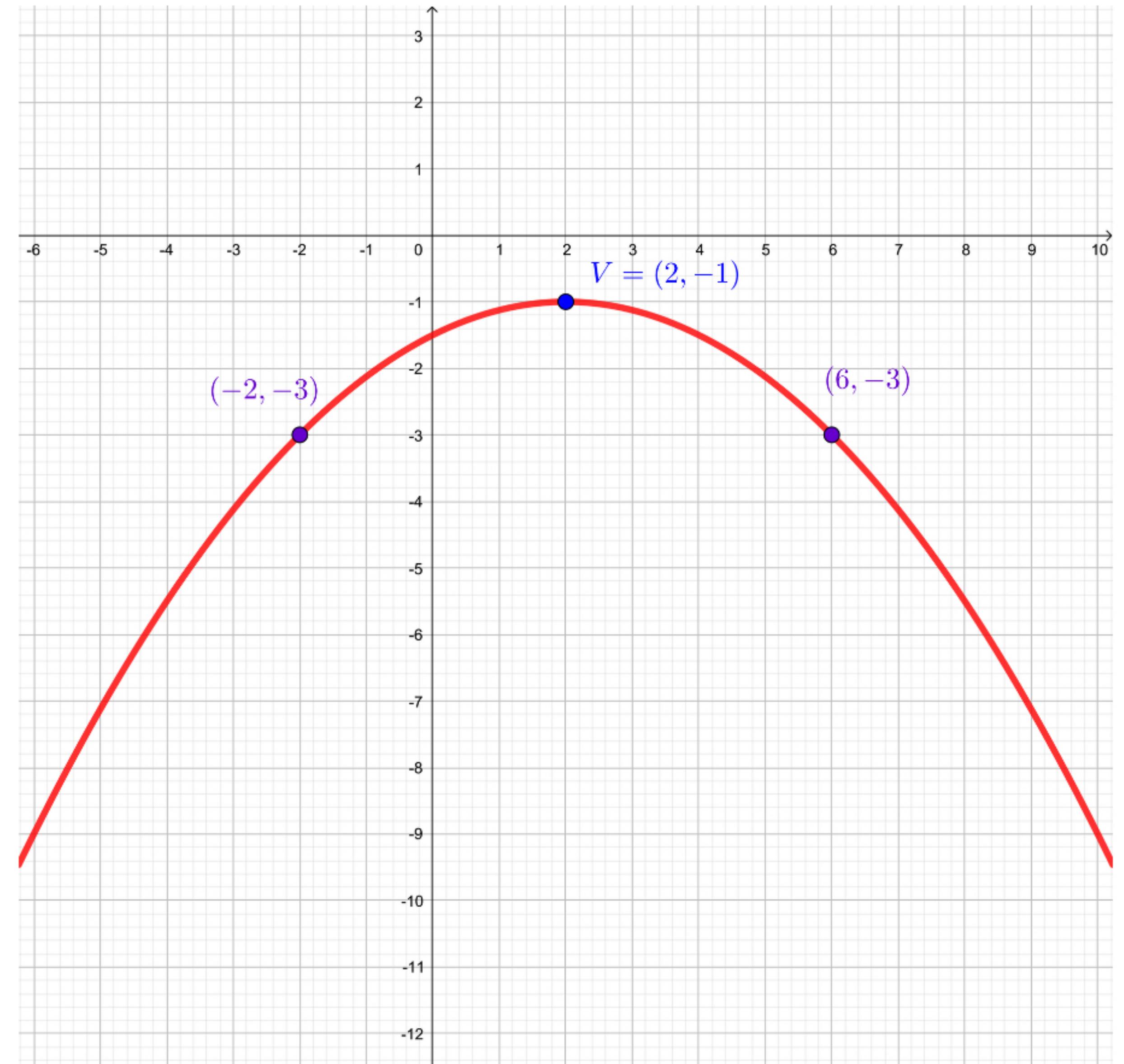
Faça o gráfico de $-8(y+1) = (x-2)^2$.

Solução. Parábola com concavidade para baixo, $V = (2, -1)$, $p = -4$.

EXEMPLOS

Faça o gráfico de $-8(y+1) = (x-2)^2$.

Solução. Parábola com concavidade para baixo, $V = (2, -1)$, $p = -4$.



EQUAÇÃO COM EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Eixo de simetria: vertical

Equação: $2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Eixo de simetria: horizontal

EQUAÇÃO COM EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Eixo de simetria: vertical

$$\text{Equação: } 2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Eixo de simetria: horizontal

$$\text{Equação: } 2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

EXERCÍCIOS

Reescreva a equação na forma padrão, classifique, encontre os elementos e faça o gráfico.

(a) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0.$

(b) $y^2 - 12x - 12 = 0.$

(c) $-8x = 10 - 6y + y^2.$

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40y + 80 = 2(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 20y + 40 = (x - 1)^2$$

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40y + 80 = 2(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 20y + 40 = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 20(y + 2) = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10(y + 2) = (x - 1)^2$$

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40y + 80 = 2(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 20y + 40 = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 20(y + 2) = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10(y + 2) = (x - 1)^2$$

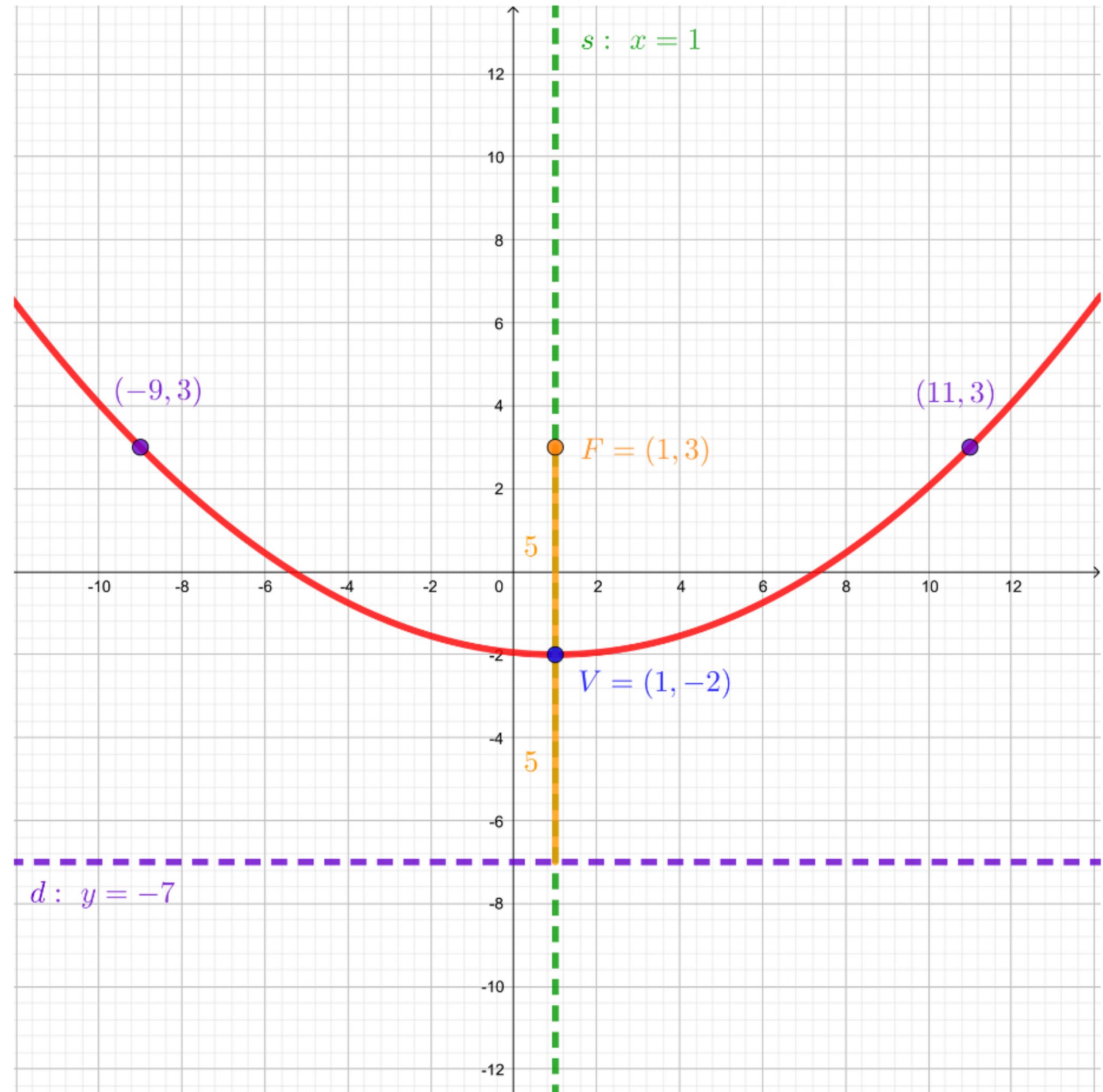
Elementos: $p = 10$, $V = (1, -2)$,

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$
$$\Leftrightarrow 40y + 80 = 2(x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 20y + 40 = (x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 20(y + 2) = (x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10(y + 2) = (x - 1)^2$$

Elementos: $p = 10$, $V = (1, -2)$,

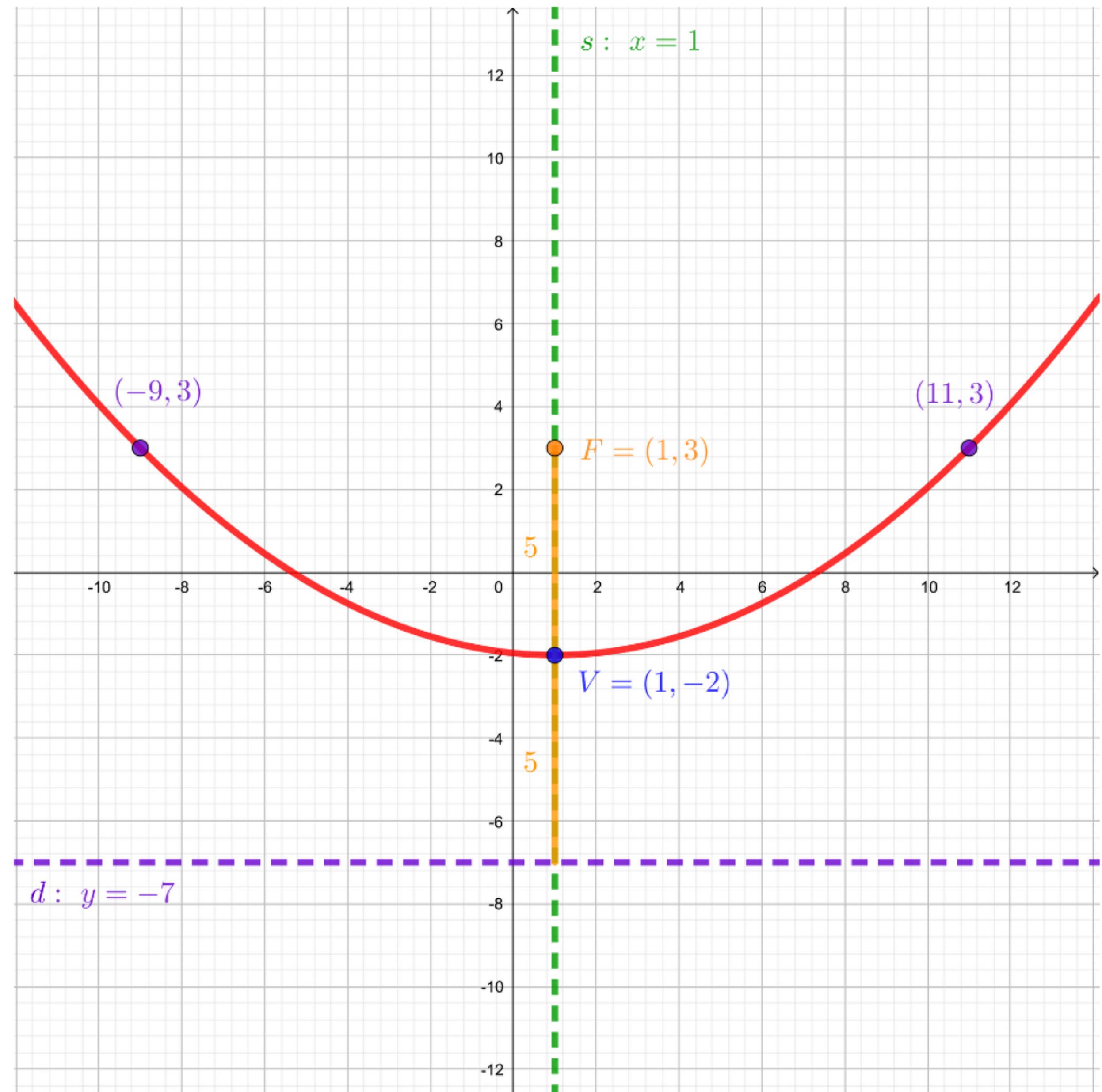


EXERCÍCIOS

Solução. (a) $2x^2 - 4x - 40y - 78 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 40y - 78 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 2 - 40y - 78 = 0$$
$$\Leftrightarrow 40y + 80 = 2(x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 20y + 40 = (x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 20(y + 2) = (x - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10(y + 2) = (x - 1)^2$$

Elementos: $p = 10$, $V = (1, -2)$,
 $F = (1, 3)$, reta diretriz $y = -7$, eixo
de simetria $x = 1$.



EXERCÍCIOS

Solução. (b) $y^2 - 12x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 12x + 12 = y^2$$

$$\Leftrightarrow 12(x + 1) = y^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 6(x + 1) = y^2$$

EXERCÍCIOS

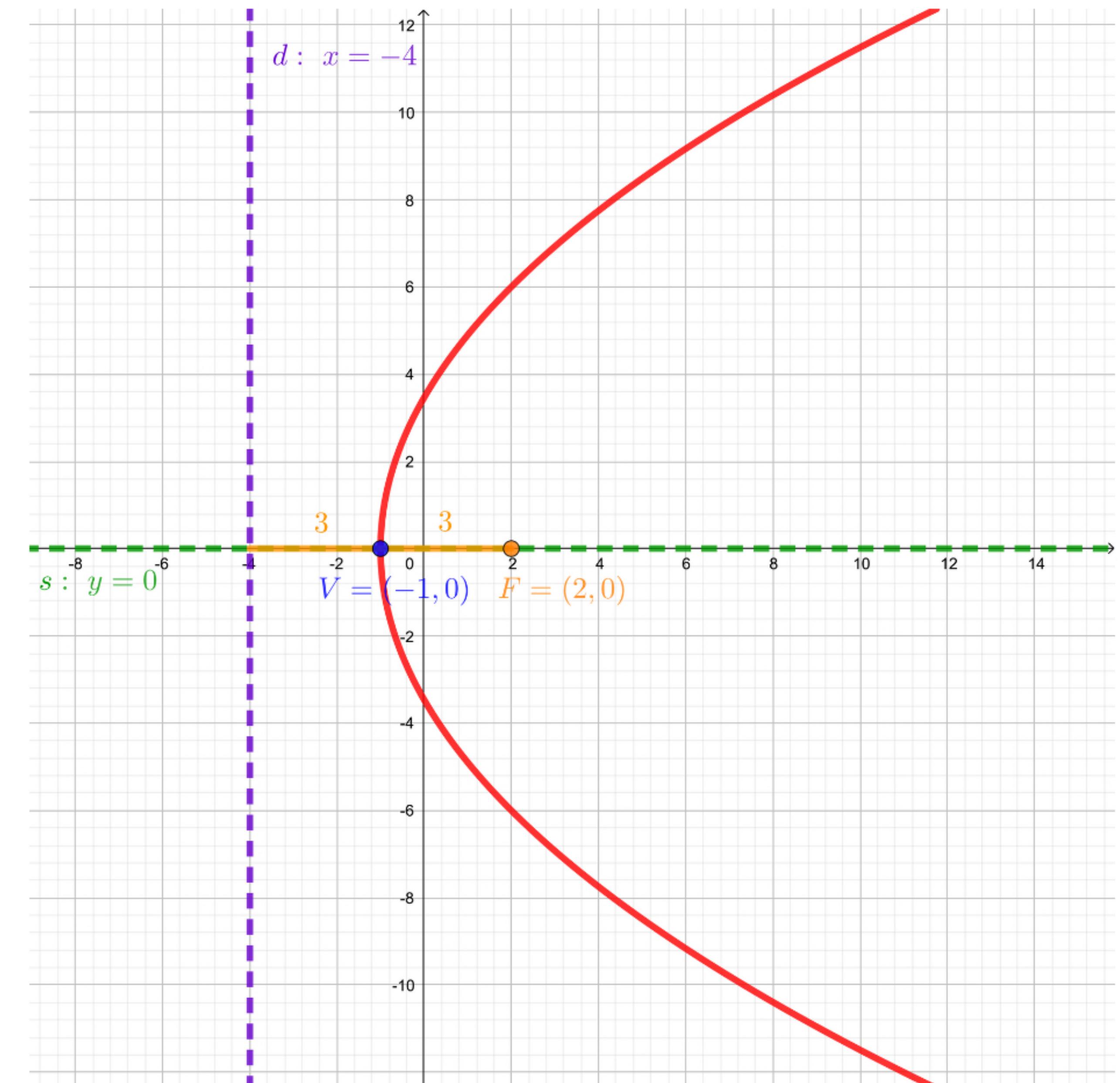
Solução. (b) $y^2 - 12x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 12x + 12 = y^2$$

$$\Leftrightarrow 12(x + 1) = y^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 6(x + 1) = y^2$$

Elementos: $p = 6$, $V = (-1, 0)$,



EXERCÍCIOS

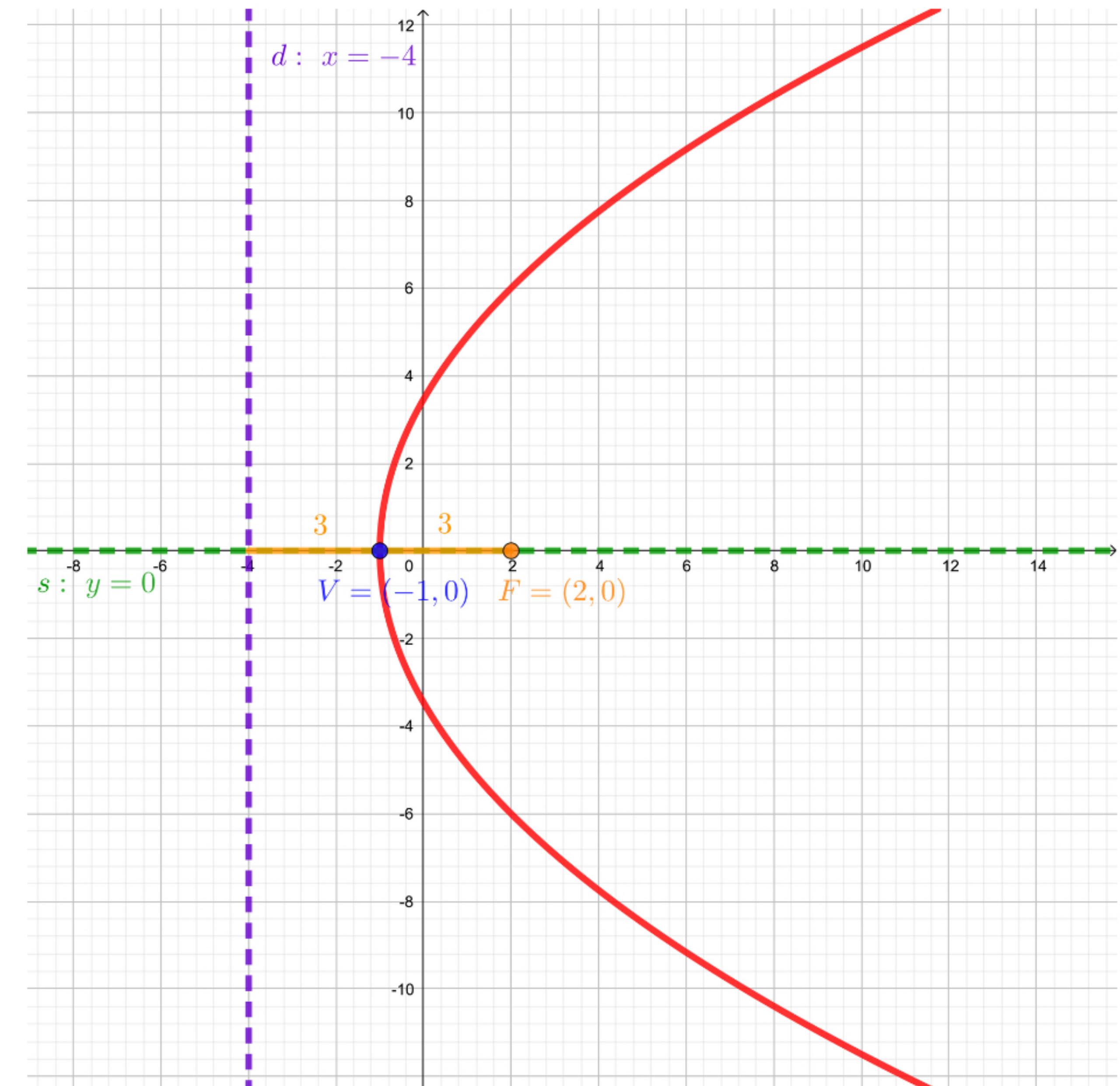
Solução. (b) $y^2 - 12x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 12x + 12 = y^2$$

$$\Leftrightarrow 12(x + 1) = y^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 6(x + 1) = y^2$$

Elementos: $p = 6$, $V = (-1, 0)$, $F = (2, 0)$, reta diretriz $x = -4$, eixo de simetria $y = 0$.



EXERCÍCIOS

Solução. (c) $-8x = 10 - 6y + y^2$

$$\Leftrightarrow -8x = y^2 - 6x + 9 - 9 + 10$$

$$\Leftrightarrow -8x = (y - 3)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -8x - 1 = (y - 3)^2$$

EXERCÍCIOS

Solução. (c) $-8x = 10 - 6y + y^2$

$$\Leftrightarrow -8x = y^2 - 6x + 9 - 9 + 10$$

$$\Leftrightarrow -8x = (y - 3)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -8x - 1 = (y - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow -8(x + \frac{1}{8}) = (y - 3)^2$$

Elementos: $p = -4$, $V = (-1/8, 3)$,

EXERCÍCIOS

Solução. (c) $-8x = 10 - 6y + y^2$

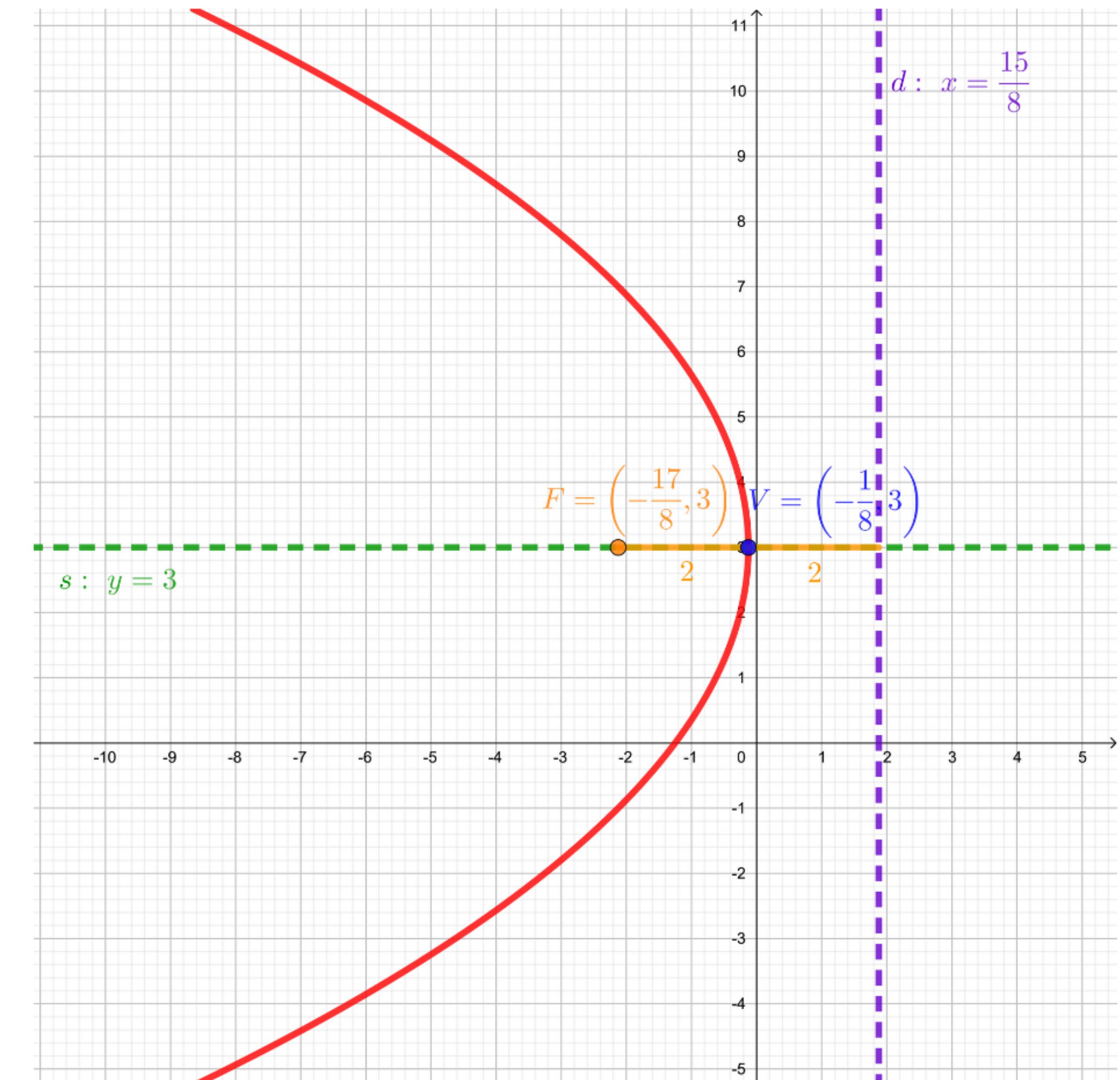
$$\Leftrightarrow -8x = y^2 - 6x + 9 - 9 + 10$$

$$\Leftrightarrow -8x = (y - 3)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -8x - 1 = (y - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow -8(x + \frac{1}{8}) = (y - 3)^2$$

Elementos: $p = -4$, $V = (-1/8, 3)$,



EXERCÍCIOS

Solução. (c) $-8x = 10 - 6y + y^2$

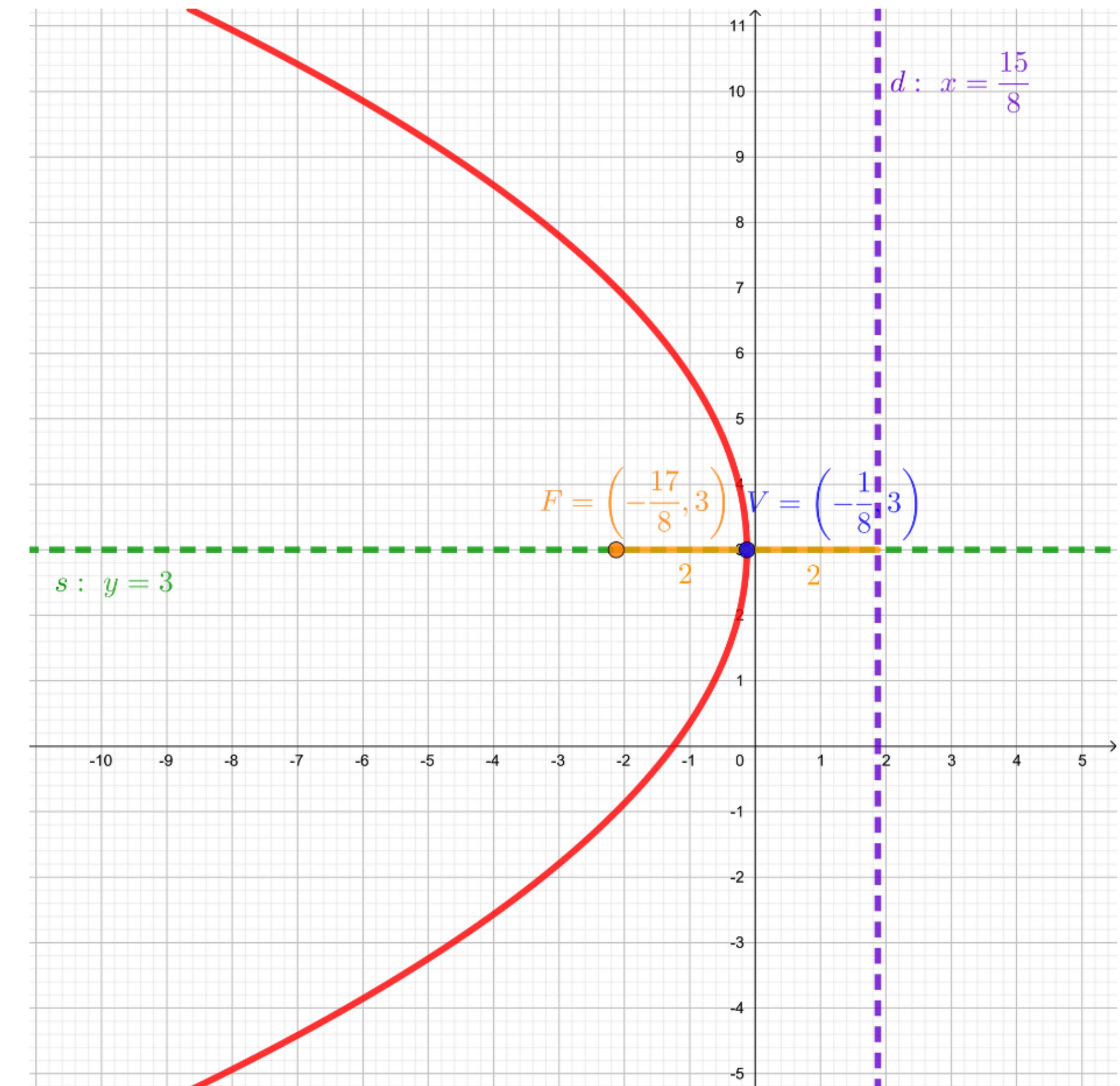
$$\Leftrightarrow -8x = y^2 - 6x + 9 - 9 + 10$$

$$\Leftrightarrow -8x = (y - 3)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -8x - 1 = (y - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow -8(x + \frac{1}{8}) = (y - 3)^2$$

Elementos: $p = -4$, $V = (-1/8, 3)$,
 $F = (-17/8, 3)$, reta diretriz
 $x = 15/8$, eixo de simetria $y = 3$.



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

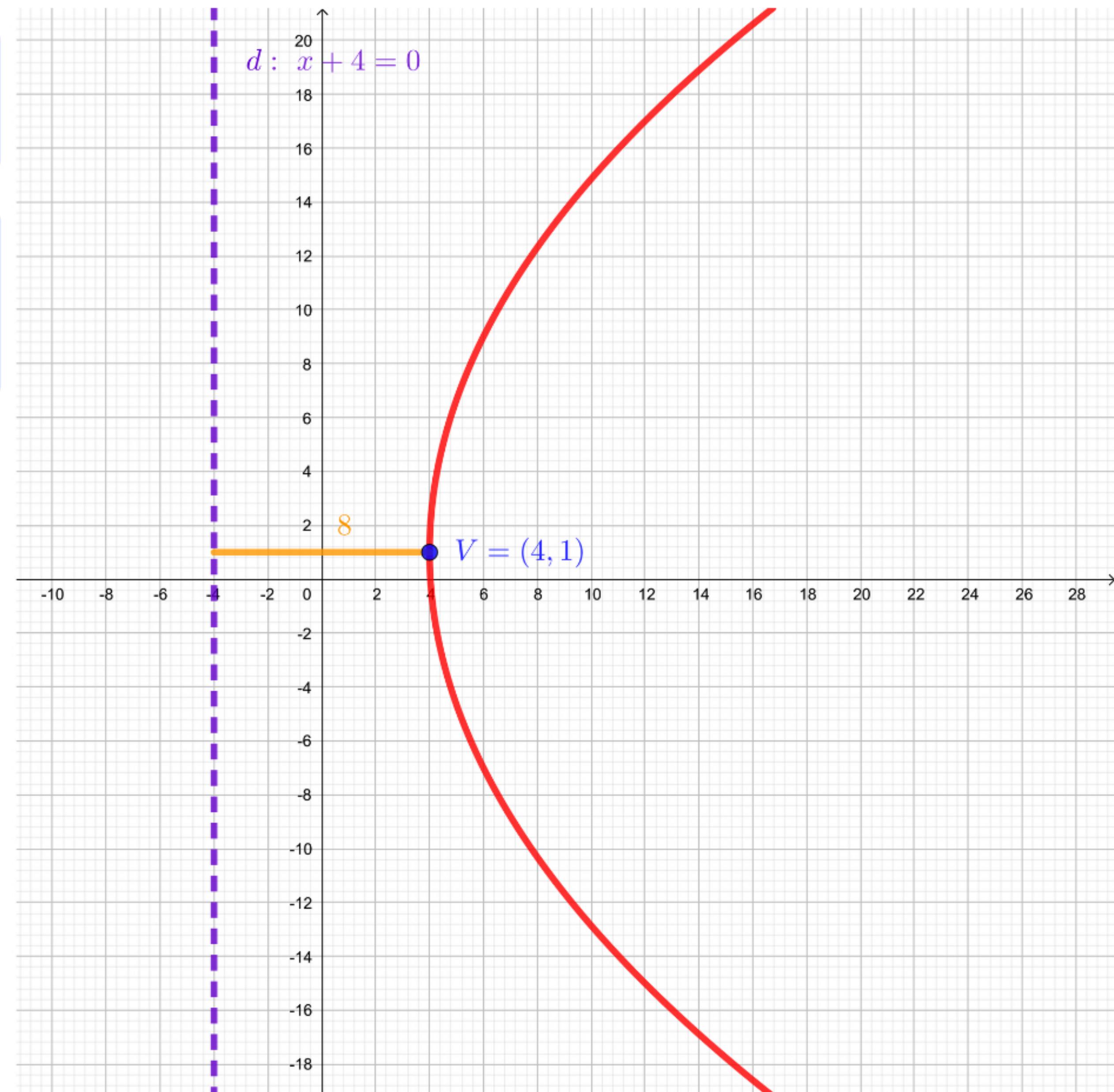
2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

Solução. 1.



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

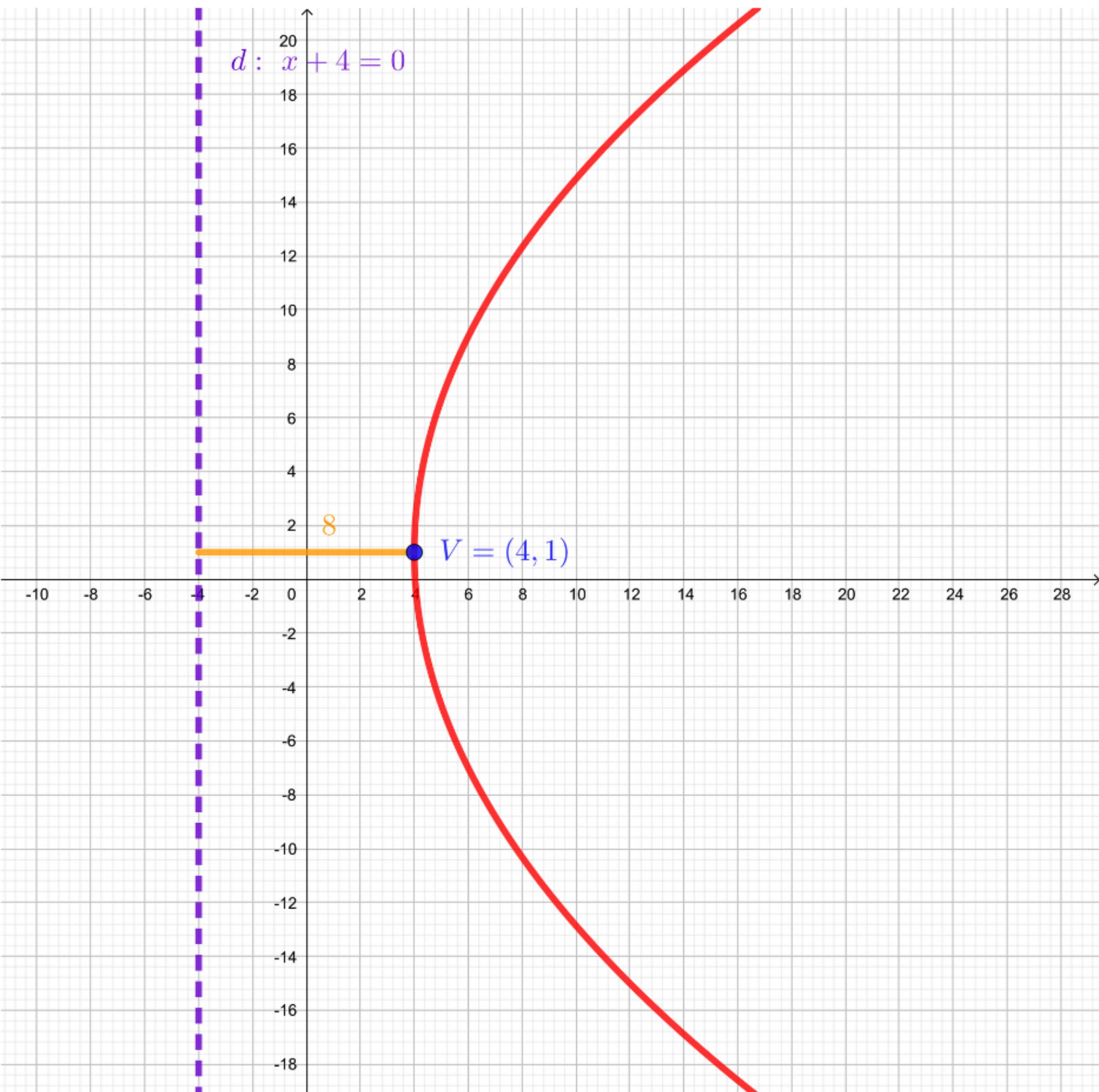
2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

Solução. 1.

$$V = (4, 1), p = 16.$$

$$2 \cdot 16(x - 4) = (y - 1)^2 \text{ ou}$$

$$32(x - 4) = (y - 1)^2.$$

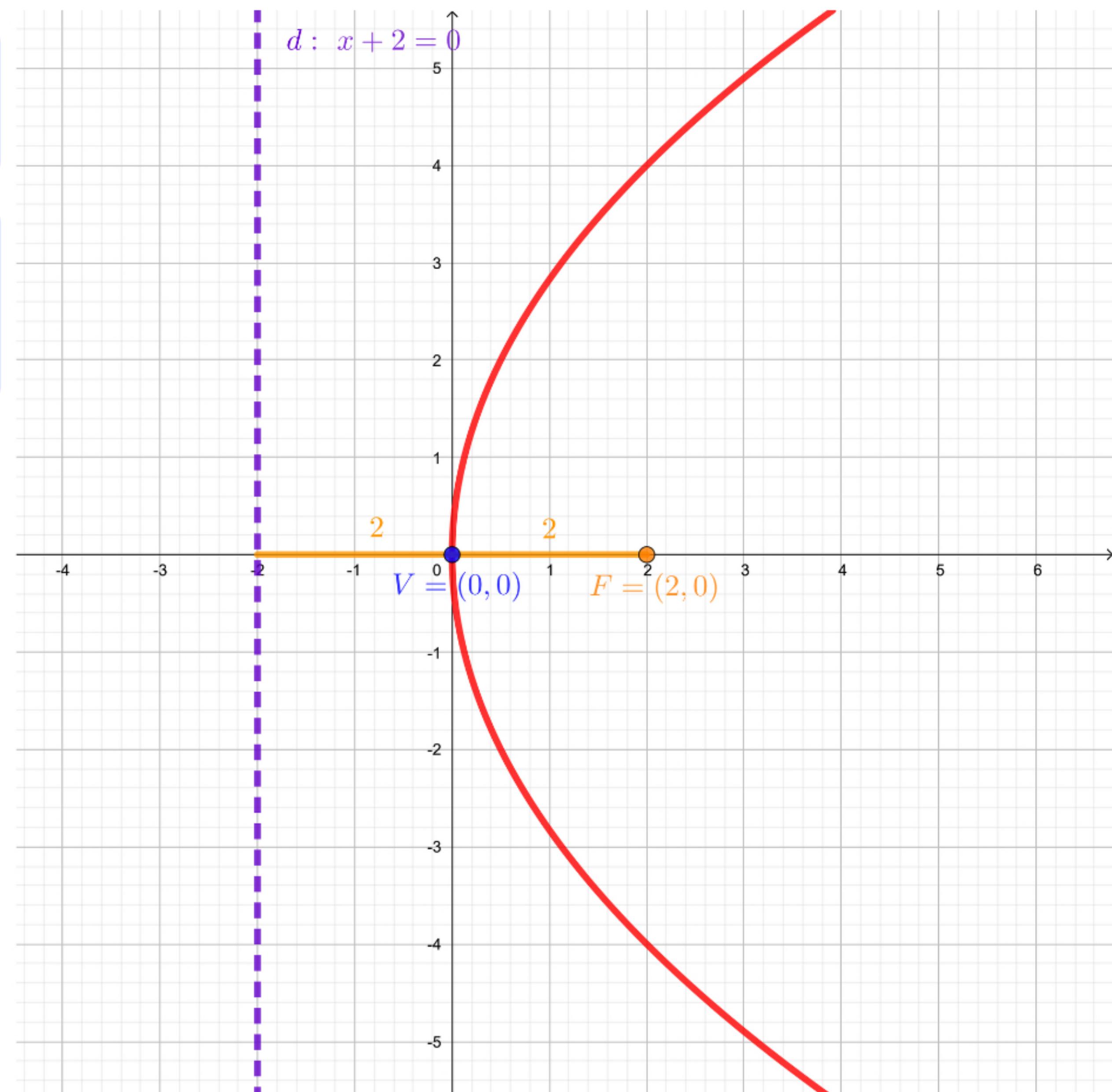


EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

Solução. 2.



EXERCÍCIOS

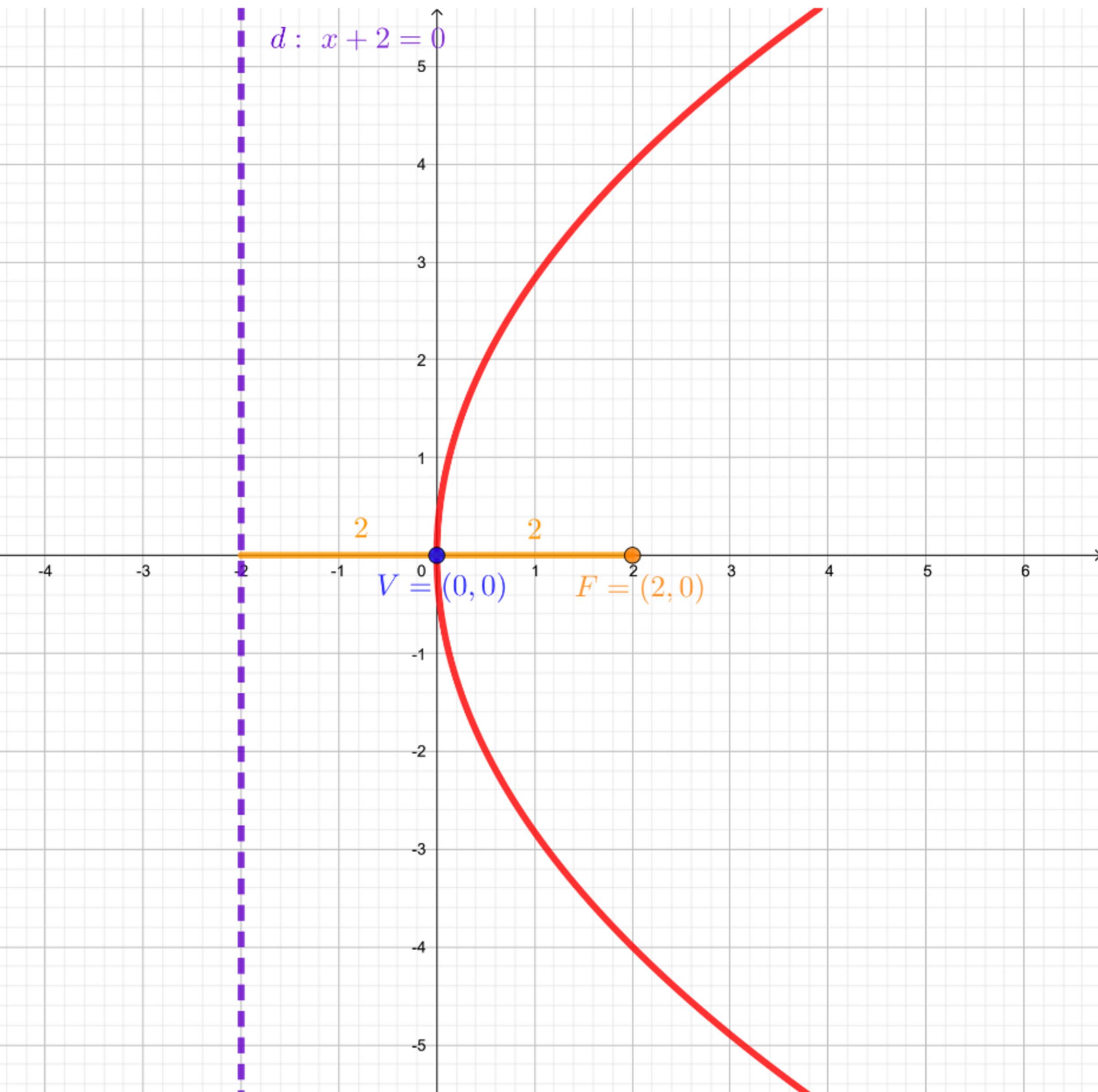
1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

Solução. 2.

$$V = (0, 0), p = 4.$$

$$2 \cdot 4x = y^2 \text{ ou } 8x = y^2.$$



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a parábola com vértice em $(4, 1)$ e reta diretriz $x + 4 = 0$.

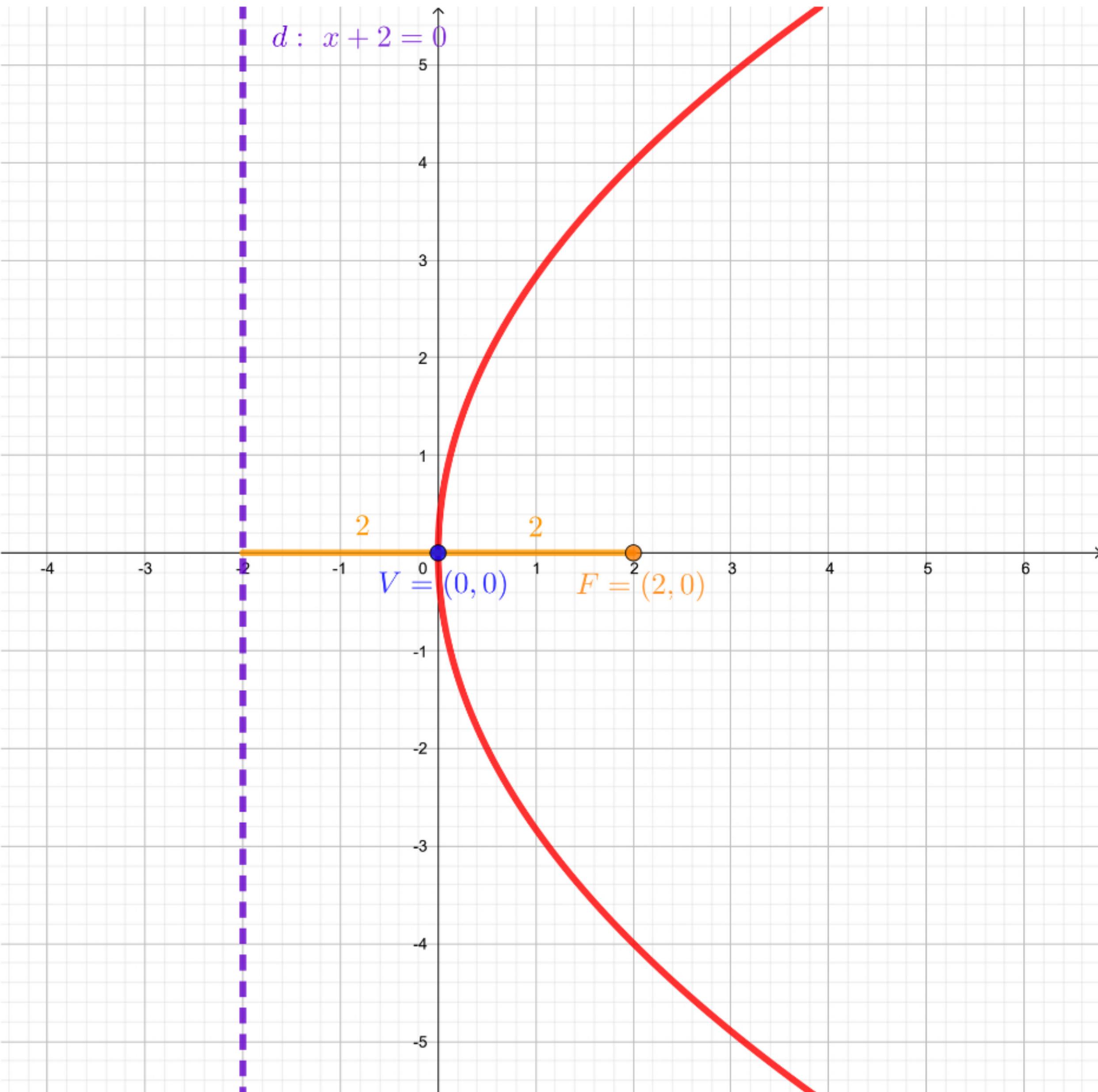
2. Sabendo que $P = (m, 4)$ pertence à parábola com foco em $(2, 0)$ e reta diretriz $x + 2 = 0$, determine m .

Solução. 2.

$$V = (0, 0), p = 4.$$

$$2 \cdot 4x = y^2 \text{ ou } 8x = y^2.$$

$$8m = 4^2 \Rightarrow m = 2.$$



RELAÇÃO COM ESTUDO DE FUNÇÕES

Forma padrão ou reduzida

$$2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Forma explícita

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

RELAÇÃO COM ESTUDO DE FUNÇÕES

Forma padrão ou reduzida

$$2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Forma explícita

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

Exemplo 1.

Forma padrão: $2(x + 1) = (y - 1)^2$.

$$2x + 2 = y^2 - 2y + 1$$

Forma explícita: $x = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}$.

RELAÇÃO COM ESTUDO DE FUNÇÕES

Forma padrão ou reduzida

$$2p(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Forma explícita

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

Exemplo 1.

Forma padrão: $2(x + 1) = (y - 1)^2$.

$$2x + 2 = y^2 - 2y + 1$$

Forma explícita: $x = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.

Forma explícita: $y = x^2 - 4x + 5$.

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

Forma padrão: $y - 1 = (x - 2)^2$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão,
extraia o vértice, "p" e cuide da orientação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

**Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão,
extraia o vértice, "p" e cuide da orientação.**

**Com o vértice, a orientação e "p" você pode encontrar todos
os elementos e fazer o gráfico. Pra fazer o gráfico com um
pouco mais de cuidado, ache mais pontos.**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o vértice, "p" e cuide da orientação.

Com o vértice, a orientação e "p" você pode encontrar todos os elementos e fazer o gráfico. Pra fazer o gráfico com um pouco mais de cuidado, ache mais pontos.

Se você possui informações sobre o gráfico ou elementos, use-as para descobrir o vértice, a orientação e "p". Com essas informações, você pode encontrar a equação.



Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.