5.4. Hipérbole

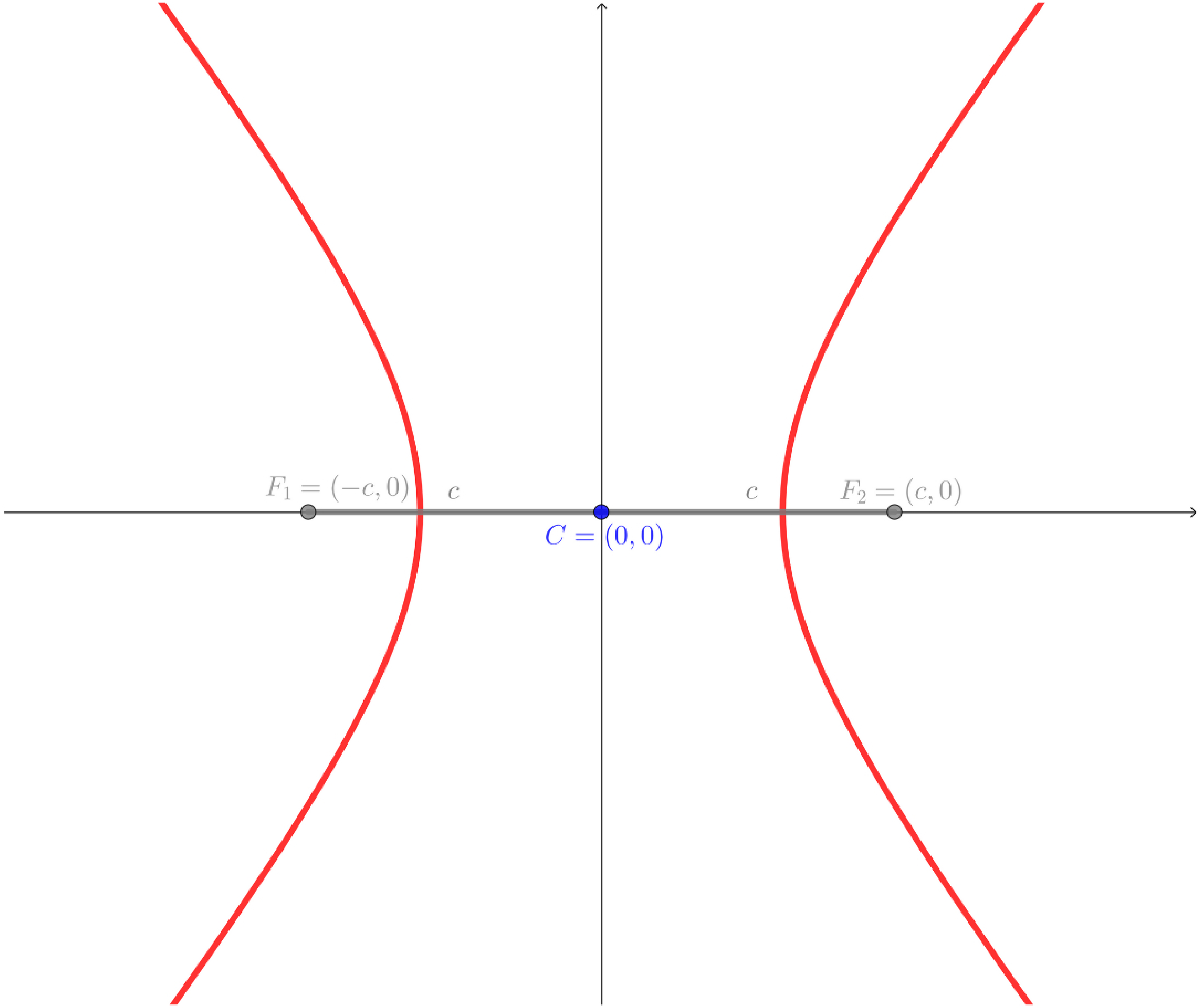
Professores:
Alda Dayana Mattos Mortari
Christian Wagner
Giuliano Boava (autor e voz)
Leandro Batista Morgado
María Rosario Astudillo Rojas
Mykola Khrypchenko

DEFINIÇÃO

Definição. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano e $a > 0$ um número real tal que $d(F_1, F_2) > 2a$. A hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo real de comprimento $2a$ é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença (em módulo) das distâncias até F_1 e F_2 é igual a $2a$.

Vídeo

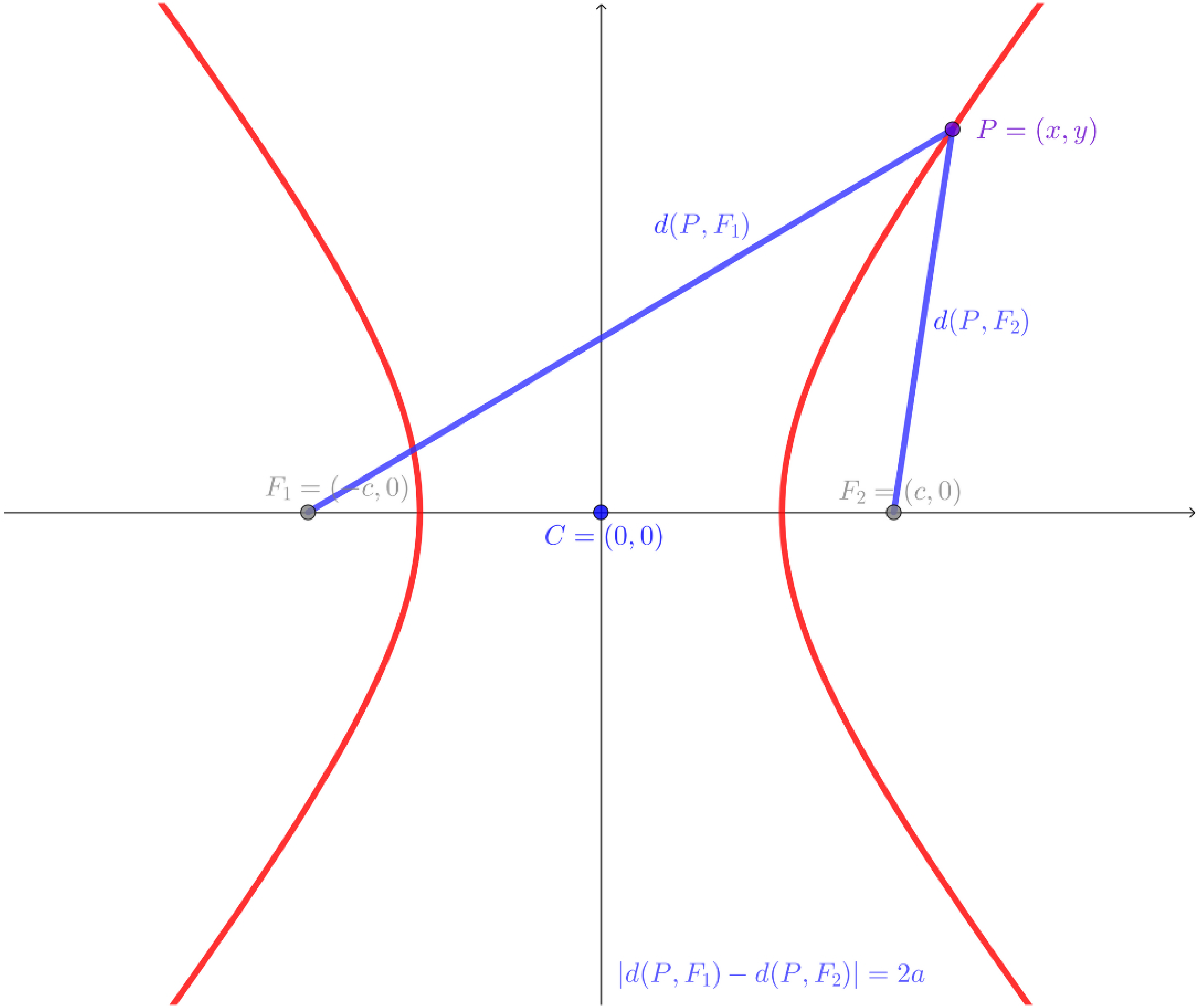
ALGUMAS DEDUÇÕES



Centro na origem

Focos distam c do centro

ALGUMAS DEDUÇÕES

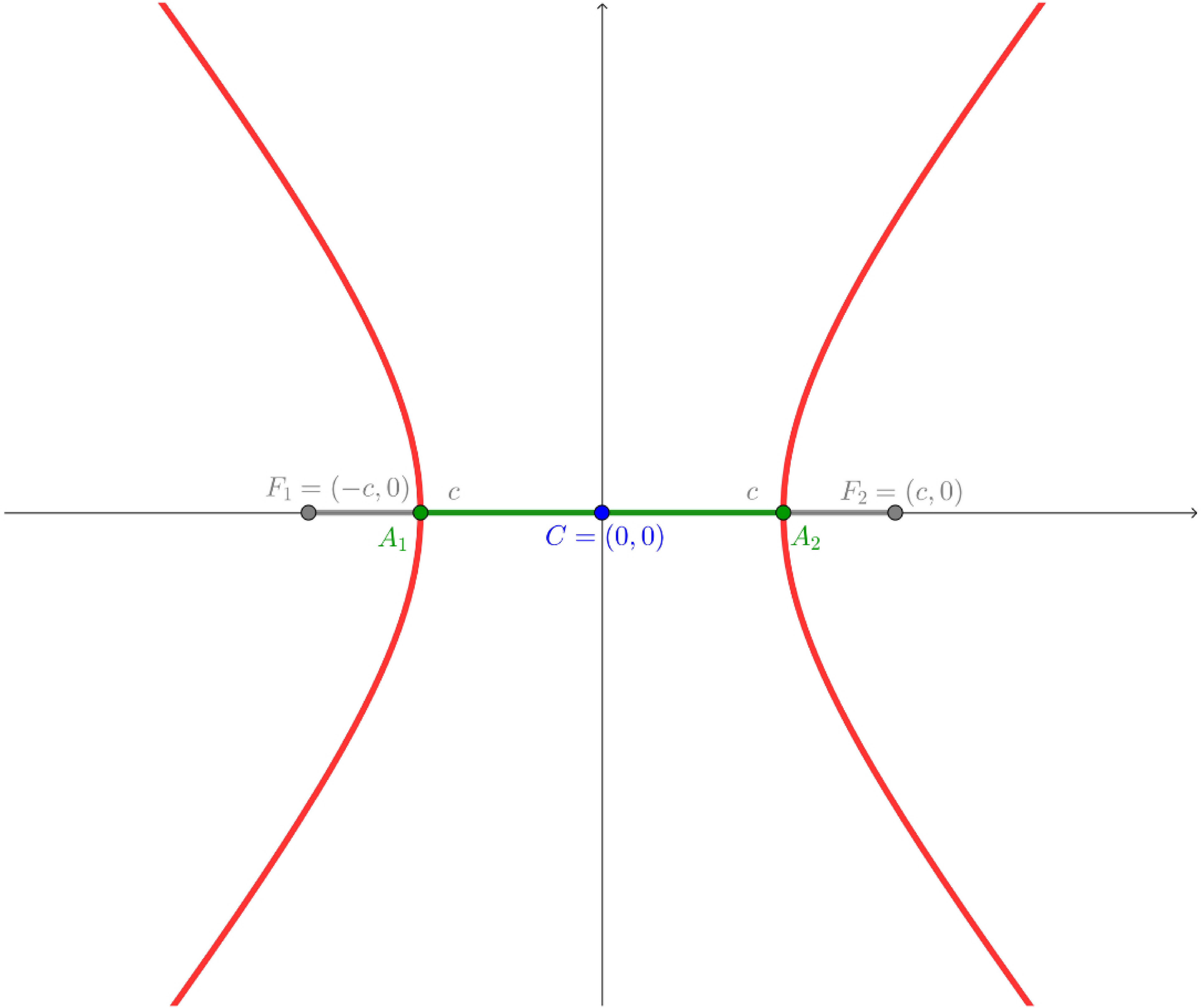


Centro na origem

Focos distam c do centro

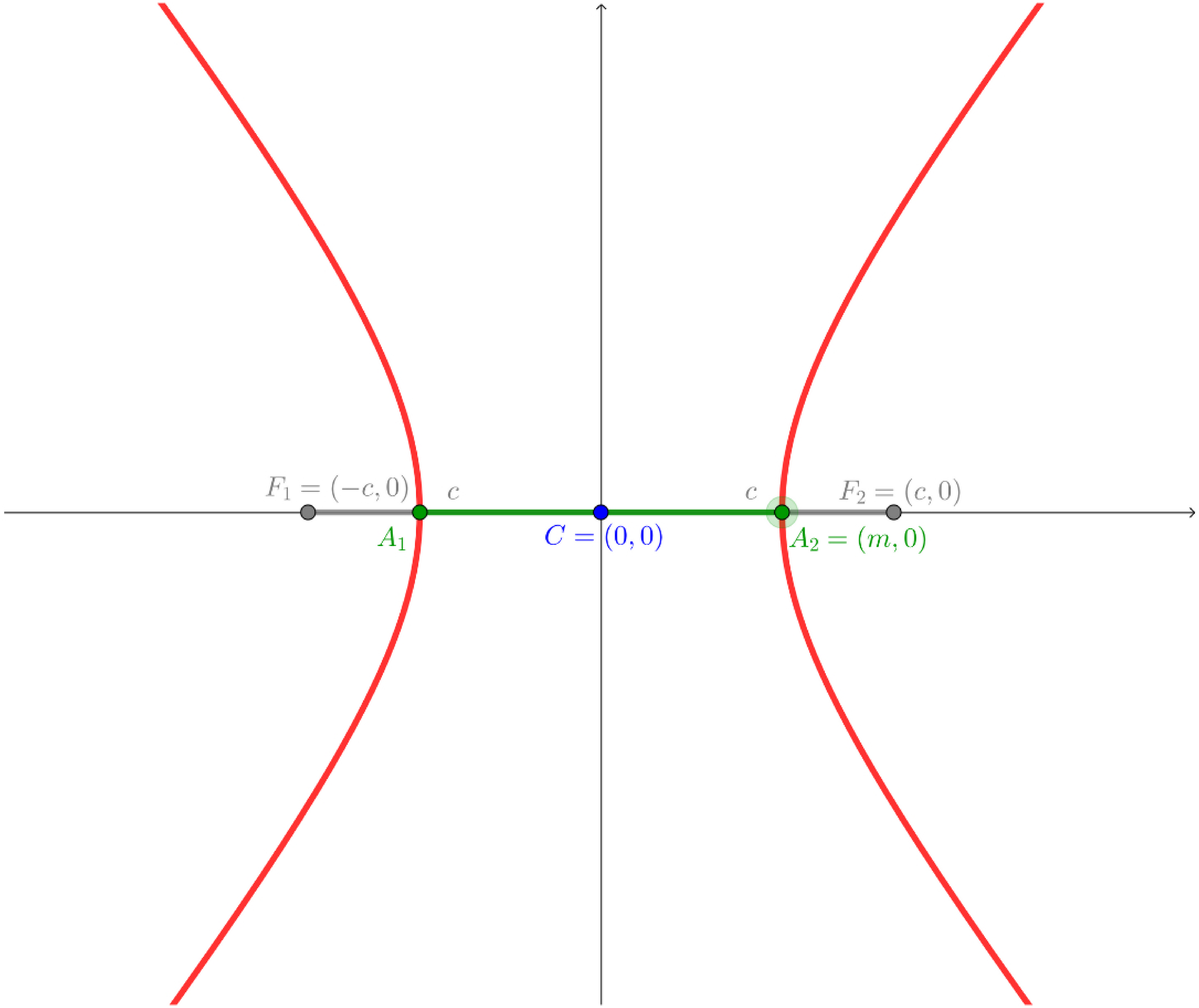
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices (reais): A_1 e A_2

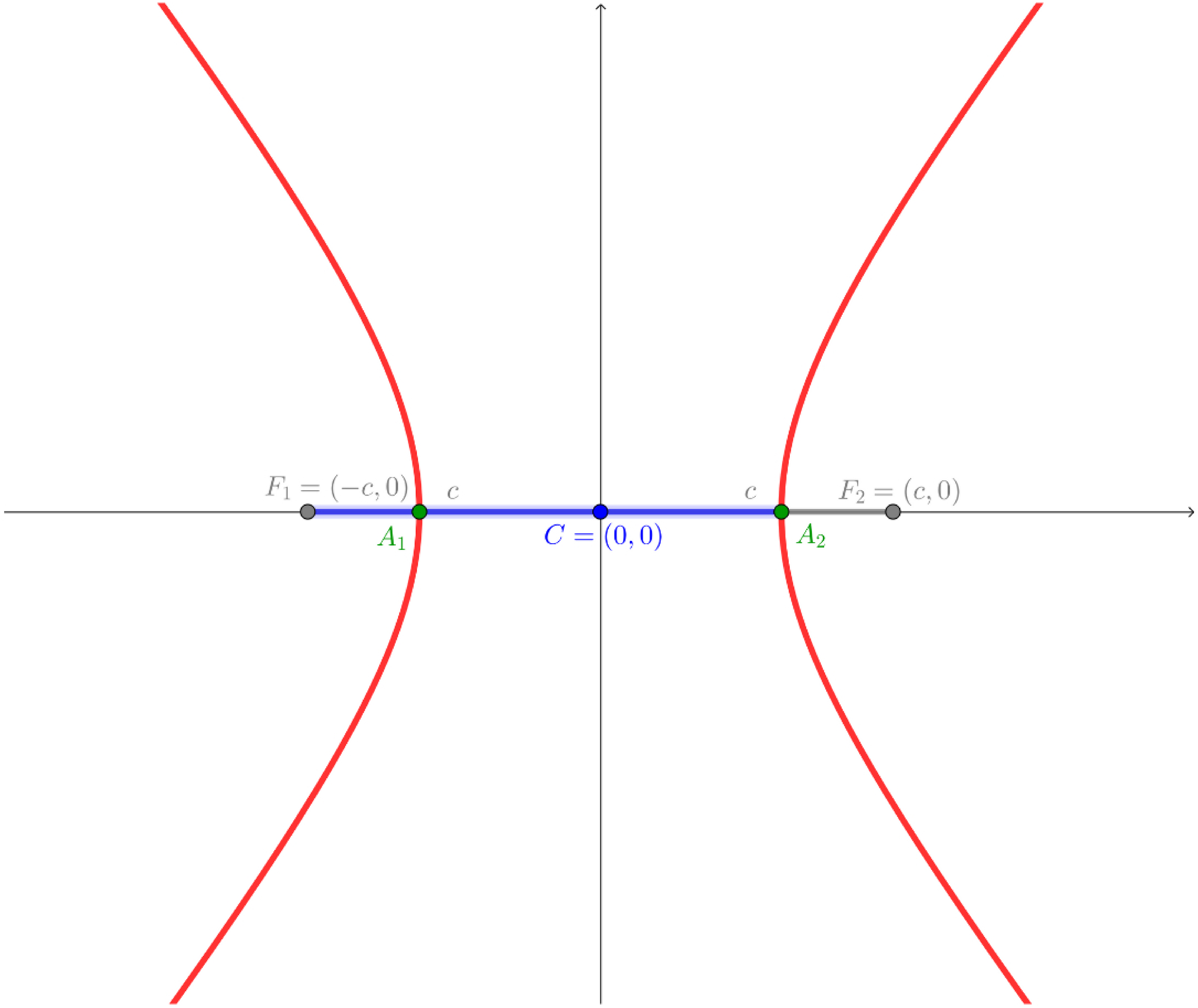
ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices (reais): A_1 e A_2

$$A_2 = (m, 0)$$

ALGUMAS DEDUÇÕES

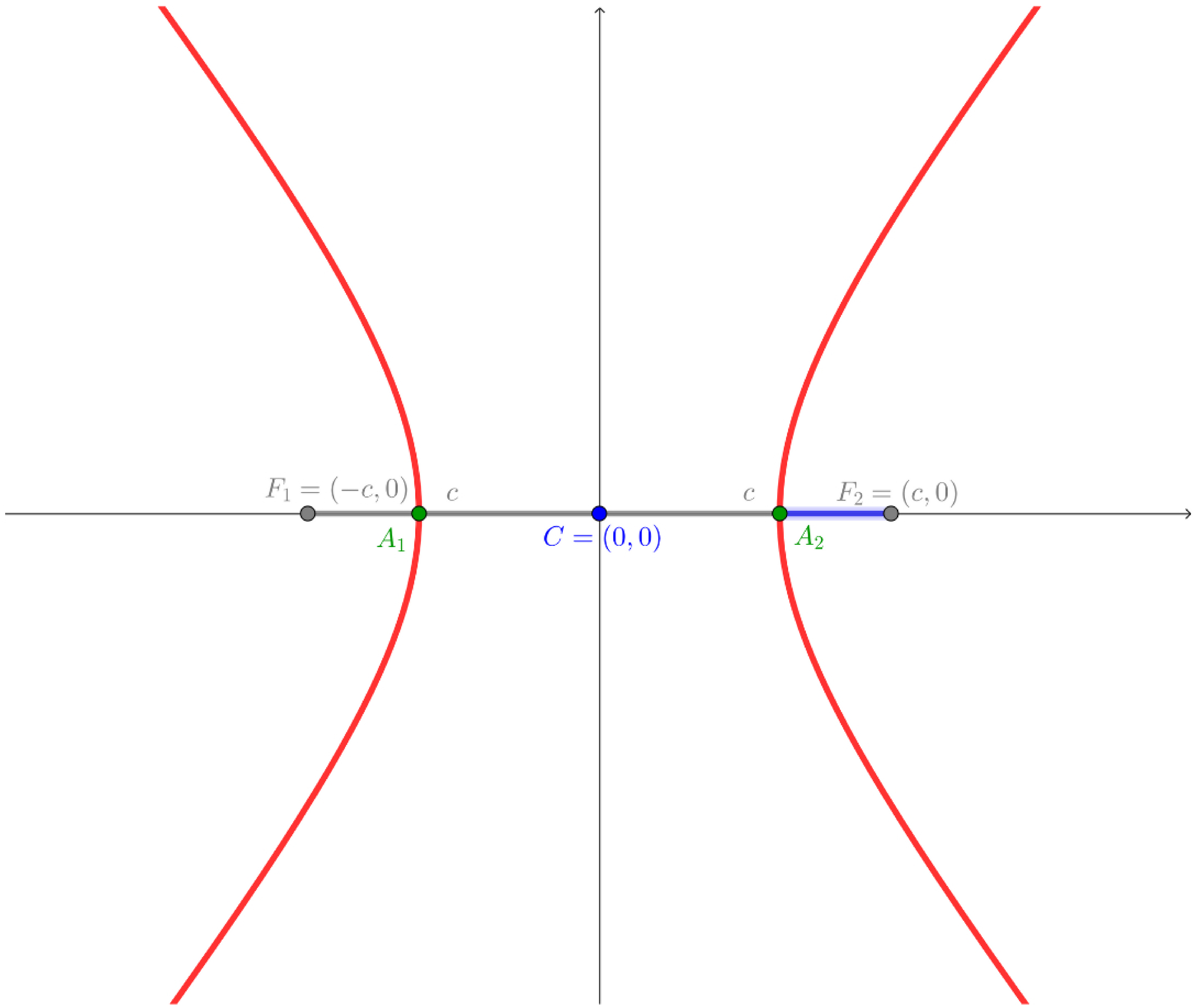


Vértices (reais): A_1 e A_2

$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices (reais): A_1 e A_2

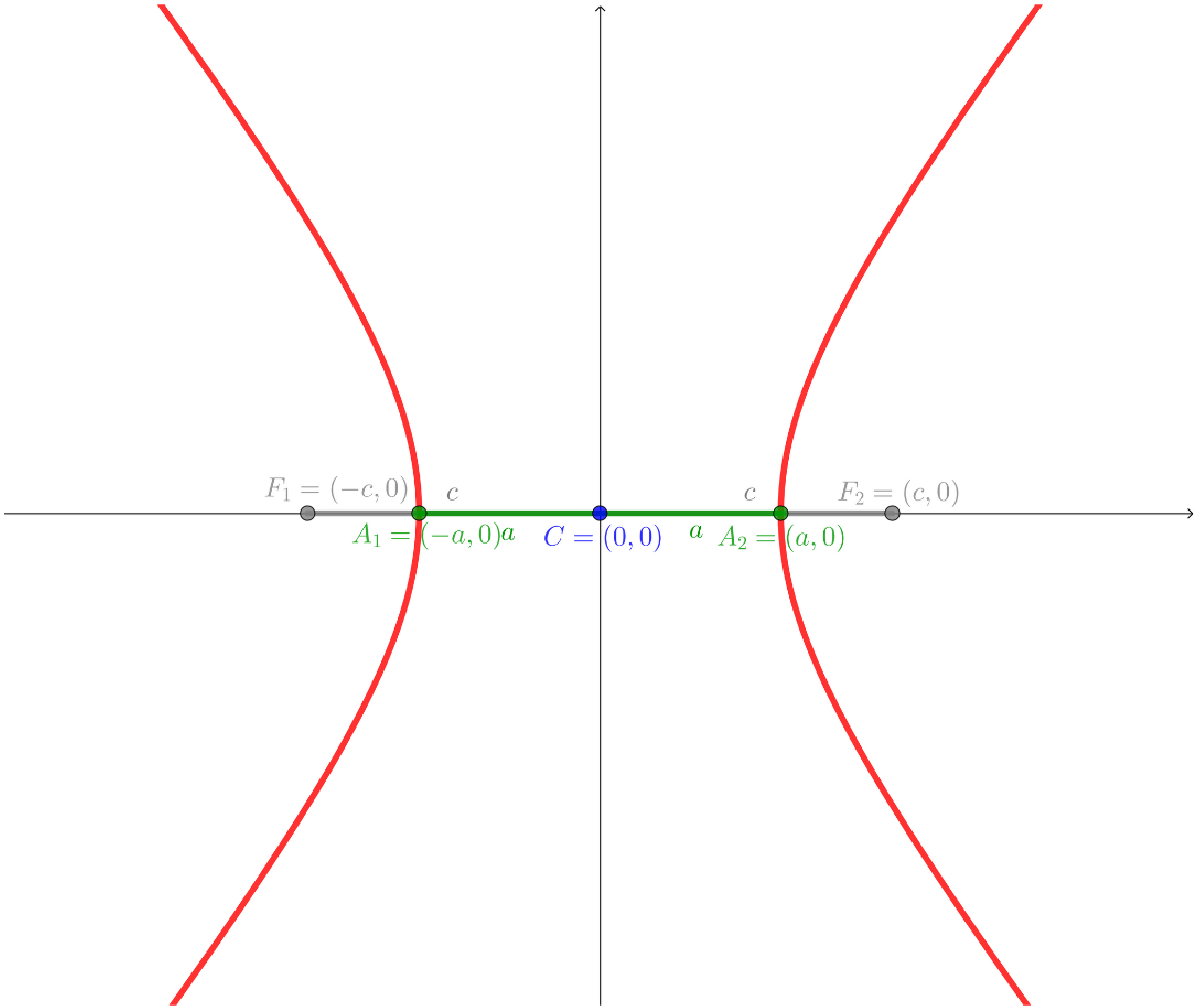
$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

$$d(A_2, F_2) = c - m$$

$$|d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2)| = 2m$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices (reais): A_1 e A_2

$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

$$d(A_2, F_2) = c - m$$

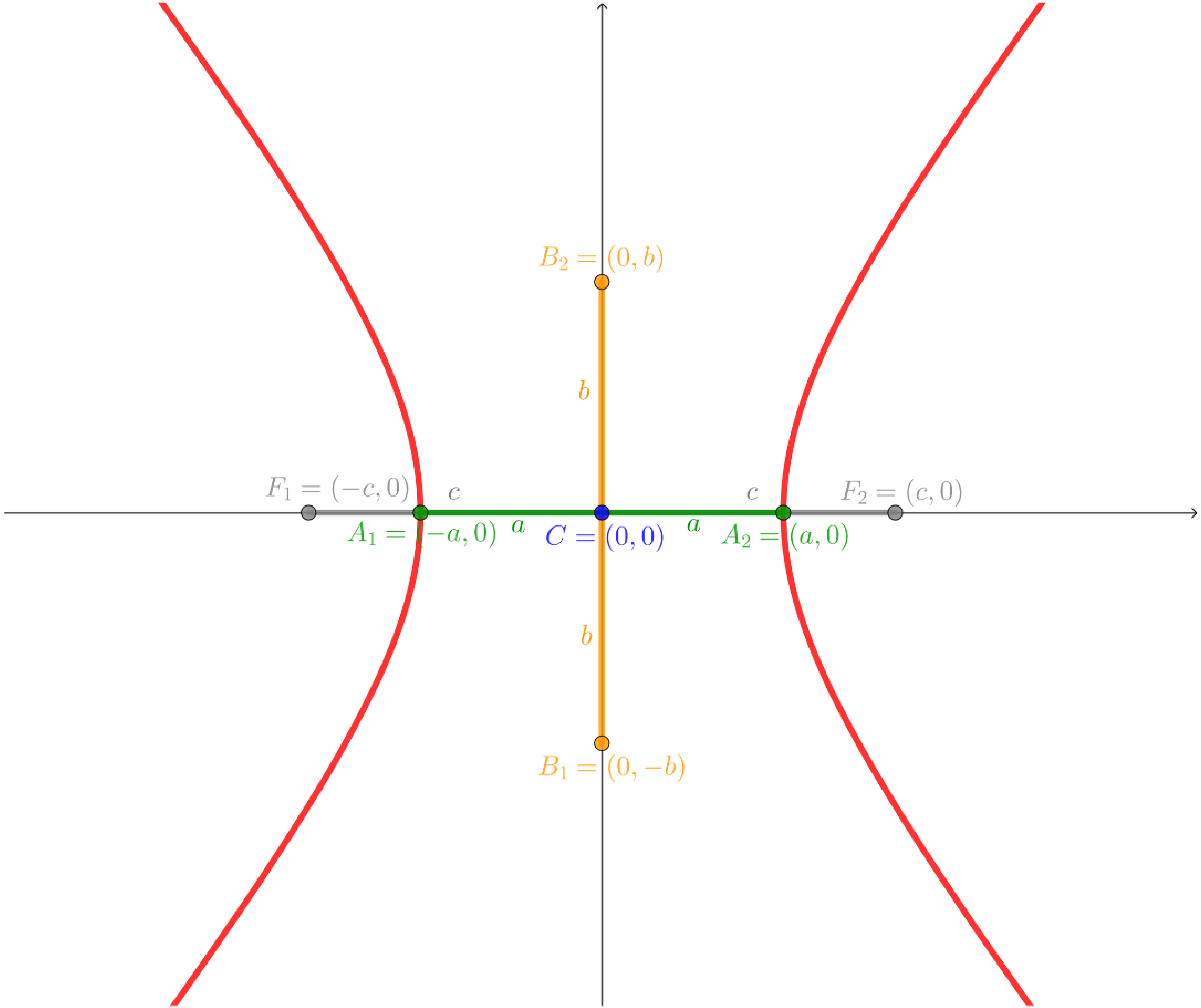
$$|d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2)| = 2m$$

$$m = a$$

$$A_2 = (a, 0) \text{ e } A_1(-a, 0)$$

Note que $c > a$

ALGUMAS CONVENÇÕES



Escolha $b > 0$ tal que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

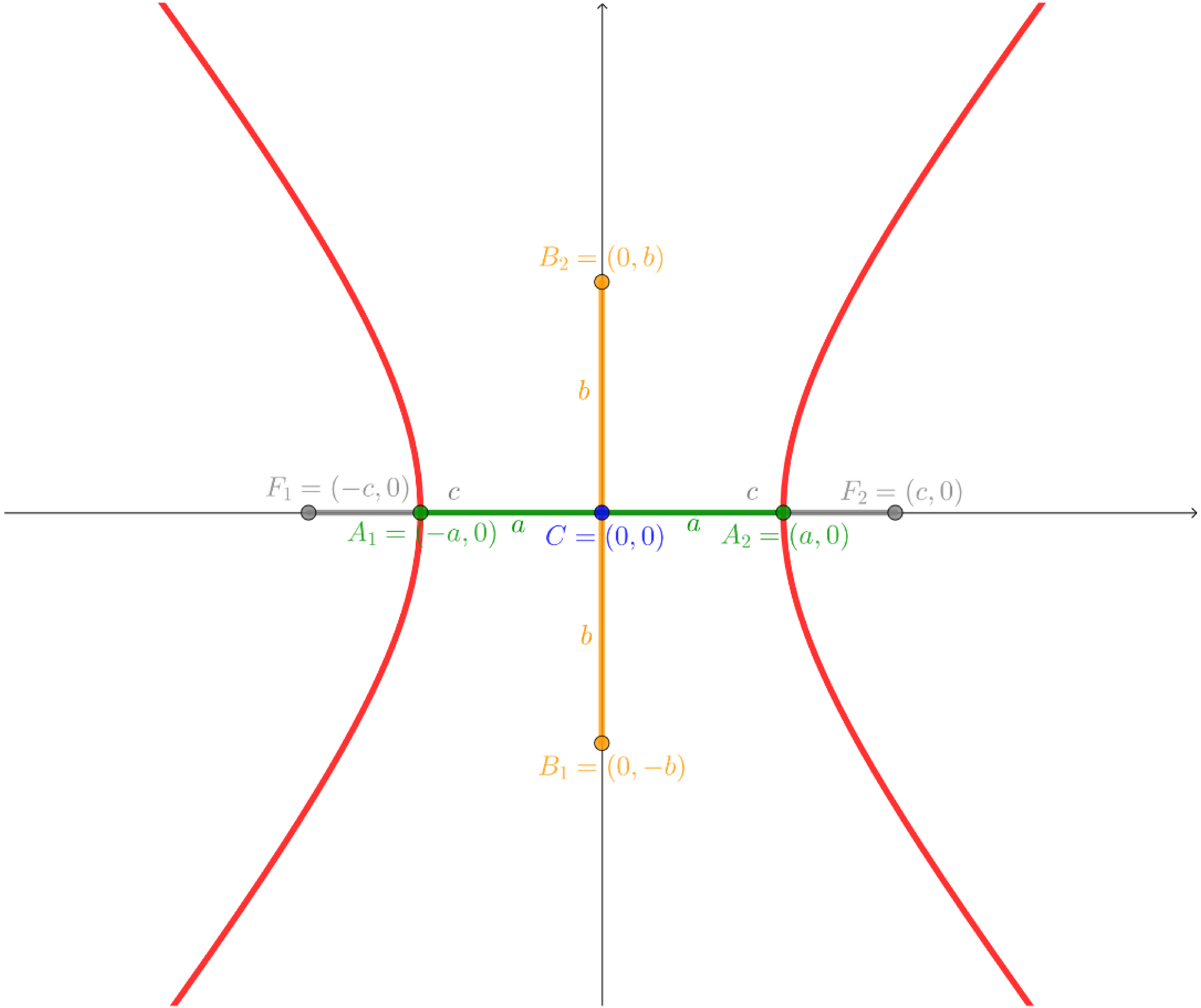
Vértices imaginários:

$$B_1 = (0, -b) \text{ e } B_2 = (0, b)$$

Relação pitagórica:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $c^2 = a^2 + b^2$.

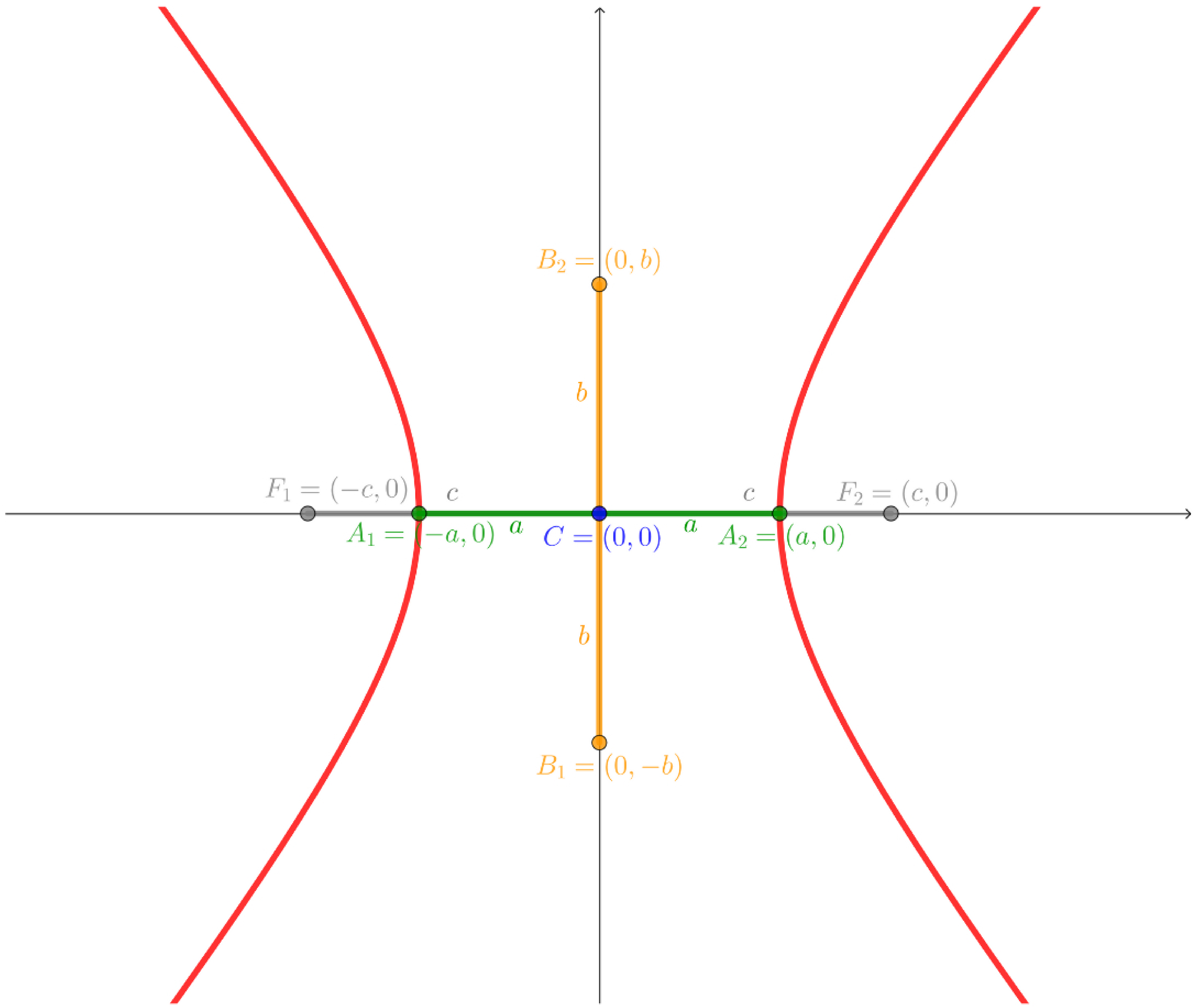
Centro: C.

Focos: F_1 e F_2.

Vértices reais: A_1 e A_2.

Vértices imaginários: B_1 e B_2.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Eixo real ou transverso:
segmento $\overline{A_1A_2}$. Sua medida: $2a$.

Eixo imaginário ou conjugado:
segmento $\overline{B_1B_2}$. Sua medida: $2b$.

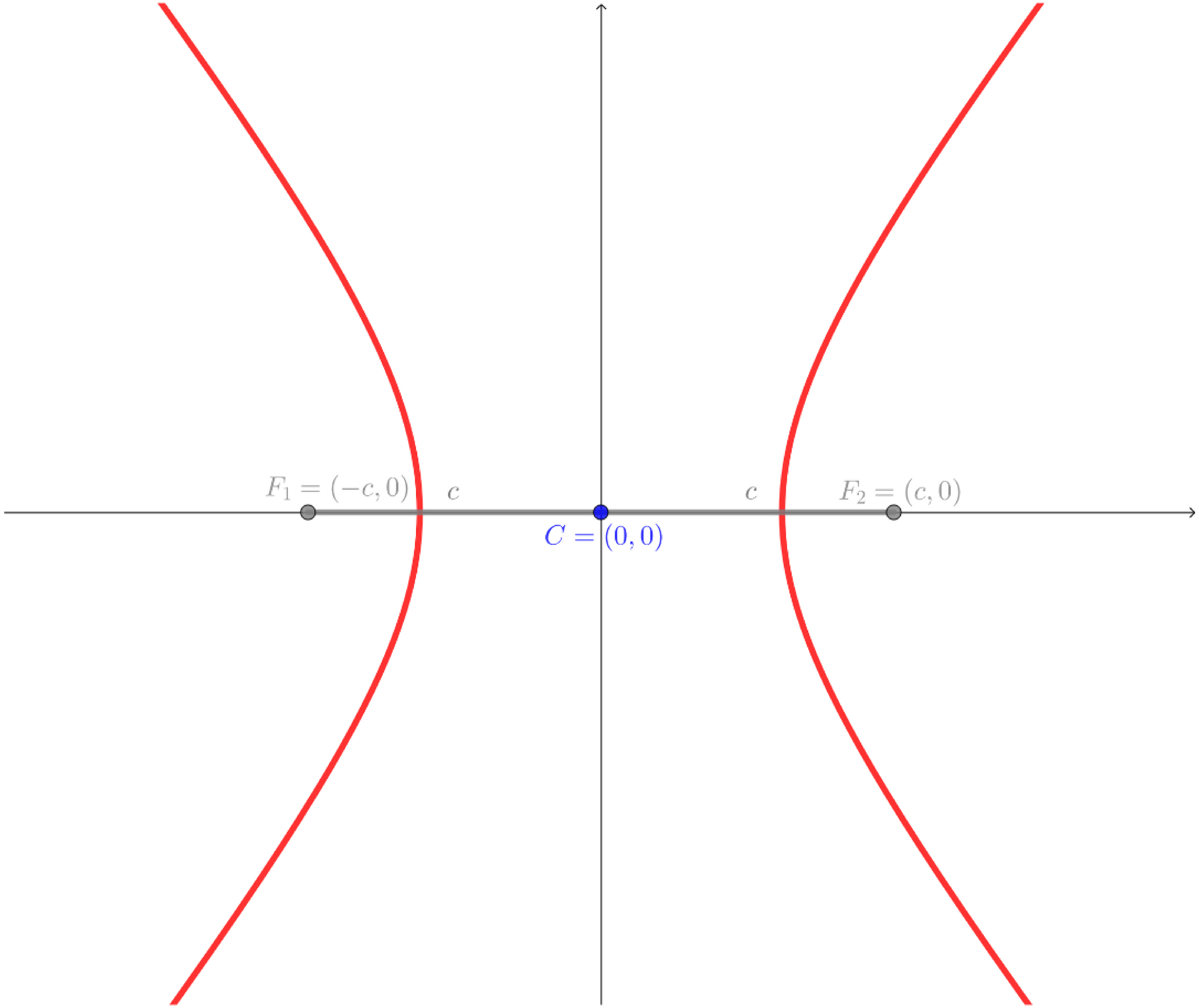
Eixo focal: segmento $\overline{F_1F_2}$.
Sua medida: $2c$.

Semieixo real: qualquer um dos
segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

Semieixo imaginário: qualquer um dos
segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

Semieixo focal: qualquer um dos
segmentos $\overline{F_1C}$ ou $\overline{CF_2}$. Sua medida: c.

ALGUMAS CONVENÇÕES



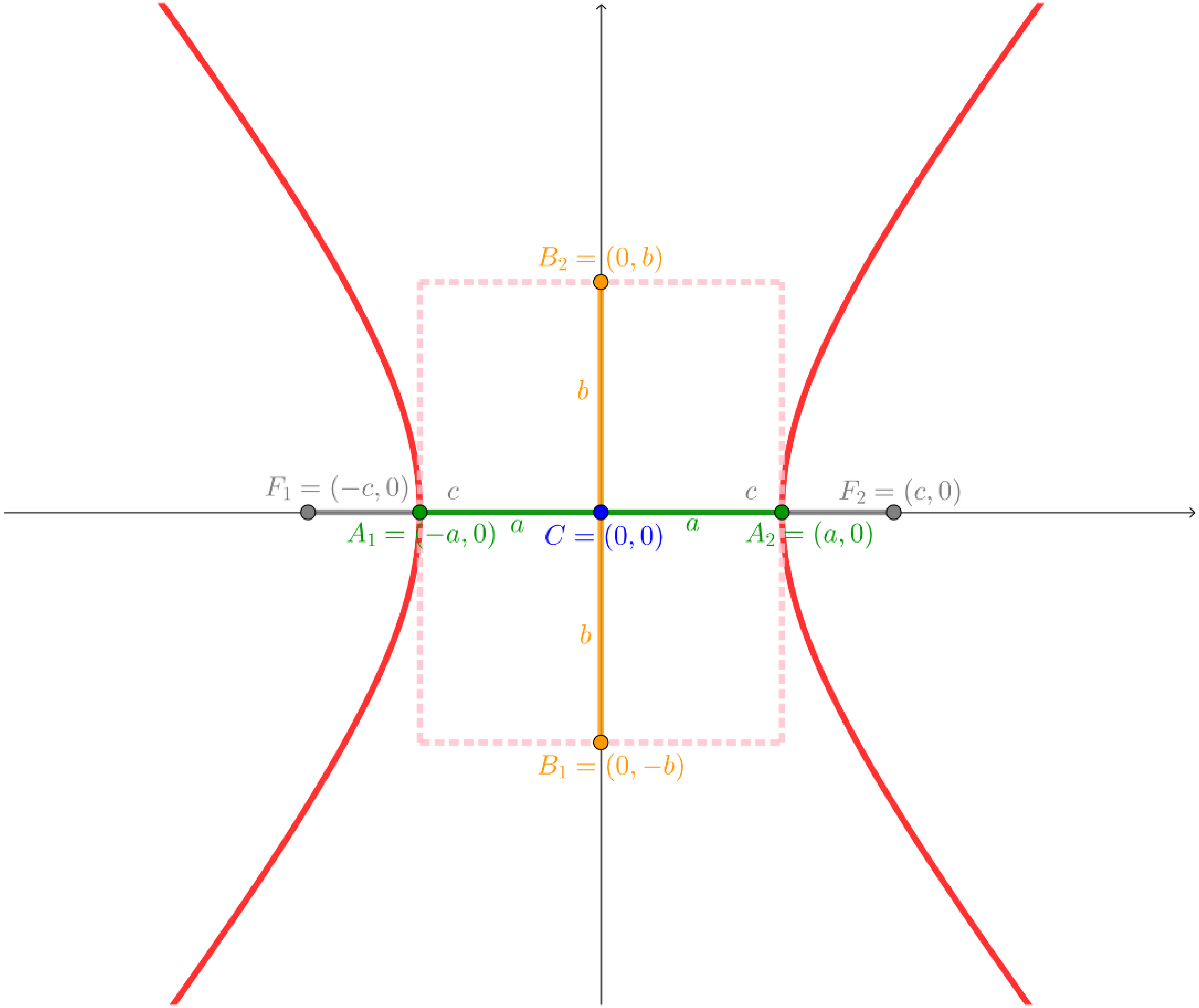
Distância focal: $2c$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

ALGUMAS CONVENÇÕES

Cuidado!! Dependendo do livro, autor ou professor, a definição de distância focal pode ser c ou 2c.

ALGUMAS CONVENÇÕES

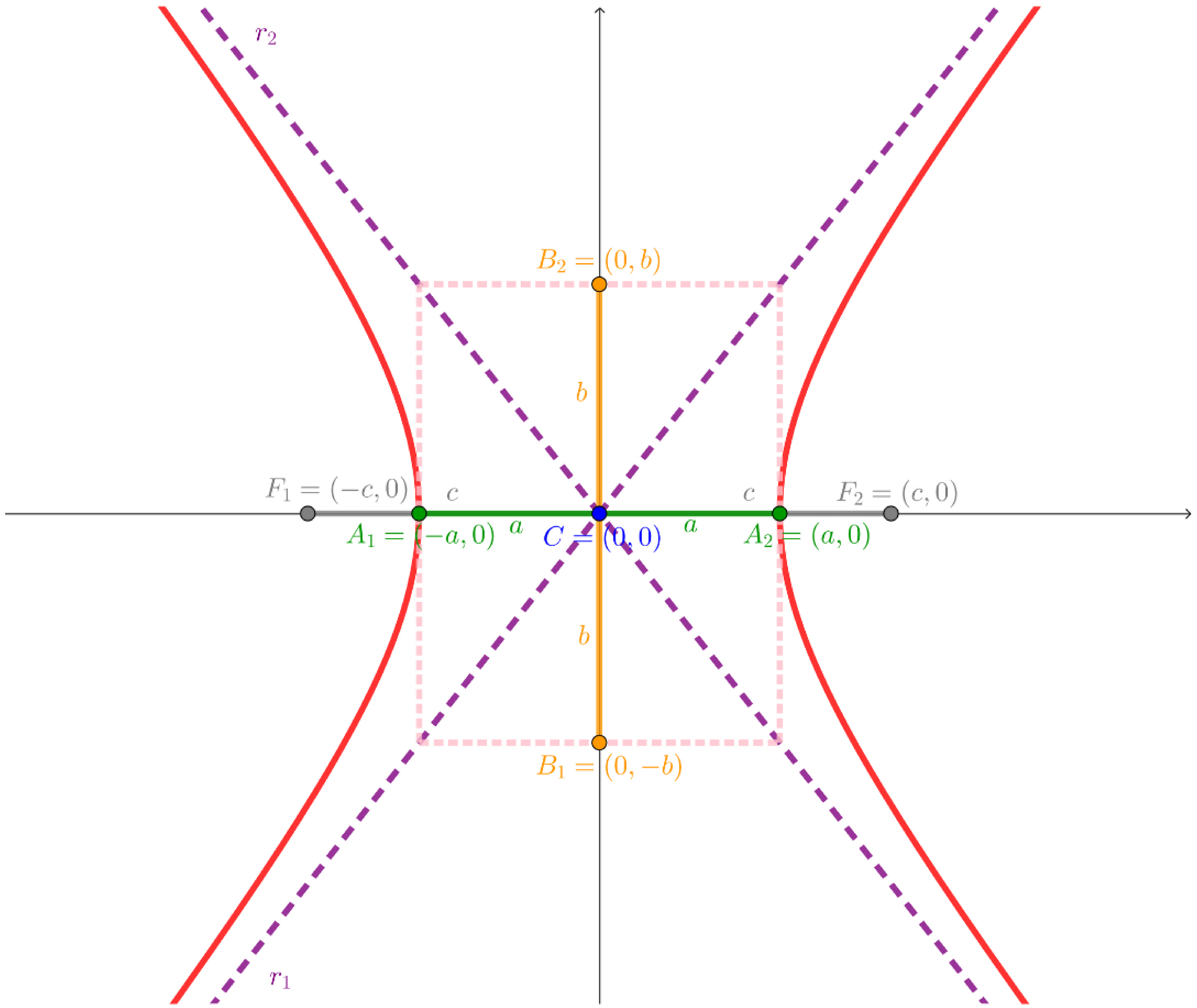


Distância focal: $2c$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

Retângulo (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



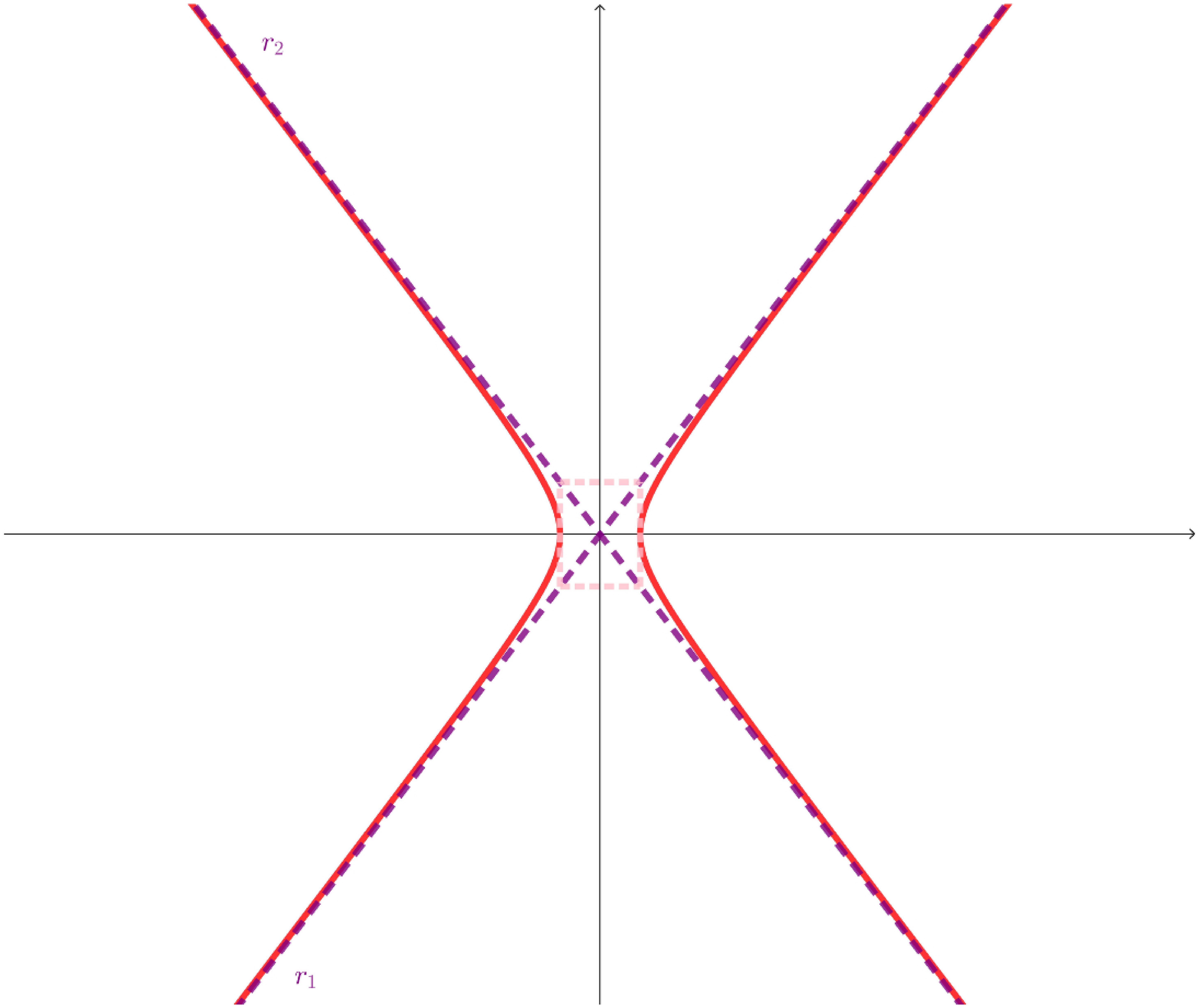
Distância focal: $2c$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

Retângulo (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$.

Assíntotas: retas r_1 e r_2.

ALGUMAS CONVENÇÕES



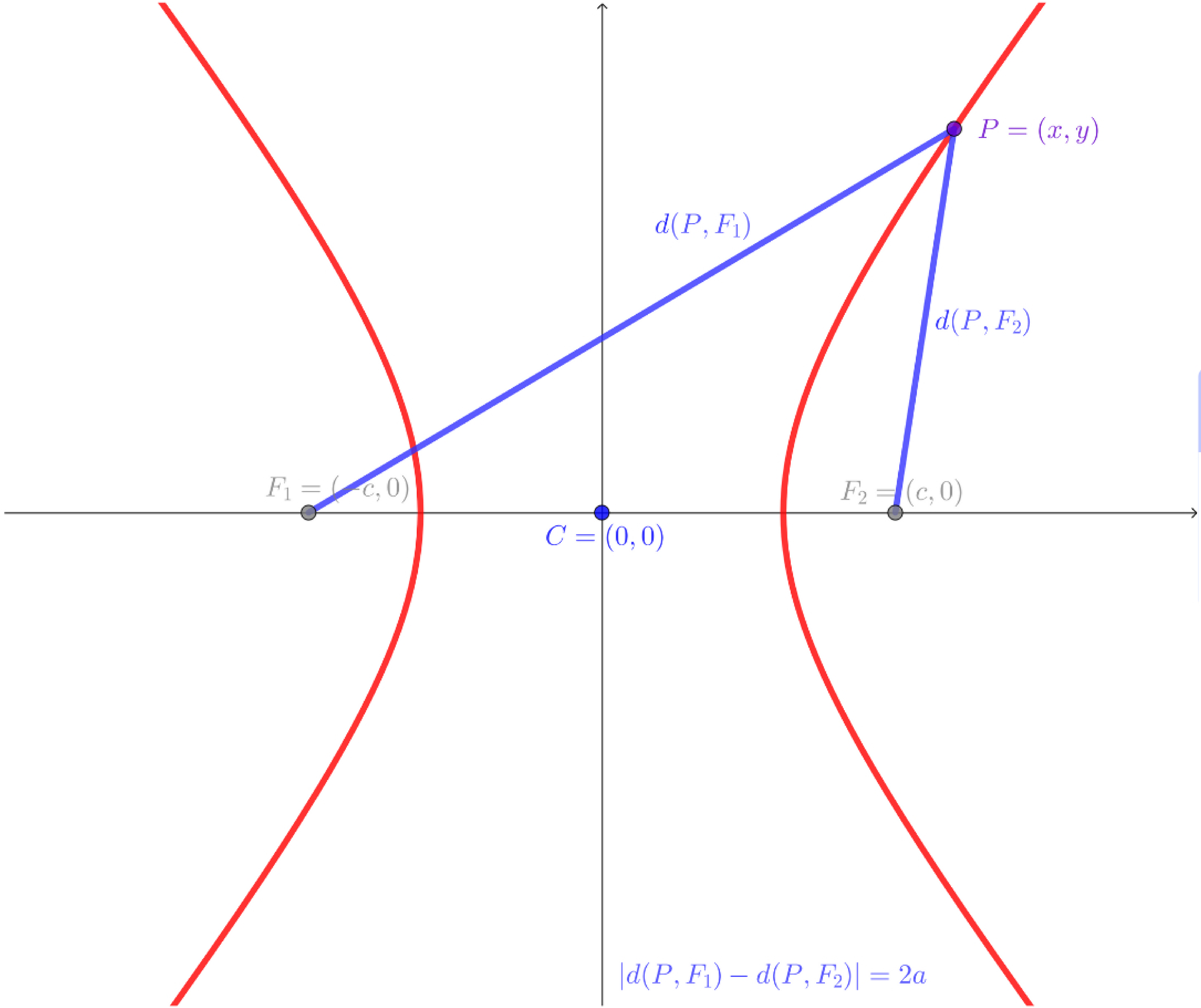
Distância focal: $2c$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

Retângulo (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$.

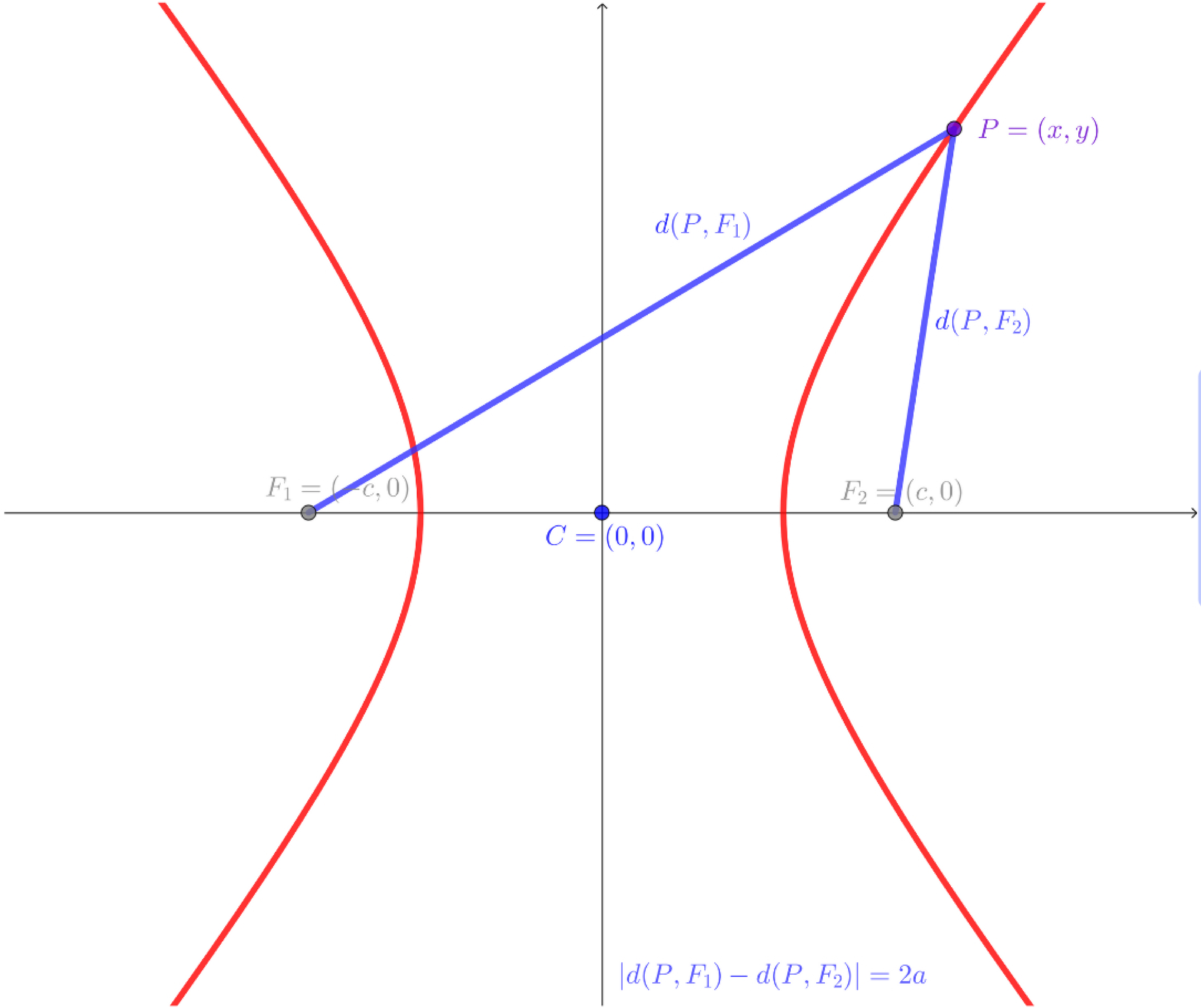
Assíntotas: retas r_1 e r_2.

DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Usamos a definição de distância

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

Elevamos os dois lados ao quadrado

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

Desenvolvemos o quadrado perfeito

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

Desenvolvemos mais quadrados perfeitos

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

Cortamos alguns termos e ajeitamos outros

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Cortamos um fator 2

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Mudamos de folha porque acabou o espaço

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Mesma fórmula da folha anterior

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos os dois lados ao quadrado

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

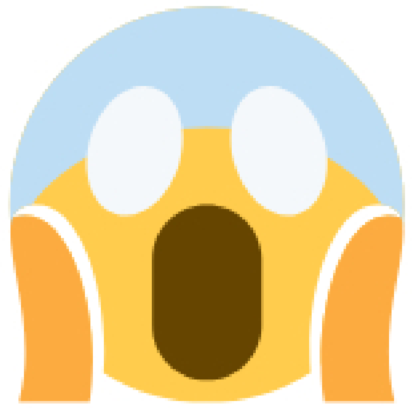
DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

Desenvolvemos os quadrados perfeitos

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$



DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$

Cortamos alguns termos
e ajeitamos outros

$$4a^4 + 4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = 0$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$

$$4a^4 + 4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = 0$$

Ajeitamos mais um pouquinho

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$

$$4a^4 + 4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = 0$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Usamos a relação $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$

$$4a^4 + 4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = 0$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dividimos ambos os lados por a^2b^2 e chegamos à fórmula procurada

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + +2c^2y^2 - 2c^2x^2$$

$$4a^4 + 4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 = 0$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1.$

EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1.$

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $b = 3$ e $c = 4$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1.$

Determine uma equação da hipérbole centrada na origem, com eixo real horizontal, $b = 3$ e $c = 4$.

Solução. $4^2 = a^2 + 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{7}.$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 4$ e $b = 4$.

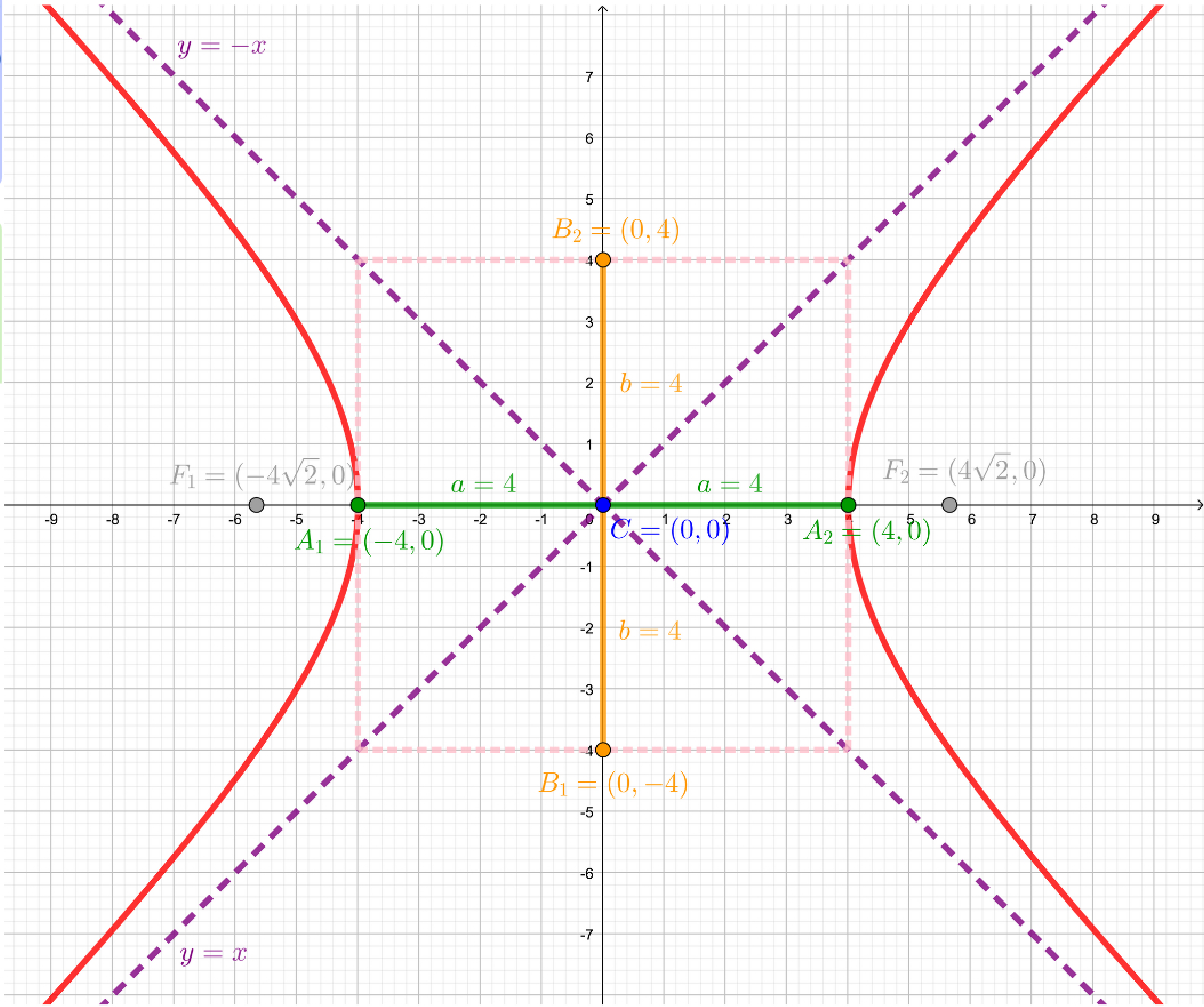
$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 4$ e $b = 4$.

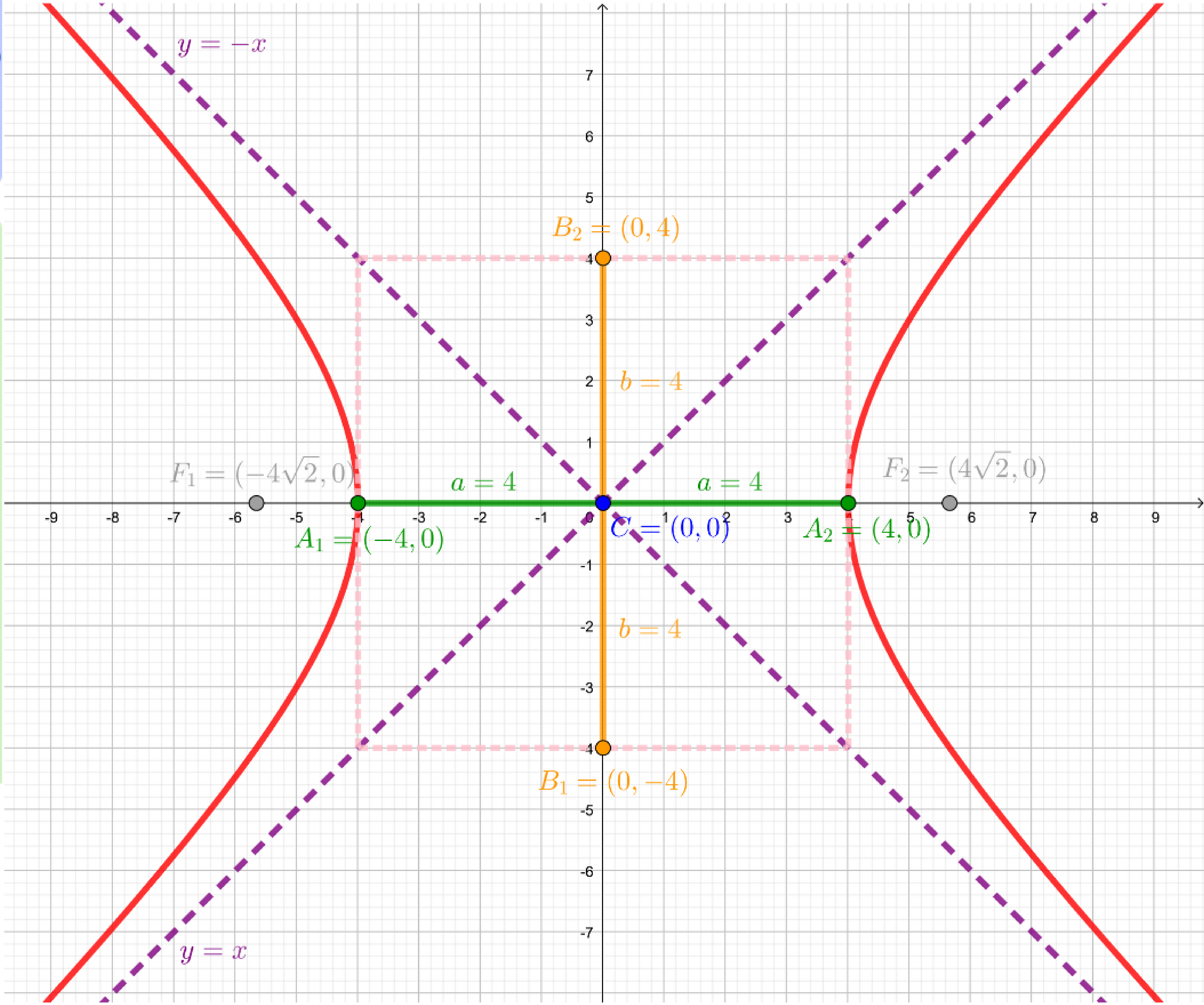
$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}$.

$A_1 = (-4,0)$, $A_2 = (4,0)$.

$B_1 = (0,-4)$, $B_2 = (0,4)$.

$F_1 = (-4\sqrt{2},0)$, $F_2 = (4\sqrt{2},0)$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$

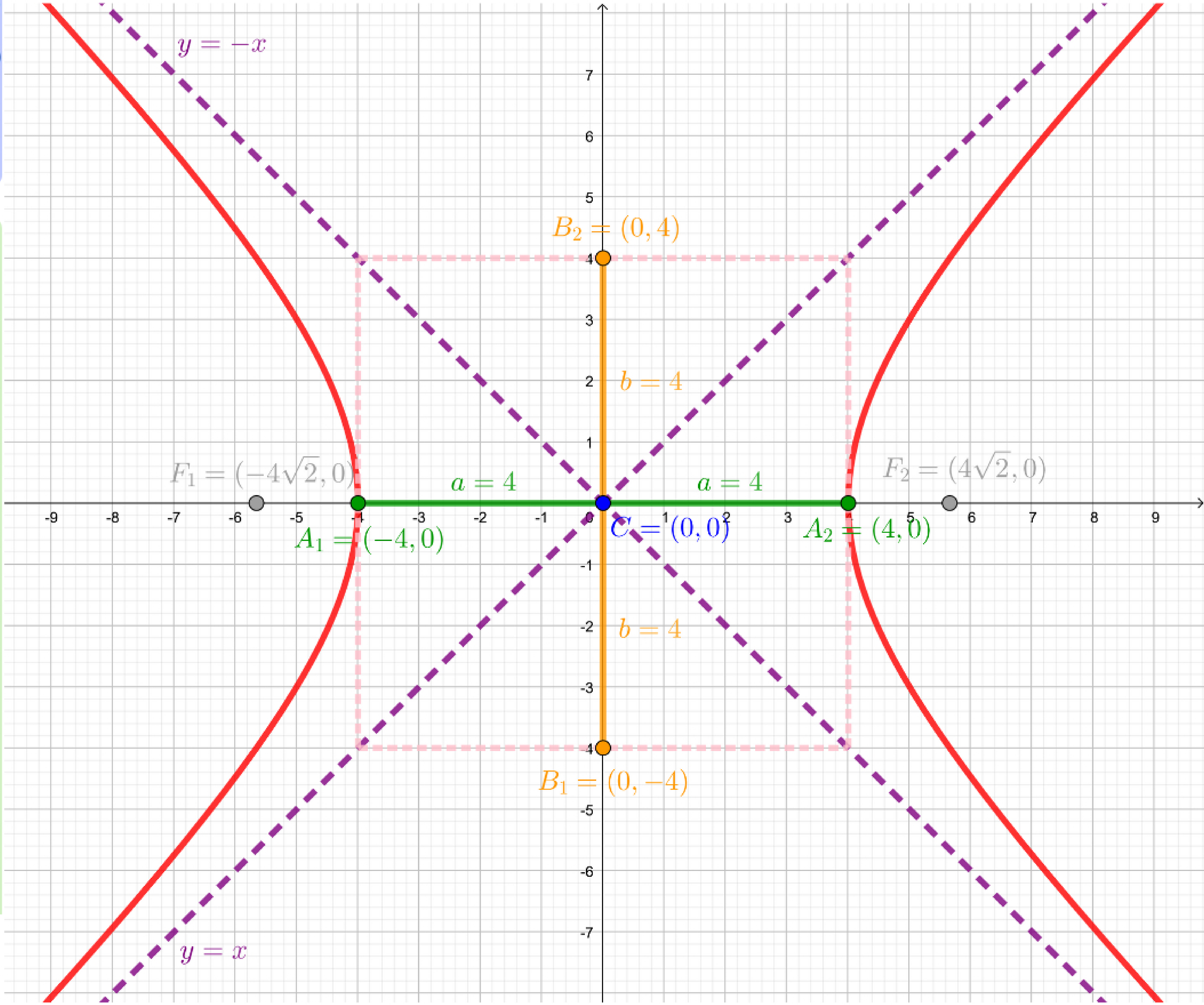
$A_1 = (-4,0),\ A_2 = (4,0).$

$B_1 = (0,-4),\ B_2 = (0,4).$

$F_1 = (-4\sqrt{2},0),\ F_2 = (4\sqrt{2},0).$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Assíntota 1: pontos $C = (0,0)$ e $(a,b) = (4,4)$. Equação: $y = x$.



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}$.

$A_1 = (-4,0),\ A_2 = (4,0)$.

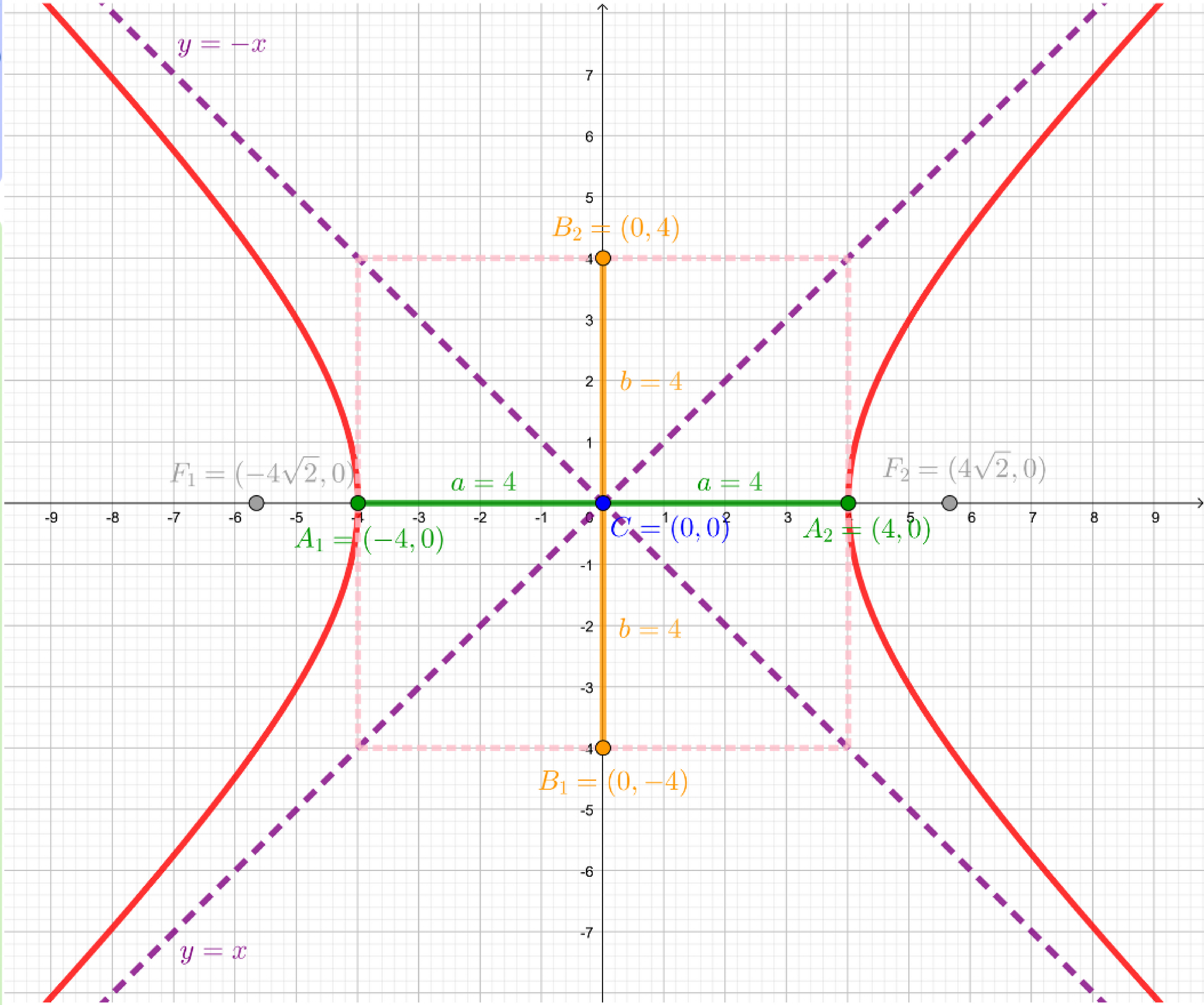
$B_1 = (0,-4),\ B_2 = (0,4)$.

$F_1 = (-4\sqrt{2},0),\ F_2 = (4\sqrt{2},0)$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Assíntota 1: pontos $C = (0,0)$ e $(a,b) = (4,4)$. Equação: $y = x$.

Assíntota 2: pontos $C = (0,0)$ e $(a,-b) = (4,-4)$. Equação: $y = -x$.



EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solução. Hipérbole, eixo real horizontal.

$C = (0, 0)$, $a = 4$, $b = 2$.

$A_1 = (-4, 0)$, $A_2 = (4, 0)$.

$B_1 = (0, -2)$, $B_2 = (0, 2)$.

EXEMPLOS

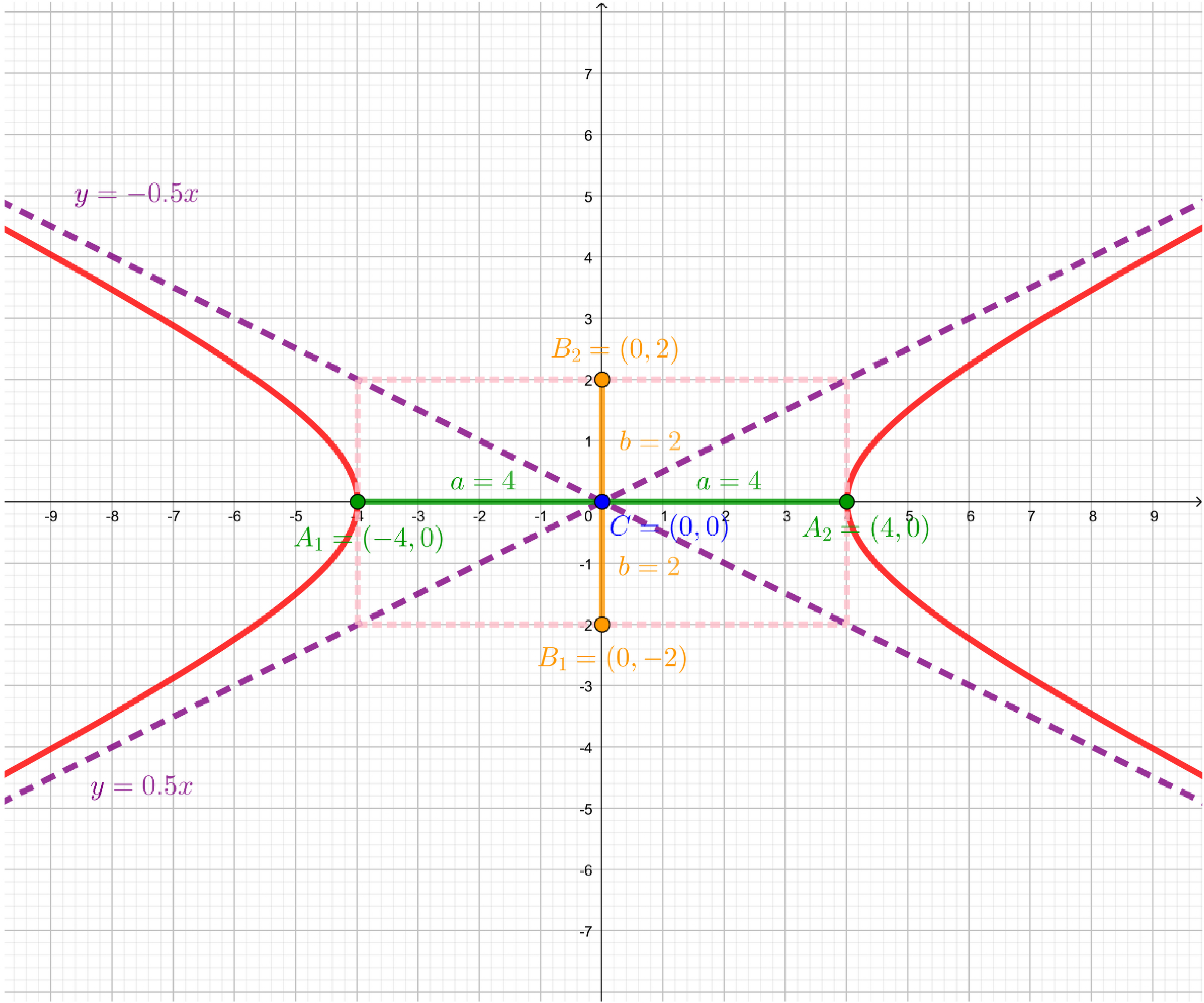
Faça o gráfico da equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solução. Hipérbole, eixo real horizontal.

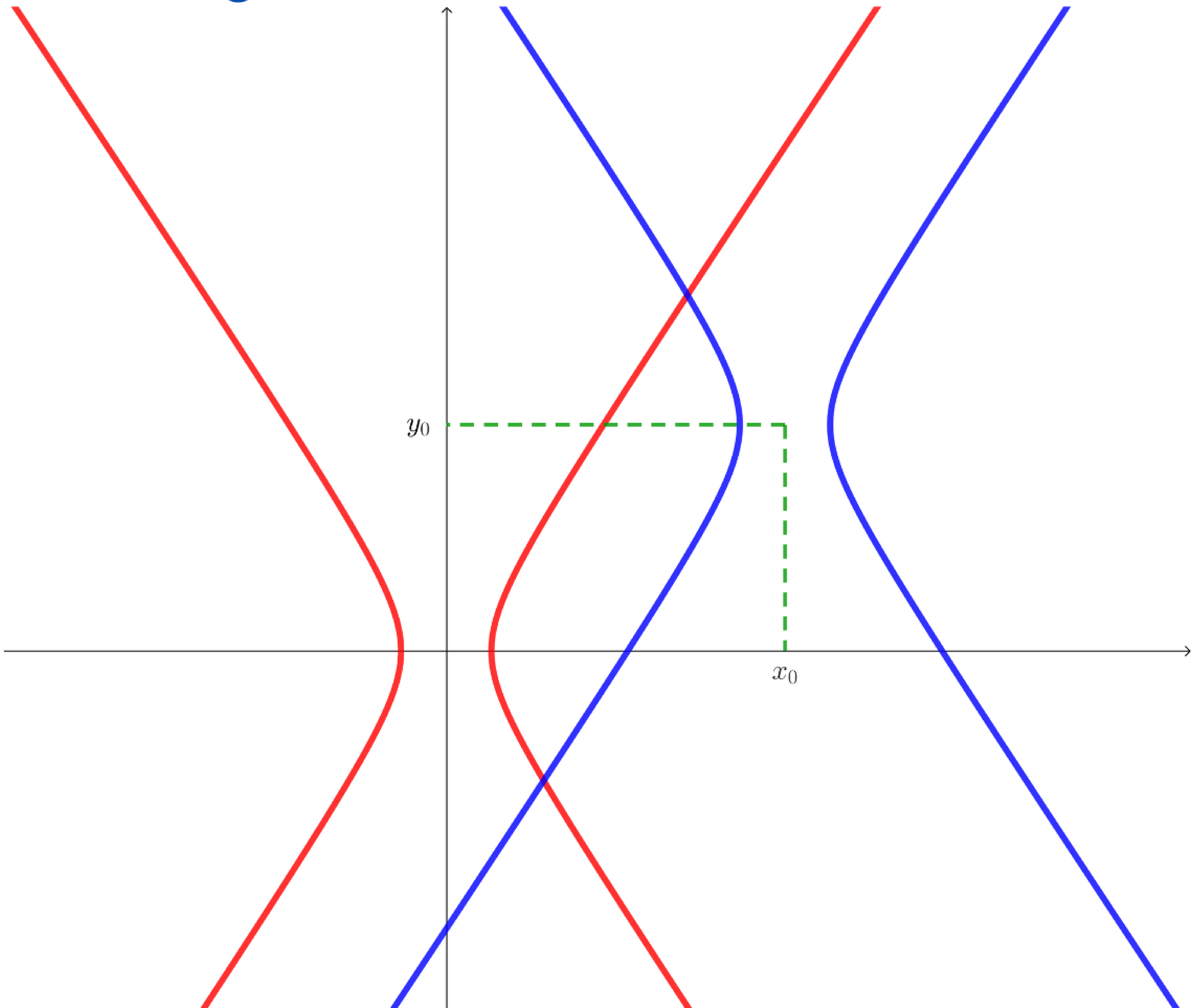
$C = (0,0)$, $a = 4$, $b = 2$.

$A_1 = (-4,0)$, $A_2 = (4,0)$.

$B_1 = (0,-2)$, $B_2 = (0,2)$.



EQUAÇÃO COM CENTRO EM QUALQUER POSIÇÃO



Centro: $C = (0, 0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

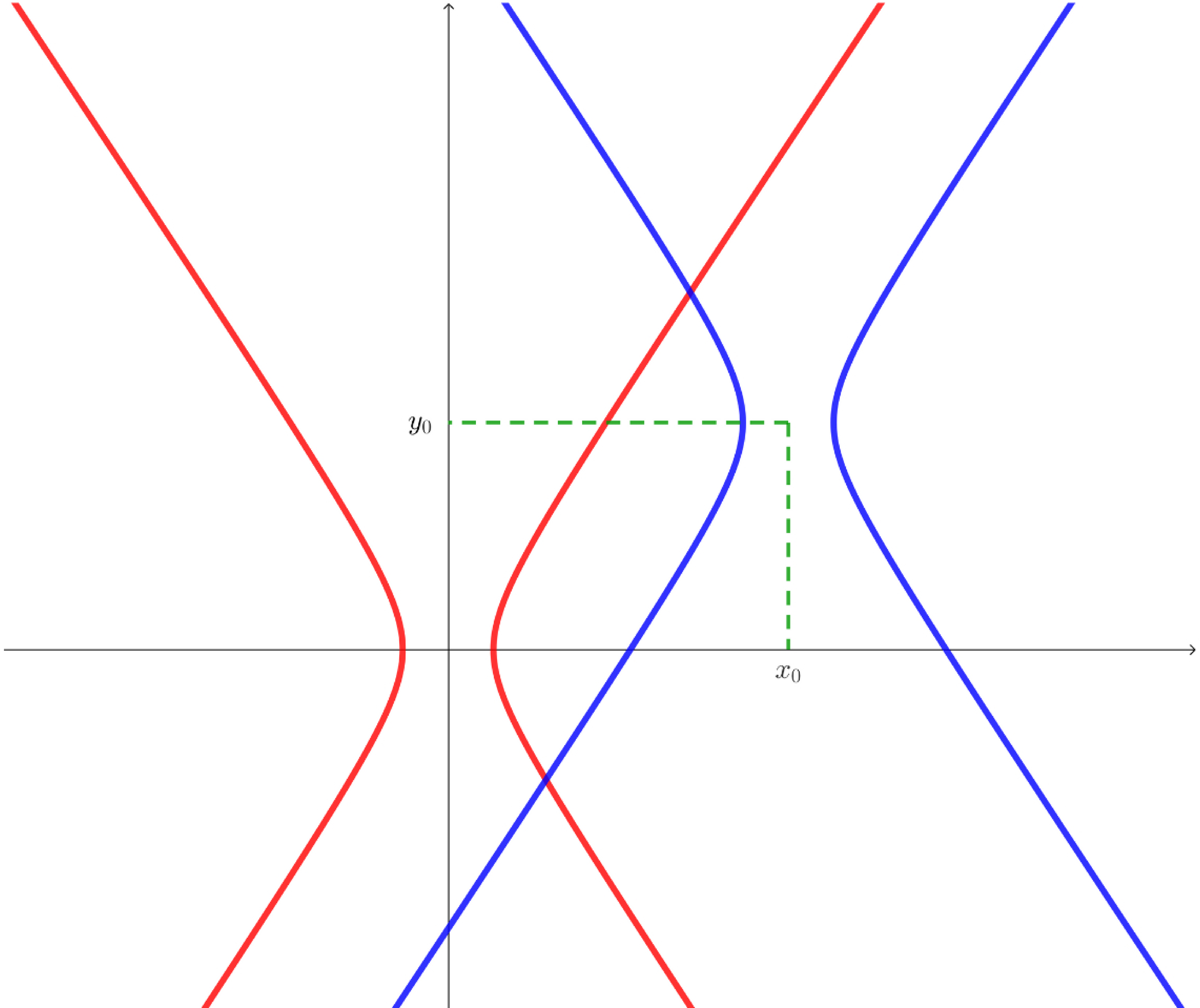
Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

EQUAÇÃO COM CENTRO EM QUALQUER POSIÇÃO



Centro: $C = (0, 0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

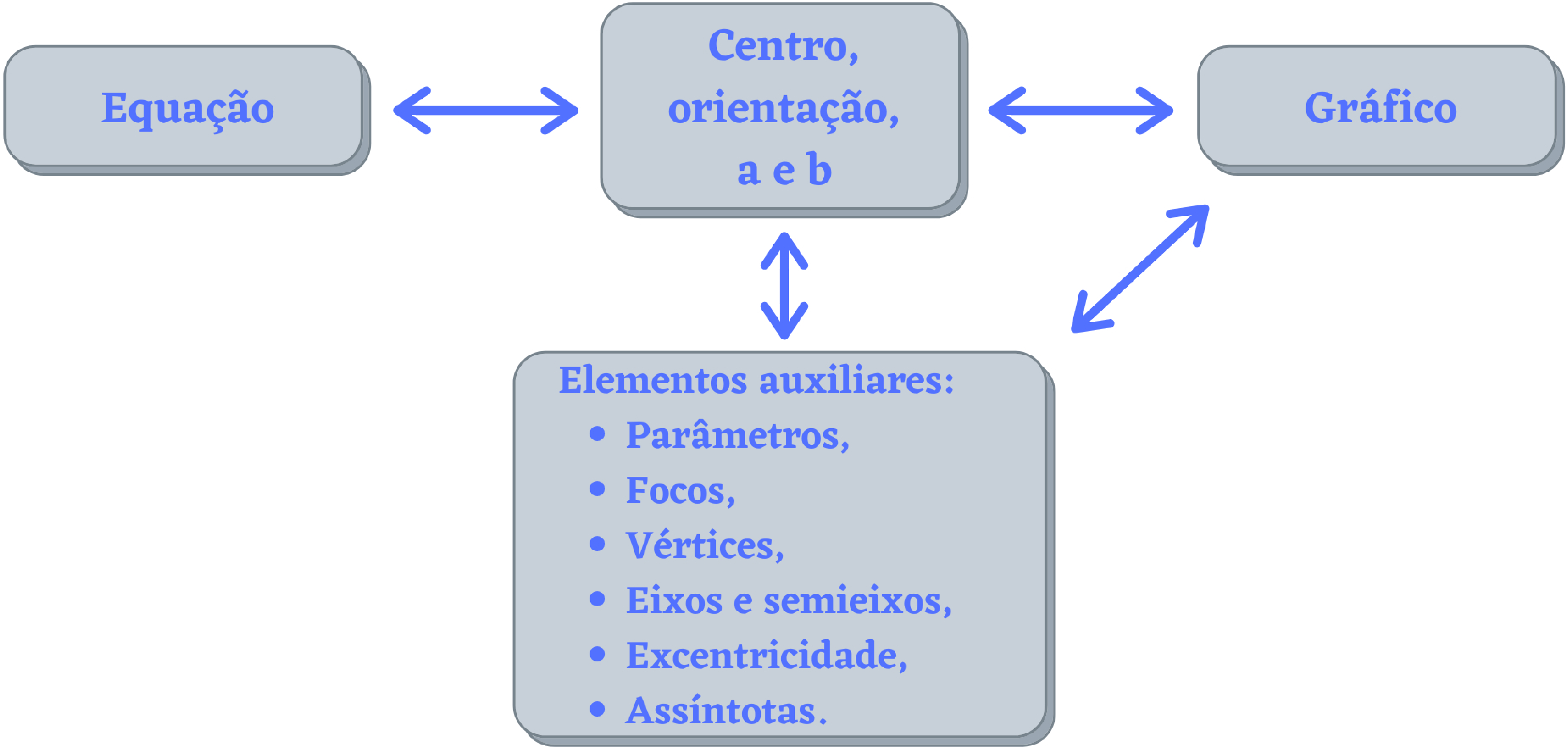
Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Equação ⟷ Centro, orientação, a e b ⟷ Gráfico

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE



EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole com $C = (-1, 4)$, eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da hipérbole com $C = (-1, 4)$, eixo real horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução.

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} - \frac{(y-4)^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{9} - (y-4)^2 = 1.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 4$ e $b = 4$.

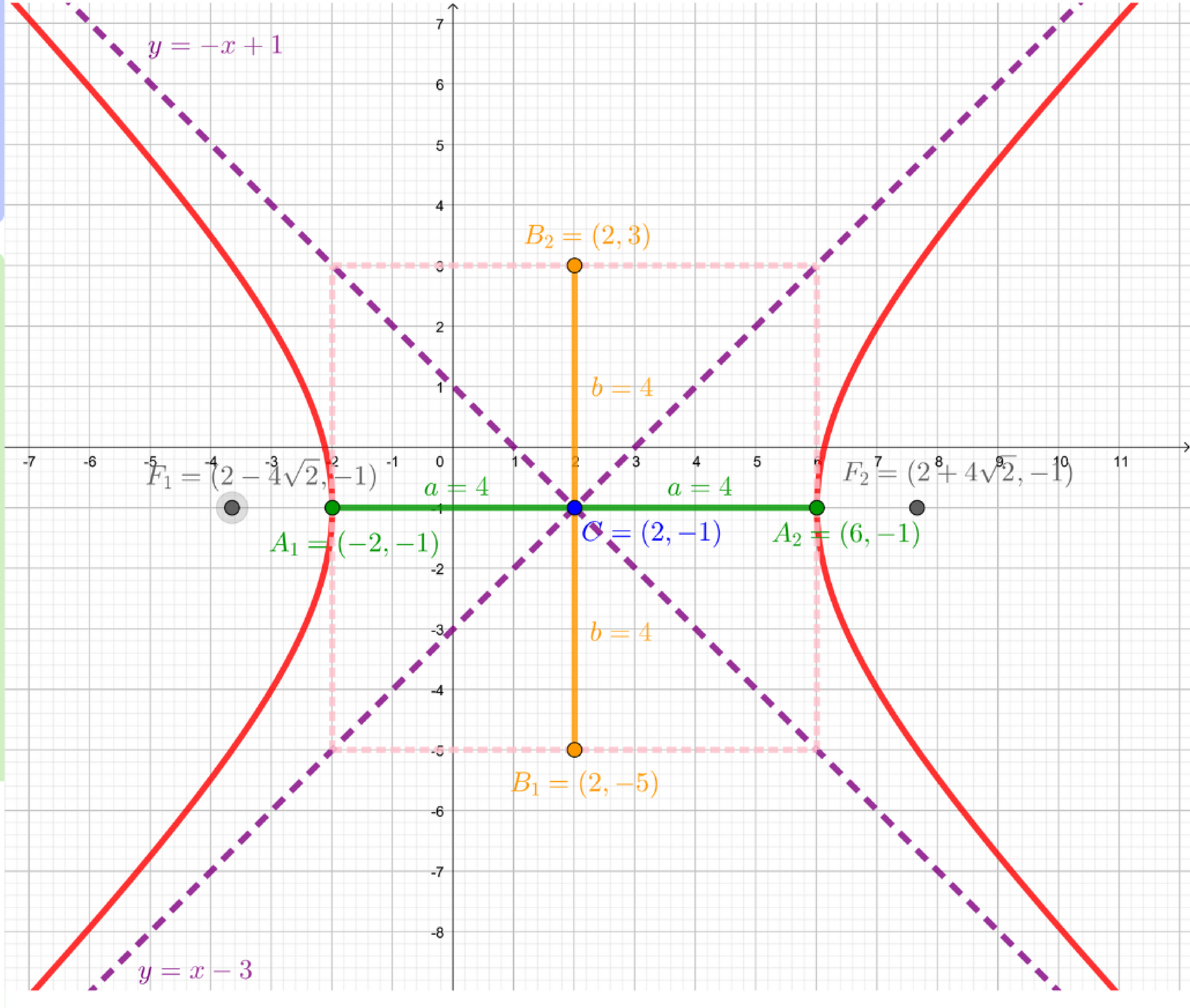
$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$

$A_1 = (2-4, -1) = (-2, -1), \quad A_2 = (2+4, -1) = (6, -1).$

$B_1 = (2, -1-4) = (2, -5), \quad B_2 = (2, -1+4) = (2, 3).$

$F_1 = (2 - 4\sqrt{2}, -1), \quad F_2 = (2 + 4\sqrt{2}, -1).$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$

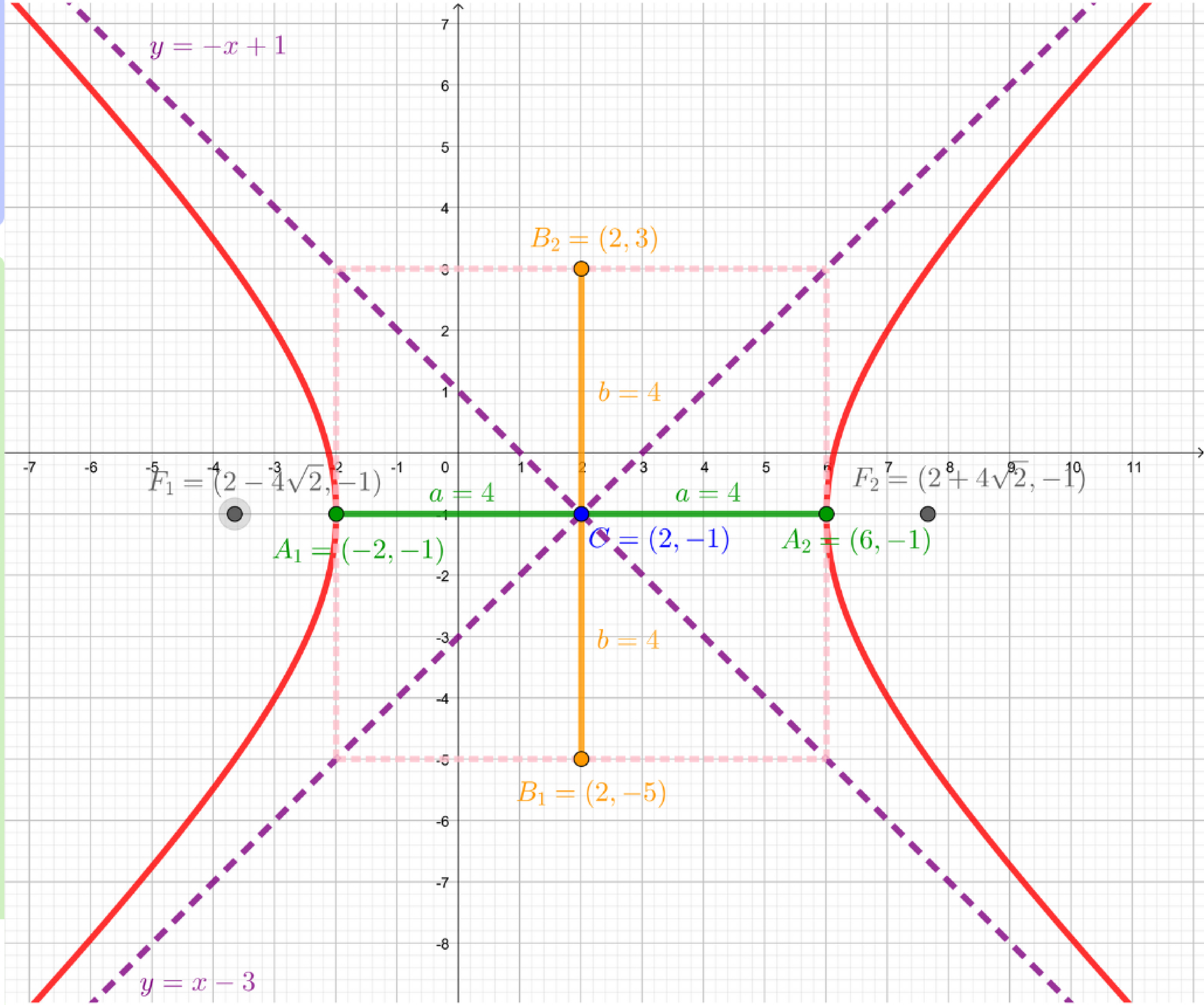
$A_1 = (2-4, -1) = (-2, -1), \quad A_2 = (2+4, -1) = (6, -1).$

$B_1 = (2, -1-4) = (2, -5), \quad B_2 = (2, -1+4) = (2, 3).$

$F_1 = (2 - 4\sqrt{2}, -1), \quad F_2 = (2 + 4\sqrt{2}, -1).$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Assíntota 1: pontos $C = (2, -1)$ e $(2+4, -1+4) = (6, 3)$.
Equação: $y = x - 3$.



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices, excentricidade e assíntotas da hipérbole de equação

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 4$ e $b = 4$.

$$c^2 = 4^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4\sqrt{2}.$$

$$A_1 = (2-4, -1) = (-2, -1), \quad A_2 = (2+4, -1) = (6, -1).$$

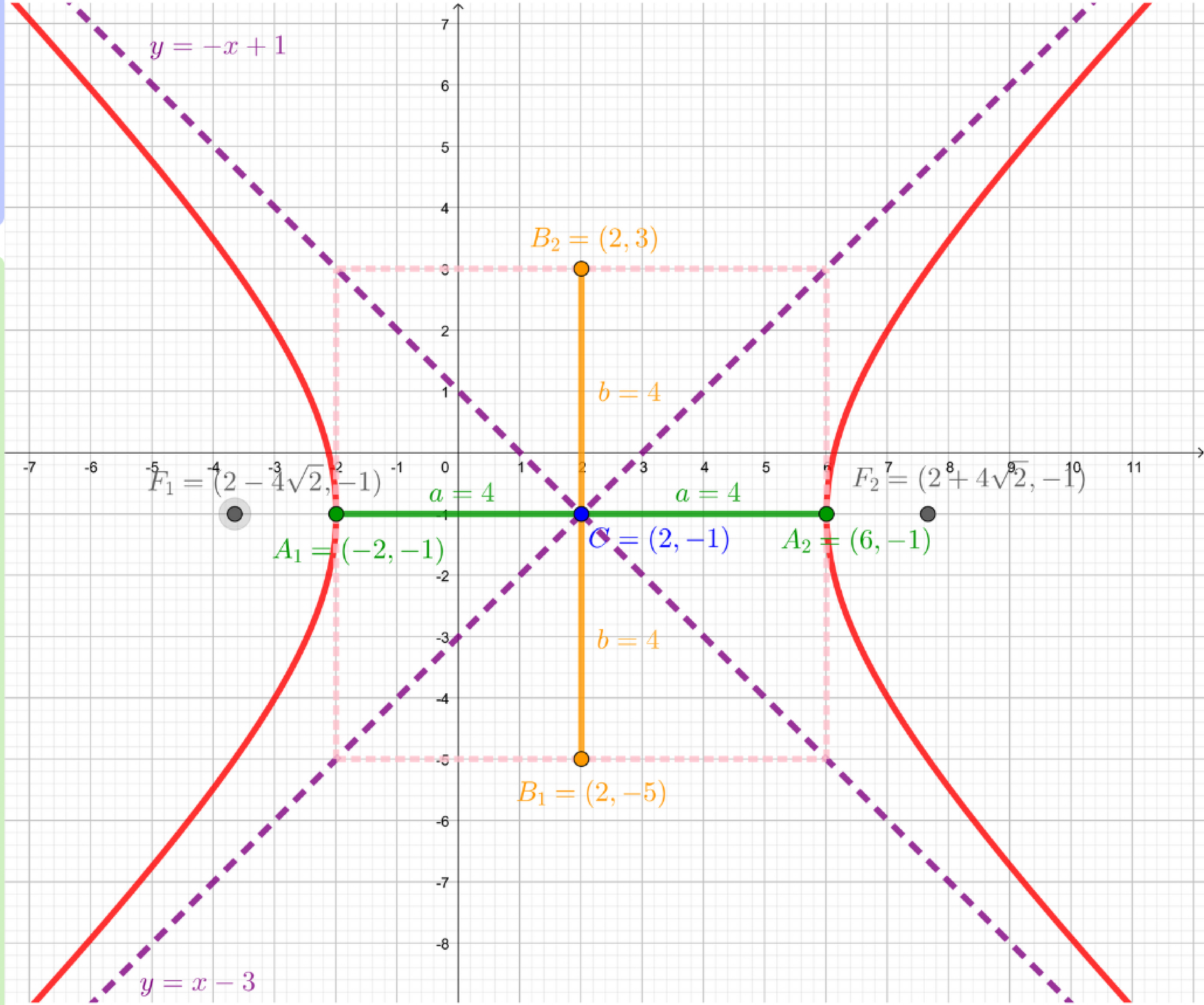
$$B_1 = (2, -1-4) = (2, -5), \quad B_2 = (2, -1+4) = (2, 3).$$

$$F_1 = (2 - 4\sqrt{2}, -1), \quad F_2 = (2 + 4\sqrt{2}, -1).$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Assíntota 1: pontos $C = (2, -1)$ e $(2+4, -1+4) = (6, 3)$.
Equação: $y = x - 3$.

Assíntota 2: pontos $C = (2, -1)$ e $(2+4, -1-4) = (6, -5)$.
Equação: $y = -x + 1$.



EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

Solução. Hipérbole, eixo real horizontal.

$C = (5, 4)$, $a = 4$, $b = 2$.

$A_1 = (1, 4)$, $A_2 = (9, 4)$.

$B_1 = (5, 2)$, $B_2 = (5, 6)$.

EXEMPLOS

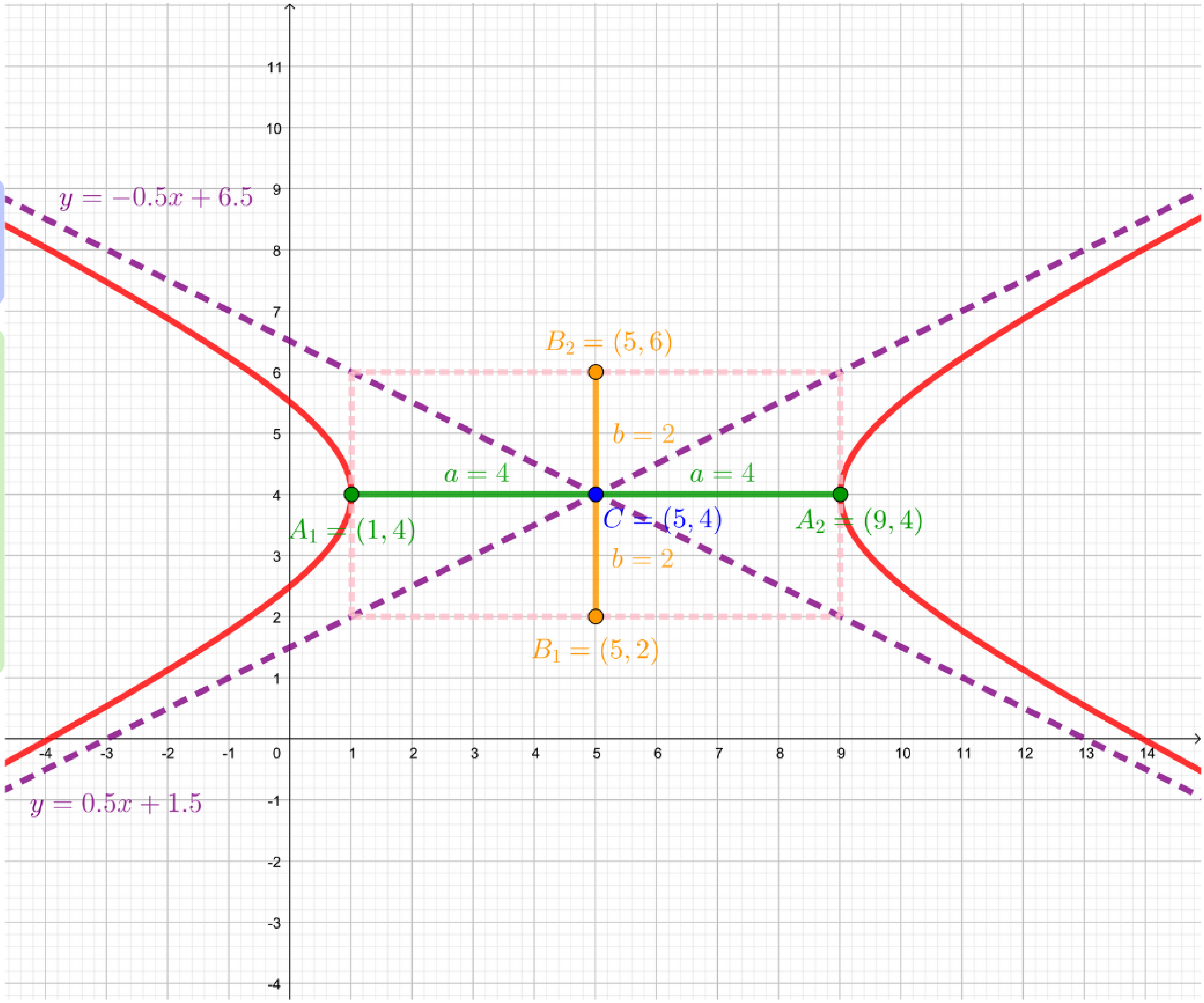
Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

Solução. Hipérbole, eixo real horizontal.

$C = (5,4)$, $a = 4$, $b = 2$.

$A_1 = (1,4)$, $A_2 = (9,4)$.

$B_1 = (5,2)$, $B_2 = (5,6)$.



EQUAÇÃO COM EIXO REAL VERTICAL

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

EQUAÇÃO COM EIXO REAL VERTICAL

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo real: horizontal

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo real: vertical

Medida do semieixo real: a

Medida do semieixo imaginário: b

Equação: $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

EXERCÍCIOS

Reescreva a equação na forma padrão, classifique, encontre os elementos e faça o gráfico.

(a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$

(b) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0.$

(c) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 0.$

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = 1$$

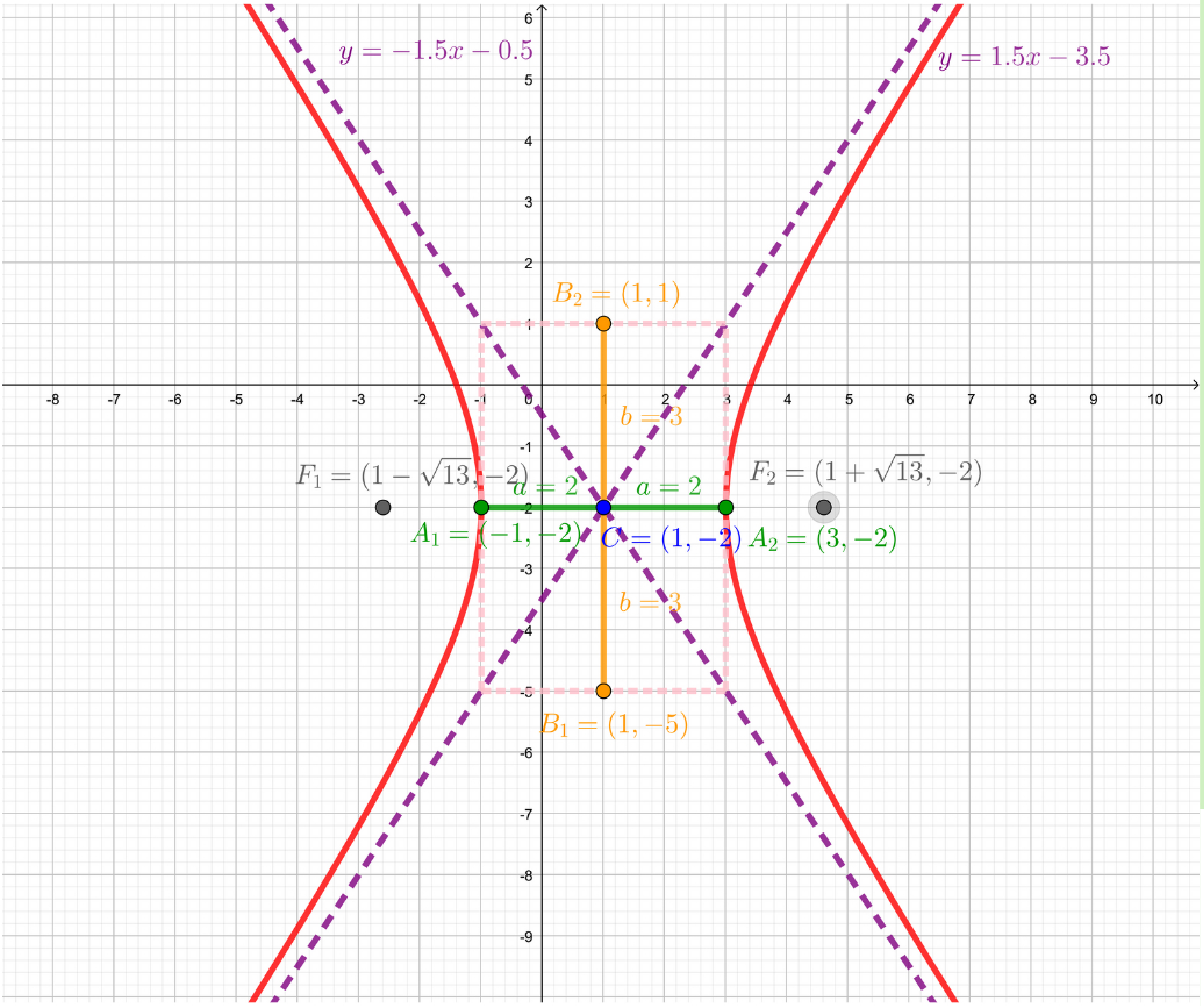
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Hipérbole com eixo real horizontal.

$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$, $C = (1, -2)$.

EXERCÍCIOS



Solução. (a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

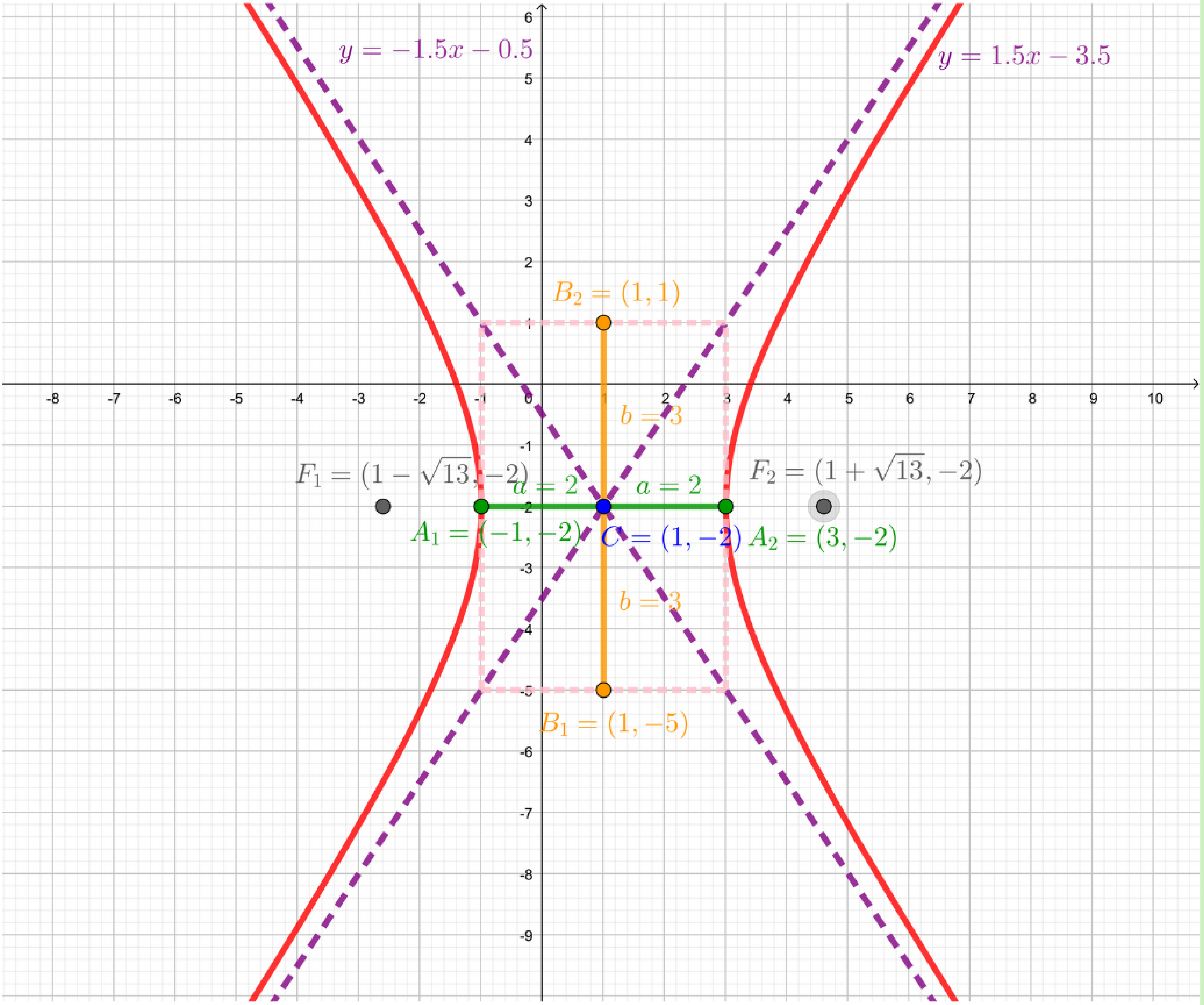
Hipérbole com eixo real horizontal.

$a = 2,\ b = 3,\ c = \sqrt{13},\ C = (1, -2).$

$A_1 = (-1, -2),\ A_2 = (3, -2),\ B_1 = (1, -5),\ B_2 = (1, 1)$

$F_1 = (1 - \sqrt{13}, -2),\ F_2 = (1 + \sqrt{13}, -2),\ e = \sqrt{13}/2.$

EXERCÍCIOS



Solução. **(a)** $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Hipérbole com eixo real horizontal.

$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$, $C = (1, -2)$.

$A_1 = (-1, -2)$, $A_2 = (3, -2)$, $B_1 = (1, -5)$, $B_2 = (1, 1)$

$F_1 = (1 - \sqrt{13}, -2)$, $F_2 = (1 + \sqrt{13}, -2)$, $e = \sqrt{13}/2$.

Assíntota 1: pontos $C = (1, -2)$ e $(1 + 2, -2 + 3) = (3, 1)$.
Equação: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Assíntota 2: pontos $C = (1, -2)$ e $(1 + 2, -2 - 3) = (3, -5)$.
Equação: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS

Solução. **(b)** $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 81 - 4(y-1)^2 + 4 + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

EXERCÍCIOS

Solução. (b) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 113 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 81 - 4(y-1)^2 + 4 + 113 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36 \\
&\Leftrightarrow \quad 4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{2^2} = 1.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

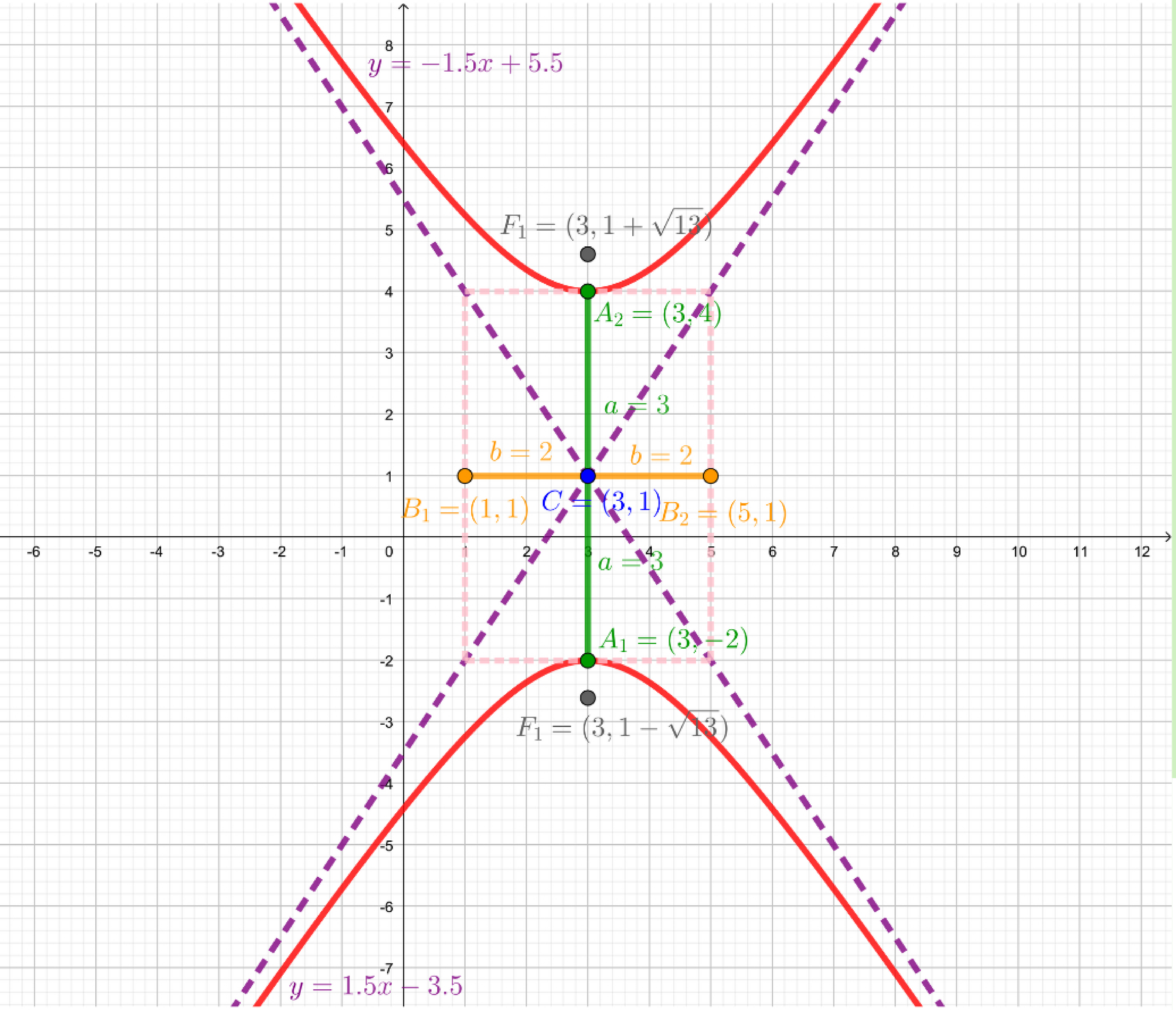
Solução. **(b)** $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 113 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 81 - 4(y-1)^2 + 4 + 113 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36 \\
&\Leftrightarrow \quad 4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{2^2} = 1.
\end{aligned}$$

Hipérbole com eixo real vertical.

$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, $C = (3, 1)$.

EXERCÍCIOS



Solução. **(b)** $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 81 - 4(y-1)^2 + 4 + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{2^2} = 1.$$

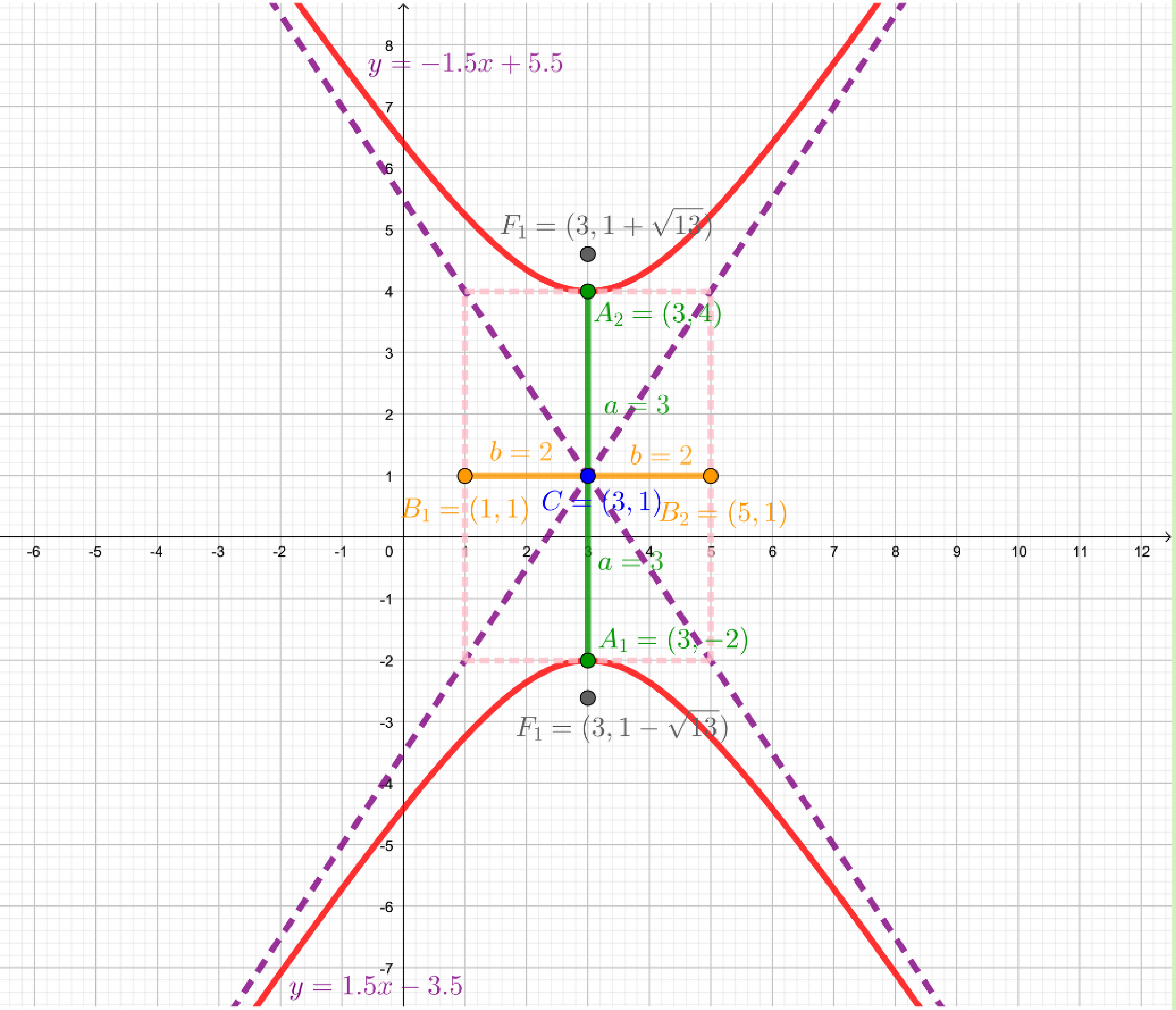
Hipérbole com eixo real vertical.

$a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13},\ C = (3, 1).$

$A_1 = (3, -2),\ A_2 = (3, 4),\ B_1 = (1, 1),\ B_2 = (5, 1)$

$F_1 = (3, 1 - \sqrt{13}),\ F_2 = (3, 1 + \sqrt{13}),\ e = \sqrt{13}/3.$

EXERCÍCIOS



Solução. **(b)** $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 81 - 4(y-1)^2 + 4 + 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{2^2} = 1.$$

Hipérbole com eixo real vertical.

$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, $C = (3, 1)$.

$A_1 = (3, -2)$, $A_2 = (3, 4)$, $B_1 = (1, 1)$, $B_2 = (5, 1)$

$F_1 = (3, 1 - \sqrt{13})$, $F_2 = (3, 1 + \sqrt{13})$, $e = \sqrt{13}/3$.

Assíntota 1: pontos $C = (3, 1)$ e $(3 + 2, 1 + 3) = (5, 4)$.
Equação: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Assíntota 2: pontos $C = (3, 1)$ e $(3 + 2, 1 - 3) = (5, -2)$.
Equação: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

EXERCÍCIOS

Solução. **(c)** $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 6y + 9 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+3)^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 0$$

EXERCÍCIOS

Solução. (c) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 6y + 9 - 9) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+3)^2 + 36 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 = 4(y+3)^2\\
&\Leftrightarrow \quad 3|x-2| = 2|y+3|.
\end{aligned}$$

Gráfico é um par de retas.

EXERCÍCIOS

Solução. **(c)** $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 6y + 9 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+3)^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 = 4(y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3|x-2| = 2|y+3|.$$

Gráfico é um par de retas.

Reta 1: $3(x-2) = 2(y+3)$.

Reta 2: $3(x-2) = -2(y+3)$.

EXERCÍCIOS

Solução. (c) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 6y + 9 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+3)^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 0$$

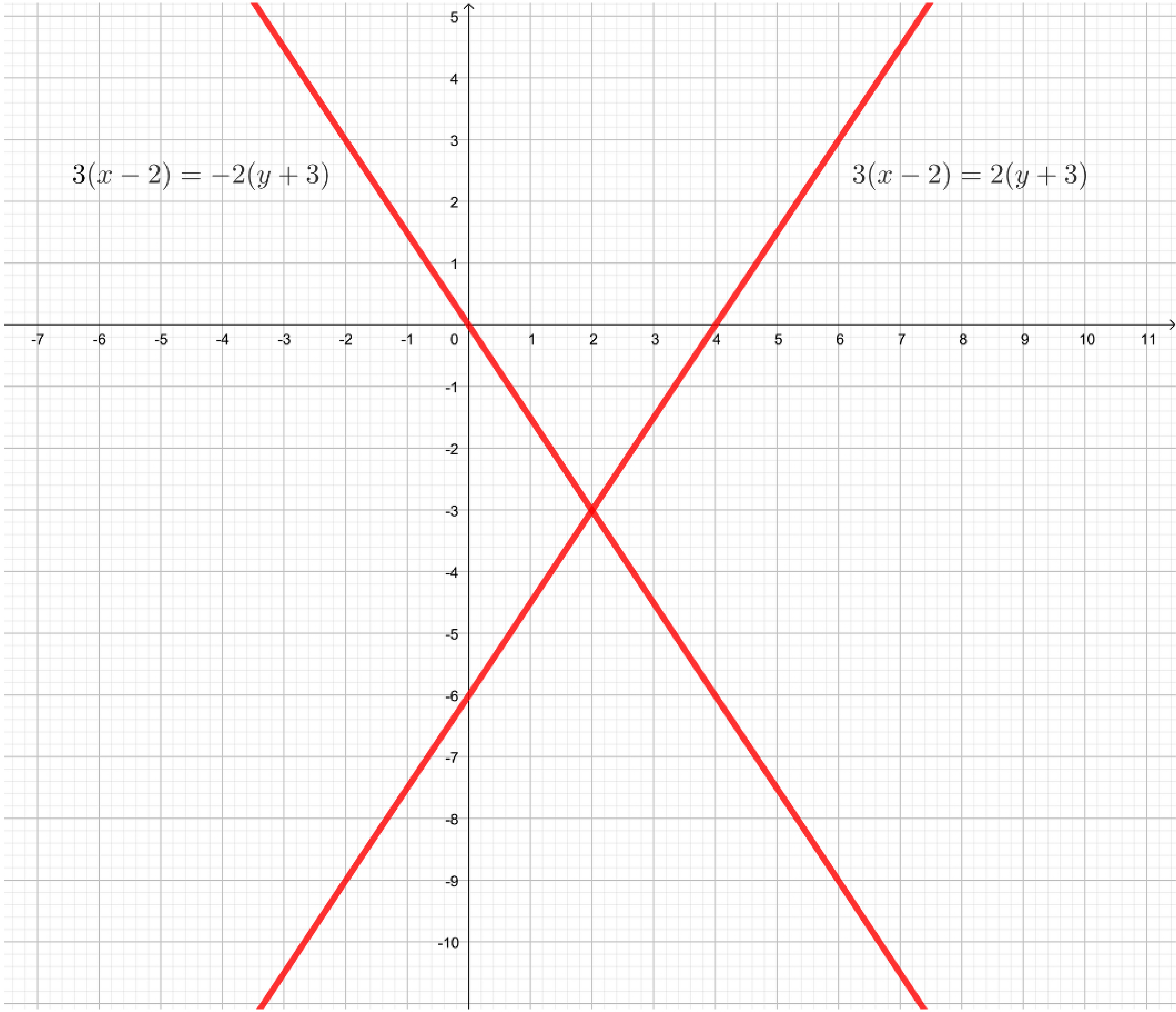
$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 = 4(y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3|x-2| = 2|y+3|.$$

Gráfico é um par de retas.

Reta 1: $3(x-2) = 2(y+3)$.

Reta 2: $3(x-2) = -2(y+3)$.



EXERCÍCIOS

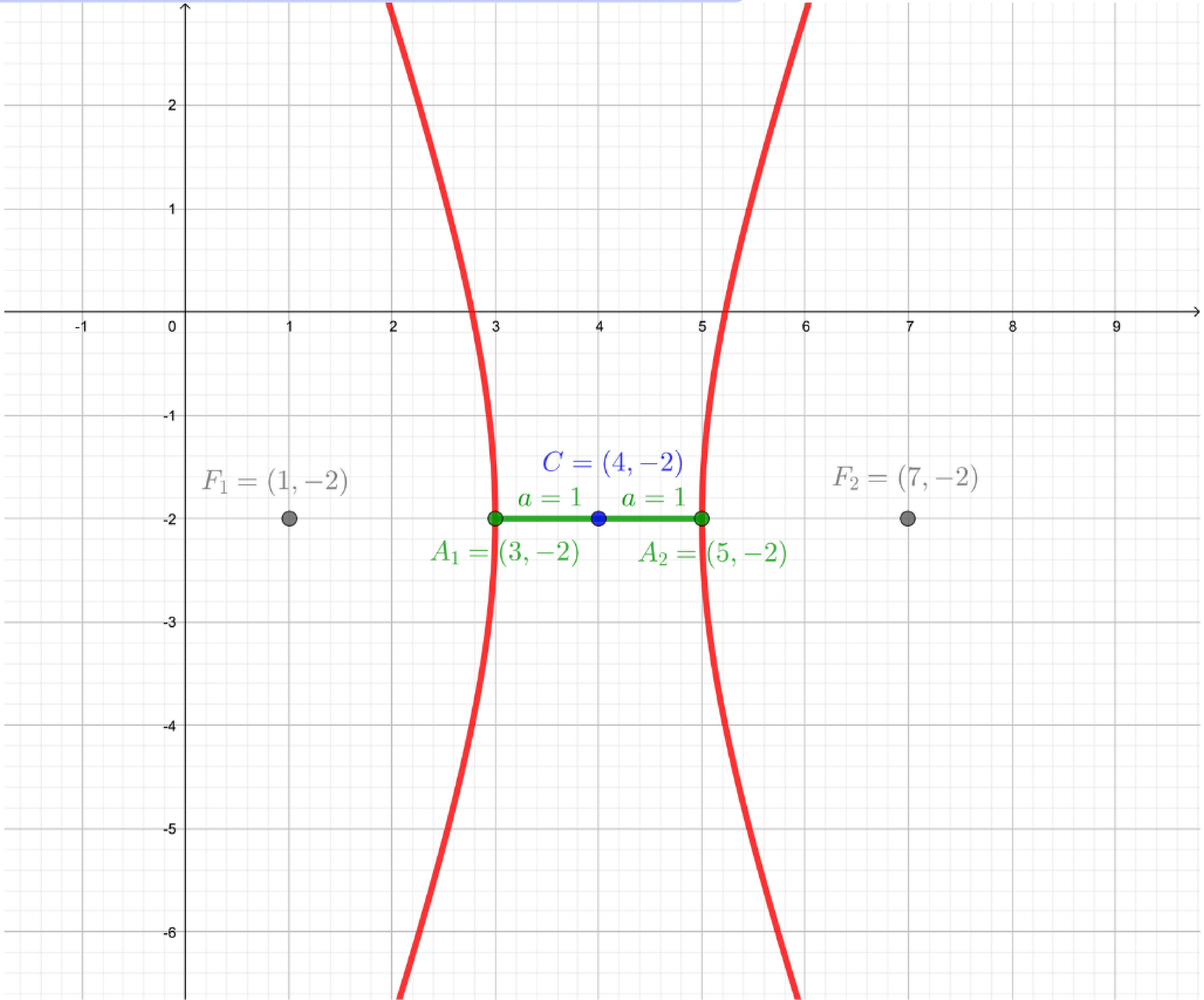
1. Determine uma equação para a hipérbole com vértices reais em $(5, -2)$ e $(3, -2)$ e um foco em $(7, -2)$.

2. Sabendo que a hipérbole $16x^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ tem focos em $F_1 = (-2, -6)$ e $F_2 = (-2, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$, determine m, n, p e q.

EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a hipérbole com vértices reais em $(5, -2)$ e $(3, -2)$ e um foco em $(7, -2)$.

Solução. 1.



EXERCÍCIOS

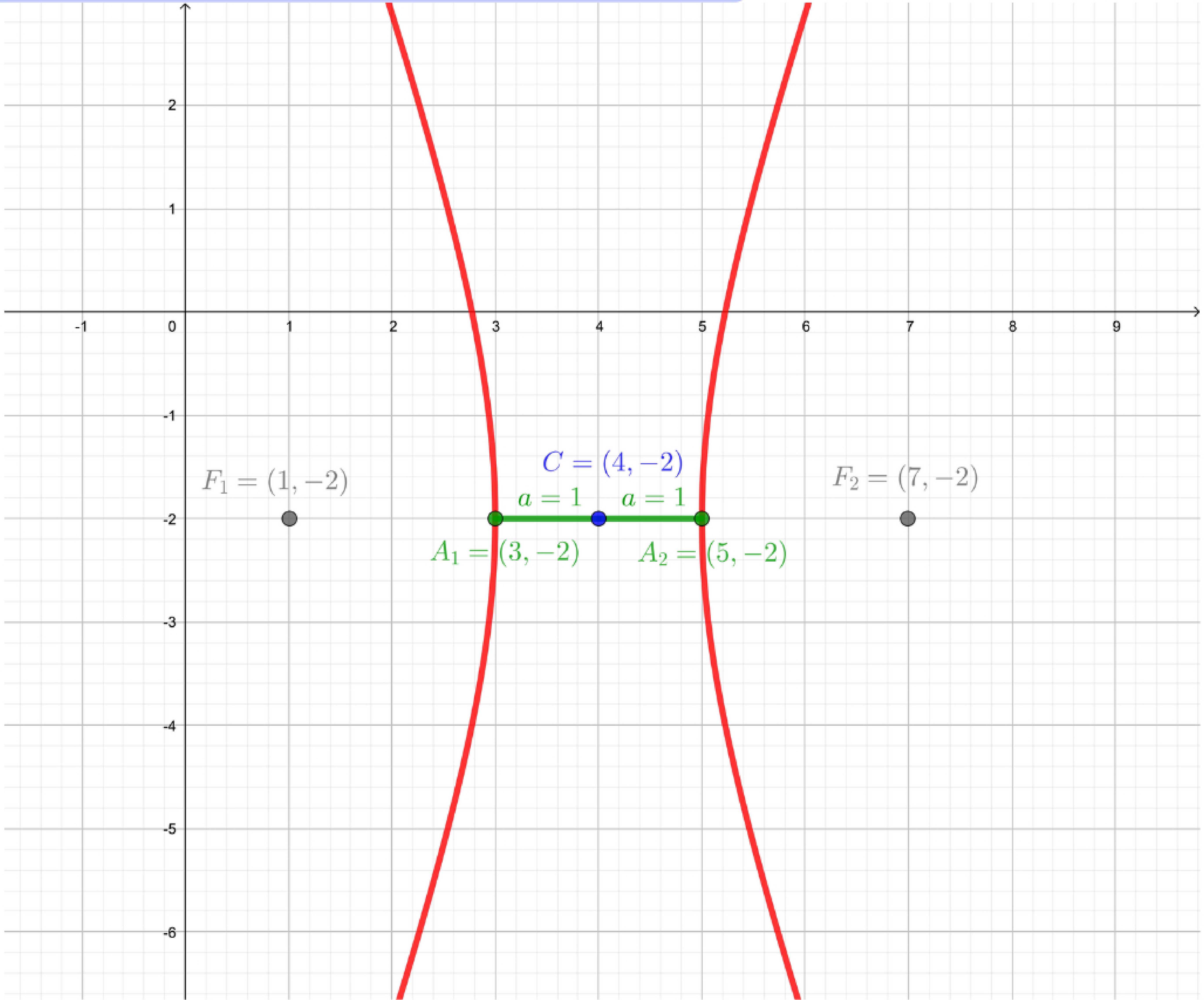
1. Determine uma equação para a hipérbole com vértices reais em $(5, -2)$ e $(3, -2)$ e um foco em $(7, -2)$.

Solução. 1.

$C = (4, -2)$, eixo real horizontal.

$a = 1$, $c = 3$.

$$3^2 = 1^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 2\sqrt{2}.$$



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a hipérbole com vértices reais em $(5,-2)$ e $(3,-2)$ e um foco em $(7,-2)$.

Solução. 1.

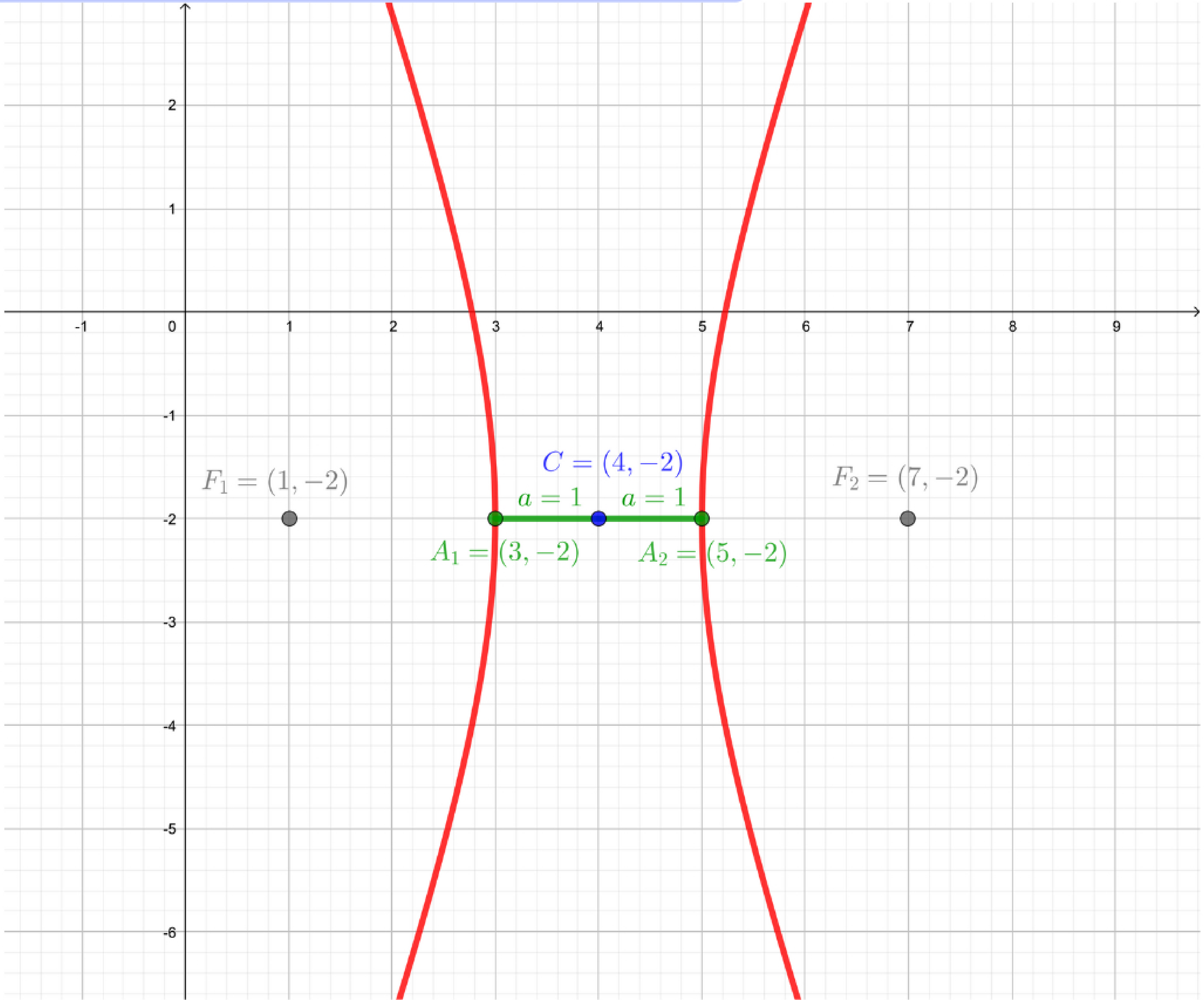
$C=(4,-2)$, eixo real horizontal.

$a=1$, $c=3$.

$3^2=1^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad b=2\sqrt{2}.$

$$\frac{(x-4)^2}{1^2}-\frac{(y+2)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \text{ ou}$$

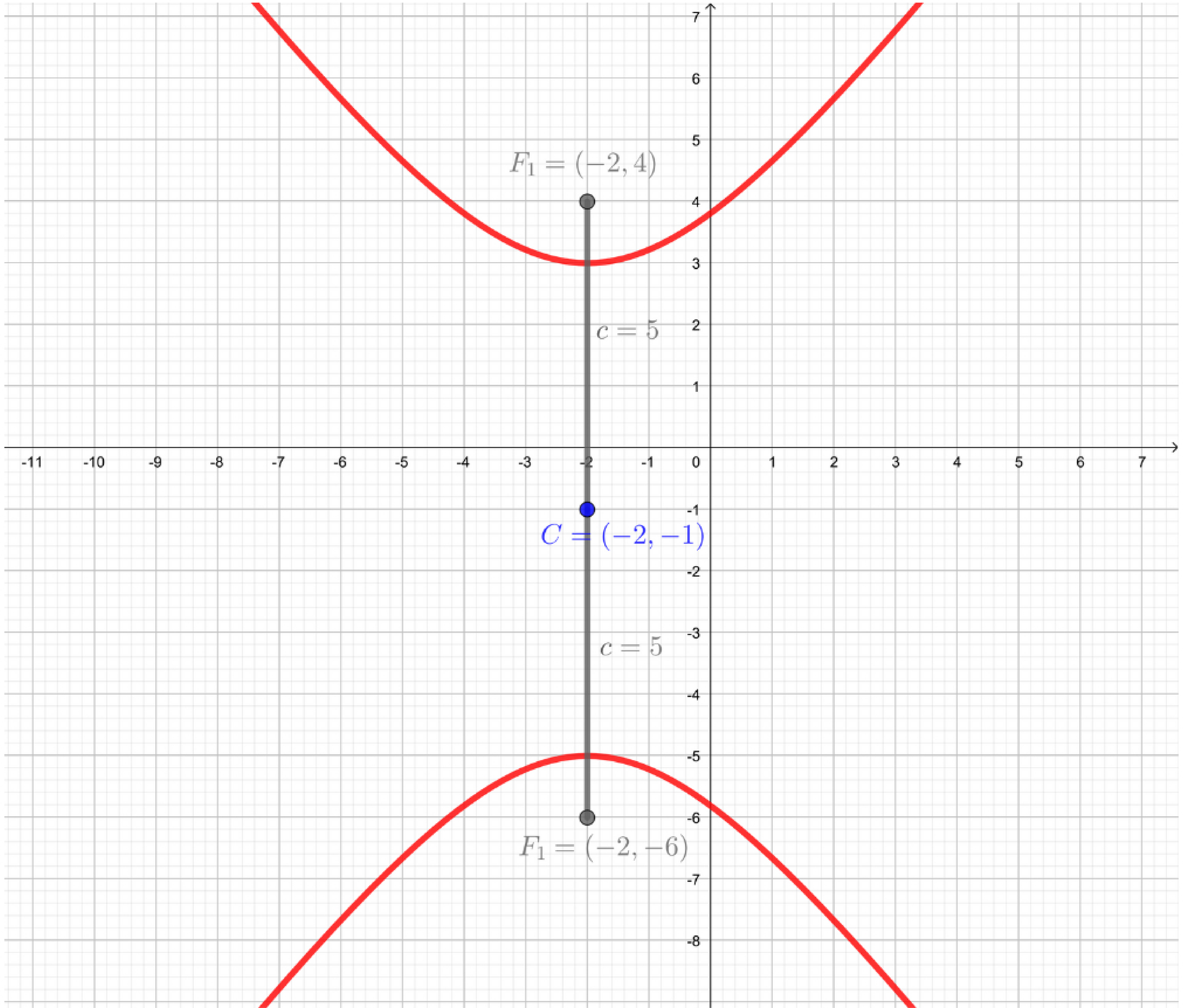
$$(x-4)^2-\frac{(y+2)^2}{8}=1.$$



EXERCÍCIOS

2. Sabendo que a hipérbole $16x^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ tem focos em $F_1 = (-2, -6)$ e $F_2 = (-2, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$, determine m, n, p e q.

Solução. 2.



EXERCÍCIOS

2. Sabendo que a hipérbole $16x^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ tem focos em $F_1 = (-2, -6)$ e $F_2 = (-2, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$, determine m, n, p e q.

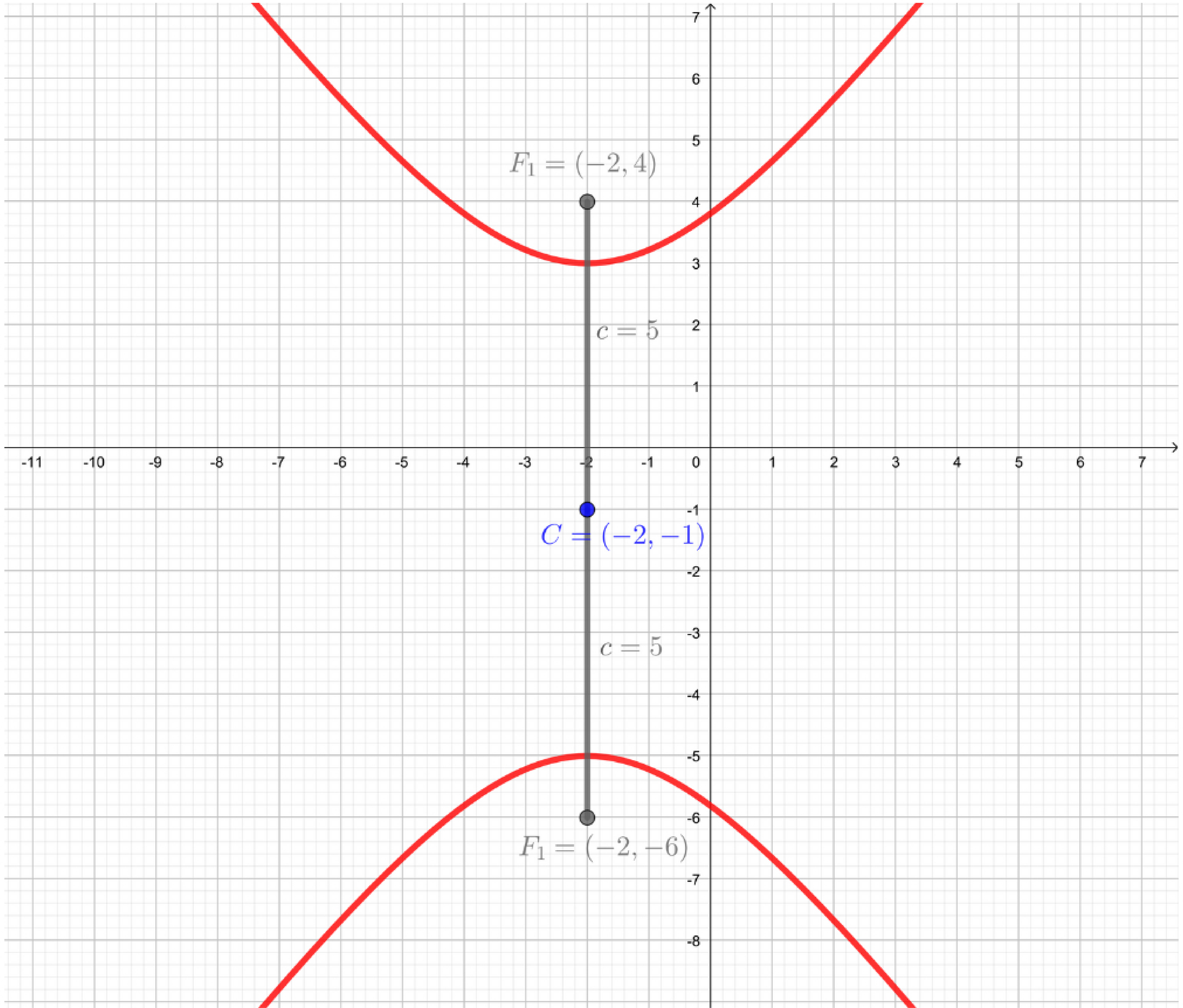
Solução. 2.

$C = (-2, -1)$, $c = 5$, eixo real vertical.

Como $e = 5/4$, então $a = 4$.

$5^2 = b^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$

$$\frac{(y+1)^2}{4^2} - \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1$$



EXERCÍCIOS

2. Sabendo que a hipérbole $16x^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ tem focos em $F_1 = (-2, -6)$ e $F_2 = (-2, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$, determine m, n, p e q.

Solução. 2.

$C = (-2, -1)$, $c = 5$, eixo real vertical.

Como $e = 5/4$, então $a = 4$.

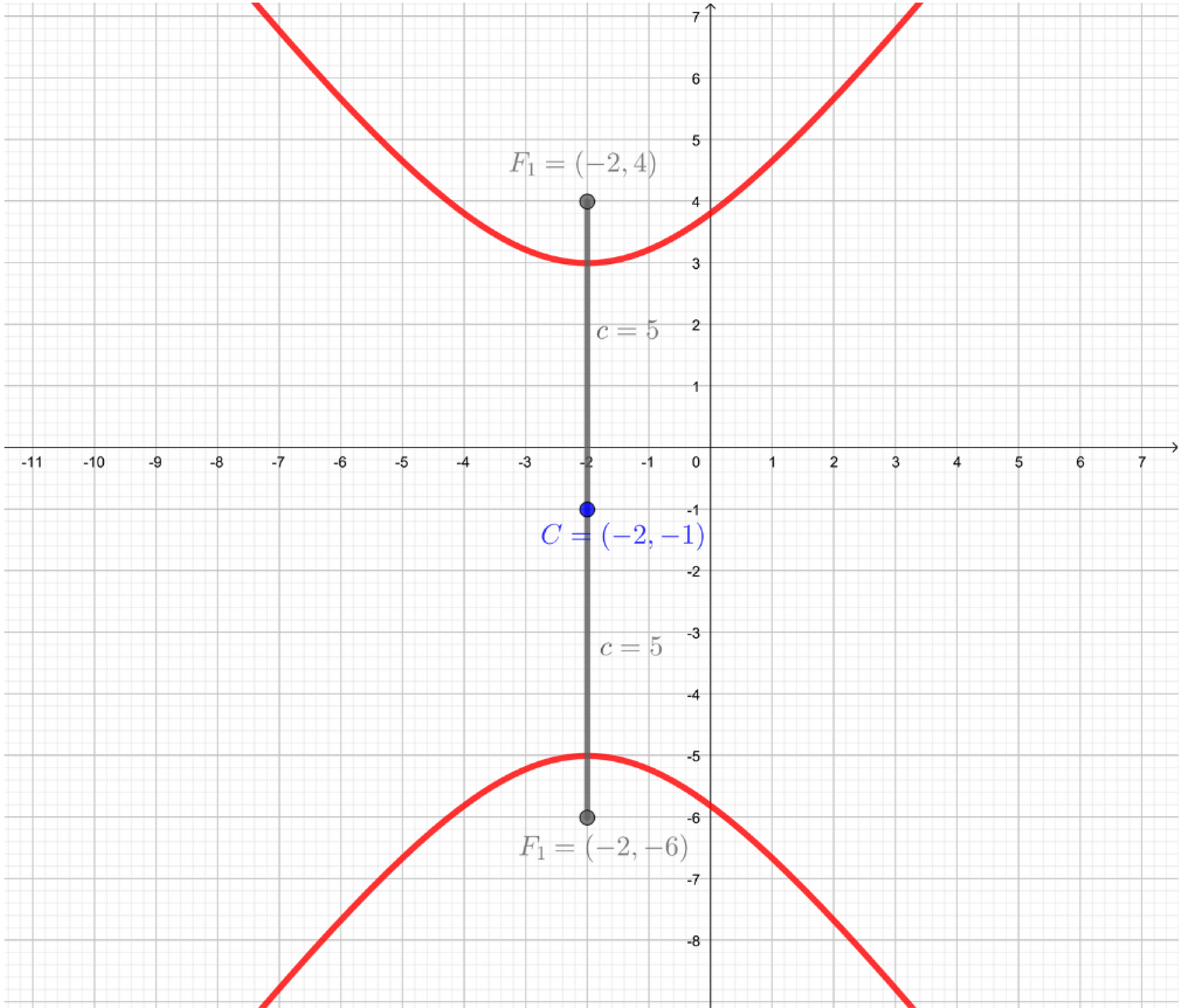
$5^2 = b^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$

$$\frac{(y+1)^2}{4^2} - \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(y+1)^2 - 16(x+2)^2 = 144.$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^2 + 18y + 9 - 16x^2 - 64x - 64 - 144 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^2 + 18y - 16x^2 - 64x - 199 = 0.$$



EXERCÍCIOS

2. Sabendo que a hipérbole $16x^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ tem focos em $F_1 = (-2, -6)$ e $F_2 = (-2, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$, determine m, n, p e q.

Solução. 2.

$C = (-2, -1)$, $c = 5$, eixo real vertical.

Como $e = 5/4$, então $a = 4$.

$5^2 = b^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$

$$\frac{(y+1)^2}{4^2} - \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1$$

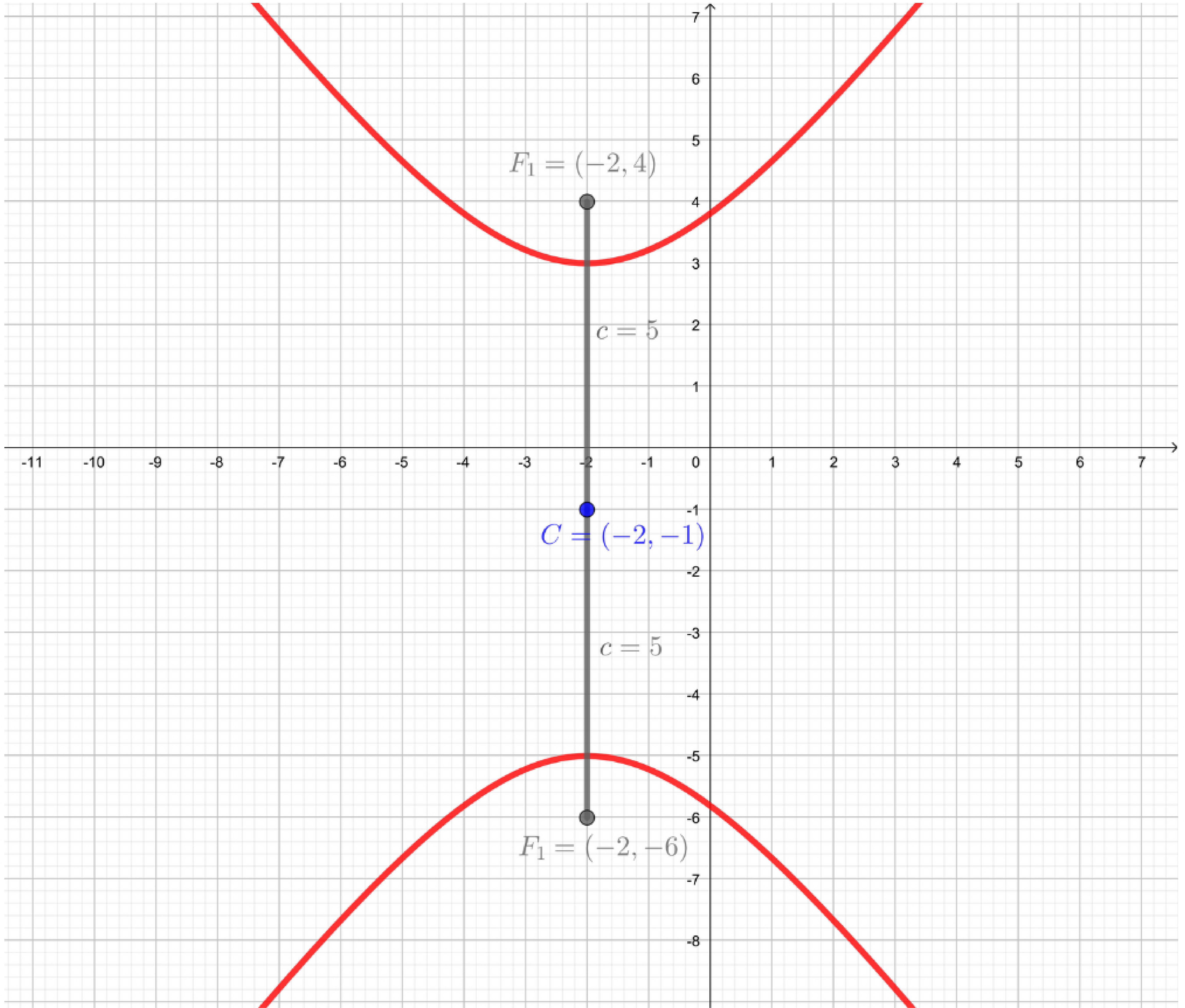
$$\Leftrightarrow \quad 9(y+1)^2 - 16(x+2)^2 = 144.$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^2 + 18y + 9 - 16x^2 - 64x - 64 - 144 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^2 + 18y - 16x^2 - 64x - 199 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 16x^2 - 9y^2 + 64x - 18y + 199 = 0.$$

$m = -9, n = 64, p = -18$ e $q = 199$.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que o sinal define a orientação e quem é "a" e "b".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que o sinal define a orientação e quem é "a" e "b".

Com o centro, a orientação, "a" e "b", você pode encontrar todos os elementos e fazer o gráfico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que o sinal define a orientação e quem é "a" e "b".

Com o centro, a orientação, "a" e "b", você pode encontrar todos os elementos e fazer o gráfico.

Se você possui informações sobre o gráfico ou elementos, use-as para descobrir o centro, a orientação, "a" e "b". Com essas informações, você pode encontrar a equação.

Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.