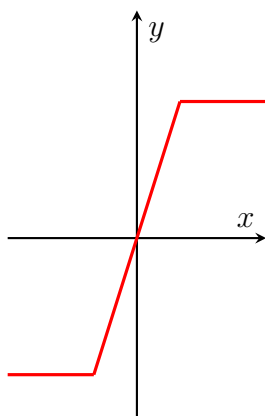


MTM3100 - Pré-cálculo

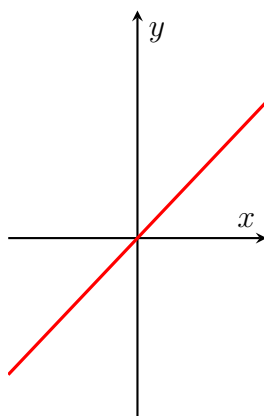
9ª lista de exercícios - Funções injetivas e suas inversas.

1. Diga quais das funções abaixo são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, considerando \mathbb{R} como contradomínio para todas elas.

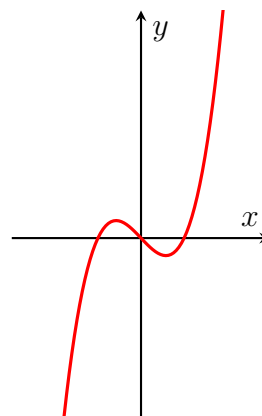
(a)



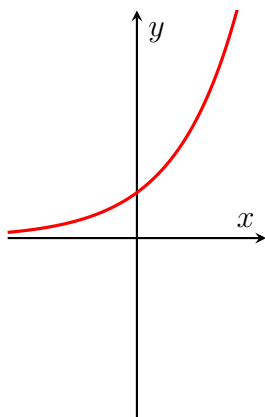
(b)



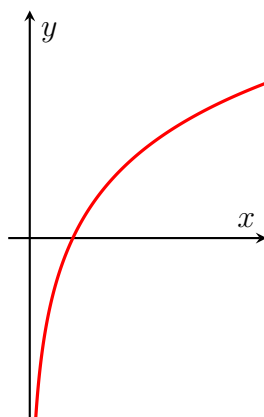
(c)



(d)



(e)



2. Determine quais das funções abaixo são injetoras. Se a resposta for positiva, determine o conjunto imagem e encontre a função inversa (para isso, considere o contradomínio igual à imagem).

(a) $f(x) = -2x + 4$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = -\sqrt{x}$.

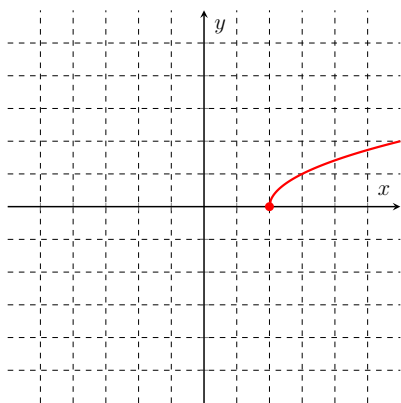
(d) $f(x) = |x|$.

(e) $f(x) = x^2 - 2x$.

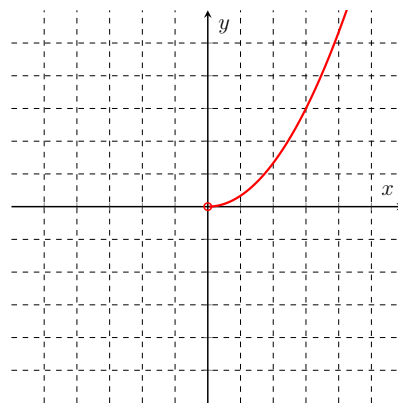
(f) $f(x) = x^3 + 8$;

3. Nos itens abaixo, faça o gráfico da inversa da função cujo gráfico está representado.

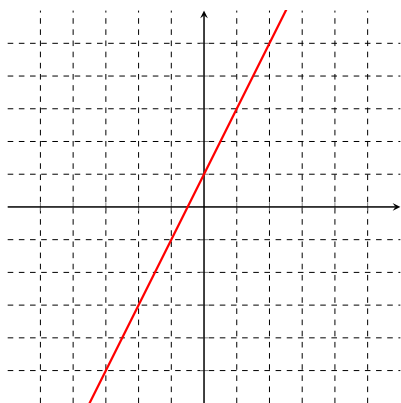
(a)



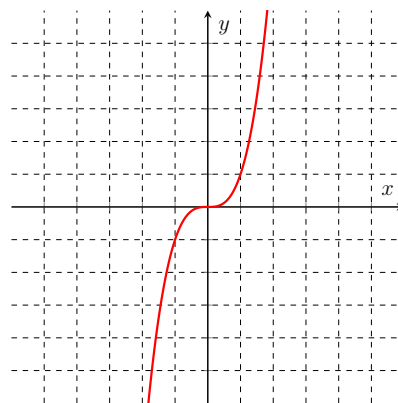
(b)



(c)



(d)



4. Um tanque com 100 litros de água está esvaziando devido a um vazamento no fundo, causando o esvaziamento completo em 40 minutos. A lei de Toricelli diz que o volume de água que está no tanque depois de t minutos é

$$V(t) = 100 \left(1 - \frac{t}{40} \right)^2.$$

Encontre a função inversa V^{-1} e diga o que ela representa. Determine $V^{-1}(25)$.

5. Seja f uma função inversível (isto é, que possui inversa) e suponha que $f(1) = 3$ e que $f(3) = 7$. Determine $f^{-1}(3)$ e $f(3)^{-1}$.
6. As funções abaixo são injetoras (verifique!). Encontre a inversa dessas funções (assumindo contradomínio igual ao conjunto imagem).

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, com $x > 0$. (b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$. (c) $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

7. Determine o menor número real t tal que a função $f(x) = x^2 - 14x + 24$ seja injetiva no intervalo $[t, \infty)$.
8. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Marque V ou F .

- (a) $f^{-1}(x) = 0$ somente se $x = 1$.
- (b) f é injetiva.
- (c) f é sobrejetiva.

- (d) f é decrescente no intervalo $(1, \infty)$.
- (e) $f(x) = 0$ somente se $x = -\frac{1}{2}$.
9. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{4/2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{5x - 7}{-2x + 4}$, que é bijetora sobre sua imagem. Restringindo-se o contradomínio à imagem obtemos então uma função inversível. Determine os menores inteiros positivos a , b , c e d tais que $f^{-1}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.
10. A função $f(x) = x^2 - 24x$ é injetiva no intervalo $(-\infty, 12)$. Determine os valores de a e b de modo que a função $f^{-1}(x) = a - \sqrt{x + b}$ seja a inversa de f .
11. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, considere a função real $f(x) = ax + b$. Para quais valores de a e b essa função é inversível? Para quais valores de a e b tem-se $f = f^{-1}$?

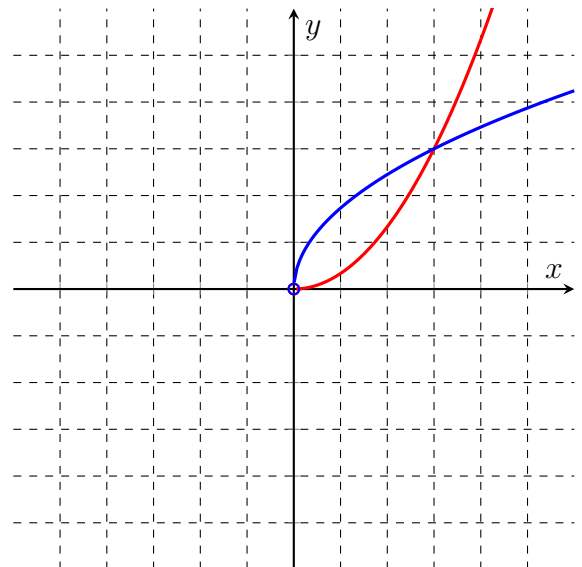
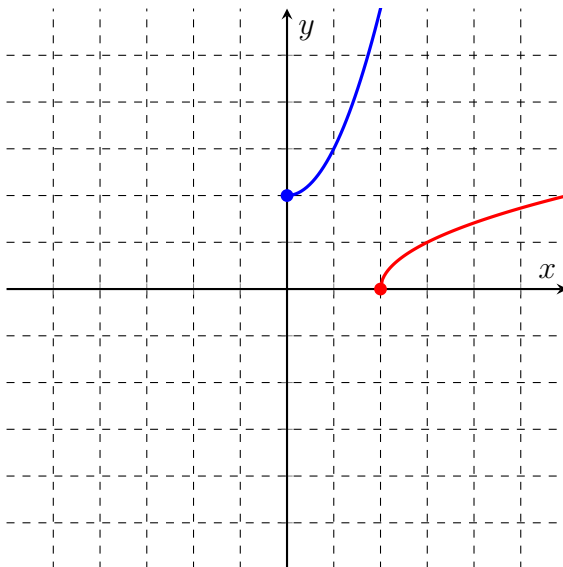


MTM3100 - Pré-cálculo

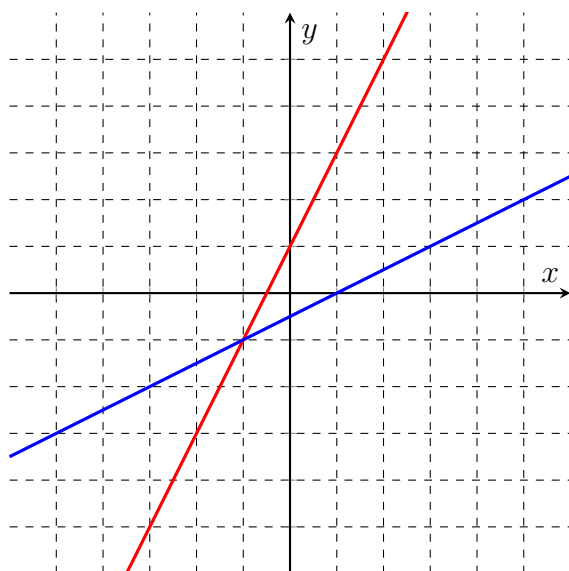
Gabarito da 9ª lista de exercícios

Funções injetivas e suas inversas.

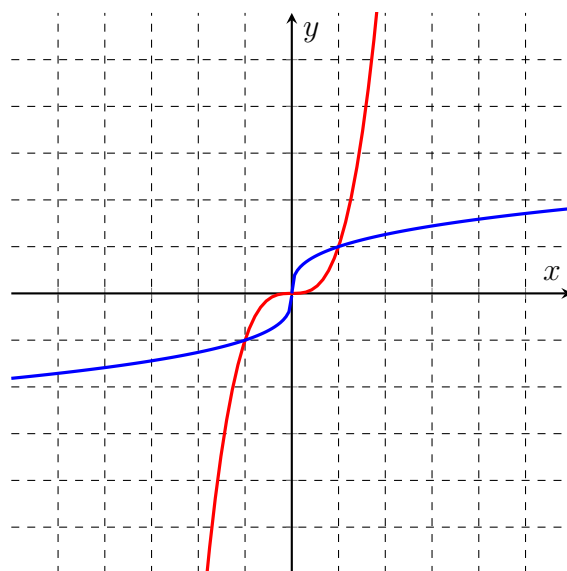
- 1.
- (a) Nada. (b) Injetora, sobrejetora e, portanto, bijetora.
(c) Sobrejetora. (d) Injetora.
(e) Injetora, sobrejetora e, portanto, bijetora.
- 2.
- (a) Injetora, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + 2$.
(b) Injetora, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$, $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por $f^{-1}(x) = x^2$.
(c) Injetora, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_-$, $f^{-1} : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por $f^{-1}(x) = x^2$.
(d) Não é injetora.
(e) Não é injetora.
(f) Injetora, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}$.
- 3.
- (a) (b)



(c)



(d)



4. $V^{-1} : [0, 100] \rightarrow [0, 40]$ é dada por $V^{-1}(x) = -40 \left(\frac{\sqrt{x}}{10} - 1 \right)$ e representa quanto tempo é necessário passar para que o volume de água no tanque seja x litros. Tem-se $V^{-1}(25) = 20$.

5. $f^{-1}(3) = 1$ e $f(3)^{-1} = \frac{1}{7}$.

6.

(a) $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ é dada por $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.

(b) $f^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$ é dada por $f^{-1}(x) = \frac{1 - 2x}{x}$.

(c) $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [-5/2, \infty)$ é dada por $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}$.

7. $t = 7$

8.

(a) F

(b) V

(c) V

(d) V

(e) V

9. $a = 4$, $b = 7$, $c = 2$ e $d = 5$.

10. $a = 12$ e $b = 144$.

11. f é inversível se, e somente se, $a \neq 0$. Se $b \neq 0$ tem-se $f = f^{-1}$ se, e somente se, $a = -1$. Quando $b = 0$ tem-se $f = f^{-1}$ se, e somente se, $a = \pm 1$.