Geometria Analítica

Videoaula 3.10

Produto Vetorial

Departamento de Matemática (UFSC)

Professora ALDA MORTARI

Professor CHRISTIAN WAGNER

Professor FELIPE TASCA

Professor GIULIANO BOAVA

Professor LEANDRO MORGADO

Professora MARÍA ASTUDILLO

Professor MYKOLA KHRYPCHENKO

Produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores em $\mathbb{R}^3$.

O **produto vetorial** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1\, z_2 - z_1\, y_2)\,\vec{i} - (x_1\, z_2 - z_1\, x_2)\,\vec{j} + (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)\,\vec{k}.$$

Método Prático

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule o produto vetorial entre $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 4, 3)$.

Propriedades do Produto Vetorial

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedade do produto vetorial:

- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$

Propriedades do Produto Vetorial

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedade do produto vetorial:

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Propriedades do Produto Vetorial

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedade do produto vetorial:

- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
- $(\lambda\, \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda\, (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda\, \vec{v})$.

Propriedades do Produto Vetorial

Para quaisquer vetores no espaço, são válidas as seguintes propriedade do produto vetorial:

- $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$

- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \, sen(\theta).$$

Interpretação Geométrica

O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo determinado pelos vetores.

Exemplo

Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A = (3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B = (1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$.