



MTM3100 - Pré-cálculo

15ª lista de exercícios - Funções trigonométricas inversas

1. A função  $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \sin x$  é bijetora e, portanto, possui inversa. Sua inversa  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  é denotada por  $f^{-1}(x) = \arcsen x$  (às vezes também é denotada por  $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ). Por exemplo,  $\arcsen(-1)$  é igual ao único número pertencente  $[-\pi/2, \pi/2]$  cujo seno é igual a  $-1$  e, portanto,  $\arcsen(-1) = -\pi/2$ . Como outros exemplos, temos  $\arcsen 0 = 0$  e  $\arcsen(1/2) = \pi/6$ . Calcule o que se pede.

- (a)  $\arcsen 1$ . (b)  $\arcsen(\sqrt{3}/2)$ . (c)  $\arcsen(-\sqrt{2}/2)$ .

2. Calcule o que se pede.

- (a)  $\sin(\arcsen(-1/2))$ . (b)  $\arcsen(\sin(\pi/6))$ . (c)  $\arcsen(\sin x)$ .

3. A função  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \cos x$  é bijetora. Sua inversa  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  é denotada por  $f^{-1}(x) = \arccos x$  (às vezes também é denotada por  $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ). Calcule o que se pede.

- (a)  $\arccos 1$ . (b)  $\arccos(\sqrt{3}/2)$ . (c)  $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ .

4. Calcule o que se pede.

- (a)  $\cos(\arccos(-1/2))$ . (b)  $\arccos(\cos(\pi/6))$ . (c)  $\arccos(\cos x)$ .

5. A função  $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \operatorname{tg} x$  é bijetora. Sua inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  é denotada por  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$  (às vezes também é denotada por  $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ ). Calcule o que se pede.

- (a)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ . (b)  $\operatorname{arctg} 1$ . (c)  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ .

6. Quando um projétil é lançado a uma velocidade  $v_0$  formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal, seu alcance (isto é, a distância horizontal percorrida) é dada por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g},$$

em que  $g$  é a aceleração da gravidade. Se  $v_0 = 30 \text{ m/s}$ , qual deve ser o ângulo  $\theta$  para que o alcance seja de  $79,5 \text{ m}$ ? Utilize  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

7. Seja  $x \in [-1, 1]$ . Determine o valor das expressões abaixo.

- (a)  $\cos(\arcsen x)$ . (b)  $\sin(\arccos x)$ .

8. Seja  $x \in [-1, 1]$ . Determine o valor das expressões abaixo.

- (a)  $\operatorname{tg}(\arcsen x)$ . (b)  $\sec(\arcsen x)$ .

9. Determine o valor das expressões abaixo.

- (a)  $\operatorname{tg}(\arcsen(-1/3))$ . (b)  $\cos(\operatorname{arctg} 2)$ .

10. Determine o domínio da função  $f(x) = \arccos(43x + 128)$ , isto é, o maior intervalo real onde  $f$  fica bem definida.

- 11.** Determine o domínio da função

$$f(x) = \frac{\arcsen x + \log x}{2x - 1}.$$

- 12.** Determine  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  de modo que, se  $\theta = \operatorname{arctg}(7t + 1)$  então

$$\cos(2\theta) = \frac{-at^2 - bt}{2 + ct + dt^2}.$$

- 13.** Uma pessoa mediu o ângulo em relação à horizontal entre sua posição e o topo de um prédio de 20 m de altura e obteve  $30^\circ$ . Ao se aproximar  $20(\sqrt{3} - 1)$  m do edifício, qual é o ângulo (em relação à horizontal) entre a nova posição e o topo do prédio?

- 14.** Determine  $n$  inteiro tal que

$$\tan \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \operatorname{arctg} \frac{1}{15} \right) = \frac{n}{89}.$$



MTM3100 - Pré-cálculo

Gabarito da 15ª lista de exercícios

Funções trigonométricas inversas

1.  
(a)  $\arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$ .                      (b)  $\arcsen(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{3}$ .                      (c)  $\arcsen(-\sqrt{2}/2) = -\frac{\pi}{4}$ .
2.  
(a)  $\sen(\arcsen(-1/2)) = -1/2$ .  
(b)  $\arcsen(\sen(\pi/6)) = \pi/6$ .  
(c)  $\arcsen(\sen x) = y$ , em que  $y$  é o único número pertencente a  $[-\pi/2, \pi/2]$  tal que  $\sen y = \sen x$ .
3.  
(a)  $\arccos 1 = 0$ .                      (b)  $\arccos(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{6}$ .                      (c)  $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \frac{3\pi}{4}$ .
4.  
(a)  $\cos(\arccos(-1/2)) = -1/2$ .  
(b)  $\arccos(\cos(\pi/6)) = \pi/6$ .  
(c)  $\arccos(\cos x) = y$ , em que  $y$  é o único número pertencente a  $[0, \pi]$  tal que  $\cos y = \cos x$ .
5.  
(a)  $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ .                      (b)  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ .                      (c)  $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ .
6.  $\theta = \frac{\arcsen(Rg/v_0^2)}{2} \cong 30^\circ$ .
7.  
(a)  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1-x^2}$ .                      (b)  $\sen(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ .
8.  
(a)  $\tg(\arcsen x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .                      (b)  $\sec(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
9.  
(a)  $\tg(\arcsen(-1/3)) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ .                      (b)  $\cos(\arctg 2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .
10.  $[-3, -127/43]$ .
11.  $(0, 1/2) \cup (1/2, 1]$
12.  $a = d = 49, b = c = 14$
13.  $45^\circ$
14.  $n=21$