LAPIX Laboratório de Proc. Imagens e Comp. Gráfica
INCoD Instituto Nacional de C&T para Convergência Digital
MCTIC CNPq FAPESC

Computação Gráfica:

Aula 3:
Transformações 2D e o Sistema de Coordenadas Homogêneo

Prof. Dr. rer.nat. Aldo von Wangenheim

Departamento de Informática e Estatística - INE/CTC/UFSC

Parte I: 1. Conceitos Básicos

Relembrando: O que é computação Gráfica ?

Conjunto de métodos e técnicas computacionais para a representação de forma gráfica, através de um computador, de objetos de um mundo real (ou virtual).

Implica:

– Em um **modelo interno** deste mundo a ser representado

– Em um **conjunto de transformações** para representar este modelo em um dispositivo de saída de um computador (vídeo, plotter, etc)

Parte I: 3. Transformações 2D

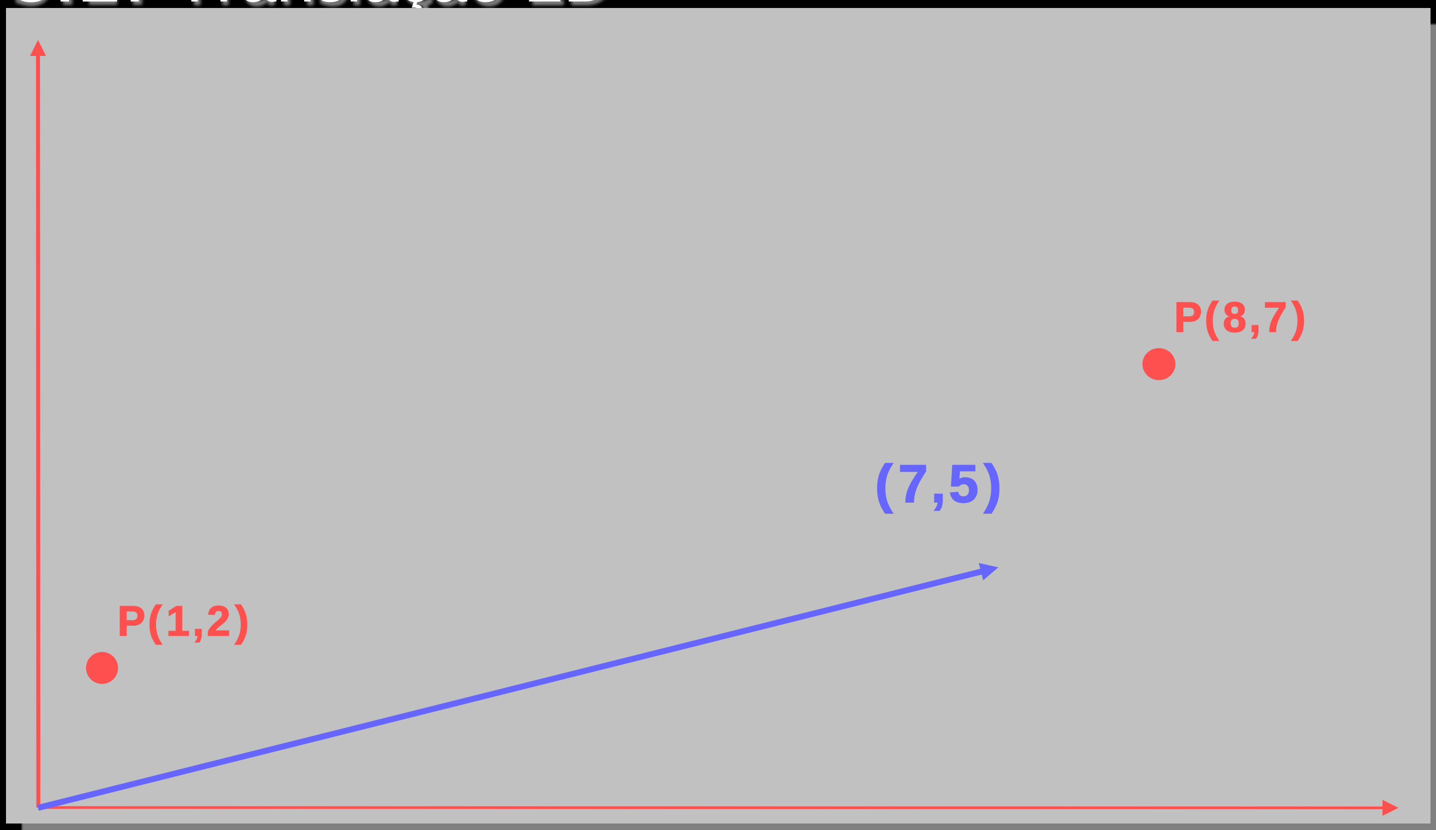
Como Modelamos as Tranformações de Objetos do Mundo Real em Computação Gráfica ?

Tanto na representação bidimensional de um mundo como na representação 3- ou *n*-dimensional, existem em computação gráfica 3 transformações geométricas primitivas, que podem ser combinadas para se obter o comportamento de um objeto no mundo em que está modelado: translação, escalonamento e rotação.

Veremos primeiramente estas transformações para o caso 2D

Parte I: 3. Transformações 2D

3.1: Translação 2D



novas
translação

ção
:

Parte I: 3. Transformações 2D

Em notação matricial:

P = [x y], P' = [x' y'], T = [Dx Dy]

Dessa forma reescrevendo de forma vetorial:

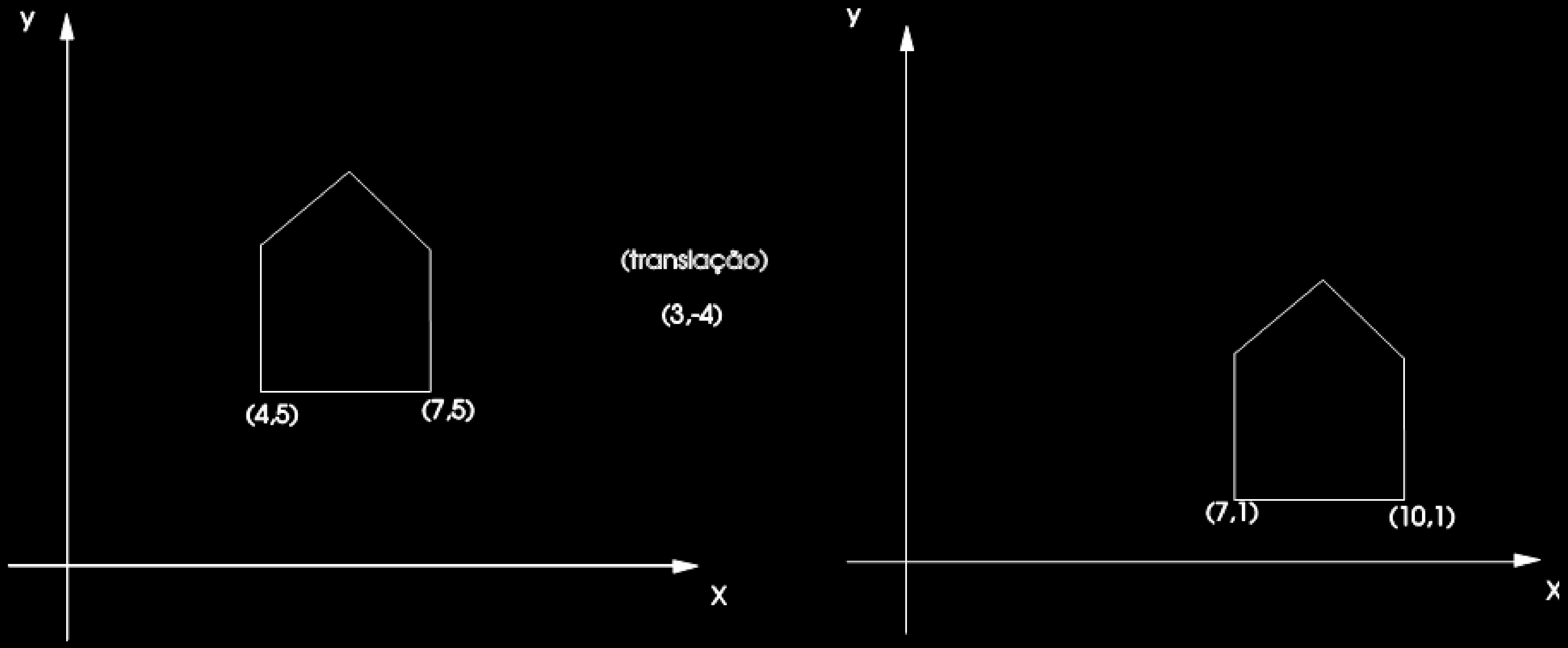
[x' y'] = [x y] + [Dx Dy]

ou

P' = P + T

para todo P do Objeto a ser Transladado

Parte I: 3. Transformações 2D



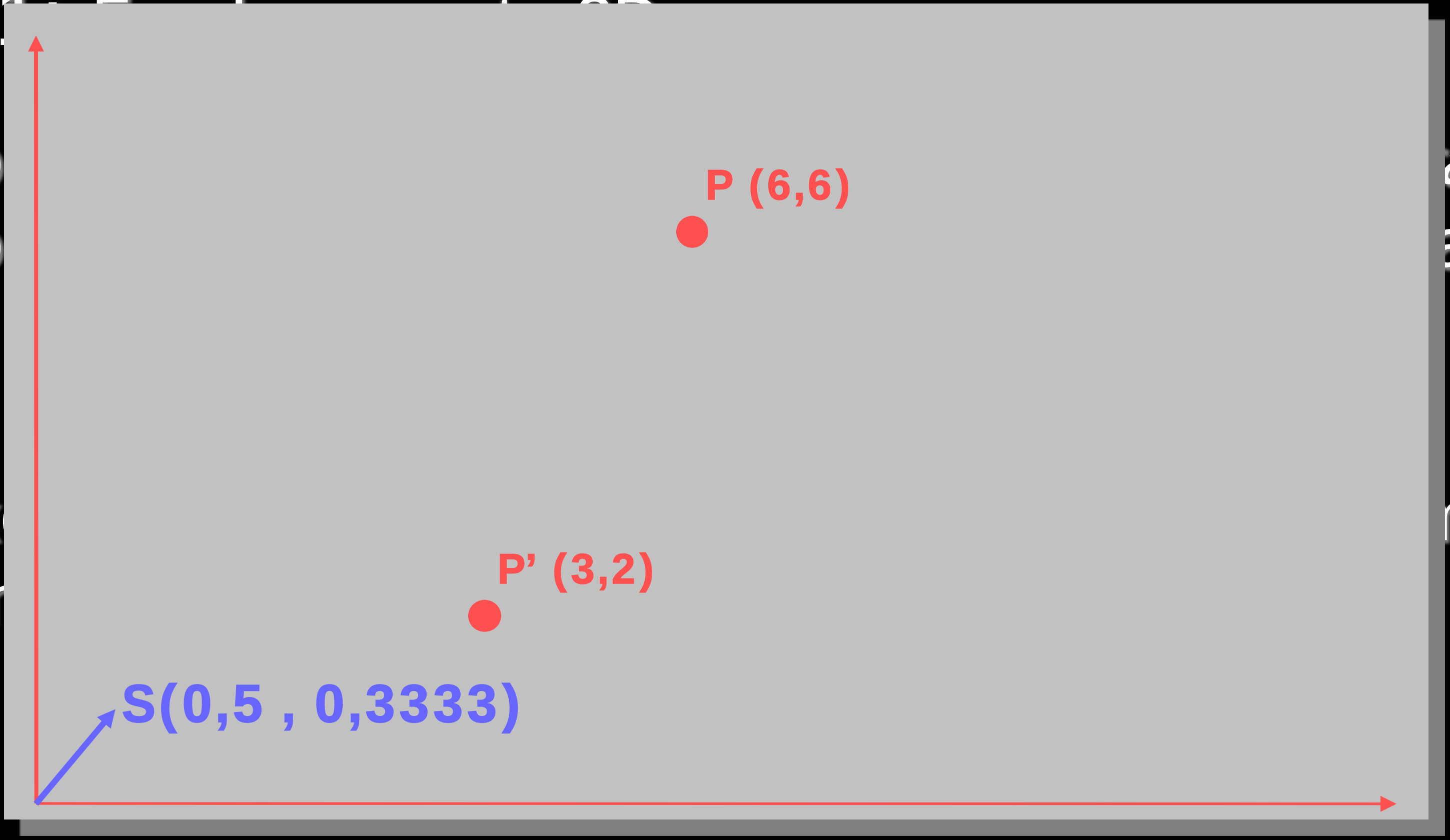
Parte I: 3. Transformações 2D

3.1

Po *ados*)
po ação:

x'

Ex n 1/2
em



Parte I: 3. Transformações 2D

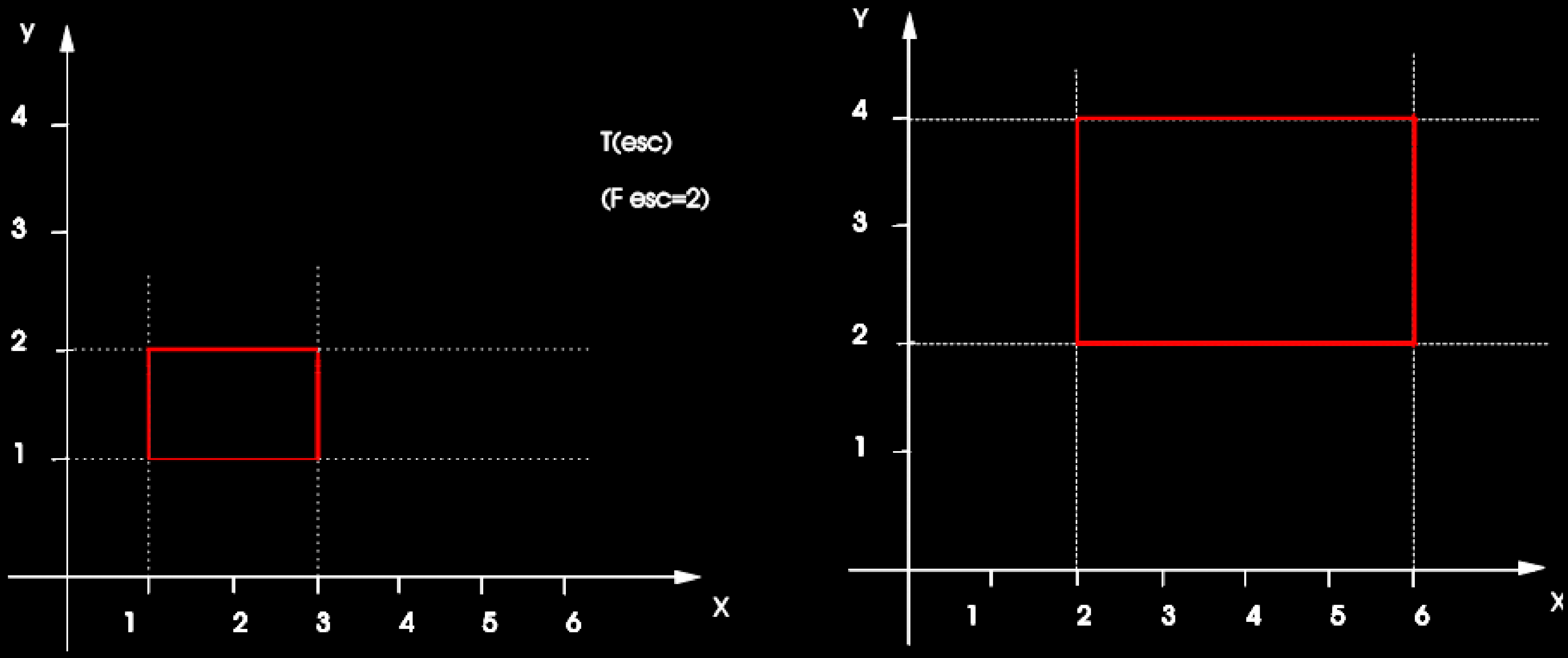
Definindo S como a Matrix $\begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$

podemos escrever a translação em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$

Ou: P' = P . S

Parte I: 3. Transformações 2D



Parte I: 3. Transformações 2D

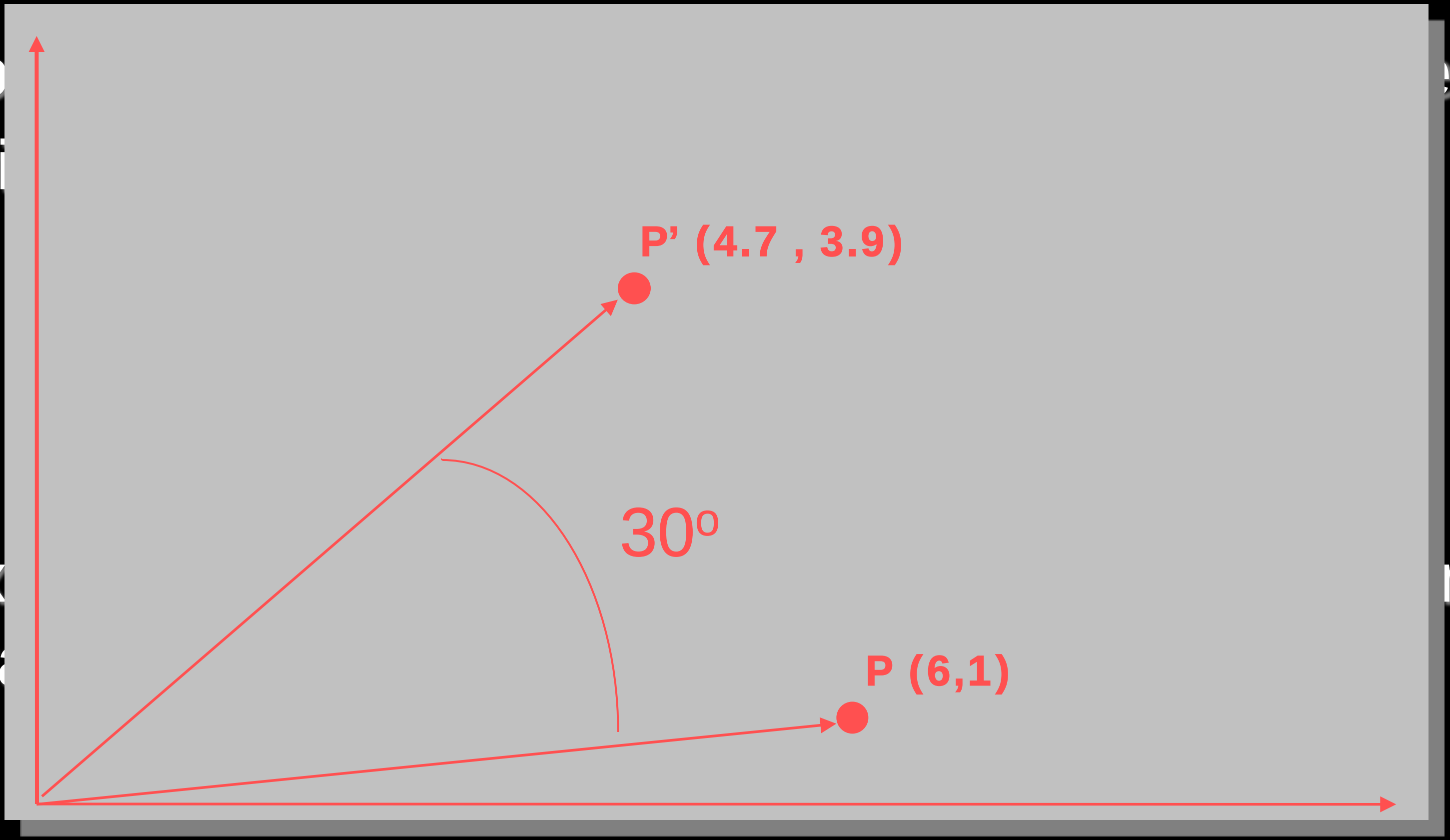
3.1: Rotação 2D

Po ... edor da
ori

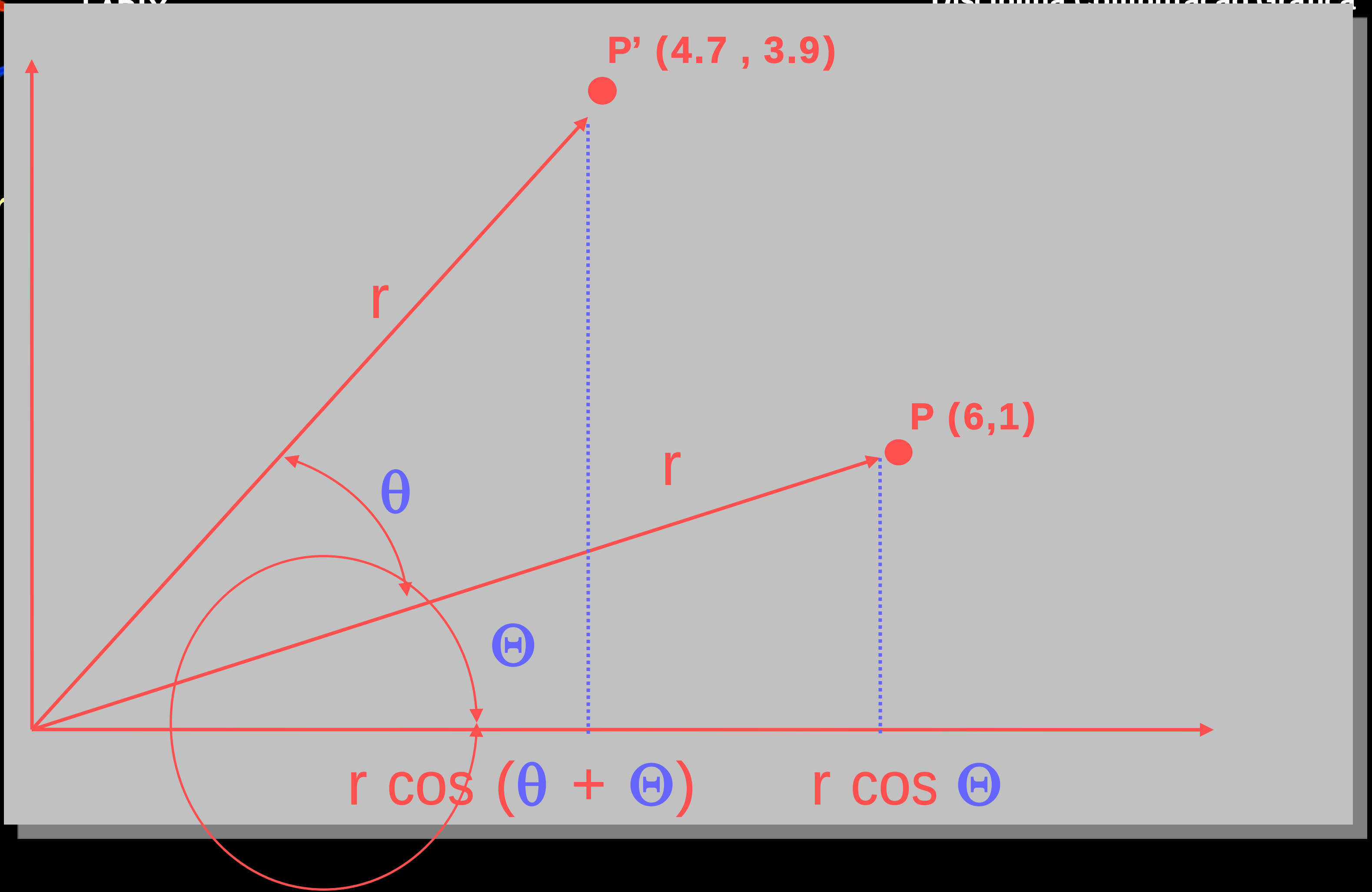
x'

y'

Ex ... m 30
gr



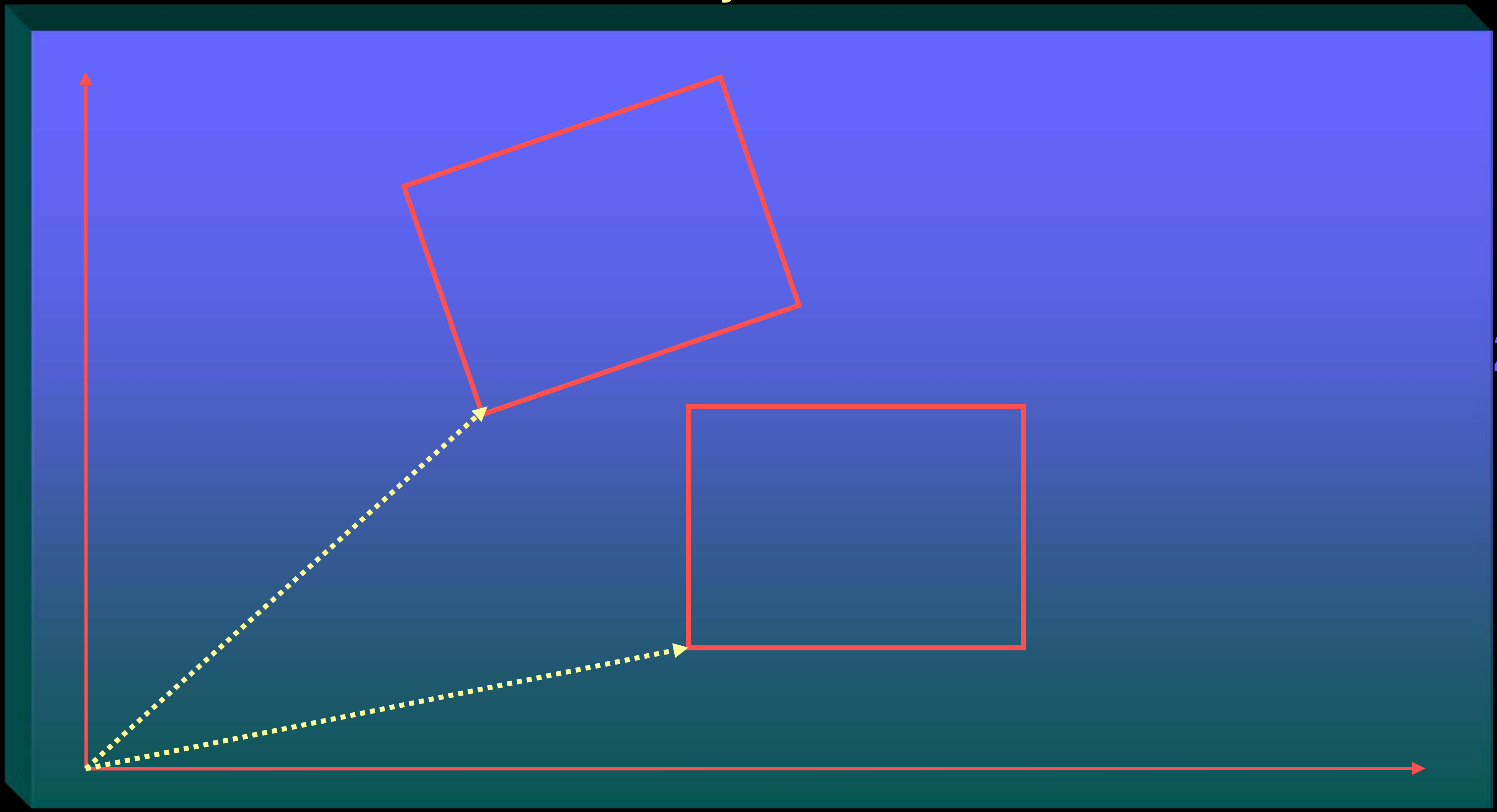
Par



Sendo:

$x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ **(Eq.1)**

Parte I: 3. Transformações 2D



2)

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Vimos até agora fórmulas descrevendo casos especiais para as transformações que queremos realizar.

Podemos representar uma classe de objetos em um espaço n-dimensional sem a utilização de constantes explícitas.

Chamamos isto de representação em coordenadas homogêneas.

Os sistemas de coordenadas homogêneas agilizam muito o cálculo das transformações que queremos realizar, pois permitem representar tudo da mesma forma.

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

A idéia geral é a de que todo problema em um espaço n-dimensional possui pelo menos um equivalente em um espaço (n+1)-dimensional.

- A obtenção de um resultado no espaço (n+1)-dimensional é muitas vezes muito mais fácil do que em um espaço n-dimensional.
- Os resultados são então projetados de volta ao espaço n-dimensional.
- A representação em coordenadas homogêneas de um ponto em um espaço n-dimensional é a representação deste ponto em um espaço (n+1)-dimensional.

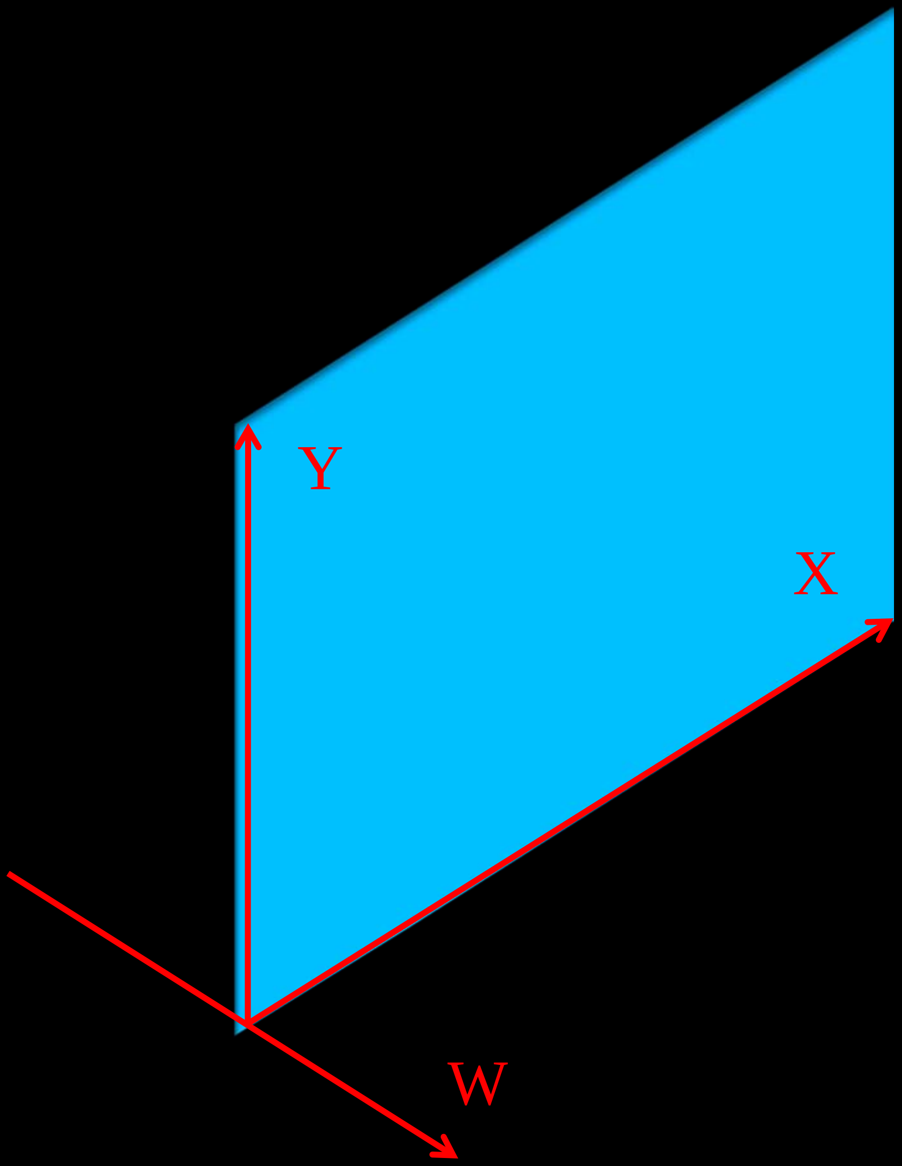
Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

A representação de um ponto P(x,y) em um sistema de coordenadas homogêneo é:

P(W.x , W.y , W) = P(X, Y, W)

para qualquer $W \neq 0$

- W é chamado de fator de escala e x = X/W e y = Y/W.
- Nós sempre utilizaremos W = 1 e a divisão acima é desnecessária.
- Podemos imaginar um sistema de coordenadas homogêneo 2D como posicionar o plano xy na posição W do eixo z de um sistema 3D qualquer.


Y
X
W

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Assim podemos representar qualquer operação geométrica 2D como uma matriz 3x3

- Podemos realizar toda operação geométrica sobre um ponto como uma multiplicação de matrizes, onde uma é o ponto e a outra a matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}$$

Parte I ... eos

Os pa ... ma a
que re ...

Translação

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix}$$

Escalonamento

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Esta definição permite a concatenação de operações de uma forma muito eficiente:

- Como qualquer seqüência de operações lineares é sempre uma operação linear, podemos expressar qualquer seqüência de operações geométricas como uma única matriz, resultante da multiplicação das matrizes representando cada uma das operações.
- Através disto calculamos uma única matriz, que utilizamos para transformar todos os pontos do objeto.

Part… s

Exer… o
pont… or
Dx =

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

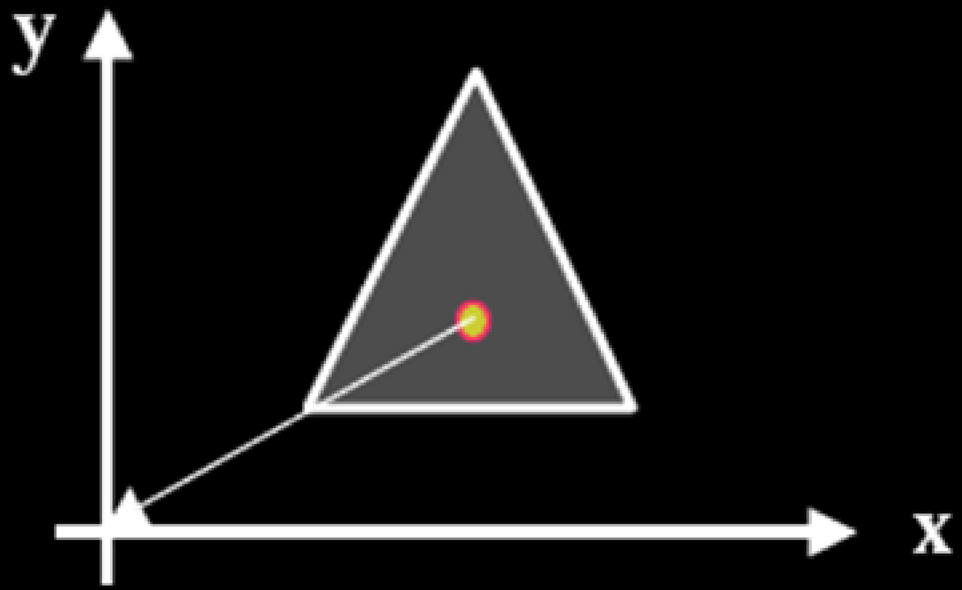
Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

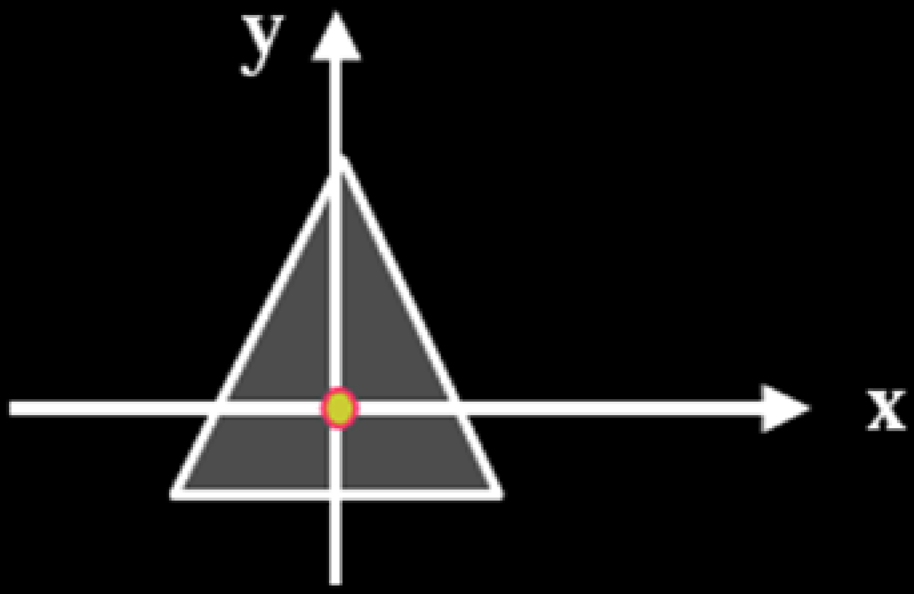
Isto é muito importante na rotação:

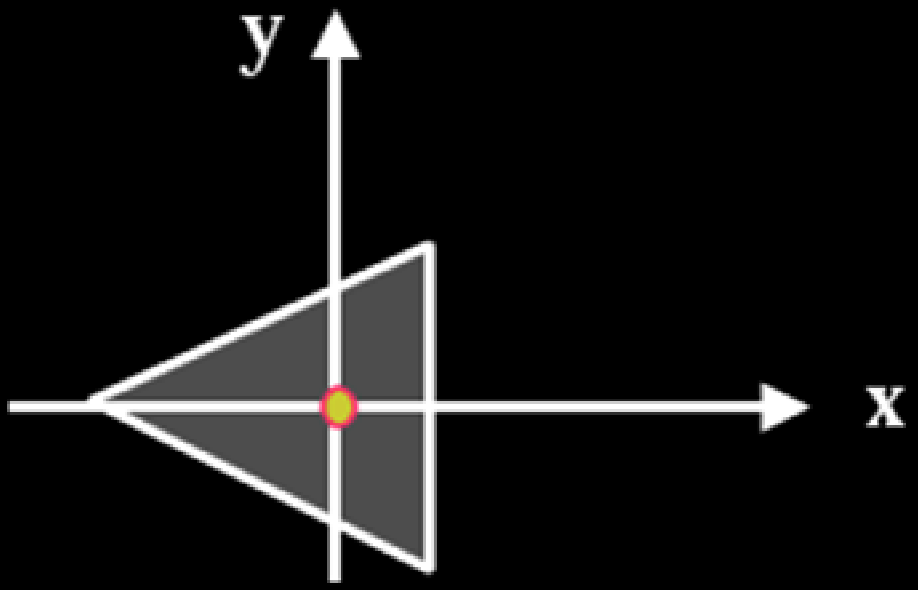
- Se quisermos rotacionar um objeto em torno de um ponto qualquer (por exemplo o seu próprio centro, que é a forma mais intuitiva de se rodar algo):

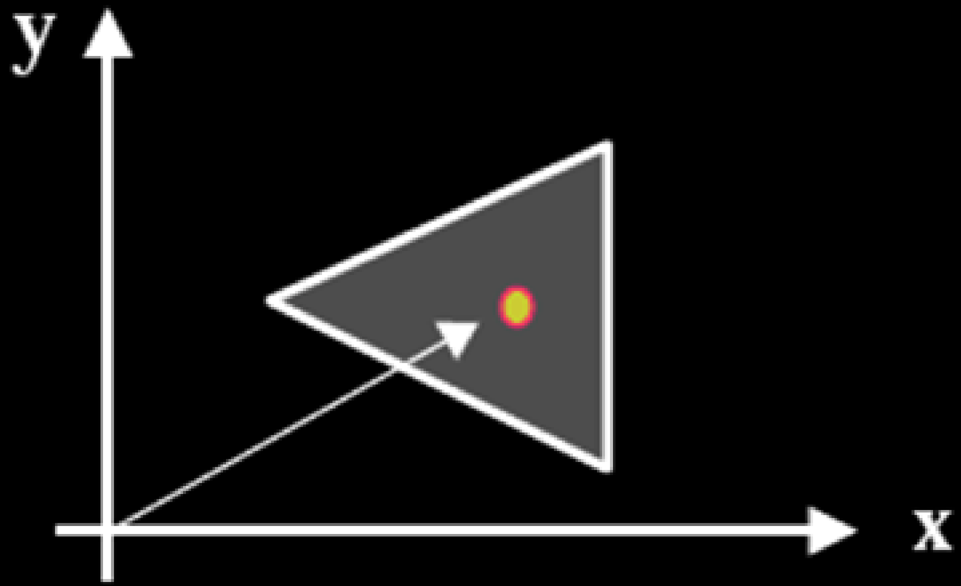
$$\begin{bmatrix} x''' & y''' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Dx & -Dy & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix}$$

Para isso podemos calcular uma única matriz de rotação concatenada:


y
x


y
x


y
x


y
x

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

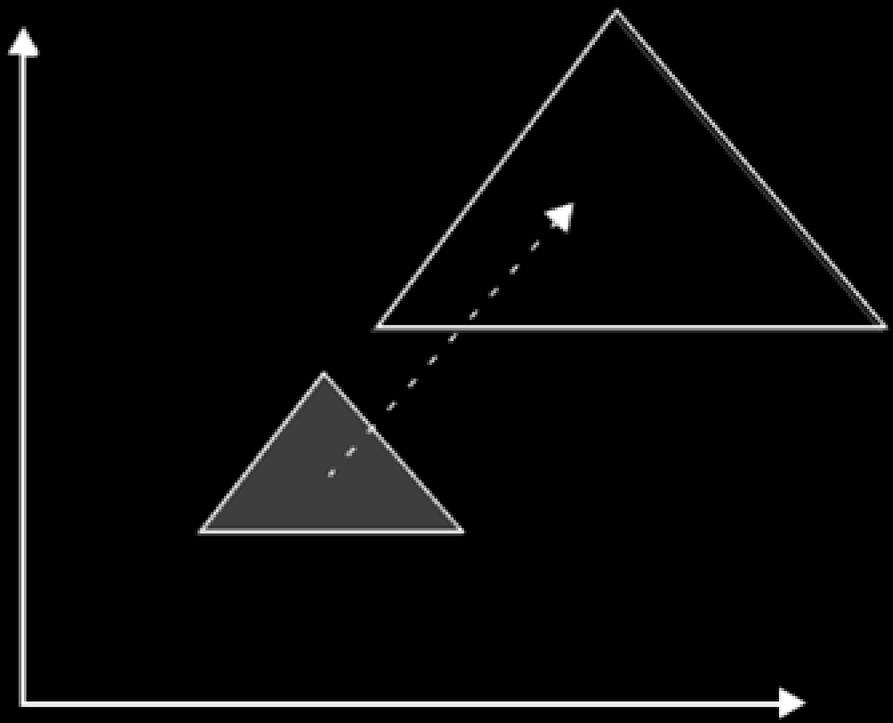
Um escalonamento realista também usa 3 transformações:

- Sozinho, um escalonamento geralmente “incha” e “desloca” o objeto

- Concatenado com 2 translações particulares, o objeto apenas “incha”

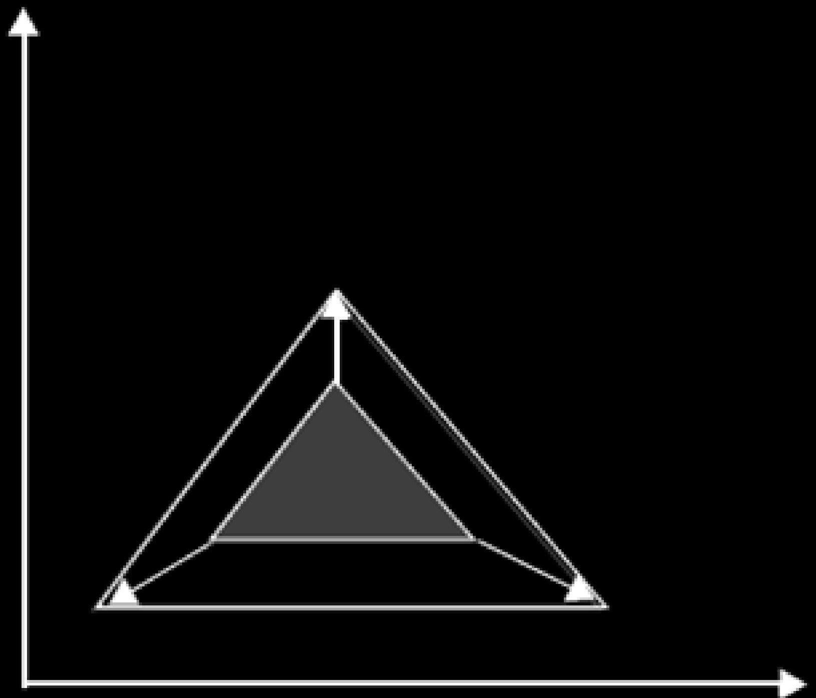
Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Sozinho, um escalonamento geralmente “incha” e “desloca” o objeto



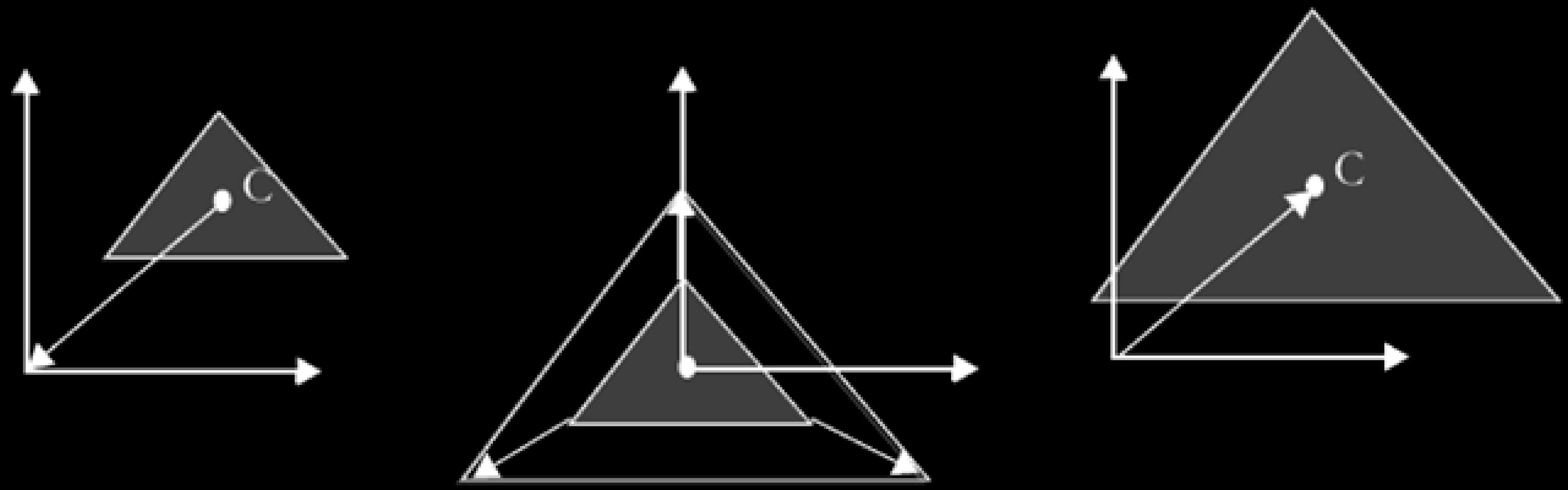
Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Concatenado com 2 translações particulares, o objeto apenas “incha”



Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Concatenado com 2 translações particulares, o objeto apenas “incha”



Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Duas translações e um escalonamento:

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Cx & Cy & 1 \end{bmatrix}$$

Parte I: 3. Sistemas de Coordenadas Homogêneos

Obtendo o Centro dos Objetos:

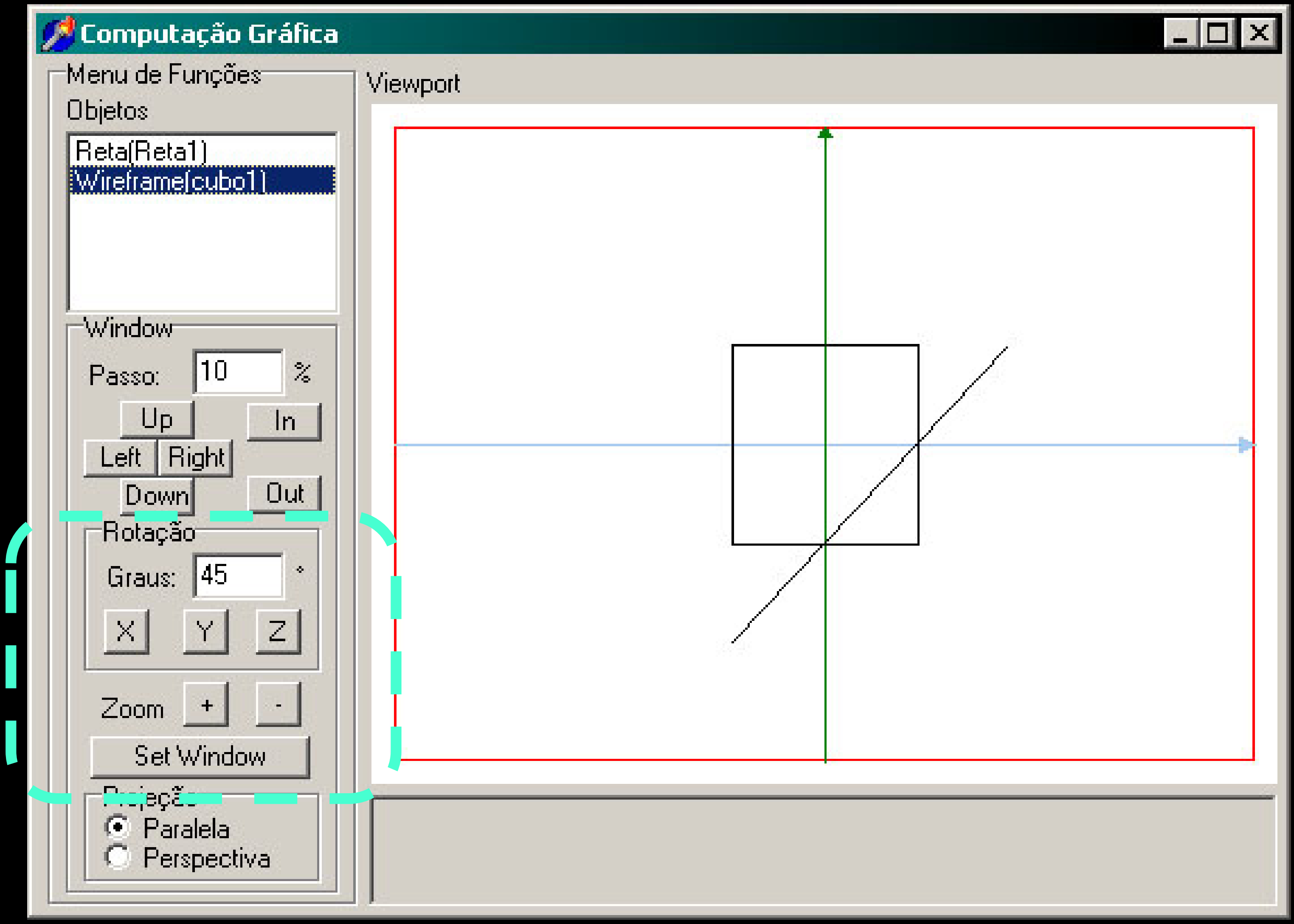
- O centro geométrico é a média aritmética das coordenadas nos vértices:

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad C_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Parte I: Sistema Gráfico Interativo

Incremente seu Sistema Gráfico para suportar as seguintes transformações em 2D:

- Translações
- Escalonamentos em torno do centro do objeto
- Rotações:
  - Em torno do centro do mundo
  - Em torno do centro do objeto
  - Em torno de um ponto qualquer (arbitrário)


Computação Gráfica
Menu de Funções
Objetos
Reta(Reta1)
Wireframe(cubo1)
Window
Passo:
10
%
Up
In
Left
Right
Down
Out
Rotação
Graus:
45
°
X
Y
Z
Zoom
+
-
Set Window
Projeção
Paralela
Perspectiva
Viewport