

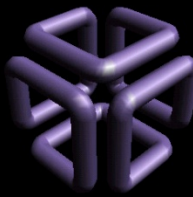


Computação Gráfica:

Aula 7:

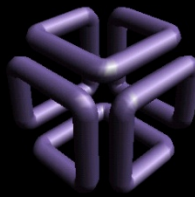
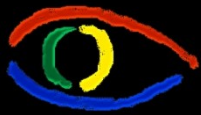
Superfícies Curvas Bicúbicas

Prof. Dr. rer.nat. Aldo von Wangenheim



7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

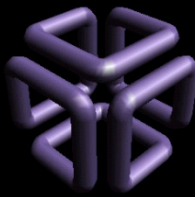
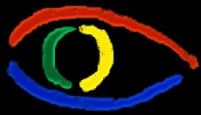
- Superfícies bicúbicas paramétricas são uma generalização das curvas cúbicas paramétricas.
 - Para induzir a sua notação matemática vamos nos lembrar primeiramente da forma geral de uma curva paramétrica
 $Q(t) = T \cdot M \cdot G$
 - a matriz **M** é uma constante e pode adquirir diferentes formas, dependendo se temos uma curva de Hermite, Bézier ou Spline. **G** é o vetor de geometria.
- Se substituirmos o parâmetro **t** por **s**, podemos expressar a fórmula anterior da seguinte forma:
 $Q(s) = S \cdot M \cdot G$



7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

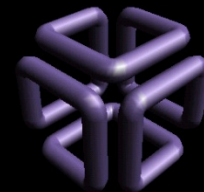
- Se permitirmos que os pontos definindo **G** variem ao longo de algum caminho que é parametrizado em **t**, podemos expressar **Q(s)** como uma família de curvas parametrizadas por **t**:

$$Q(s, t) = S \cdot M \cdot G(t) = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ G_3(t) \\ G_4(t) \end{bmatrix}$$

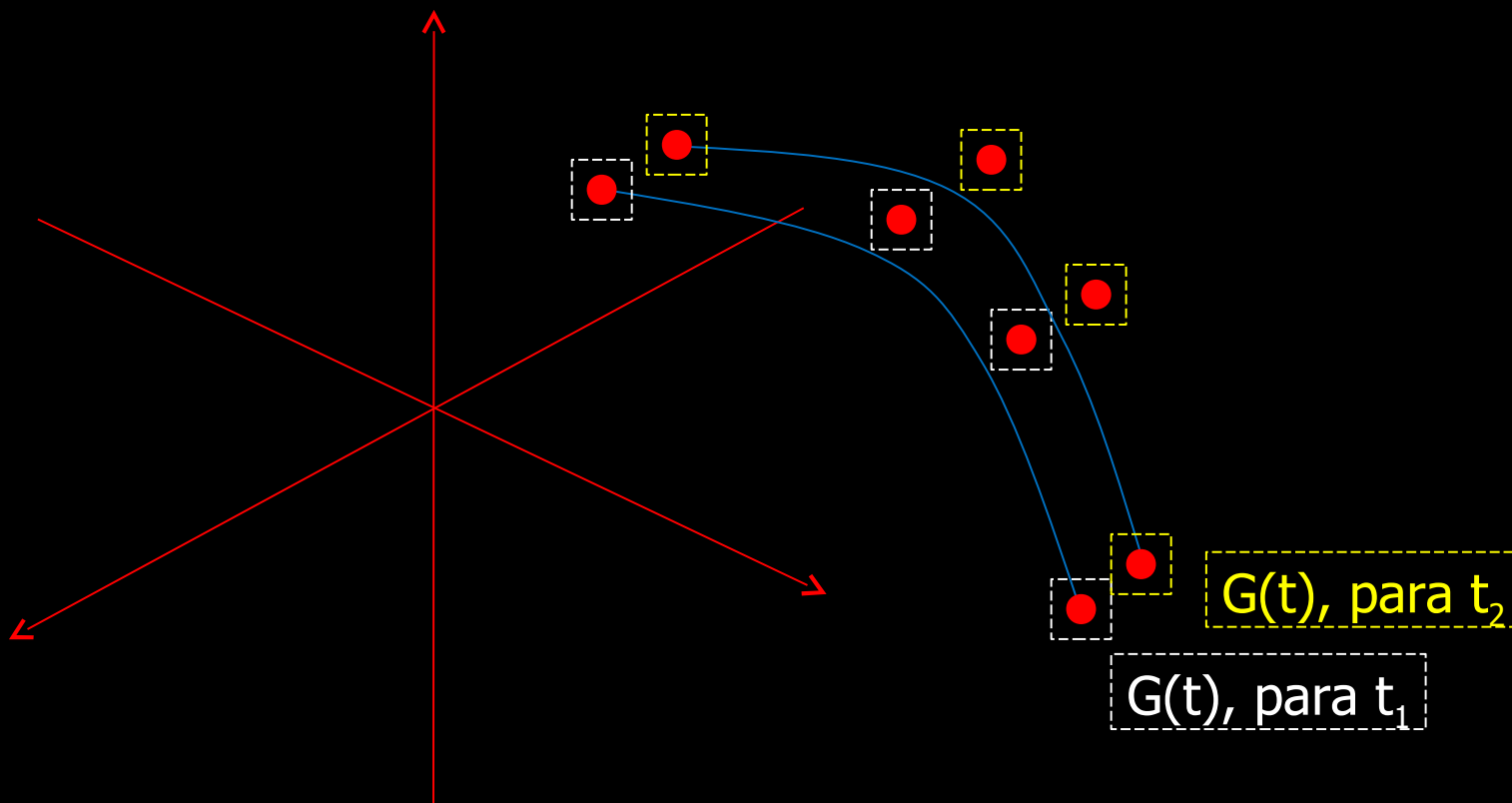


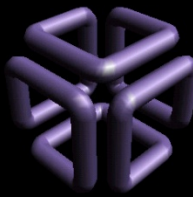
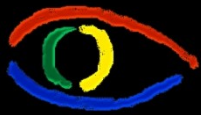
7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

- Agora, se tomarmos um valor fixo t_1 qualquer de t , a equação $Q(s, t_1)$ é simplesmente uma curva em 3D porque $G(t_1)$ é uma constante e Q vai variar apenas ao longo de s .
- Se permitirmos que t tome um valor levemente diferente t_2 , onde o valor de $t_1 - t_2$ é bastante pequeno, $Q(s, t_2)$ será uma curva levemente diferente.



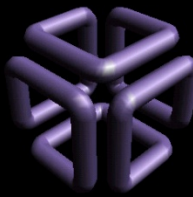
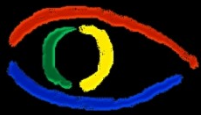
7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas





7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

- Se repetirmos este processo para valores de t entre 0 e 1, estaremos definindo uma completa família de curvas, cada uma delas arbitrariamente próxima da anterior, dependendo de quanto t variou.
- O conjunto destas curvas define uma **superfície curva**. Se as matrizes $G_i(t)$ definirem também curvas cúbicas, estaremos descrevendo uma **superfície paramétrica bicúbica**, que se comporta como uma família de curvas de Hermite, Bézier ou Spline (dependendo de $G(t)$) tanto no sentido de s como no de t .

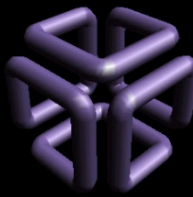


7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

- Se assumimos que as $G_i(t)$ são cúbicas, cada uma delas representada por sua vez através de $\mathbf{G}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}_i$, onde $\mathbf{G}_i = [\mathbf{g}_{i1}, \mathbf{g}_{i2}, \mathbf{g}_{i3}, \mathbf{g}_{i4}]^T$
- Aqui, \mathbf{g}_{i1} é o primeiro elemento do vetor de geometria no sentido \mathbf{t} da curva (Hermite, Bézier ou Spline) $G_i(t)$ e assim por diante.

Se transpusermos a equação $G_i(t) = T \cdot M \cdot G_i$ usando a regra de identidade $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$, teremos como resultado:

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{G}_i^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{T}^T = [\mathbf{g}_{i1} \ \mathbf{g}_{i2} \ \mathbf{g}_{i3} \ \mathbf{g}_{i4}] \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{T}^T$$

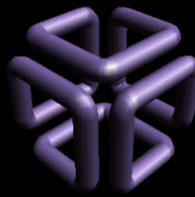


7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

$$Q(s, t) = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{14} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{34} \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix} \cdot M^T \cdot T^T$$

Ou, representando de forma mais compacta:

$$Q(s, t) = S \cdot M \cdot \mathbf{G} \cdot M^T \cdot T^T, \quad 0 \leq s, t \leq 1$$



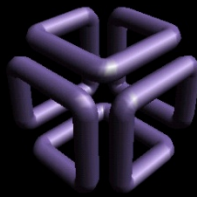
7.1. Conceitos Básicos Superfícies Bicúbicas

- Se reescrevermos a eq. anterior de forma separada para cada coordenada x, y e z , teremos a **forma geral** de uma superfície bicúbica:

$$x(s, t) = S \cdot M \cdot \mathbf{G}_x \cdot M^T \cdot T^T$$

$$y(s, t) = S \cdot M \cdot \mathbf{G}_y \cdot M^T \cdot T^T, \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

$$z(s, t) = S \cdot M \cdot \mathbf{G}_z \cdot M^T \cdot T^T$$



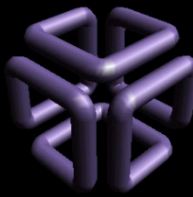
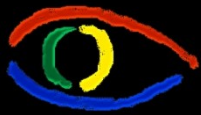
7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- Superfícies de Hermite podem ser definidas por uma matriz de geometria 4x4 \mathbf{G}_H .
- Relembrando a definição das Curvas de Hermite em 3D:

$$x(t) = T \cdot M_H \cdot G_{H_x}$$

$$y(t) = T \cdot M_H \cdot G_{H_y}$$

$$z(t) = T \cdot M_H \cdot G_{H_z}$$

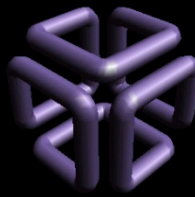
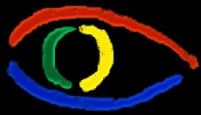


7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- Onde a Matriz dos Parâmetros (da curva cúbica) é dada por:
 $\mathbf{T} = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$.
- A Matriz de Hermite é dada por \mathbf{M}_H
- A Matriz de Geometria pelos coeficientes \mathbf{G}_H

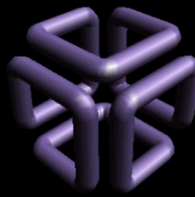
$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

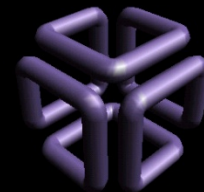
- Se tomarmos cada uma das eqs. anteriores e substituirmos t por s , para obter $x(s) = S \cdot M_H \cdot G_{Hx}$, teremos expresso uma curva de Hermite em termos de s .
- Se agora supusermos que G_{Hx} não é constante, mas sim que varia em função de t , podemos reescrever $x(s)$ como segue:



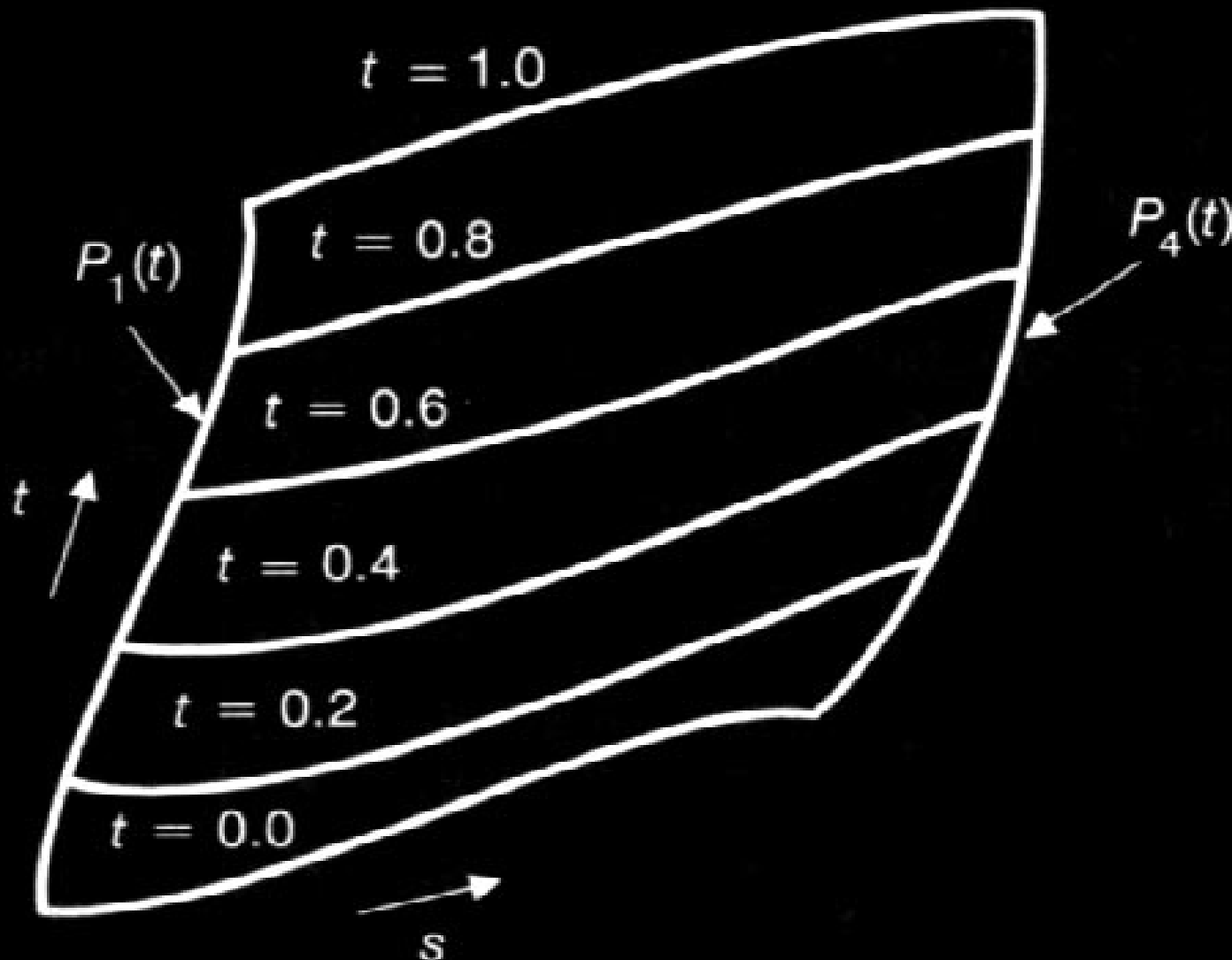
7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

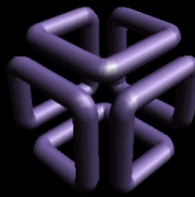
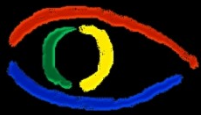
$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{G}_{H_x}(t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- As funções $P_{1x}(t)$ e $P_{4x}(t)$ definem as componentes em x dos pontos iniciais e finais para a curva no parâmetro s.
- $R_{1x}(t)$ e $R_{4x}(t)$ são vetores tangentes nestes pontos.



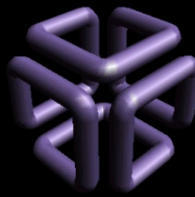
7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite





7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- Exemplo: Superfície de Hermite
 - definida por duas “bordas” dadas por $P_1(t)$ e $P_4(t)$ e
 - um conjunto de cúbicas s que são definidas nos pontos $t = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 .
 - “retalho” de superfície é basicamente uma interpolação entre $Q(s, 0)$ e $Q(s, 1)$ com passo 0.2 definido em t .



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

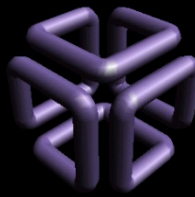
- Para podermos definir melhor como funciona uma superfície bicúbica, representemos $P_1(t)$, $P_4(t)$, $R_1(t)$ e $R_4(t)$ na forma de Hermite como:

$$P_{1_x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} \\ \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{g}_{14} \end{bmatrix}_x$$

$$P_{4_x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{21} \\ \mathbf{g}_{22} \\ \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{24} \end{bmatrix}_x$$

$$R_{1_x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{31} \\ \mathbf{g}_{32} \\ \mathbf{g}_{33} \\ \mathbf{g}_{34} \end{bmatrix}_x$$

$$R_{4_x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{41} \\ \mathbf{g}_{42} \\ \mathbf{g}_{43} \\ \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix}_x$$

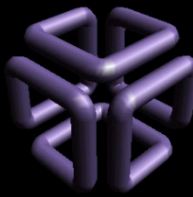
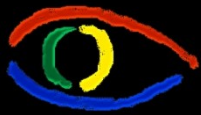


7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- E estas quatro cúbicas podem por sua vez ser reescritas como uma única equação para cada coordenada x , y e z :

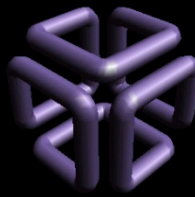
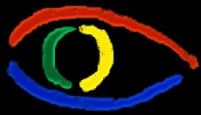
$$\begin{bmatrix} P_{1_x}(t) & P_{4_x}(t) & R_{1_x}(t) & R_{4_x}(t) \end{bmatrix} = T \cdot M_H \cdot \mathbf{G}_{H_x}^T$$

- onde:



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

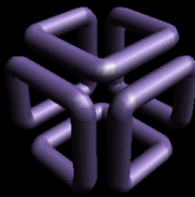
$$\mathbf{G}_{H_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{14} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{34} \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- A transposição de ambos os lados da eq. anterior resulta em:

$$\begin{bmatrix} P_{1_x}(t) \\ P_{4_x}(t) \\ R_{1_x}(t) \\ R_{4_x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{14} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{34} \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_H^T \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{G}_{H_x} \cdot \mathbf{M}_H^T \cdot \mathbf{T}^T$$



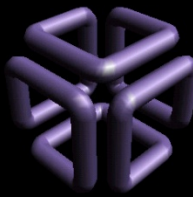
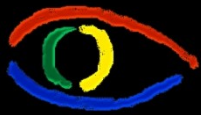
7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- Substituindo na eq. paramétrica temos:

$$x(s, t) = S \cdot M_H \cdot \mathbf{G}_{H_x} \cdot M_H^T \cdot T^T$$

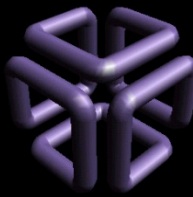
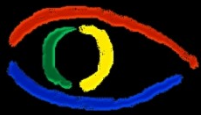
$$y(s, t) = S \cdot M_H \cdot \mathbf{G}_{H_y} \cdot M_H^T \cdot T^T$$

$$z(s, t) = S \cdot M_H \cdot \mathbf{G}_{H_z} \cdot M_H^T \cdot T^T$$



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

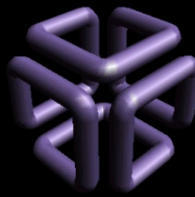
- Assim, vemos que podemos definir um ponto qualquer sobre uma superfície de Hermite em função de uma matriz de geometria e duas matrizes de parâmetros S e T , representando t^3, t^2, t, s^3, s^2 e s .
- As três matrizes 4×4 (para x, y e z) têm o mesmo papel numa superfície de Hermite que tinha a Matriz G_H para curvas.



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

Os 16 elementos de G_{Hx} entendem-se:

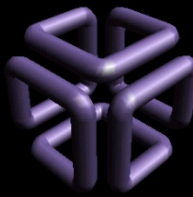
- a) O elemento g_{11x} é $x(0,0)$ porque é o ponto inicial $P_{1x}(t)$, que por sua vez é o ponto inicial para $x(s,0)$. Da mesma forma, g_{12x} é $x(0,1)$ pois é o ponto final de $P_{1x}(t)$, que por sua vez é o ponto inicial de $x(s,1)$.
- b) g_{13x} é $\delta x / \delta t(0,0)$ porque é o vetor tangente inicial para $P_{1x}(t)$ e g_{33x} é $\delta^2 x / \delta s \delta t(0,0)$ porque é o vetor tangente inicial de $R_{1x}(t)$, que por sua vez é a curvatura inicial de $x(s,0)$.



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

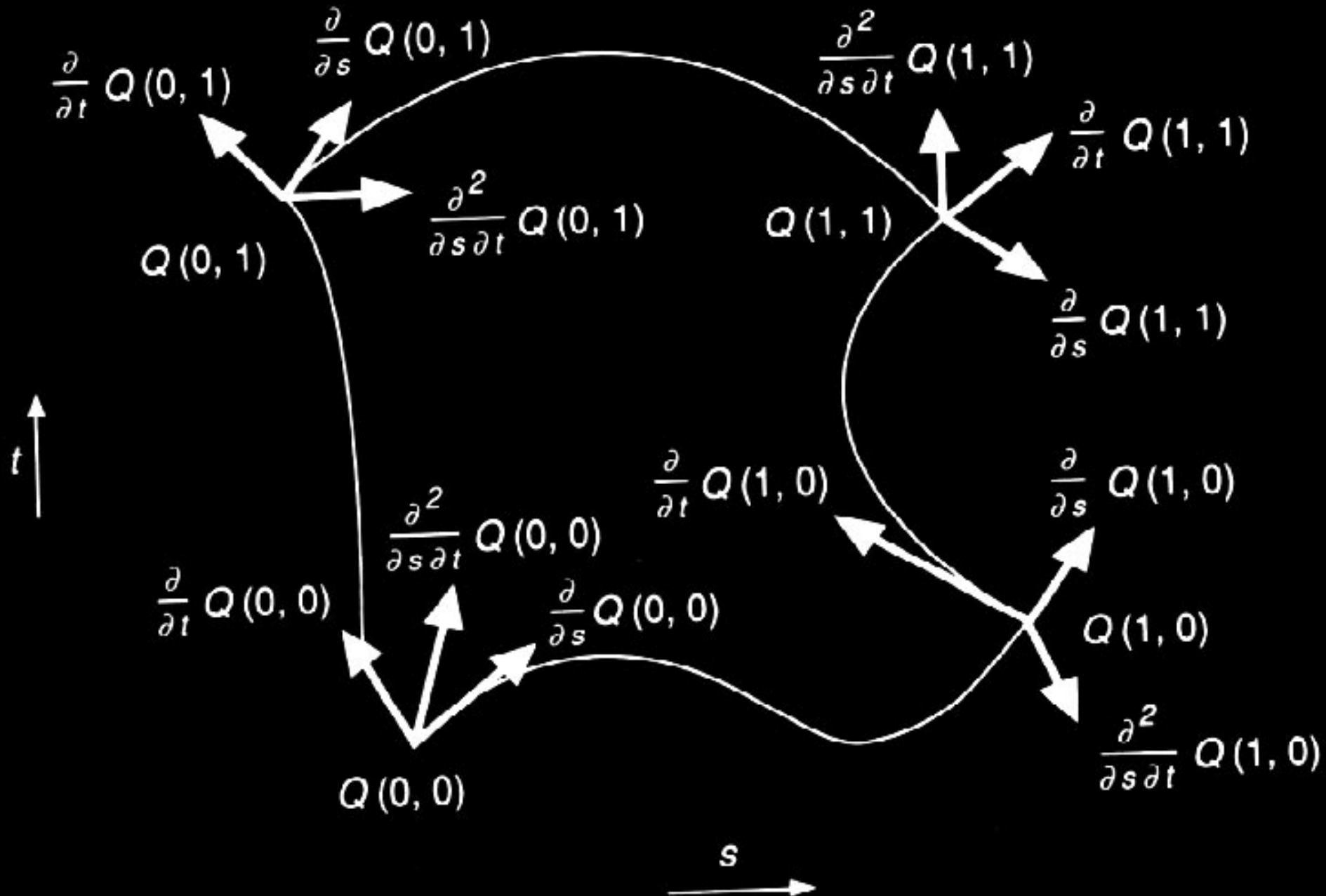
- Usando estas interpretações podemos reescrever G_{H_x} da seguinte forma:

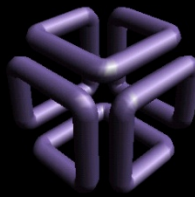
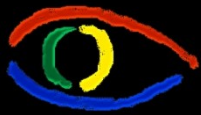
$$\mathbf{G}_{H_x} = \begin{bmatrix} x(0, 0) & x(0, 1) & \frac{\partial}{\partial t}x(0, 0) & \frac{\partial}{\partial t}x(0, 1) \\ x(1, 0) & x(1, 1) & \frac{\partial}{\partial t}x(1, 0) & \frac{\partial}{\partial t}x(1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial s}x(0, 0) & \frac{\partial}{\partial s}x(0, 1) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}x(0, 0) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}x(0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial s}x(1, 0) & \frac{\partial}{\partial s}x(1, 1) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}x(1, 0) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}x(1, 1) \end{bmatrix}$$



7.2. Superfícies Bicúbicas de Hermite

- A porção 2×2 no canto inferior direito contém as derivadas parciais simultaneamente a s e t . São chamadas de twist (virada) porque quanto maiores, maior será a “orelha de burro” no canto da superfície.
- As áreas 2×2 superior direita e inferior esquerda contém os vetores tangentes ao longo de cada direção paramétrica (s e t respectivamente).
- A porção 2×2 superior esquerda contém as coordenadas x dos quatro cantos da superfície.





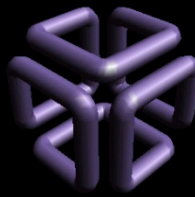
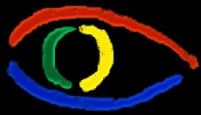
7.3. Superfícies Bicúbicas de Bézier

- Superfícies Bicúbicas de Bézier podem ser formuladas derivando-se-as exatamente da mesma maneira que as superfícies de Hermite. Obtemos:

$$x(s, t) = S \cdot M_B \cdot \mathbf{G}_{B_x} \cdot M_B^T \cdot T^T$$

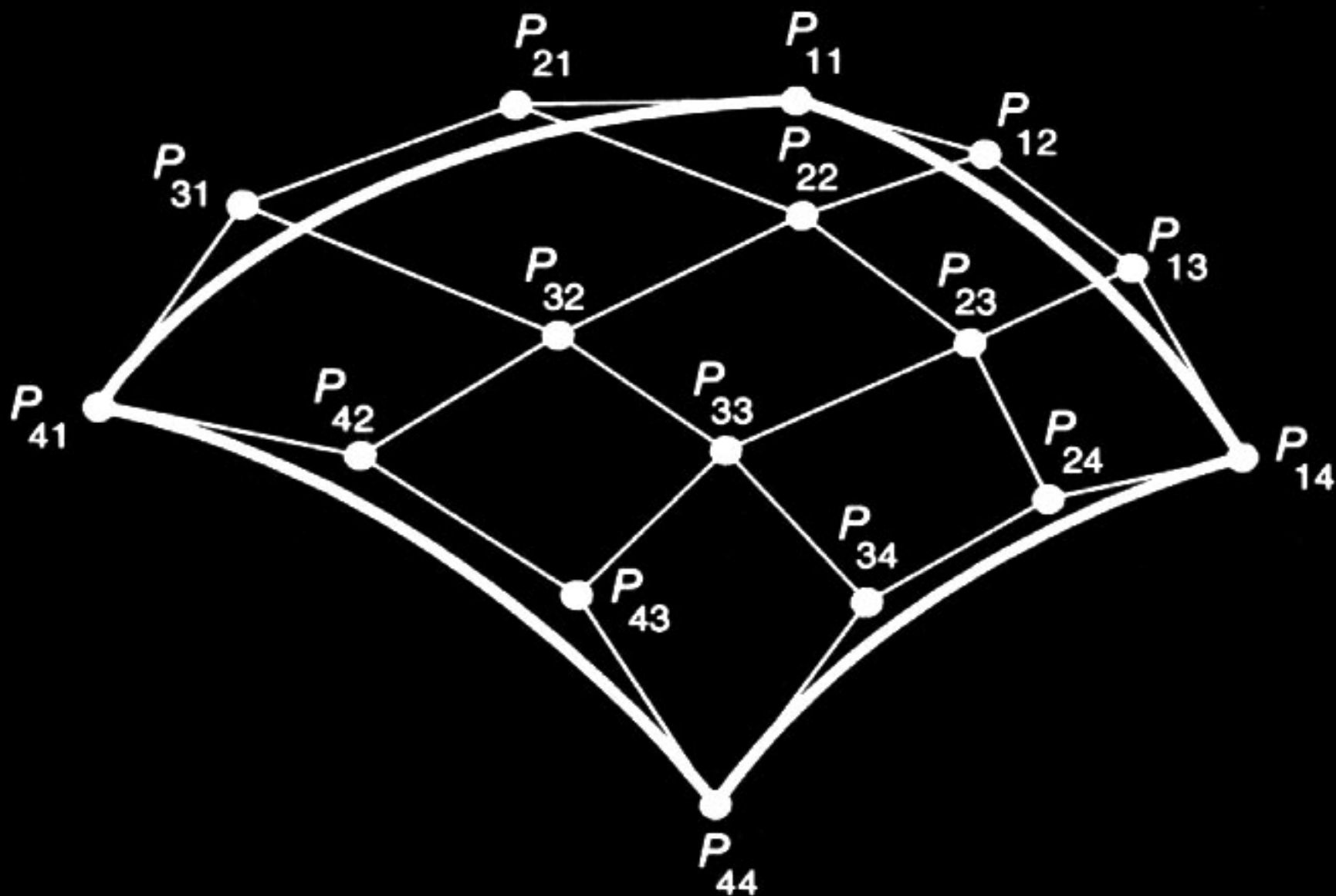
$$y(s, t) = S \cdot M_B \cdot \mathbf{G}_{B_y} \cdot M_B^T \cdot T^T$$

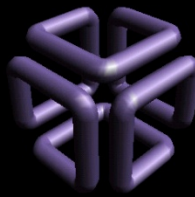
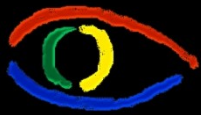
$$z(s, t) = S \cdot M_B \cdot \mathbf{G}_{B_z} \cdot M_B^T \cdot T^T$$



7.3. Superfícies Bicúbicas de Bézier

- Uma matriz de geometria de Bézier consiste de 16 pontos de controle.
- Interessantes para aplicações de engenharia:
 - Definidas somente por pontos (descrição intuitiva)
 - Passam através de alguns de seus pontos de controle: controle exato de seus limites.
 - Superfície de Bézier passa pelos quatro pontos de controle extremos: P_{11} , P_{14} , P_{41} e P_{44} .





7.3. Superfícies Bicúbicas de Bézier

- **Continuidade C^0 e G^0 :** quatro pontos de controle comuns ao longo da borda iguais.
- **Continuidade G^1 :** os dois conjuntos de quatro pontos de controle em cada lado da borda são colineares com os pontos da borda.
 - Na figura temos (P_{13}, P_{14}, P_{15}) , (P_{23}, P_{24}, P_{25}) , (P_{33}, P_{34}, P_{35}) e (P_{43}, P_{44}, P_{45}) como conjuntos de pontos, cada qual sobre uma reta.

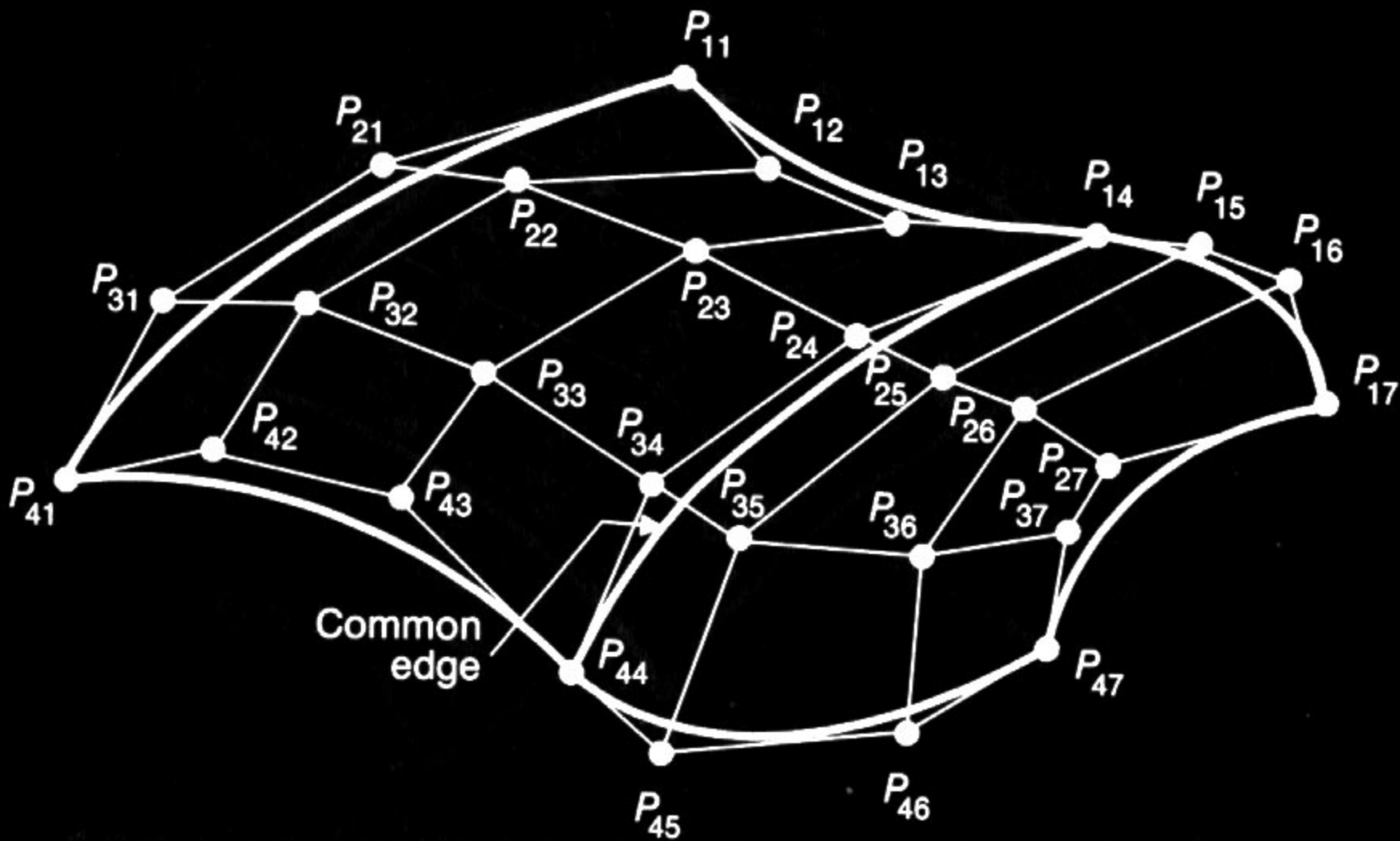


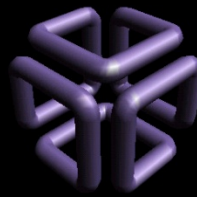
The Cyclops Project

German-Brazilian Cooperation Programme on IT
CNPq GMD DLR

Disciplina Computação Gráfica

Curso de Ciência da Computação
INE/CTC/UFSC



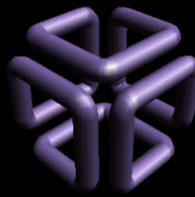


7.4. Superfícies B-Spline Bicúbicas

$$x(s, t) = S \cdot M_{BS} \cdot \mathbf{G}_{BS_x} \cdot M_{BS}^T \cdot T^T$$

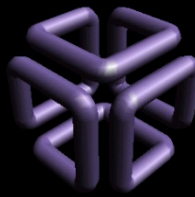
$$y(s, t) = S \cdot M_{BS} \cdot \mathbf{G}_{BS_y} \cdot M_{BS}^T \cdot T^T$$

$$z(s, t) = S \cdot M_{BS} \cdot \mathbf{G}_{BS_z} \cdot M_{BS}^T \cdot T^T$$



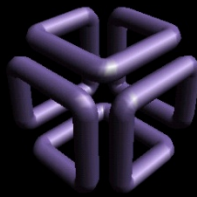
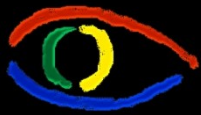
7.4. Superfícies B-Spline Bicúbicas

- As B-Splines são extremamente práticas no que diz respeito à continuidade: Em função de sua definição, a continuidade **C²** é garantida ao longo de qualquer número de B-Splines bicúbicas contíguas.
- Nenhum tipo de arranjo especial é necessário, a não ser o cuidado de não duplicar pontos de controle, o que provoca descontinuidades e “dobras”.



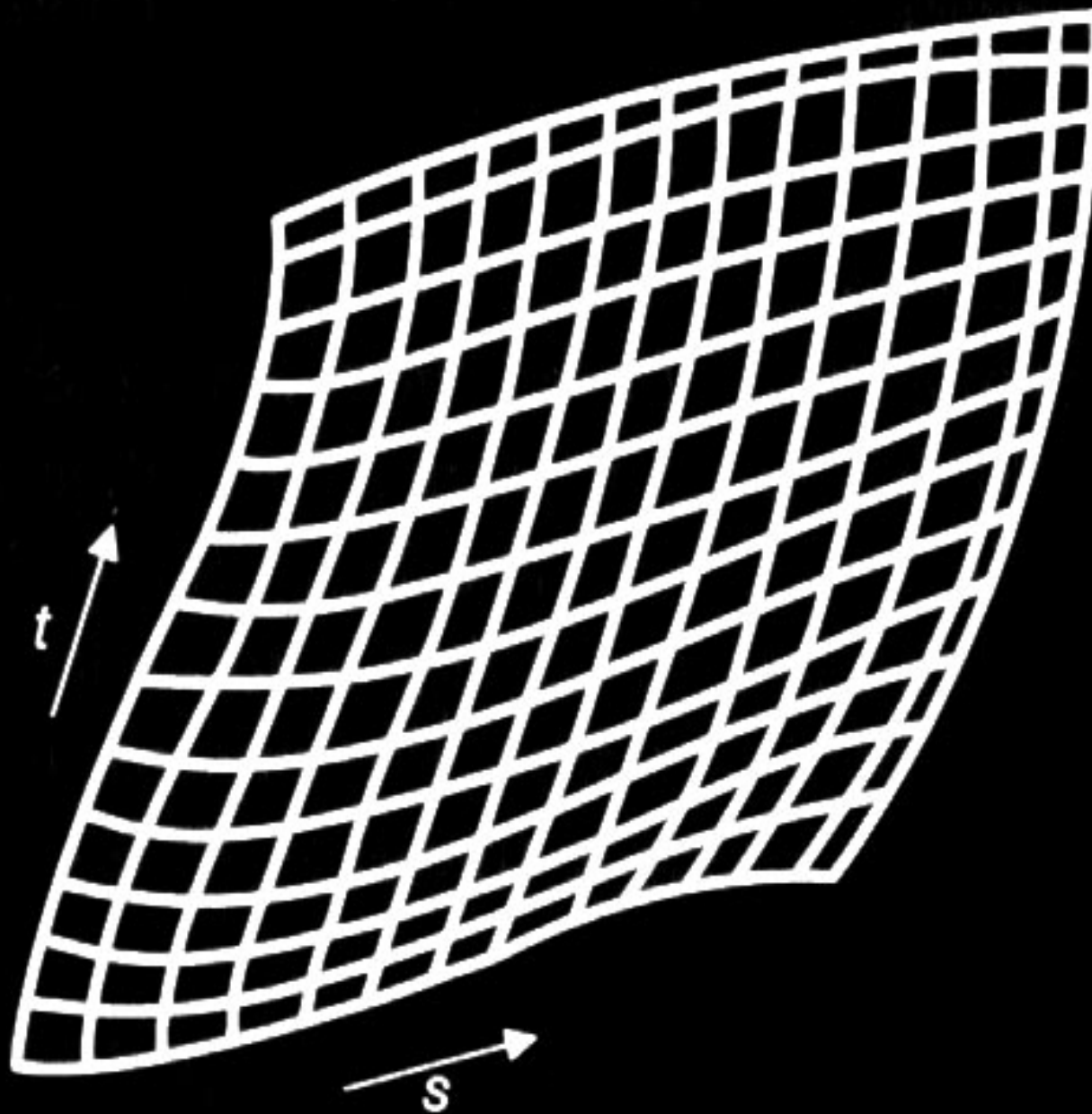
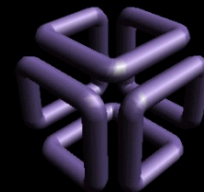
7.5. Desenhando Superfícies Bicúbicas

- Mesmas duas filosofias básicas das curvas para a plotagem de superfícies bicúbicas:
 - a) Cálculo iterativo (**blending functions**) ou
 - b) Subdivisão progressiva.
- Cálculo iterativo:
 - começa em qualquer lugar da superfície (útil em superfícies parcialmente clipadas) e
 - algoritmo incremental extremamente rápido que somente utiliza somas: *forward differences*



7.5. Desenhando Superfícies Bicúbicas

- Plotagem através de um dos dois algoritmos iterativos:
 - basta fixar um dos parâmetros (**s** ou **t**) e variar o outro de 0 a 1,
 - plota-se uma curva de cada vez.
 - Pode-se definir um passo fixo em **s** e depois em **t** e plotar as várias curvas formando um grid.





7.6. Trabalho: Desenhando Superfícies Bicúbicas

- Implemente o desenho em 3D de superfícies bicúbicas de Bézier e Spline.
- Para tanto:
 - Extenda o seu sistema para representar superfícies 3D através de suas matrizes de geometria.
 - Cada superfície pode ser representada por uma lista de matrizes, cada matriz representando um “retalho”.
 - Crie uma tela de entrada de dados bonitinha onde você pode entrar com conjuntos de pontos de controle, 16 a 16.
 - Como tudo até agora, o clipping é em 2D.