Como $\mathrm{tg}^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, a integral no Exemplo 5 pode ser interpretada como a área da região mostrada na Figura 2.

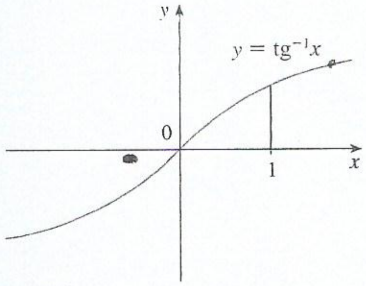

FIGURA 2

Para calcular essa integral, usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (já que u tem outro significado nesse exemplo). Então $dt = 2x\,dx$ e, assim, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Assim, $$\int_0^1 \mathrm{tg}^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

A Equação 7 é chamada *fórmula de redução* porque o expoente n foi *reduzido* para $n-1$ e $n-2$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \mathrm{sen}^{n-1}x \qquad dv = \mathrm{sen}\,x\,dx$$

Então, $$du = (n-1)\,\mathrm{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, temos

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \mathrm{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx$$

ou $$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx$$ □

A fórmula de redução (7) é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \mathrm{sen}^n x\,dx$ em termos de $\int \mathrm{sen}\,x\,dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\mathrm{sen}\,x)^0\,dx = \int dx$ (se n for par).

7.1 EXERCÍCIOS

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$
2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $u = \theta$, $dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Calcule a integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$
4. $\int xe^{-x}\,dx$
5. $\int re^{r/2}\,dr$
6. $\int t\,\mathrm{sen}\,2t\,dt$
7. $\int x^2\cos 3x\,dx$
8. $\int x^2\,\mathrm{sen}\,ax\,dx$
9. $\int \ln(2x+1)\,dx$
10. $\int \mathrm{sen}^{-1}x\,dx$
11. $\int \mathrm{arctg}\,4t\,dt$
12. $\int p^5\ln p\,dp$
13. $\int t\sec^2 2t\,dt$
14. $\int s\,2^s\,ds$
15. $\int (\ln x)^2\,dx$
16. $\int t\,\mathrm{senh}\,mt\,dt$
17. $\int e^{2\theta}\,\mathrm{sen}\,3\theta\,d\theta$
18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$
19. $\int_0^{\pi} t\,\mathrm{sen}\,3t\,dt$
20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$