UFSC

MTM

3.2. Vetores: operações, propriedades e ângulo

Professores:

Alda Dayana Mattos Mortari

Christian Wagner

Giuliano Boava (autor e voz)

Felipe Augusto Tasca

Leandro Batista Morgado

María Rosario Astudillo Rojas

Mykola Khrypchenko

RECAPITULAÇÃO

RECAPITULAÇÃO

Retas

RECAPITULAÇÃO

Retas

Semirretas

RECAPITULAÇÃO

Retas

Semirretas

Segmentos de reta

RECAPITULAÇÃO

Retas

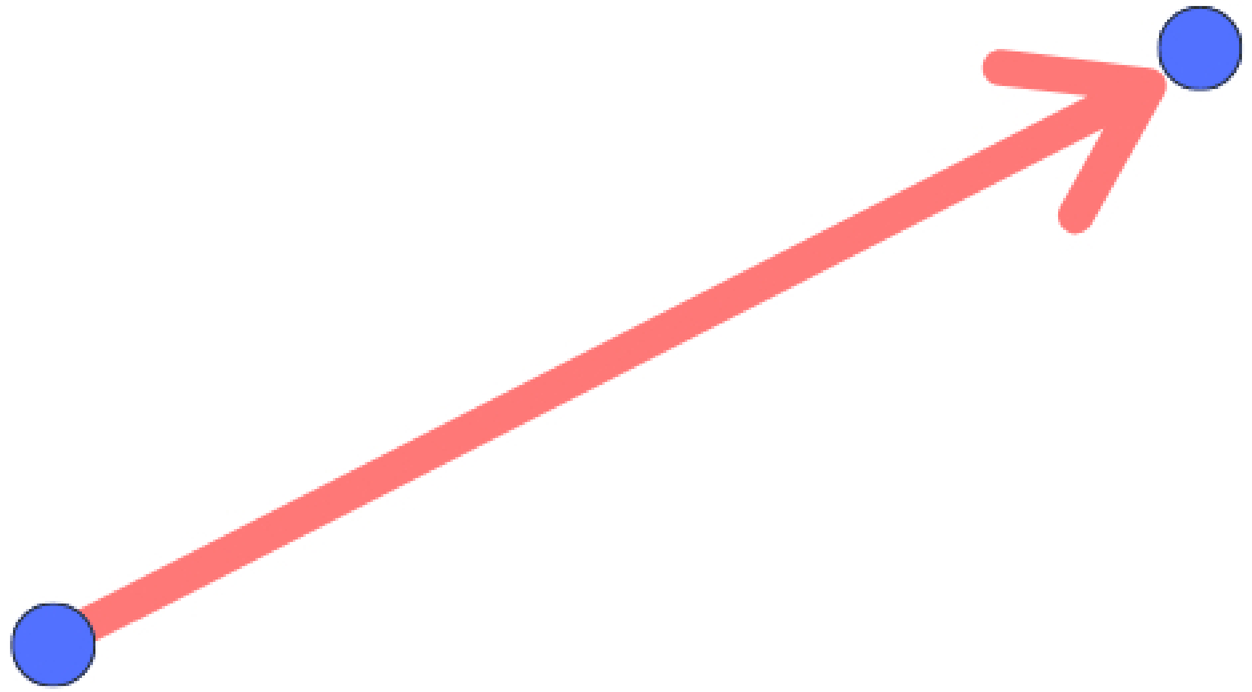
Semirretas

Segmentos de reta

Segmentos de reta orientados

RECAPITULAÇÃO

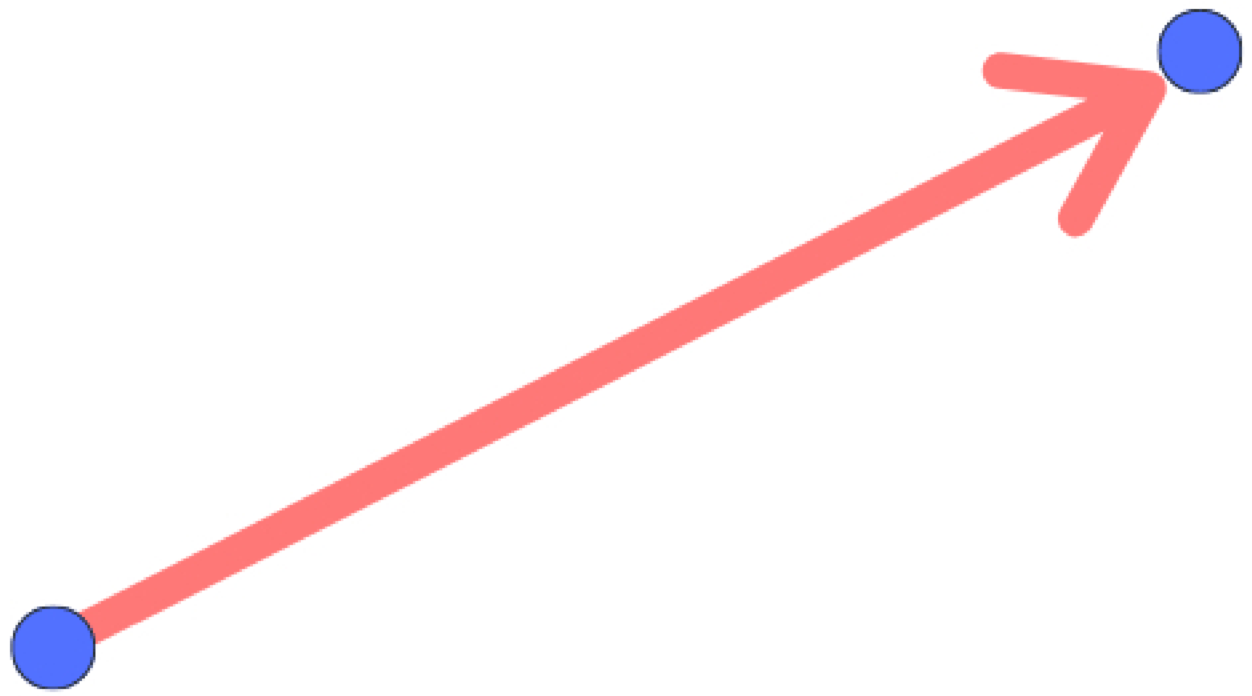
Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.



RECAPITULAÇÃO

Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.

Também poder ser determinados por:

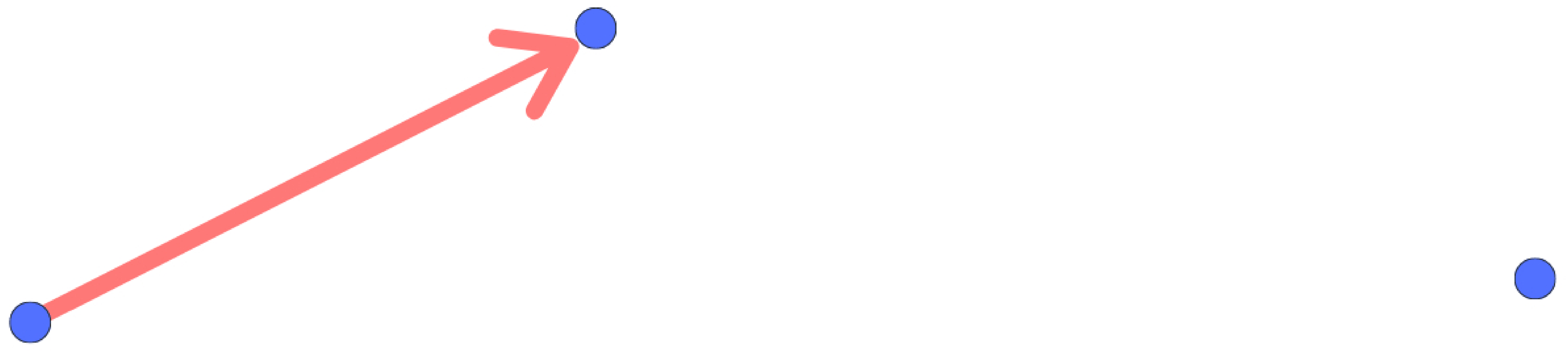


RECAPITULAÇÃO

Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.

Também poder ser determinados por:

Origem



RECAPITULAÇÃO

Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.

Também poder ser determinados por:

Origem

Direção

RECAPITULAÇÃO

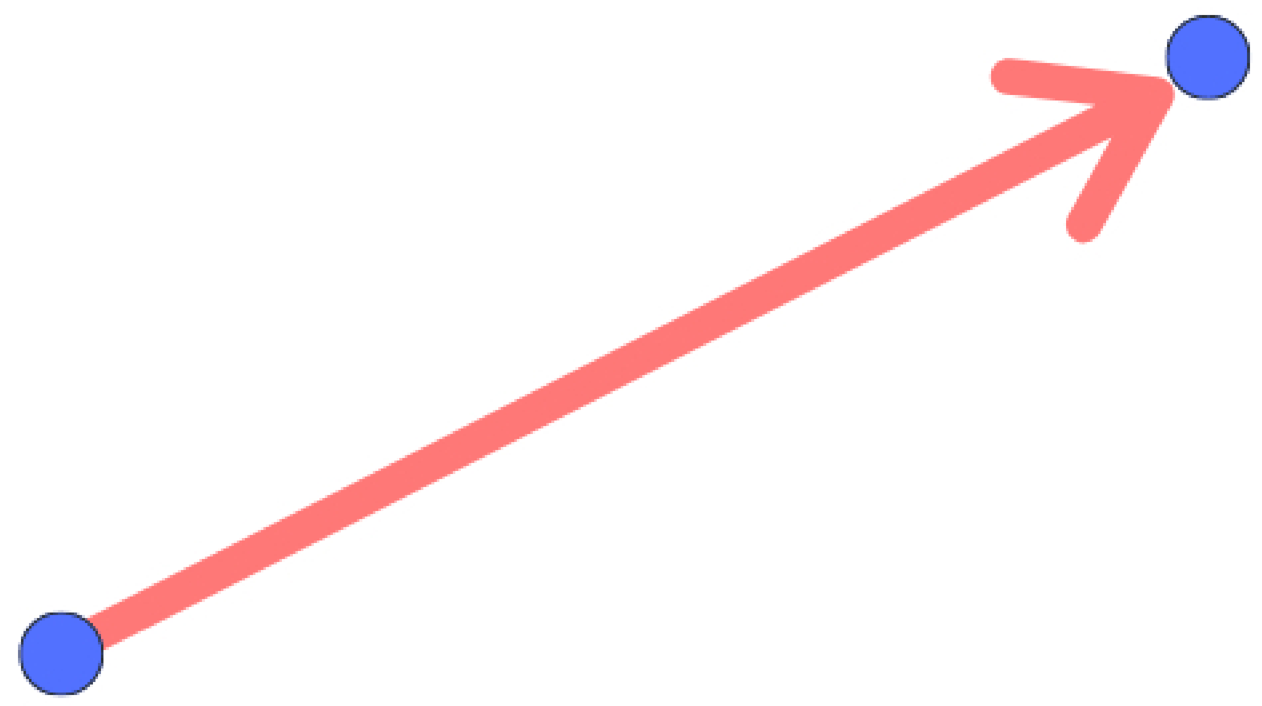
Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.

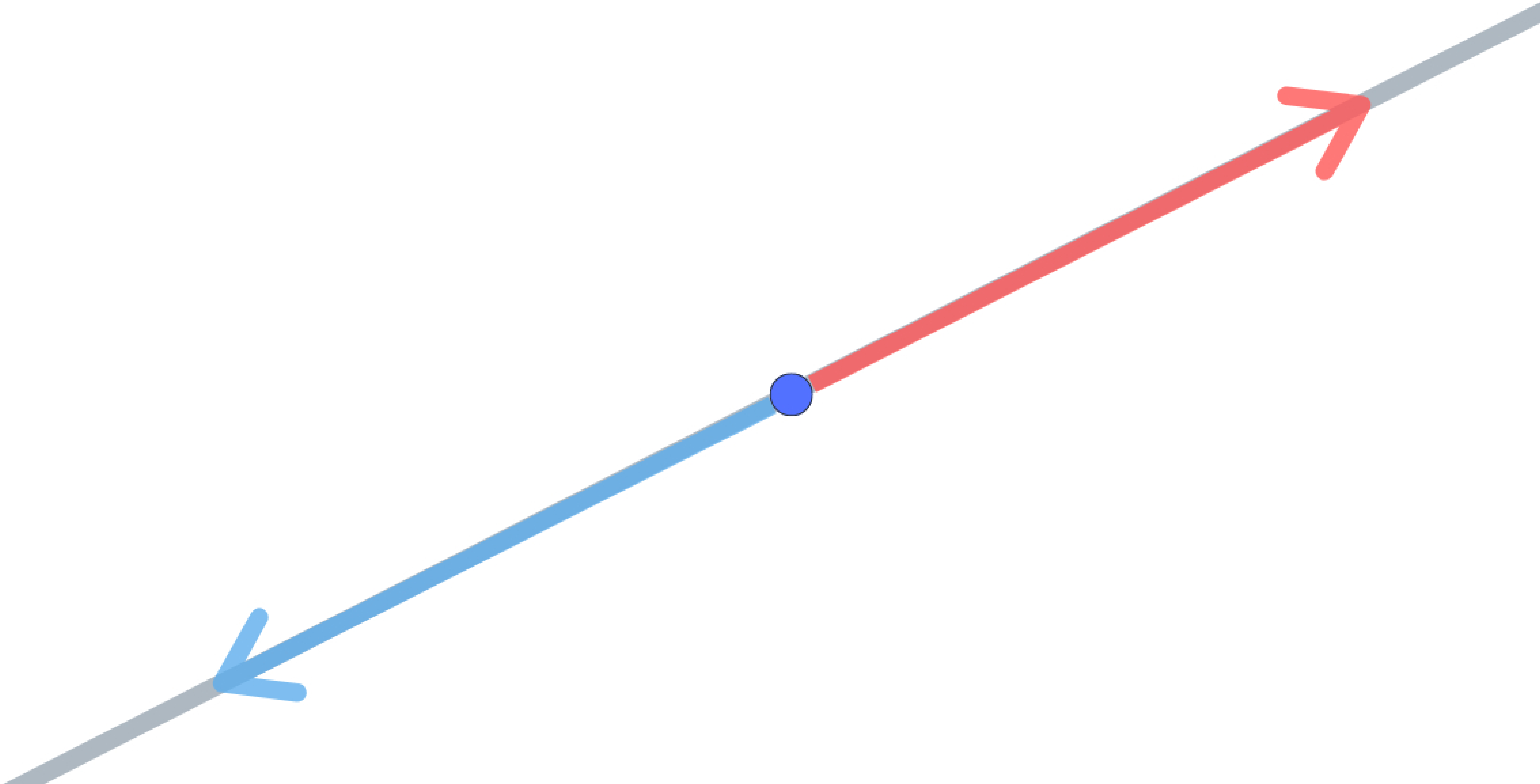
Também poder ser determinados por:

Origem

Direção

Comprimento





RECAPITULAÇÃO

Segmentos de reta orientados ficam determinados a partir de sua origem e seu ponto final.

Também poder ser determinados por:

Origem	Direção
Comprimento	Sentido

RECAPITULAÇÃO

Segmentos de reta orientados		Vetores	
Origem	✓	Origem	✗
Direção	✓	Direção	✓
Comprimento	✓	Comprimento	✓
Sentido	✓	Sentido	✓

RECAPITULAÇÃO

Vetores são criados via relação de equipolência vista na aula passada.

Segmentos de reta orientados		Vetores	
Origem	✓	Origem	✗
Direção	✓	Direção	✓
Comprimento	✓	Comprimento	✓
Sentido	✓	Sentido	✓

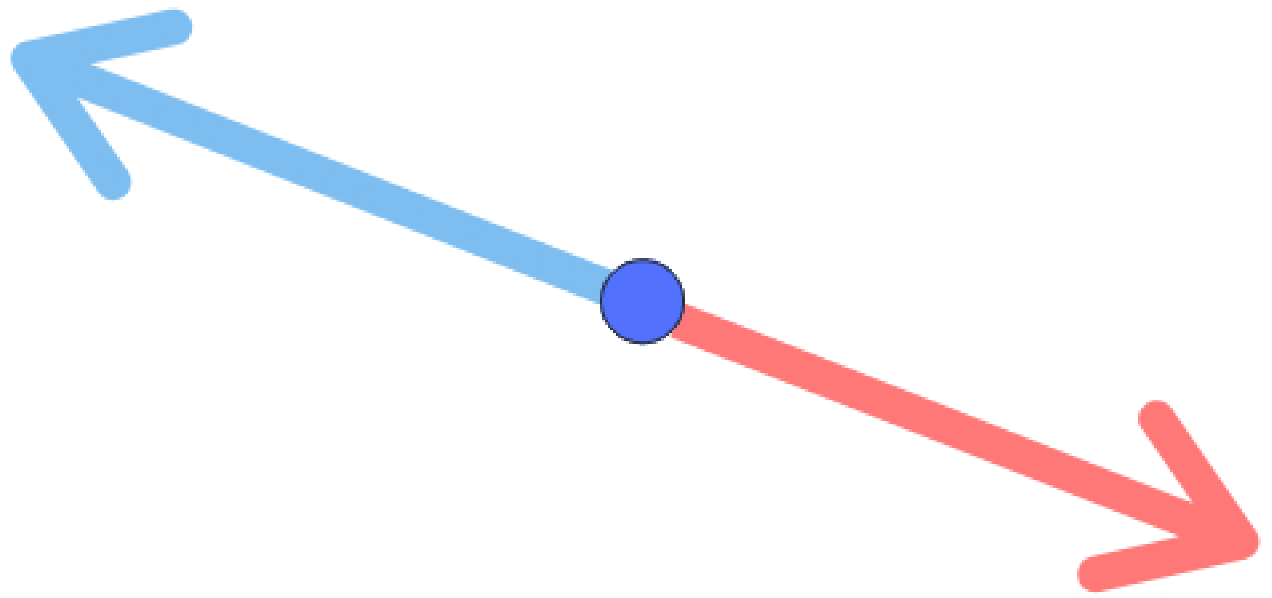
RECAPITULAÇÃO

Vetores são criados via relação de equipolência vista na aula passada.

Informalmente, vetores são segmentos de reta orientados em que a origem não é relevante.

Segmentos de reta orientados		Vetores	
Origem	✓	Origem	✗
Direção	✓	Direção	✓
Comprimento	✓	Comprimento	✓
Sentido	✓	Sentido	✓

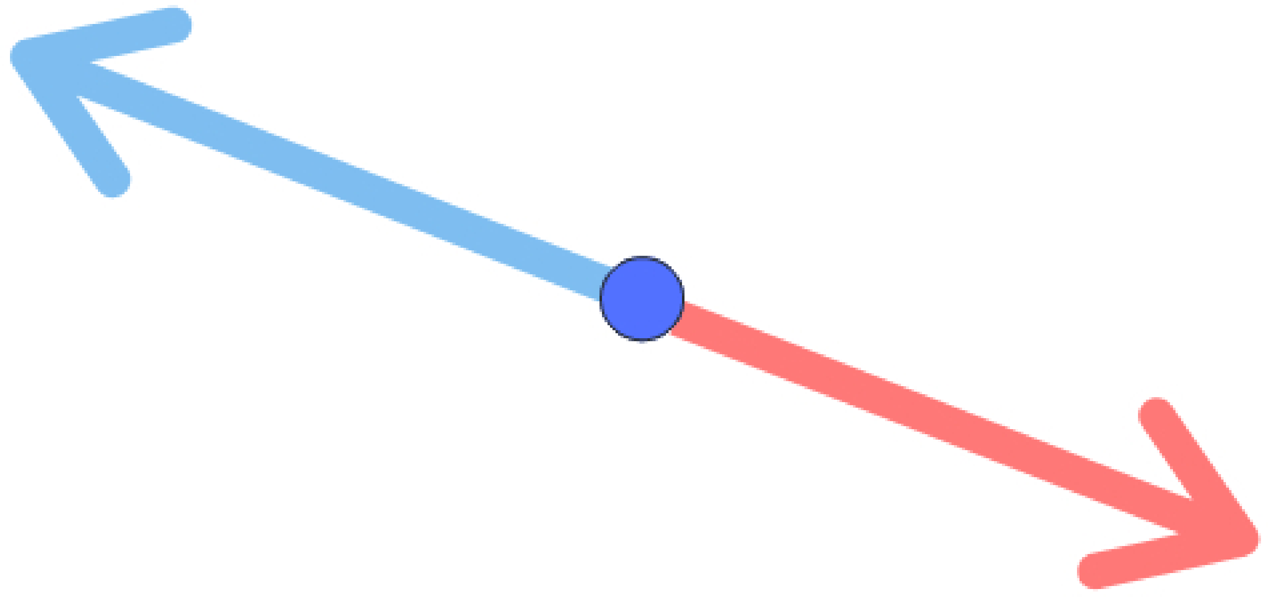
RECAPITULAÇÃO



Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✓
Sentidos iguais?	✗

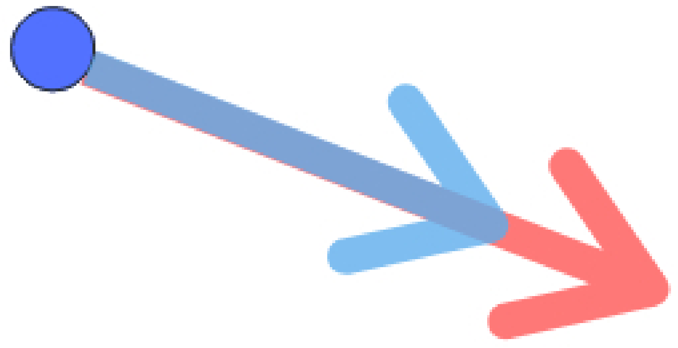
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.

RECAPITULAÇÃO



Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✓
Sentidos iguais?	✗

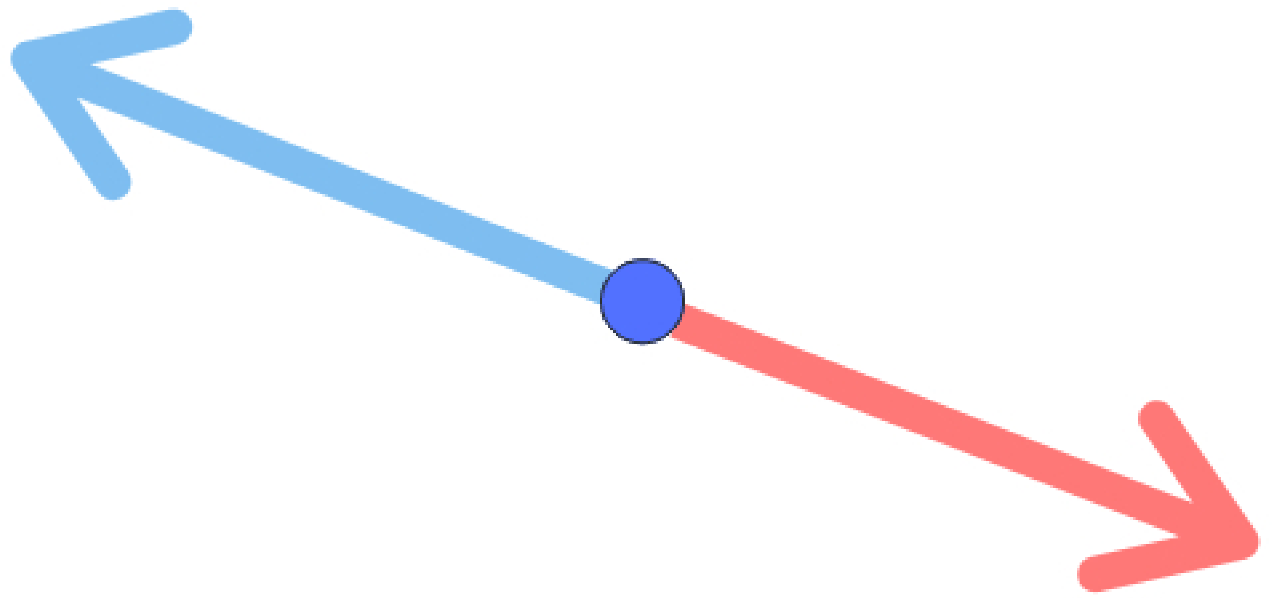
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.



Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✗
Sentidos iguais?	✓

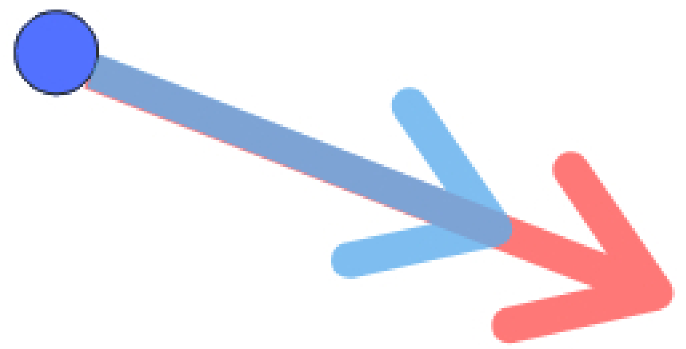
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.

RECAPITULAÇÃO



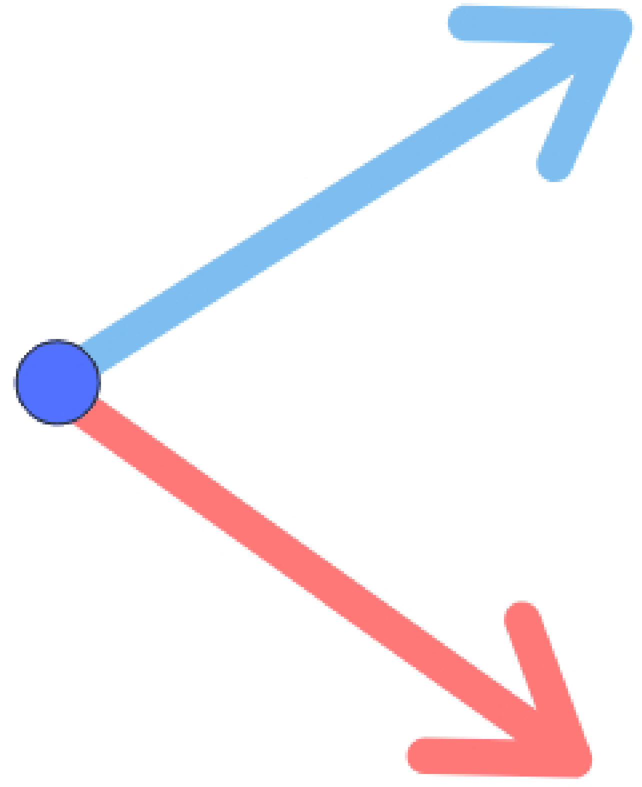
Origens iguais? ✓
Direções iguais? ✓
Comprimentos iguais? ✓
Sentidos iguais? ✗

Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.



Origens iguais? ✓
Direções iguais? ✓
Comprimentos iguais? ✗
Sentidos iguais? ✓

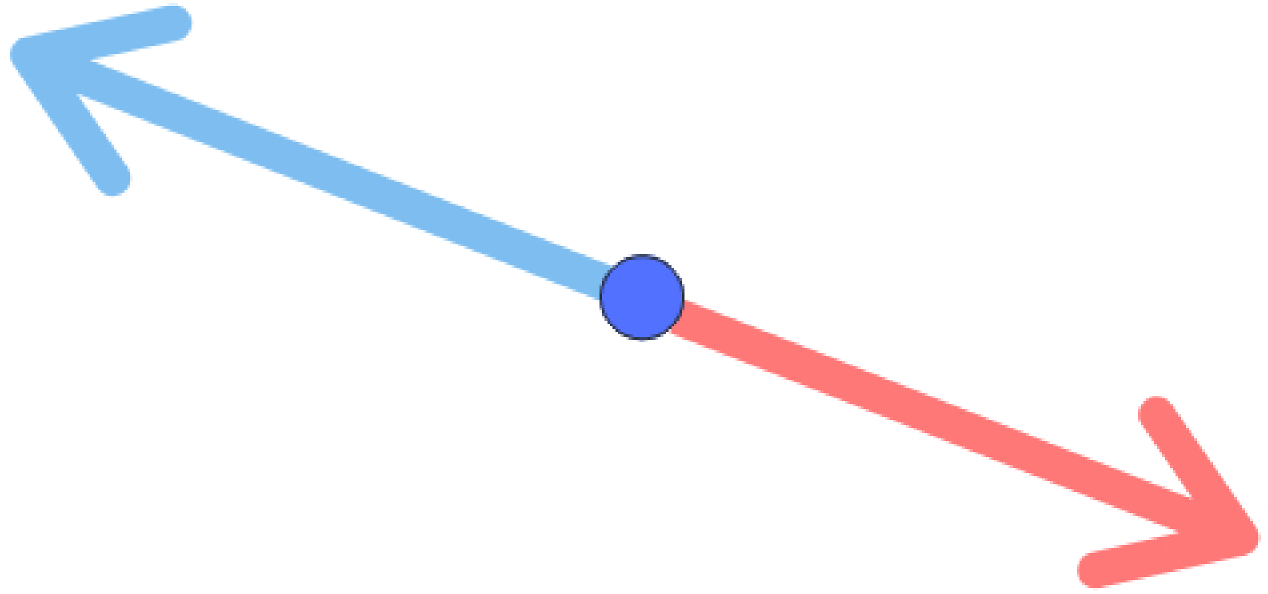
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.



Origens iguais? ✓
Direções iguais? ✗
Comprimentos iguais? ✓
Sentidos iguais?

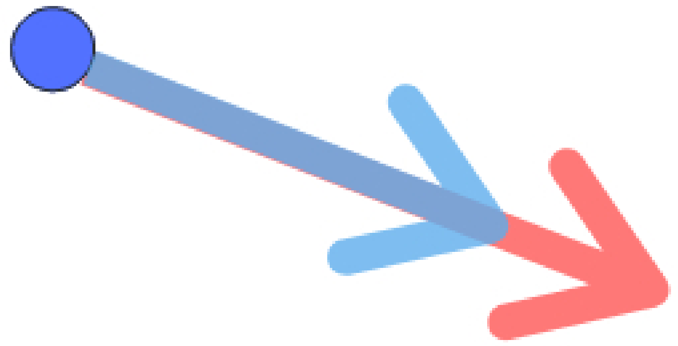
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.

RECAPITULAÇÃO



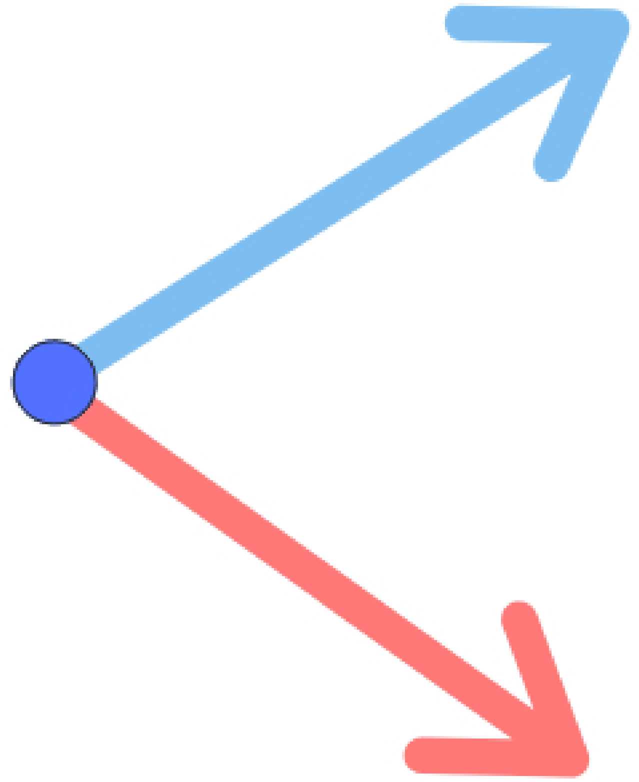
Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✓
Sentidos iguais?	✗

Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.



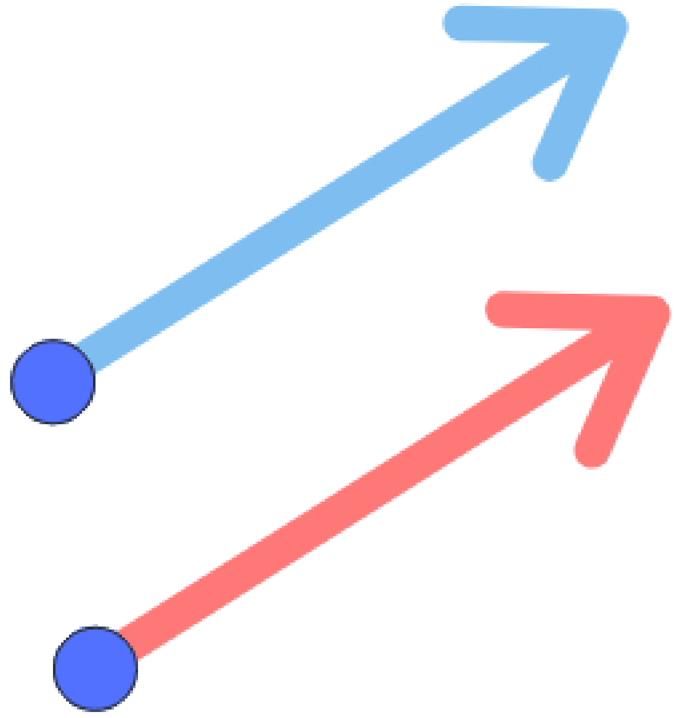
Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✗
Sentidos iguais?	✓

Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.



Origens iguais?	✓
Direções iguais?	✗
Comprimentos iguais?	✓
Sentidos iguais?	

Segmentos de reta orientados diferentes e vetores diferentes.

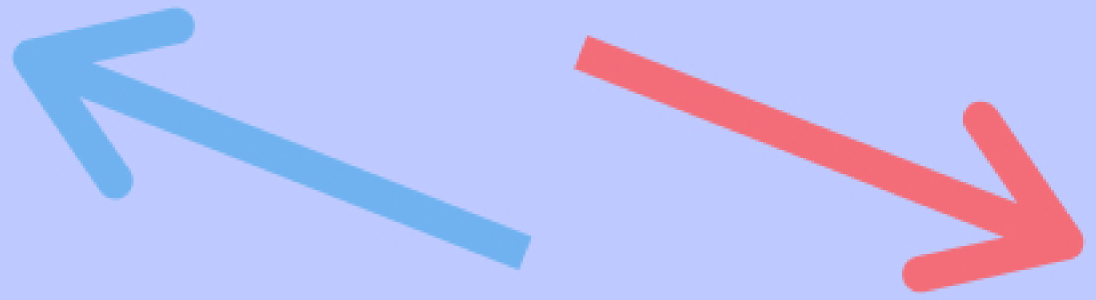


Origens iguais?	✗
Direções iguais?	✓
Comprimentos iguais?	✓
Sentidos iguais?	✓

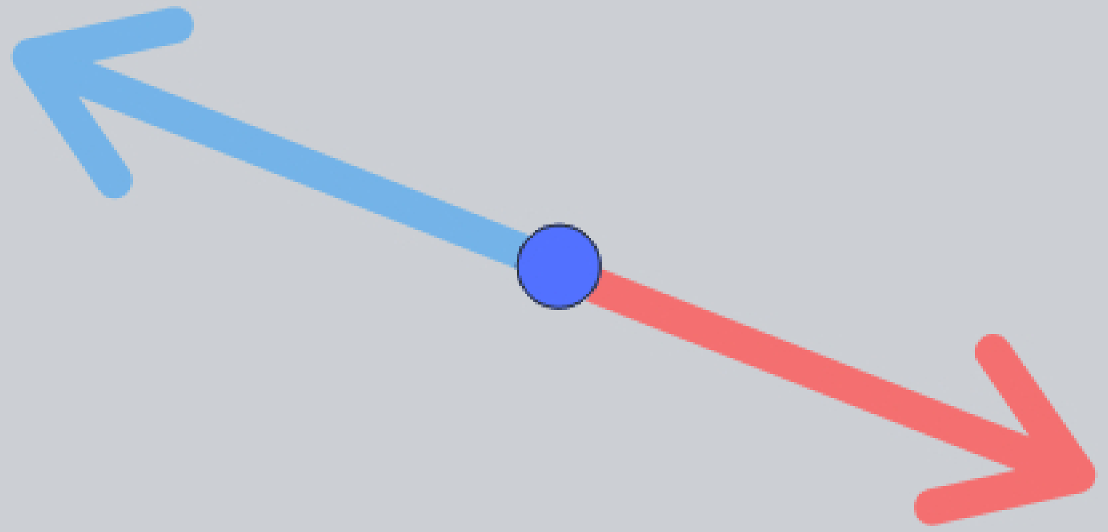
Segmentos de reta orientados diferentes e vetores iguais!!

RECAPITULAÇÃO

São vetores iguais?

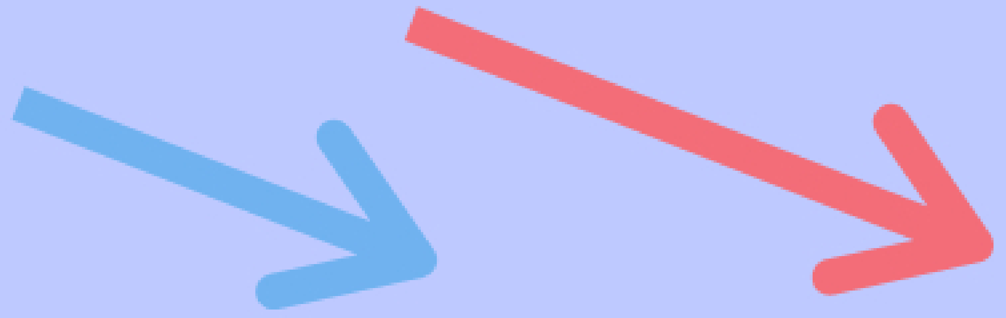


Desenho com a mesma origem.

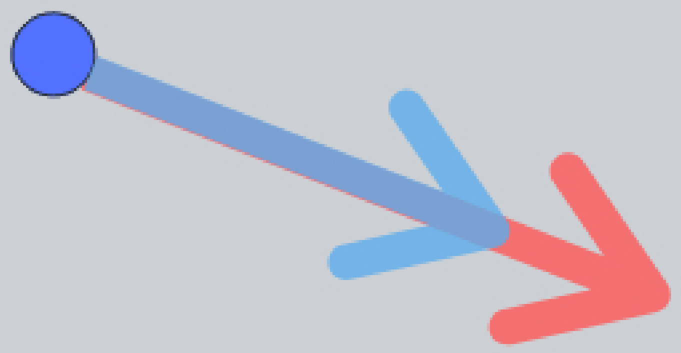


São vetores diferentes.

São vetores iguais?



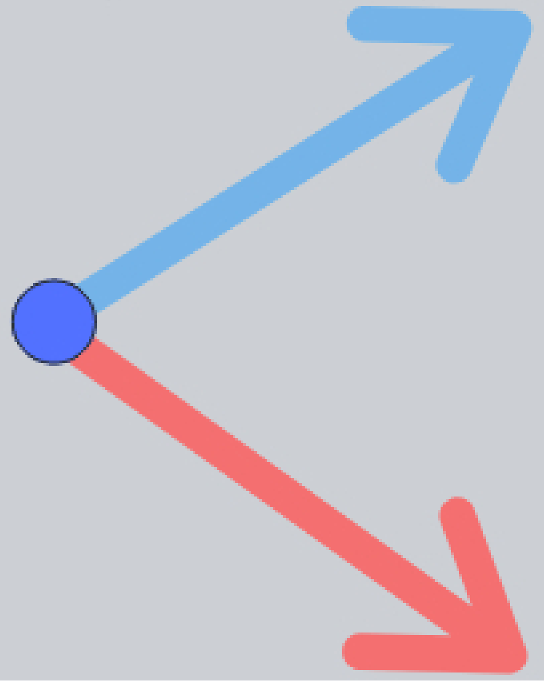
Desenho com a mesma origem.



São vetores diferentes.

São vetores iguais?

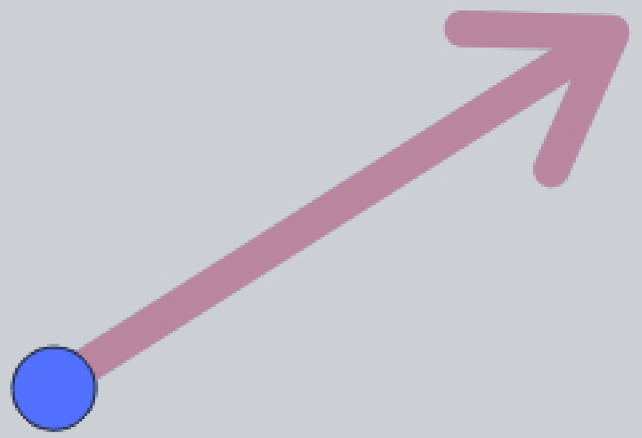
Desenho com a mesma origem.



São vetores diferentes.

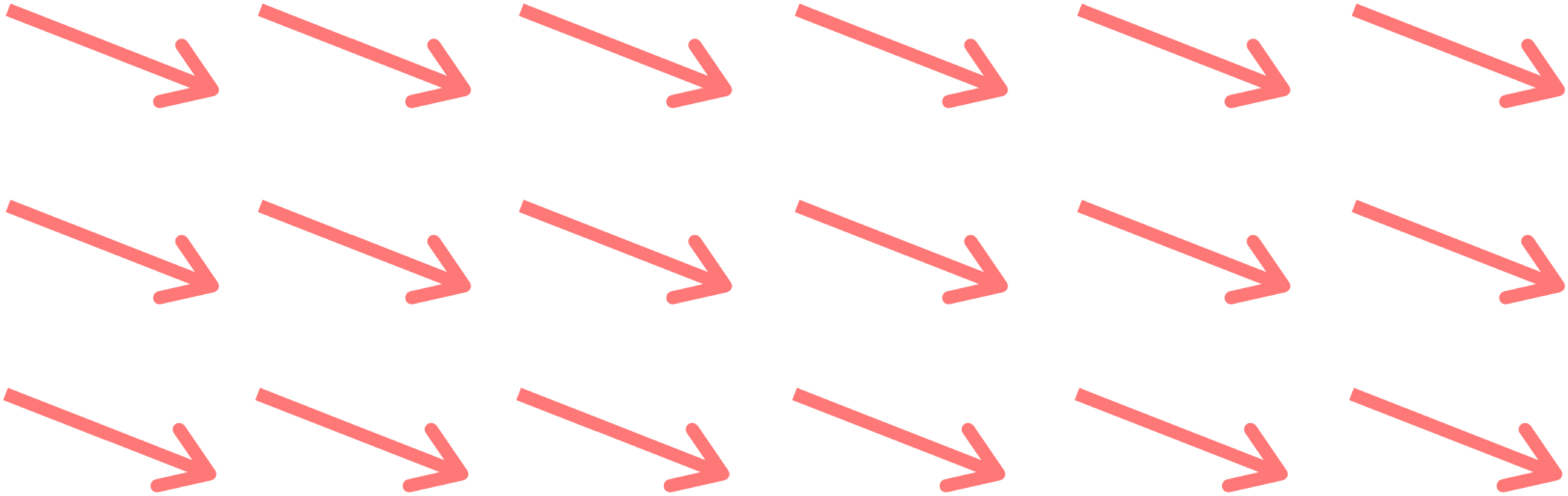
São vetores iguais?

Desenho com a mesma origem.



São o mesmo vetor!

RECAPITULAÇÃO

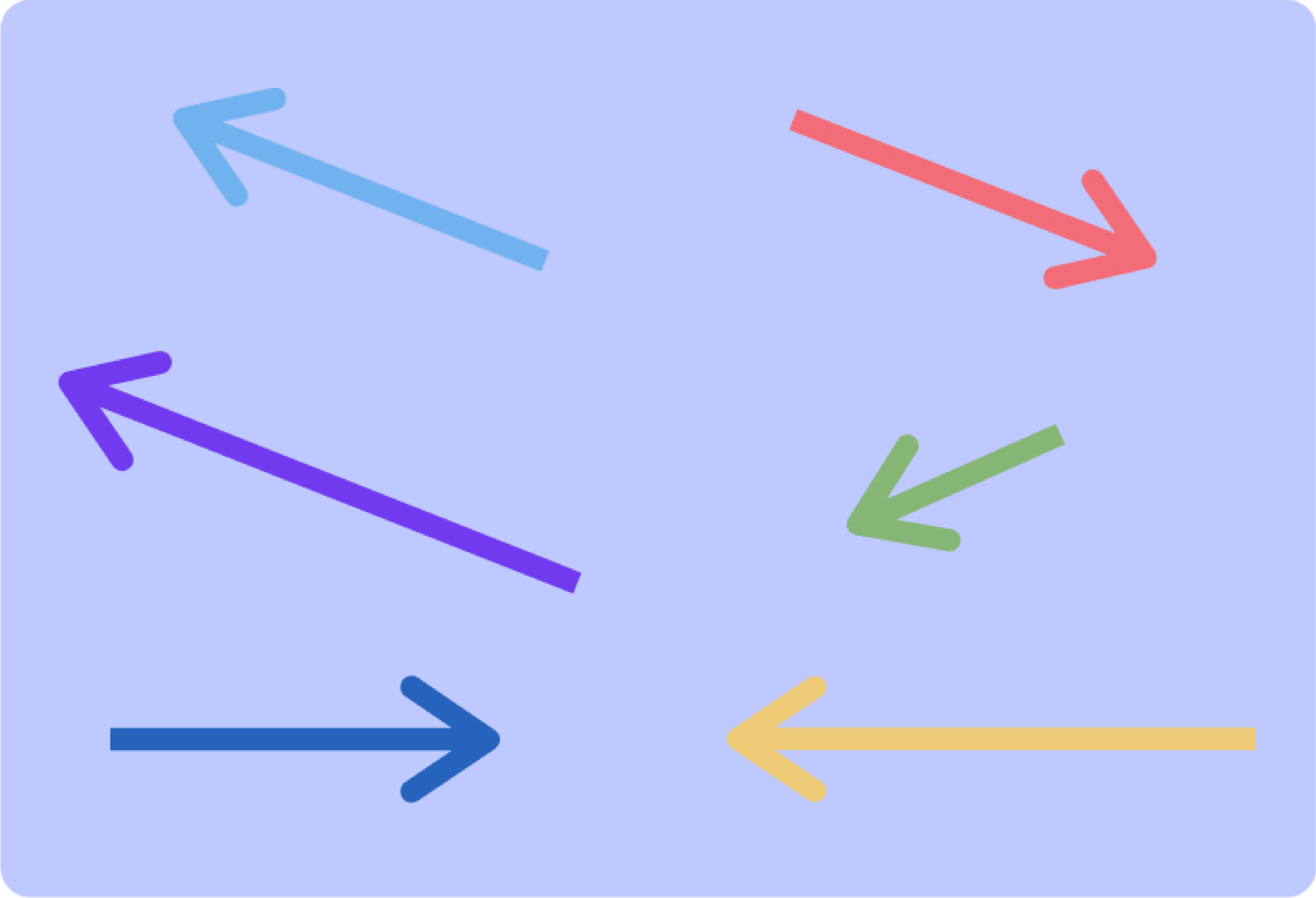


São todos segmentos de retas orientados diferentes entre si, pois possuem origens diferentes.

Mas, como vetores, são todos iguais!!!

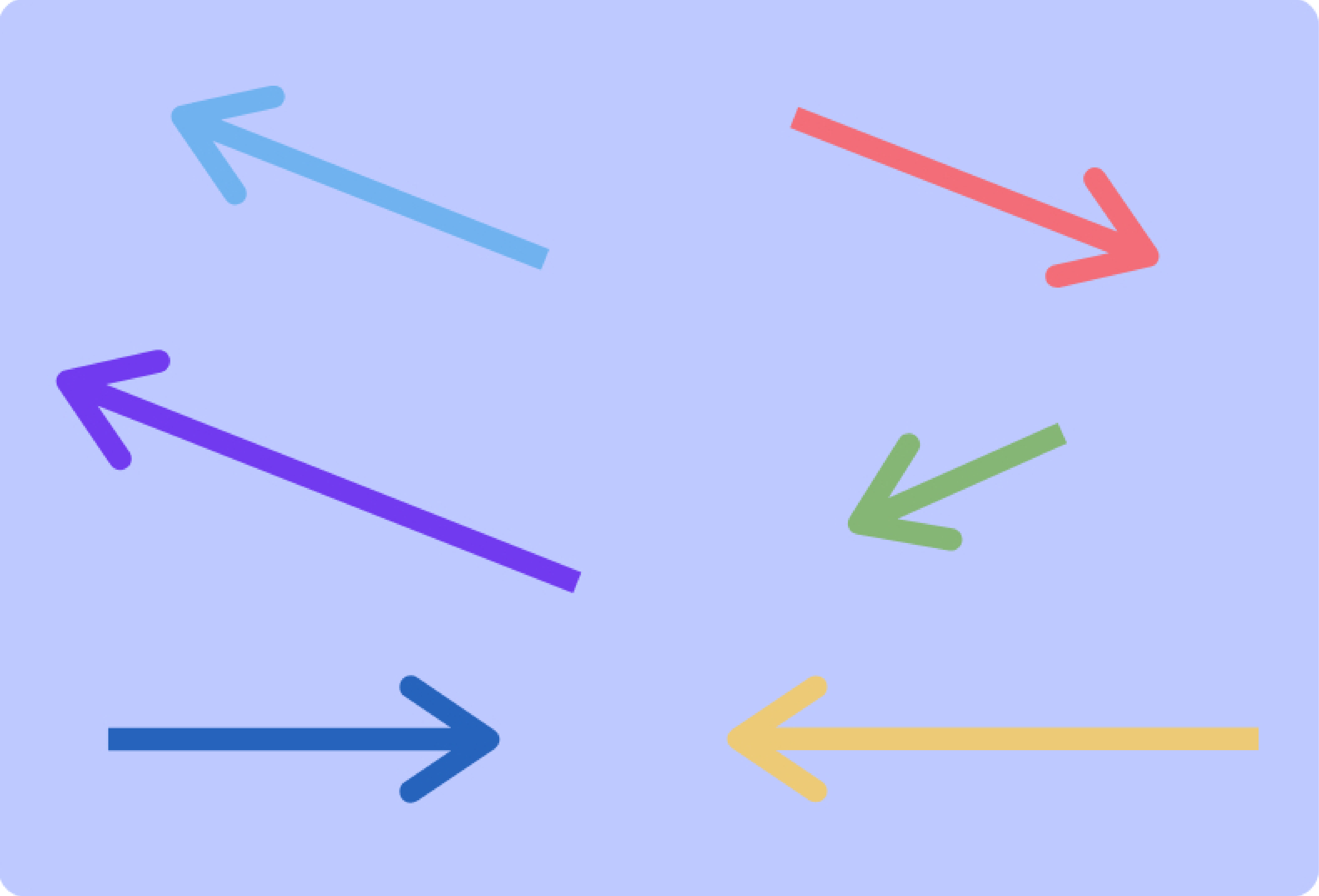
RECAPITULAÇÃO

Quais dos vetores abaixo são paralelos (ou colineares ou múltiplos um do outro)?

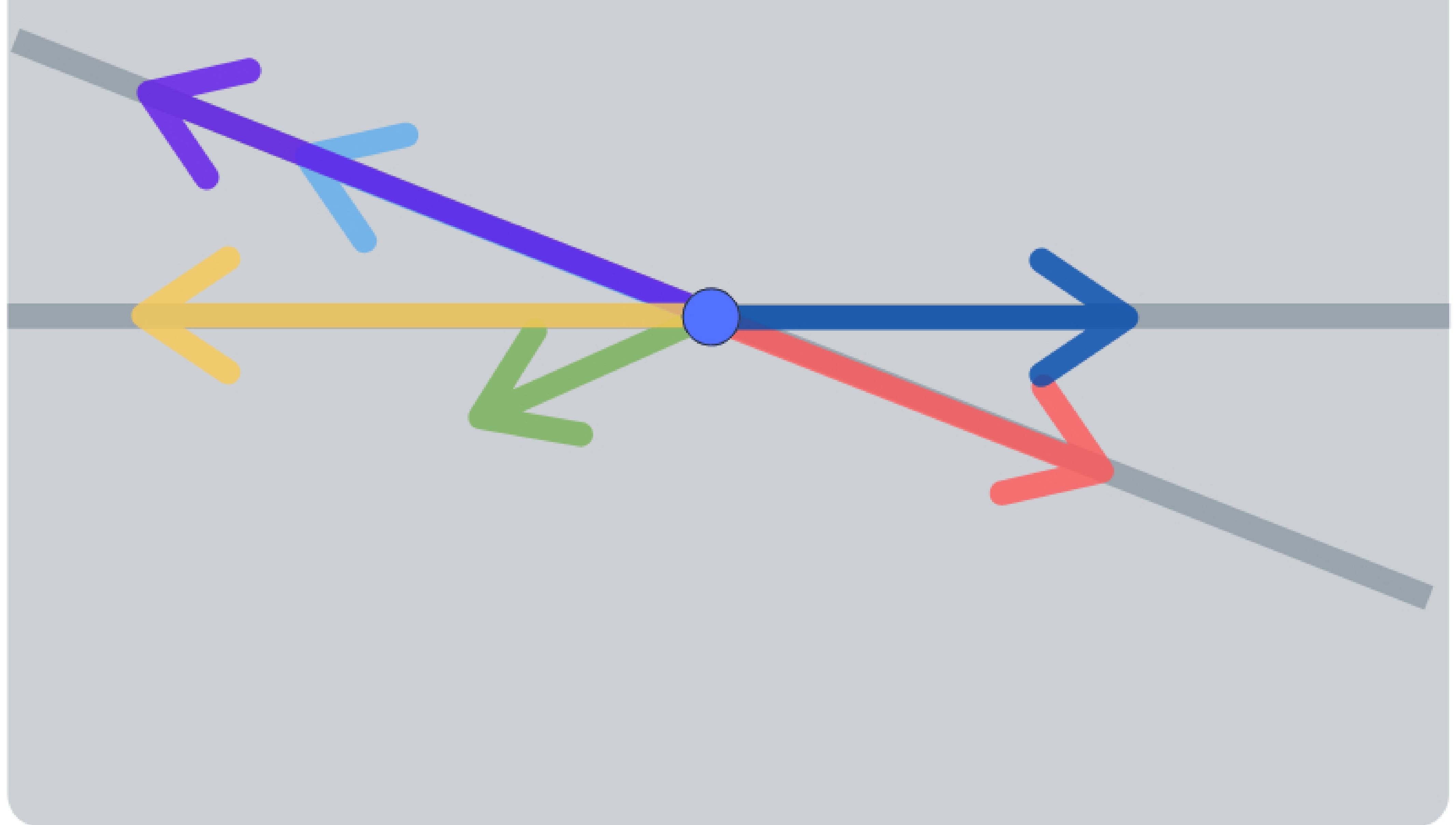


RECAPITULAÇÃO

Quais dos vetores abaixo são paralelos (ou colineares ou múltiplos um do outro)?

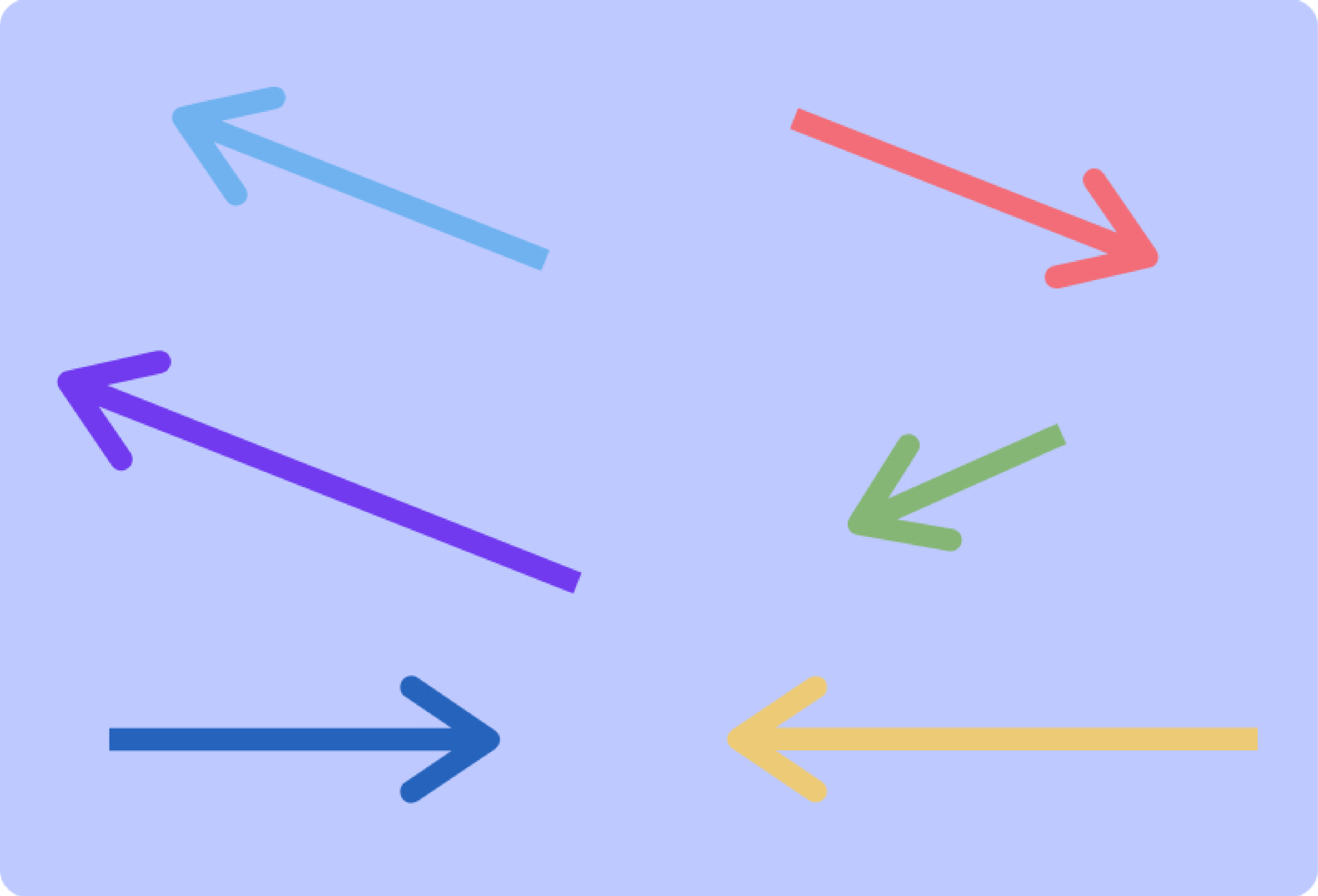


Desenho com a mesma origem.

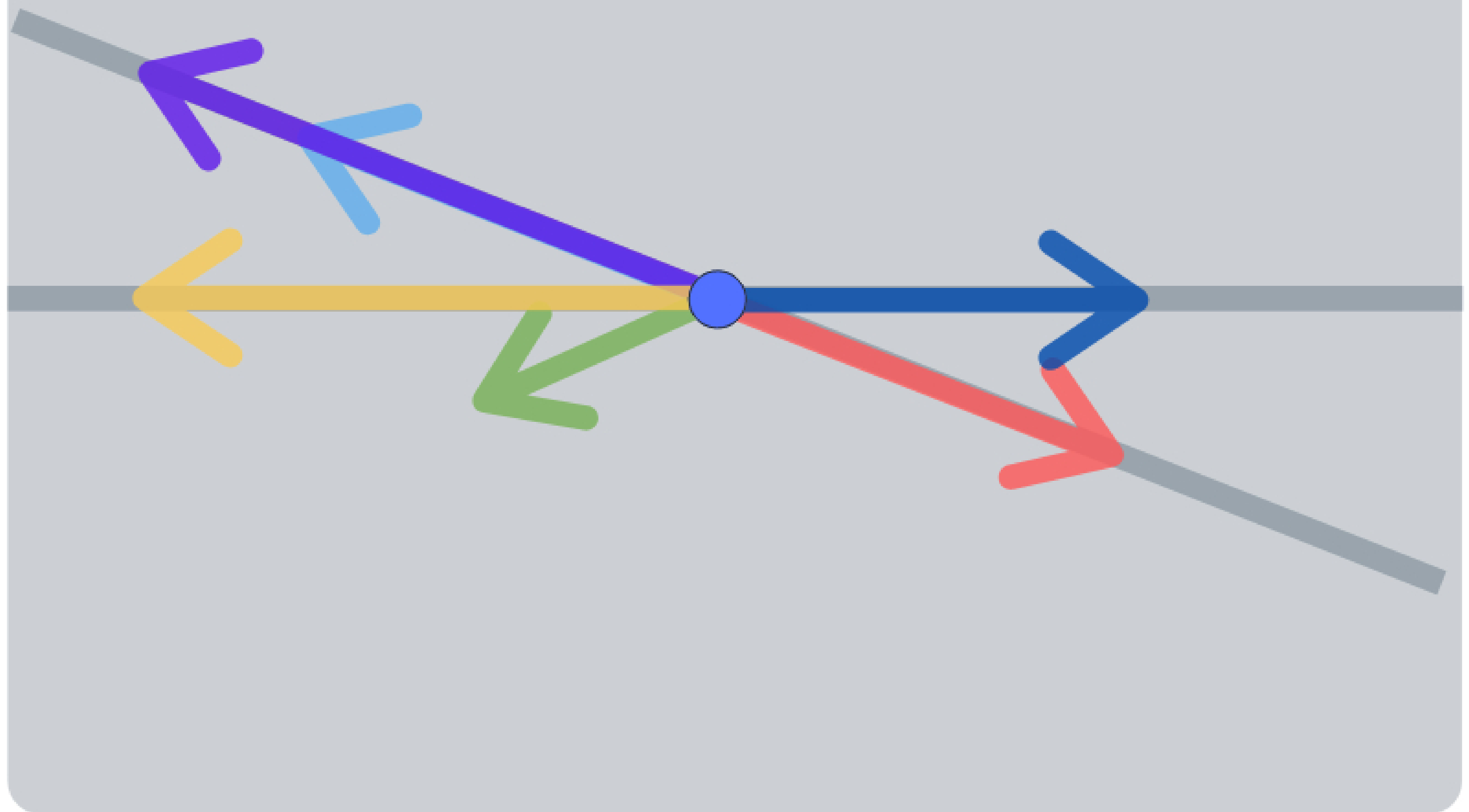


RECAPITULAÇÃO

Quais dos vetores abaixo são paralelos (ou colineares ou múltiplos um do outro)?

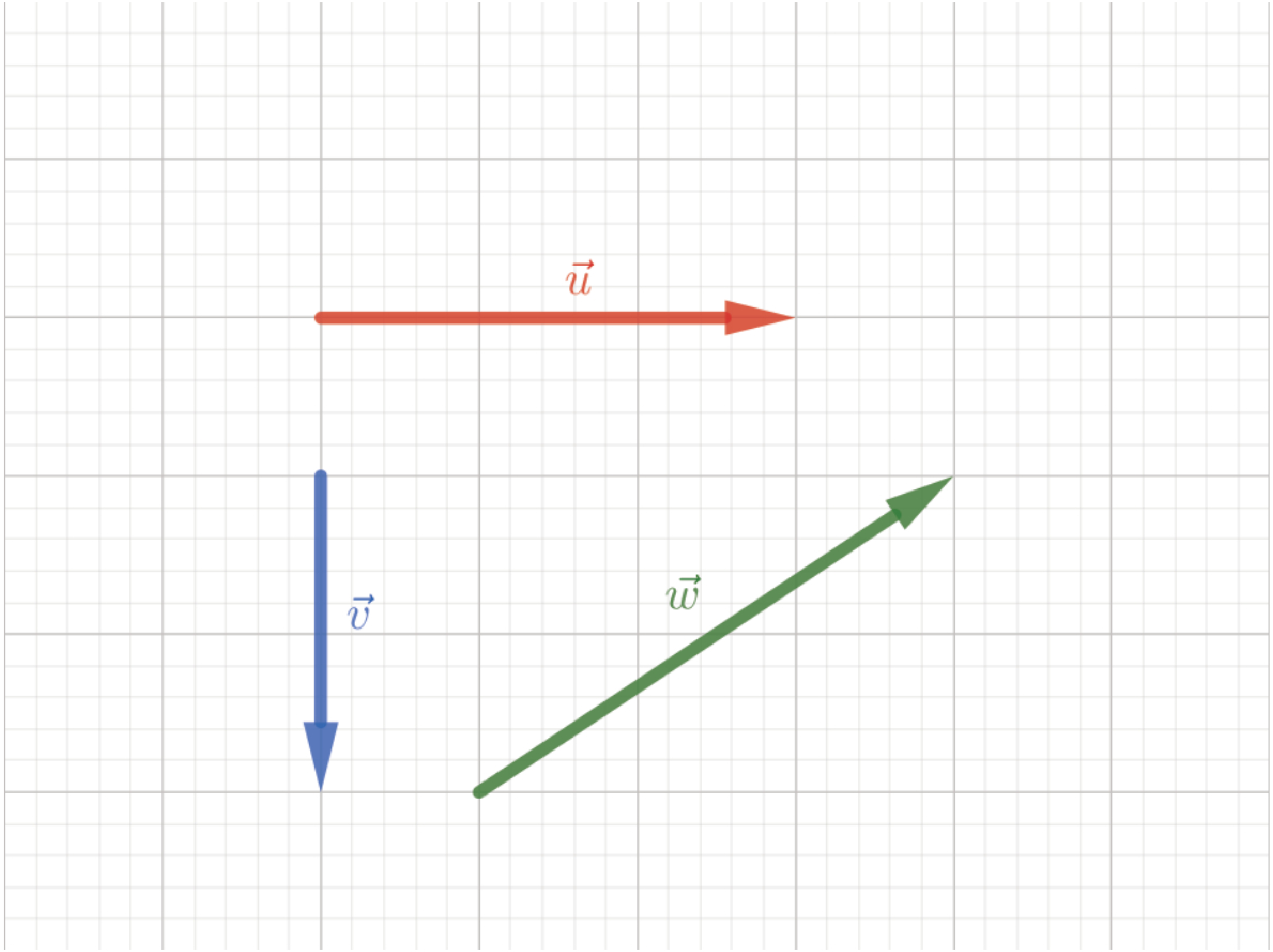


Desenho com a mesma origem.



Azul claro, vermelho e roxo são paralelos entre si.
Azul escuro e amarelo são paralelos entre si.

RECAPITULAÇÃO



Comprimento, tamanho, módulo ou norma.

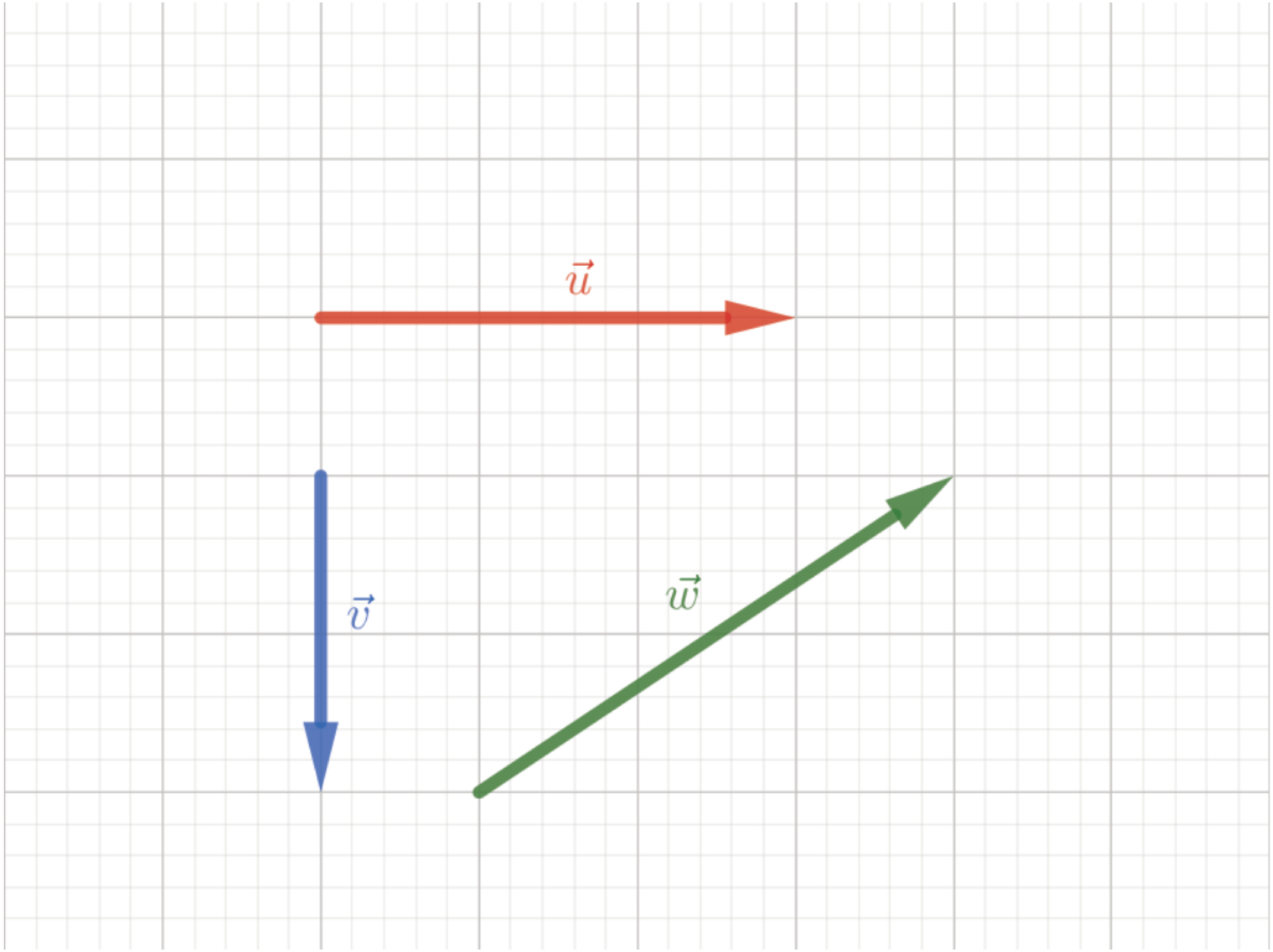
$$|\vec{u}| = 3 \quad \text{ou} \quad ||\vec{u}|| = 3$$

$$|\vec{v}| = 2 \quad \text{ou} \quad ||\vec{u}|| = 2$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{13} \quad \text{ou} \quad ||\vec{w}|| = \sqrt{13}$$

Aplique o Teorema de Pitágoras para encontrar o tamanho do vetor $\vec{w}$.

RECAPITULAÇÃO



Comprimento, tamanho, módulo ou norma.

$$|\vec{u}| = 3 \quad \text{ou} \quad ||\vec{u}|| = 3$$

$$|\vec{v}| = 2 \quad \text{ou} \quad ||\vec{u}|| = 2$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{13} \quad \text{ou} \quad ||\vec{w}|| = \sqrt{13}$$

Aplique o Teorema de Pitágoras para encontrar o tamanho do vetor $\vec{w}$.

Atenção!!!

Seu professor de Física pode usar

$u = 3 \qquad v = 2 \qquad w = \sqrt{13}$

RECAPITULAÇÃO

Versor de um dado vetor é o vetor de mesma direção e sentido, mas com módulo igual a 1.

RECAPITULAÇÃO

Existe um vetor de tamanho 0, chamado de vetor nulo.
Normalmente denotamos o vetor nulo por $\vec{0}$.

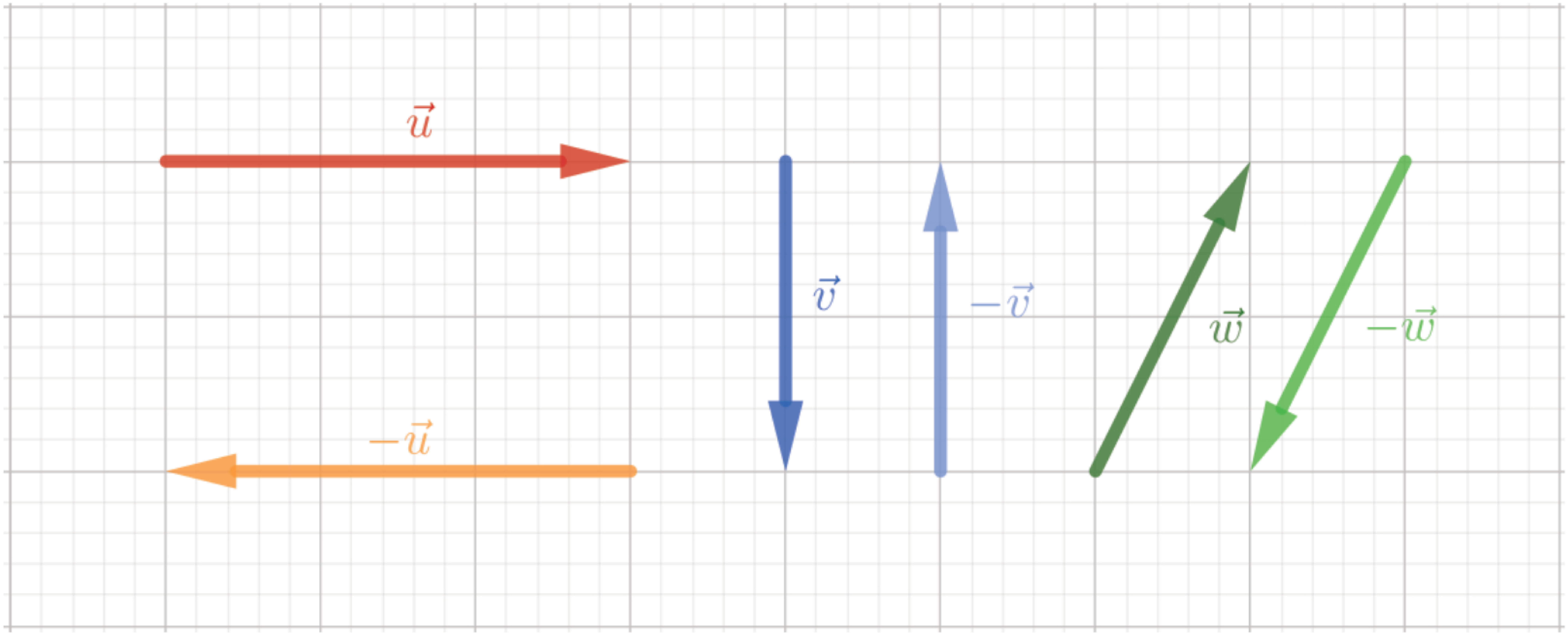
O vetor nulo não possui direção nem sentido definidos.

O vetor nulo é considerado paralelo a qualquer outro vetor.

Alerta!!! Dependendo do livro, essas convenções podem mudar!

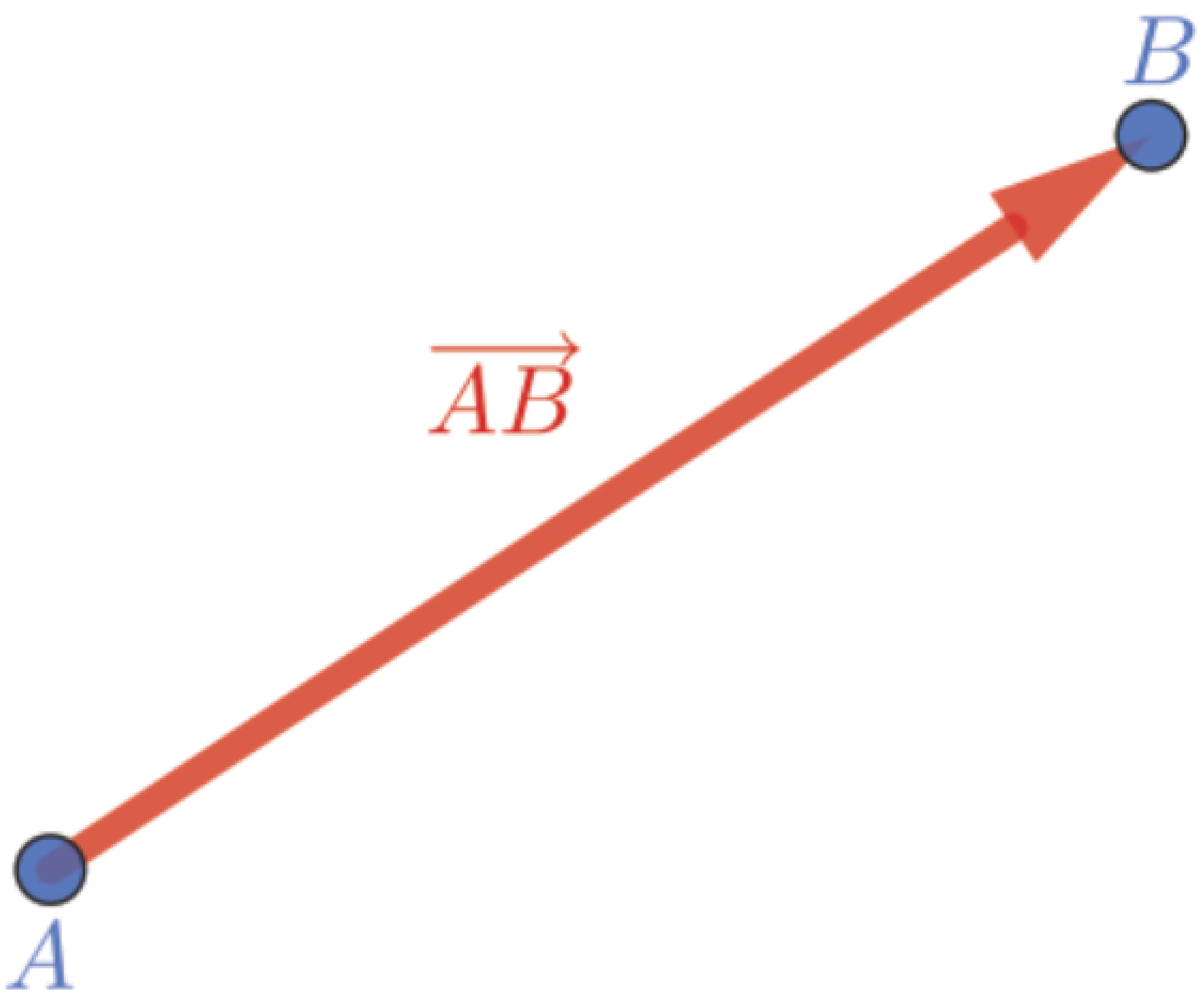
RECAPITULAÇÃO

Dado um vetor $\vec{u}$, o vetor de mesmo módulo e direção, mas com sentido oposto, é chamado de oposto de $\vec{u}$ e é denotado por $-\vec{u}$.



RECAPITULAÇÃO

O vetor com origem no ponto A e final do ponto B é denotado por $\overrightarrow{AB}$.



RECAPITULAÇÃO

O vetor com origem no ponto A e final do ponto B é denotado por $\overrightarrow{AB}$.

CONFUSÃO COM A AULA DE FÍSICA

Quando uma força é aplicada em um ponto diferente, o resultado pode mudar. Mas se força é um vetor e vetores não têm origem definida, o resultado não deveria ser o mesmo?

CONFUSÃO COM A AULA DE FÍSICA

Quando uma força é aplicada em um ponto diferente, o resultado pode mudar. Mas se força é um vetor e vetores não têm origem definida, o resultado não deveria ser o mesmo?

Força é uma grandeza física que é medida por vetores. O ponto de aplicação da força é uma informação adicional que não está armazenada no vetor.

"Uma força F é aplicada no ponto P."

ADIÇÃO DE VETORES

Número + Número = Novo número

Exemplo

$$2 + 5 = 7$$

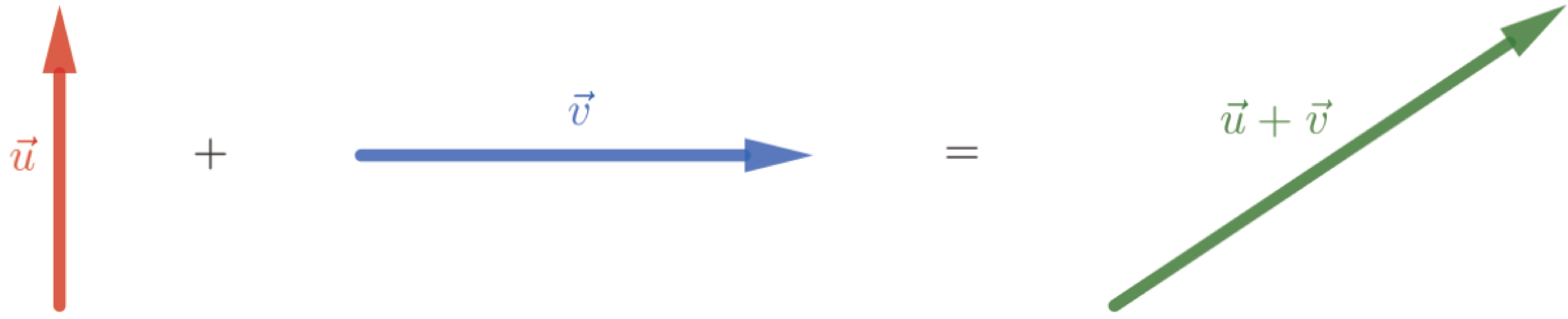
Matriz + Matriz = Nova matriz

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

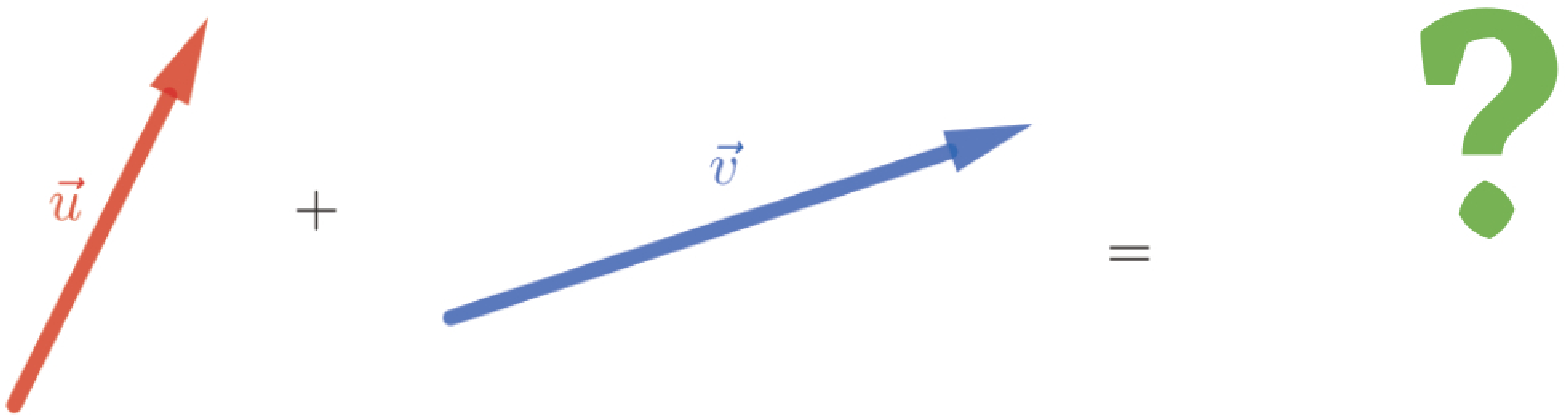
Exemplo

Vetor + Vetor = Novo vetor



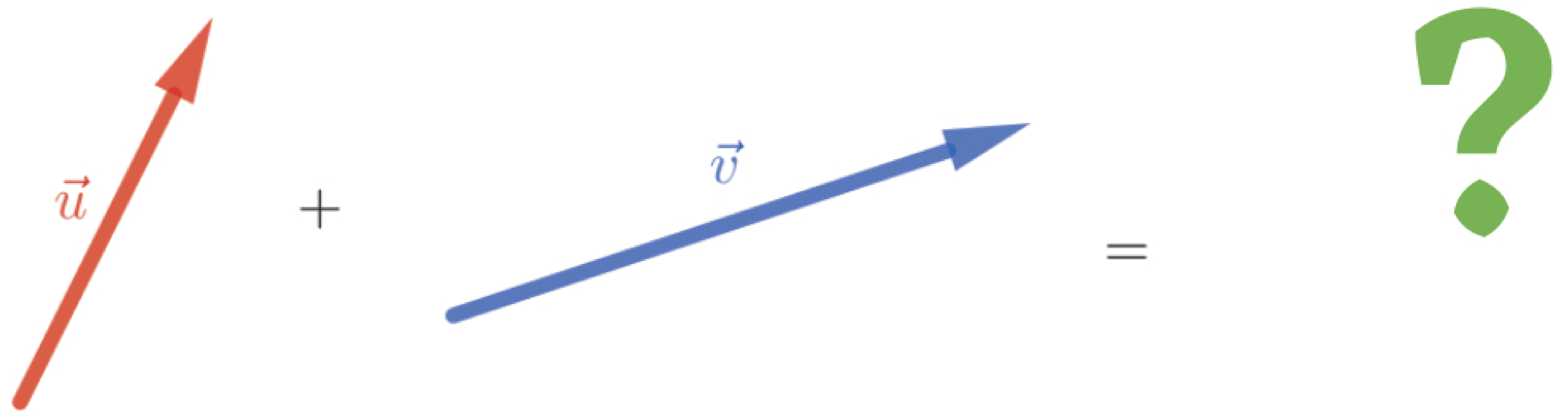
ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo



ADIÇÃO DE VETORES

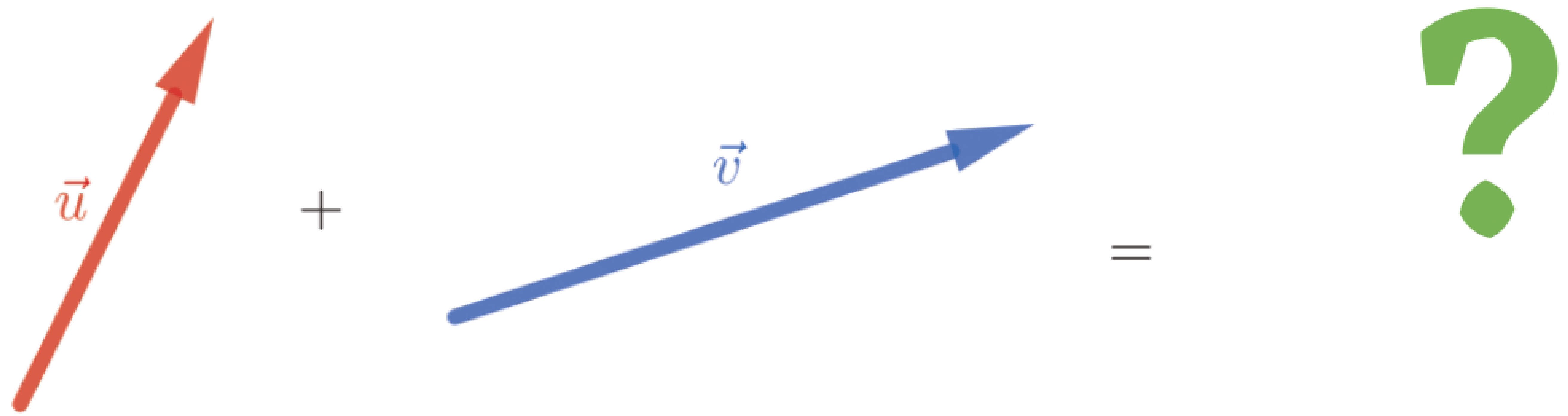
Exemplo



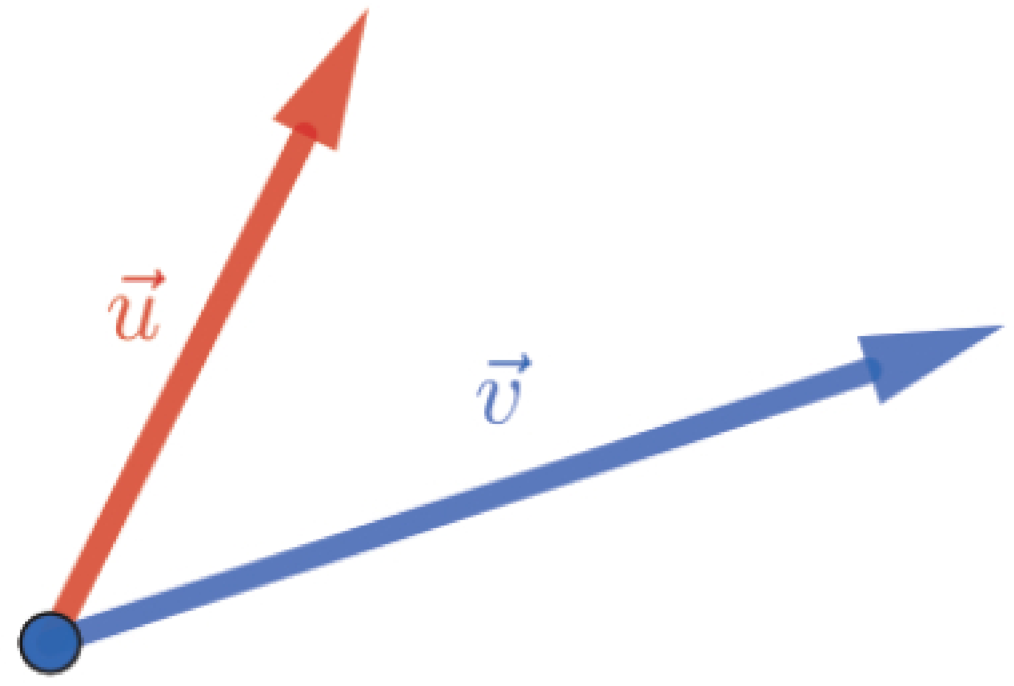
Regra do paralelogramo

ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

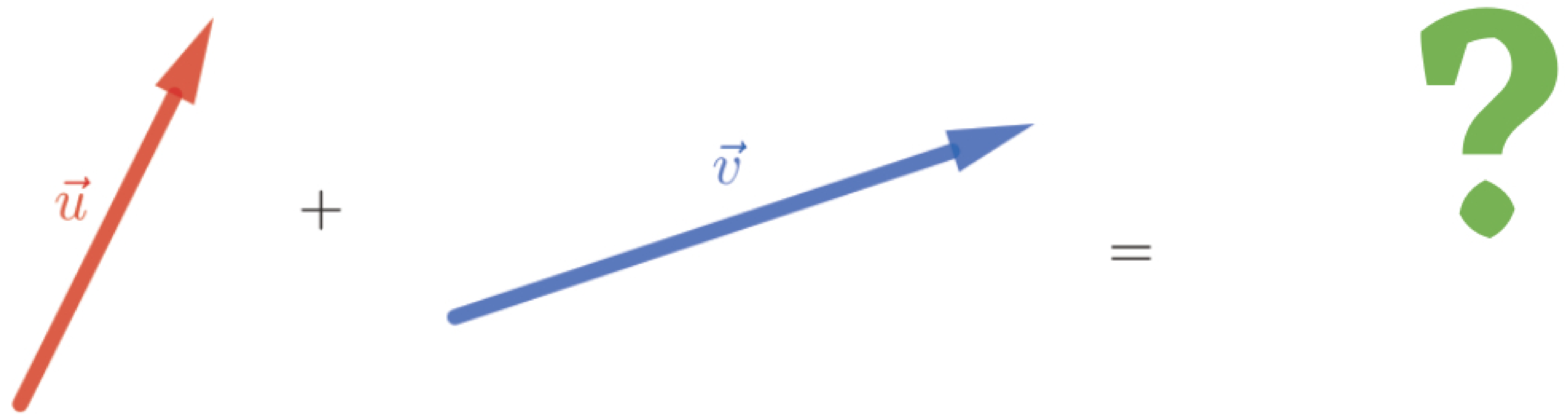


Regra do paralelogramo

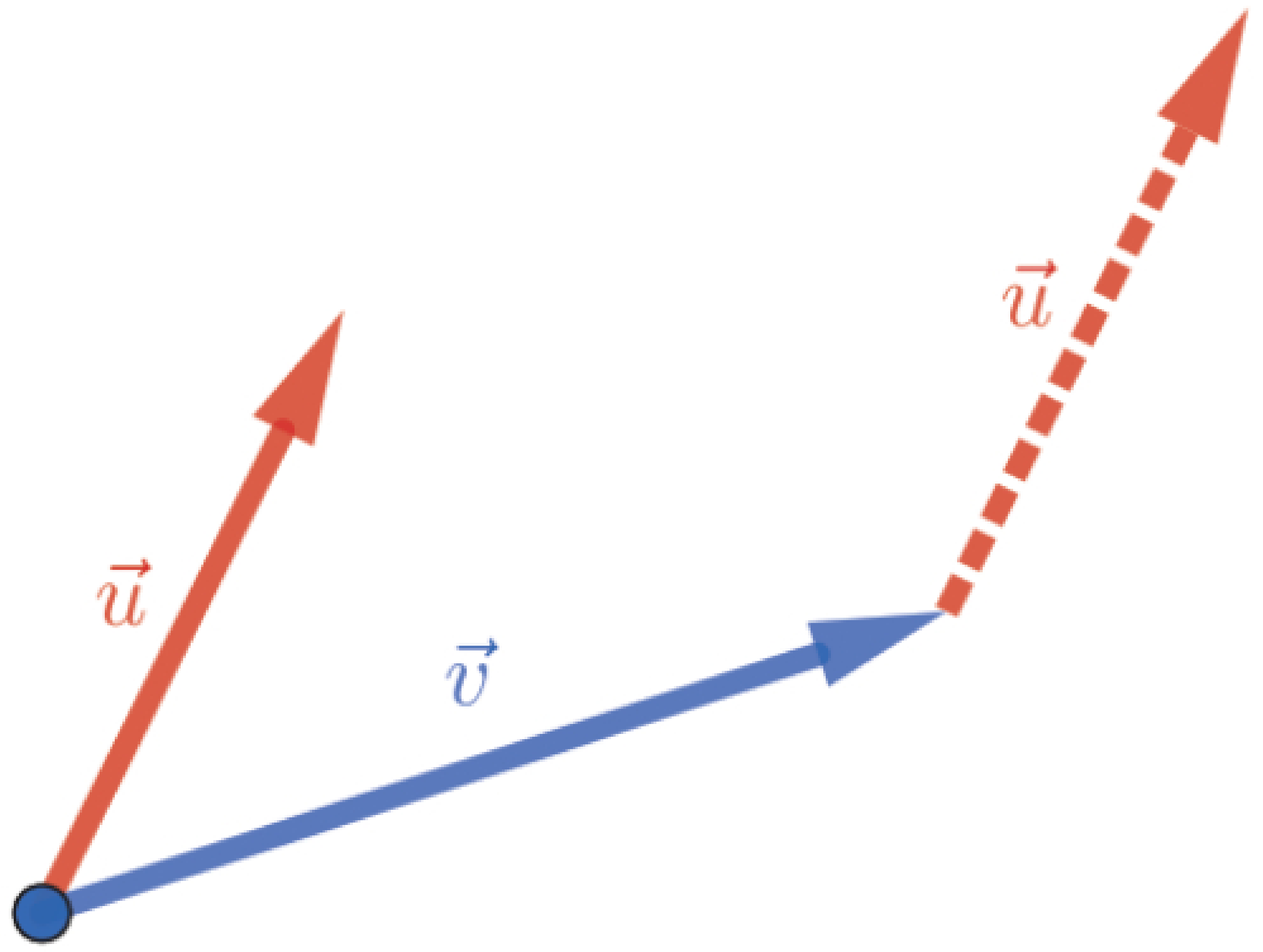


ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

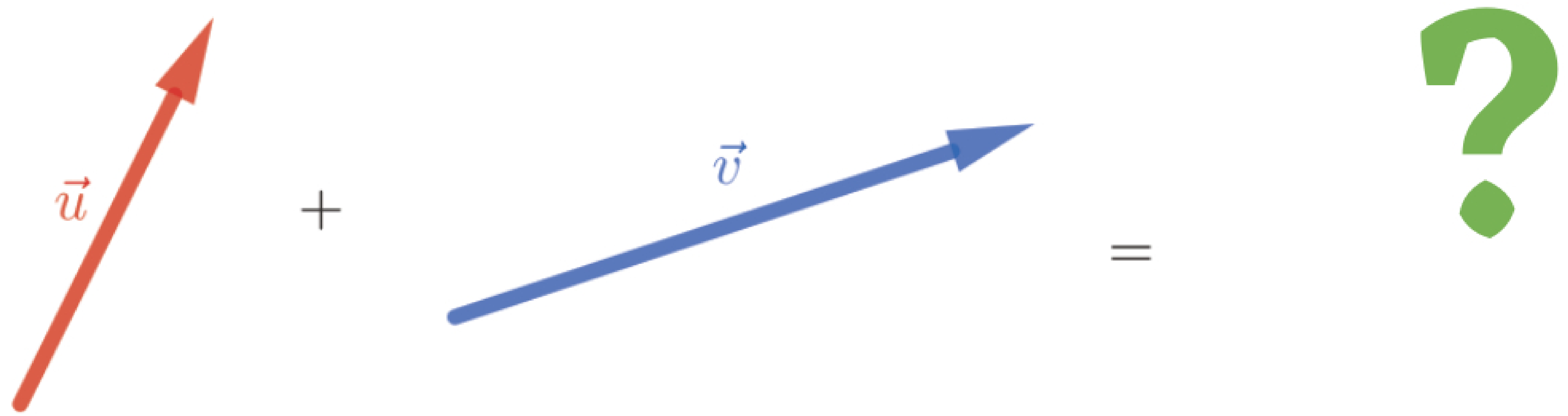


Regra do paralelogramo

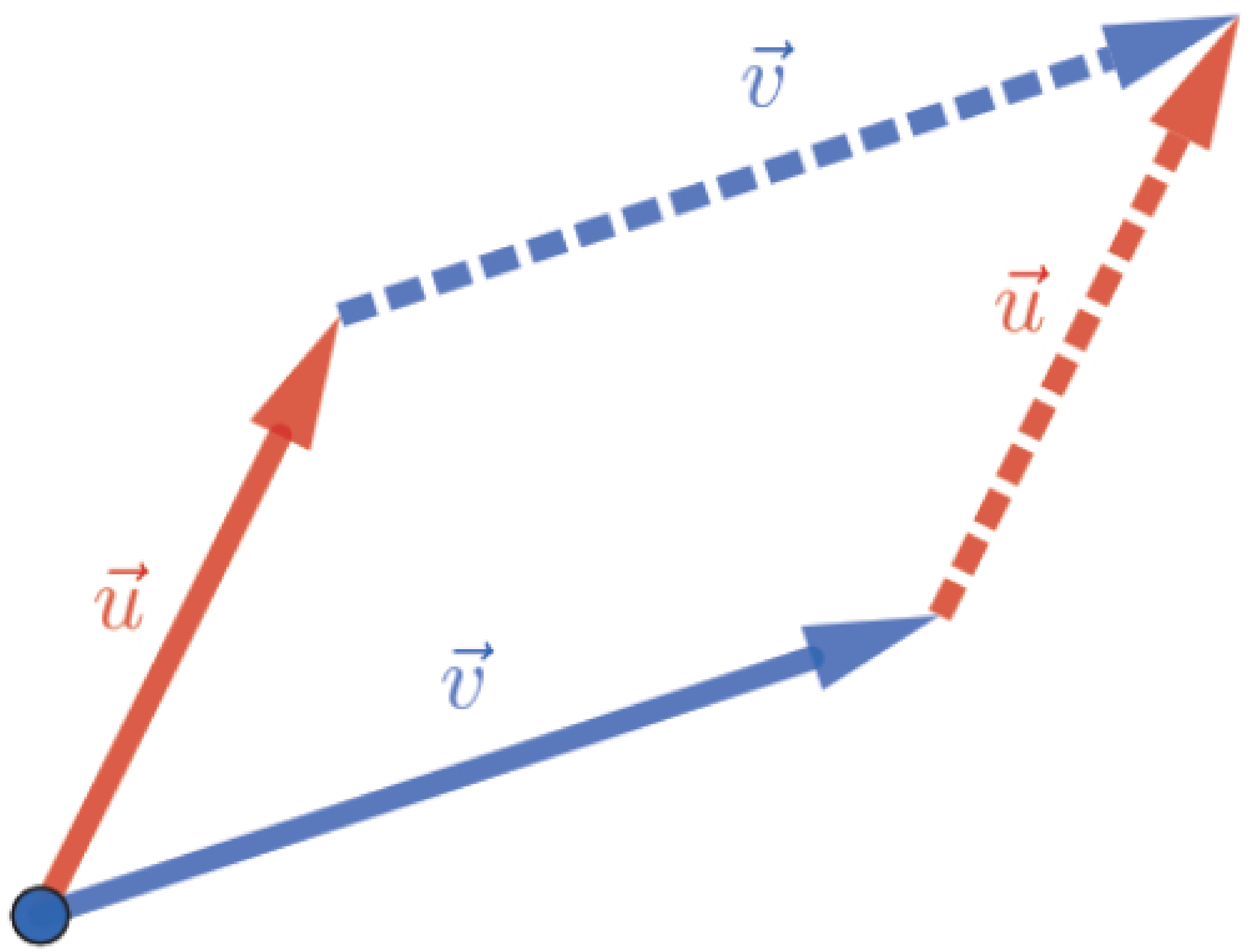


ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

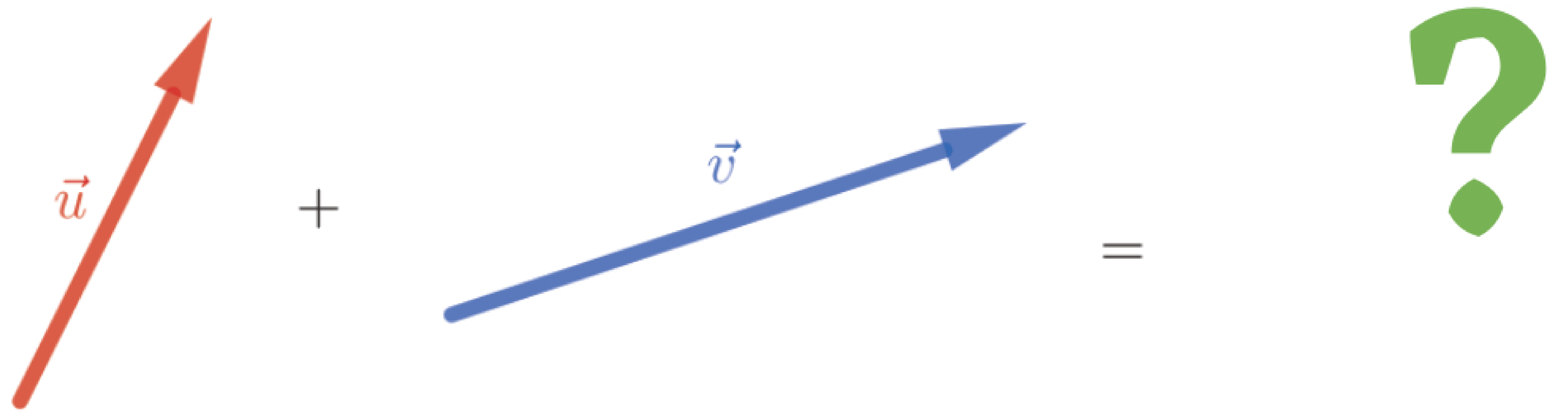


Regra do paralelogramo

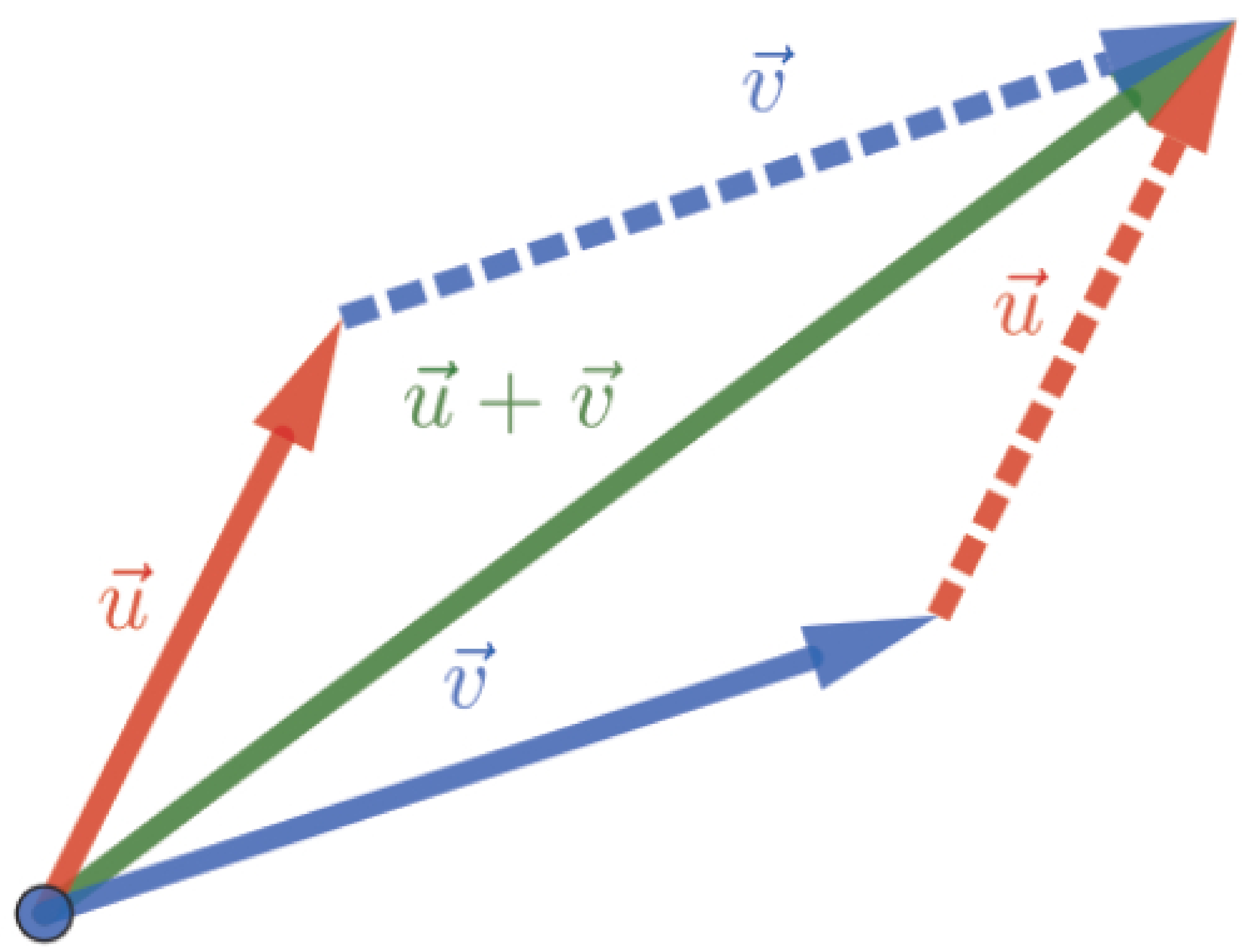


ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

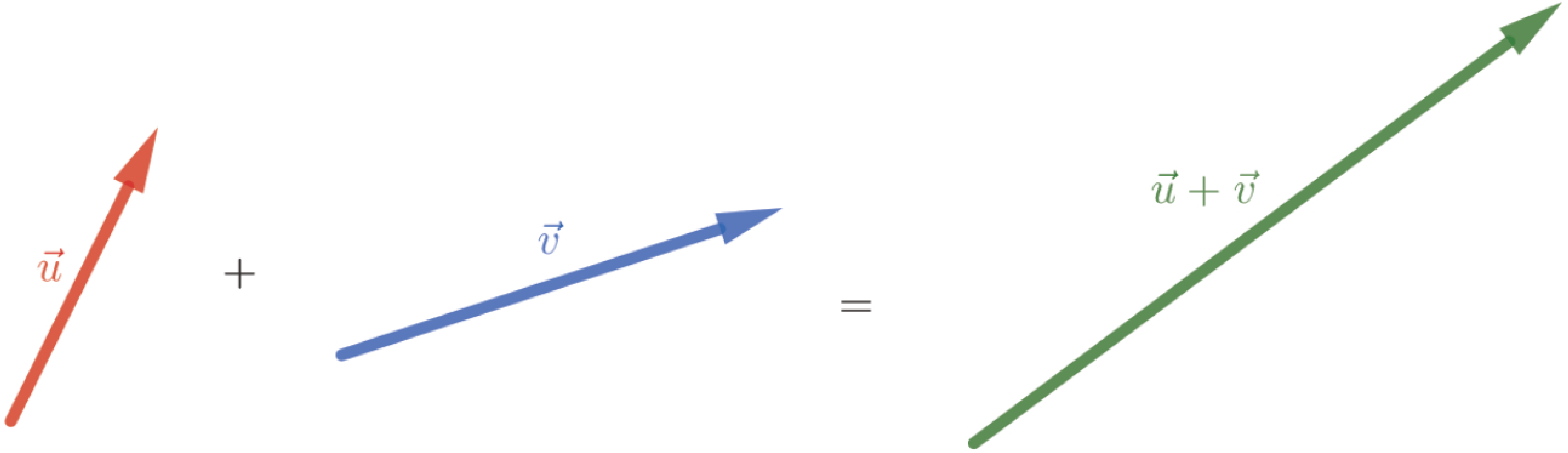


Regra do paralelogramo

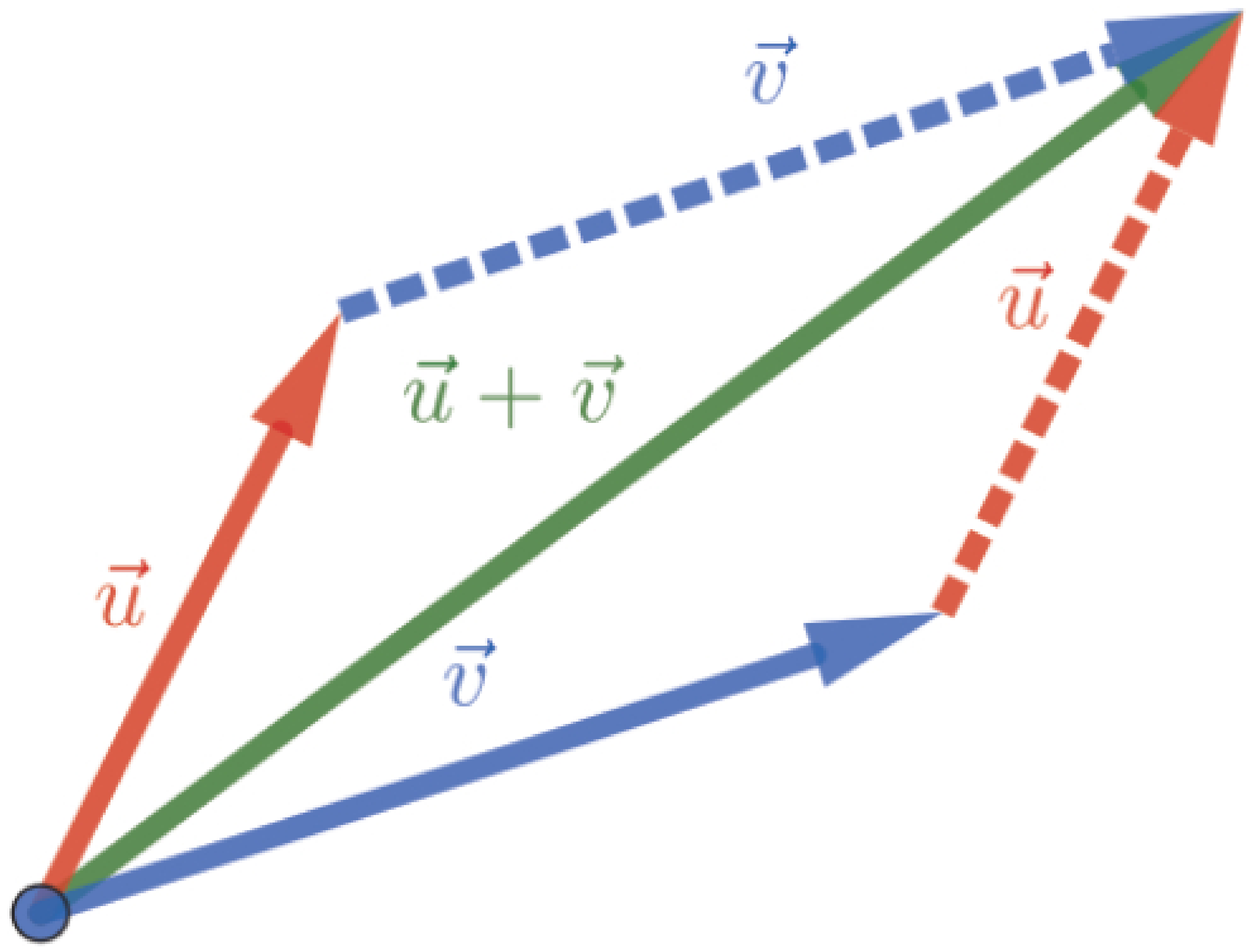


ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

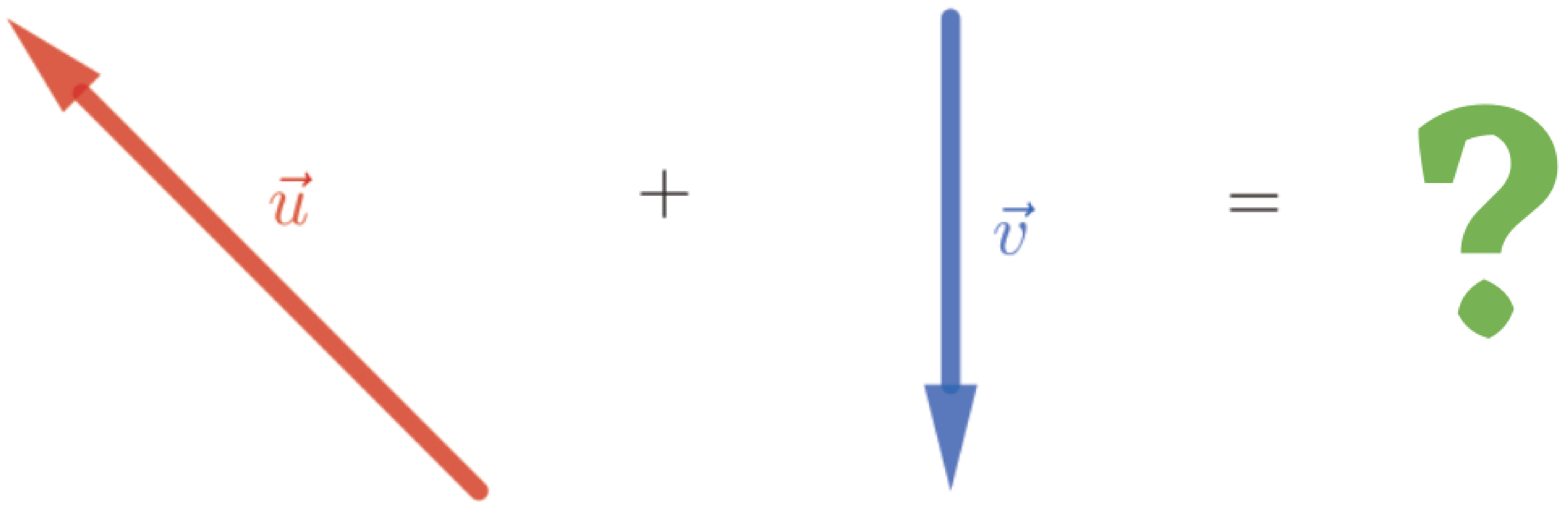


Regra do paralelogramo



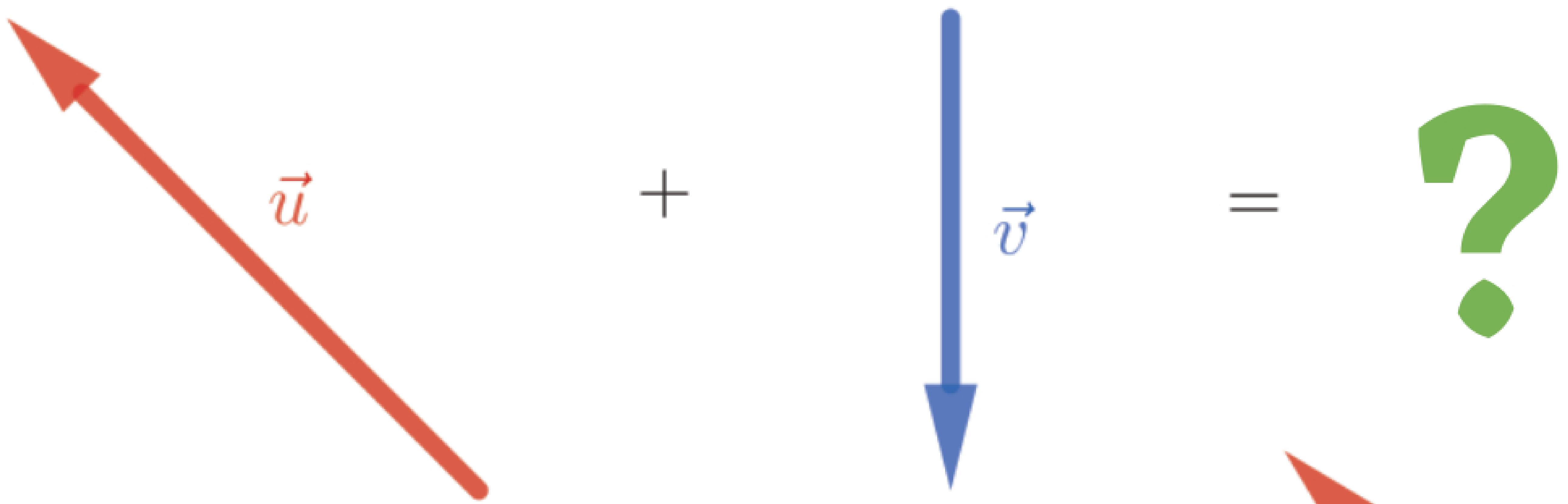
ADIÇÃO DE VETORES

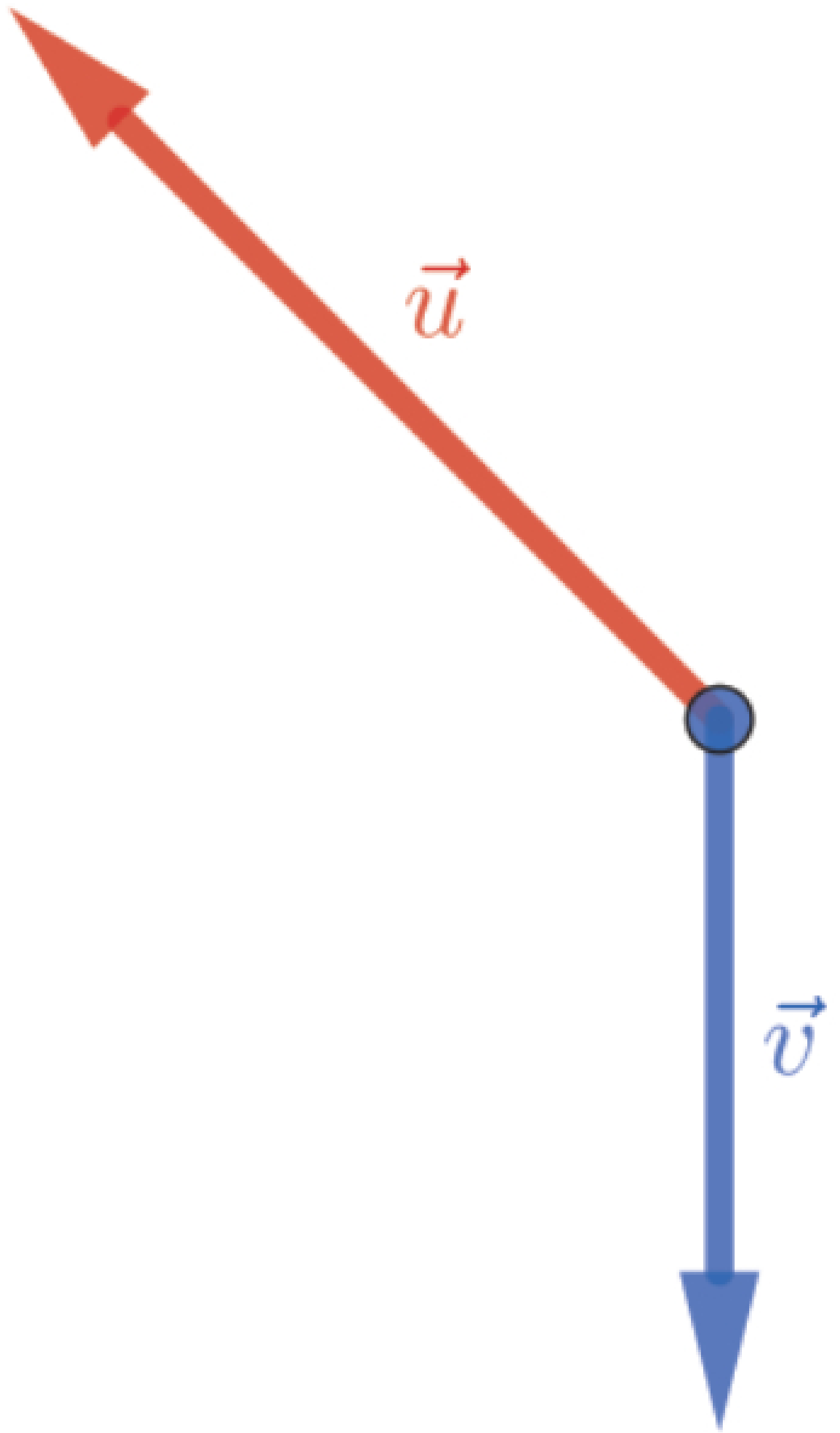
Exemplo



ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

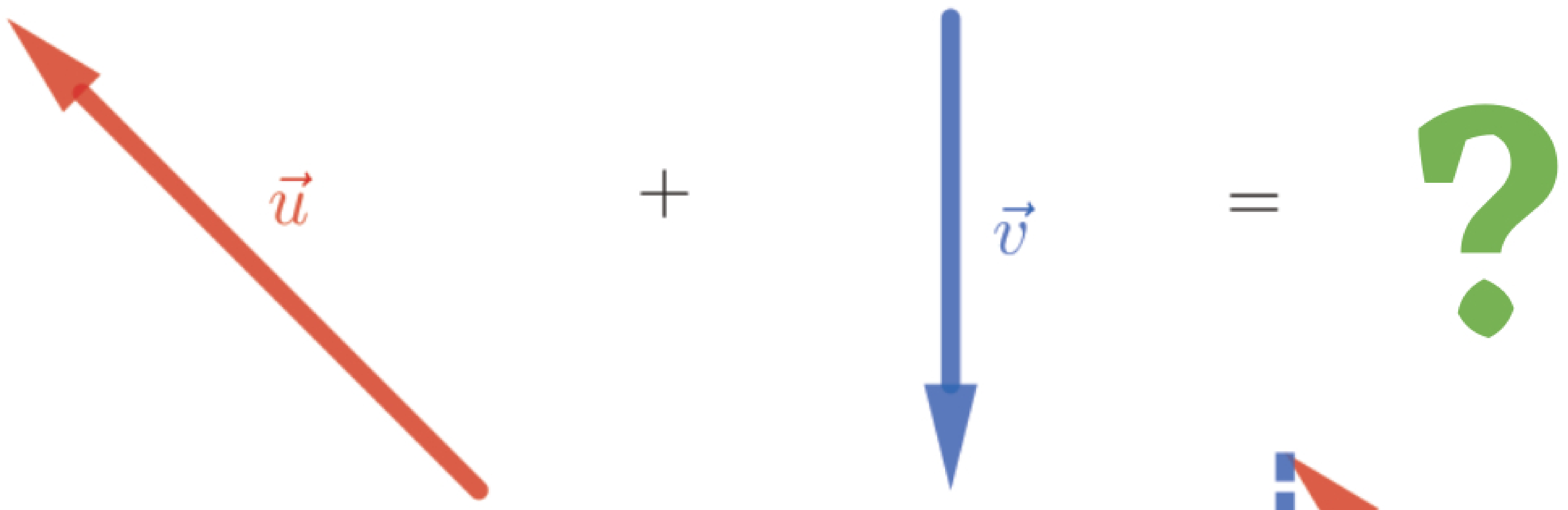




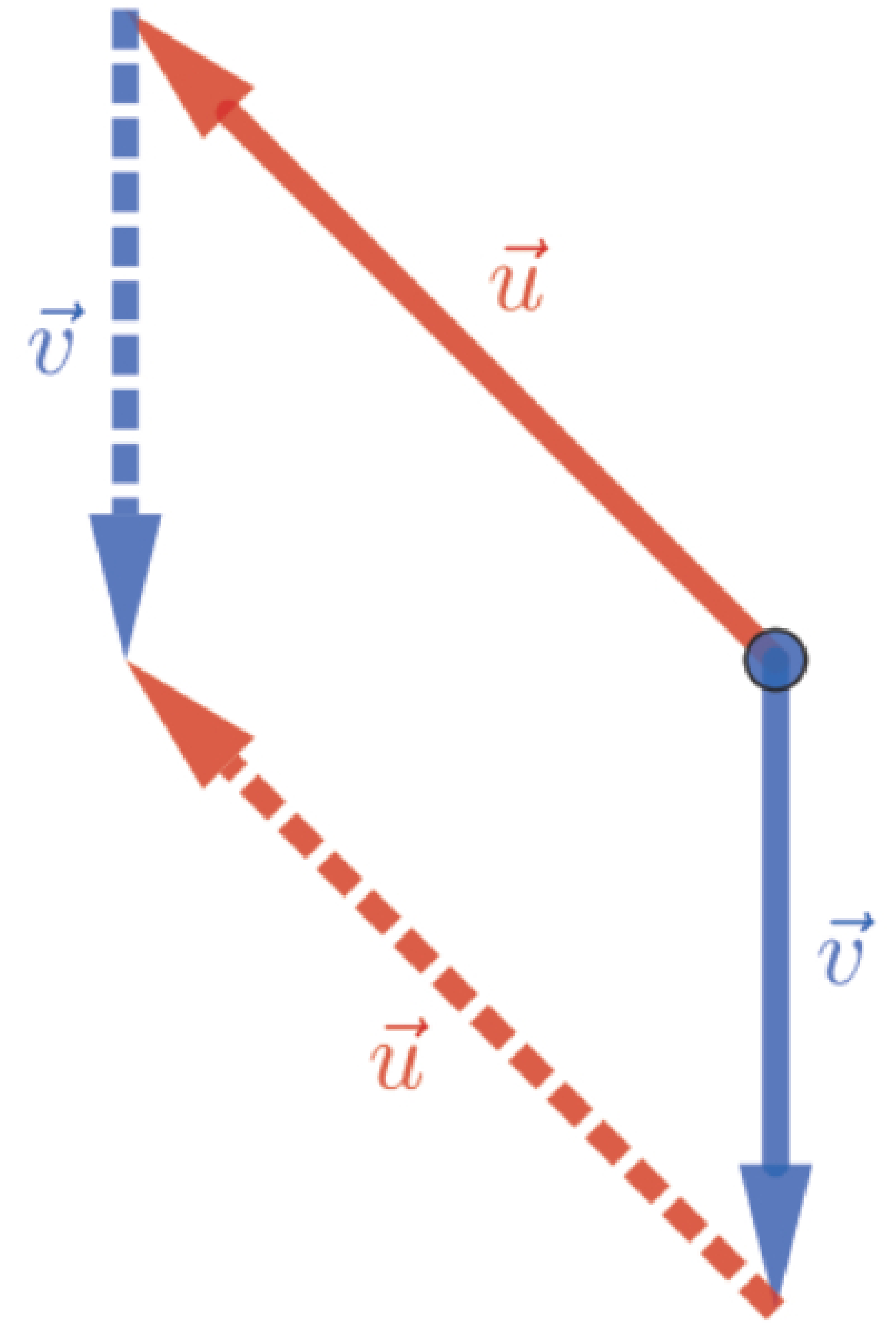
Regra do paralelogramo

ADIÇÃO DE VETORES

Exemplo

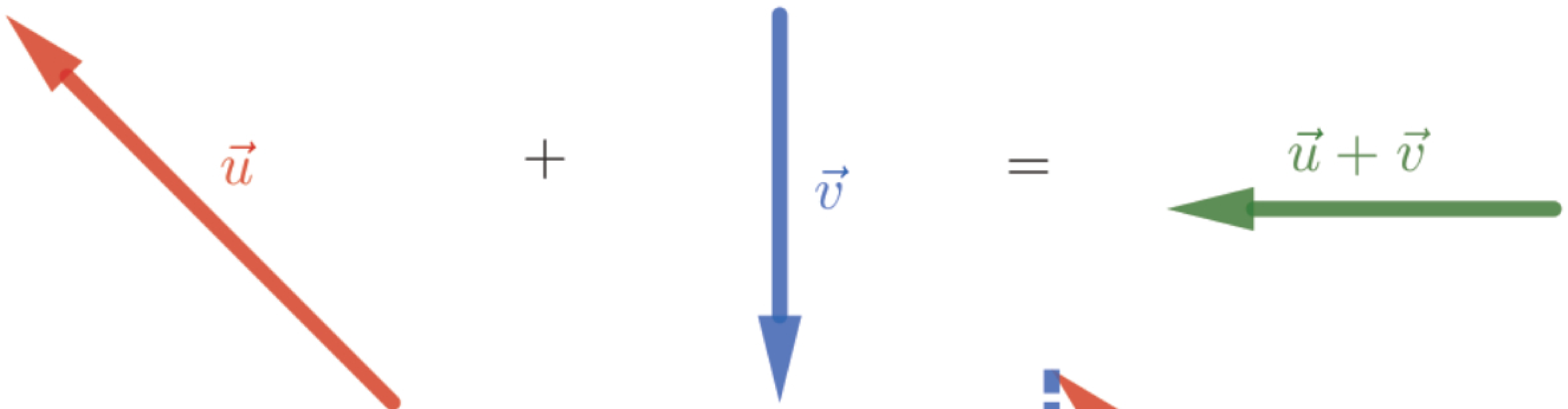


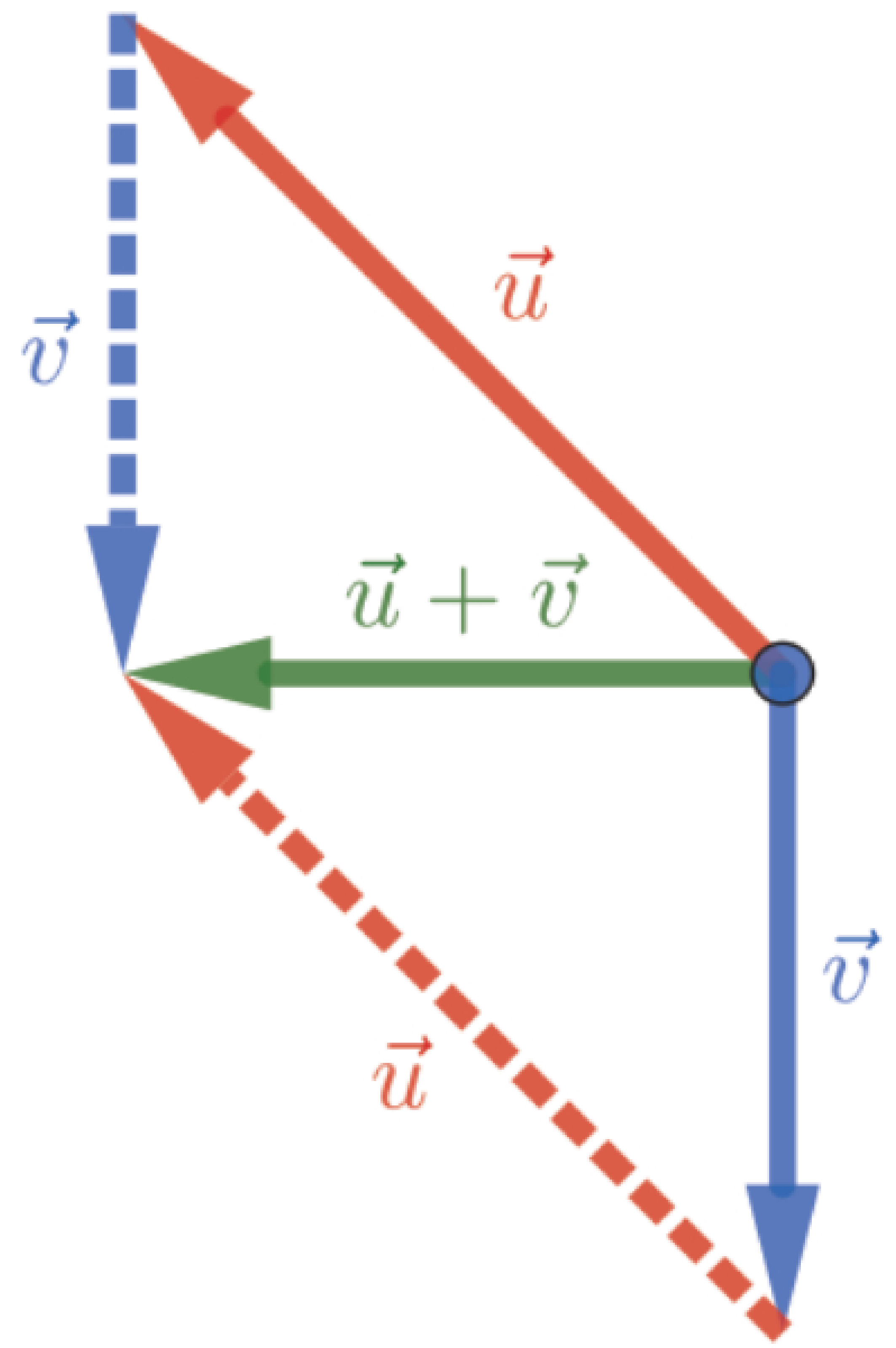
Regra do paralelogramo



ADIÇÃO DE VETORES

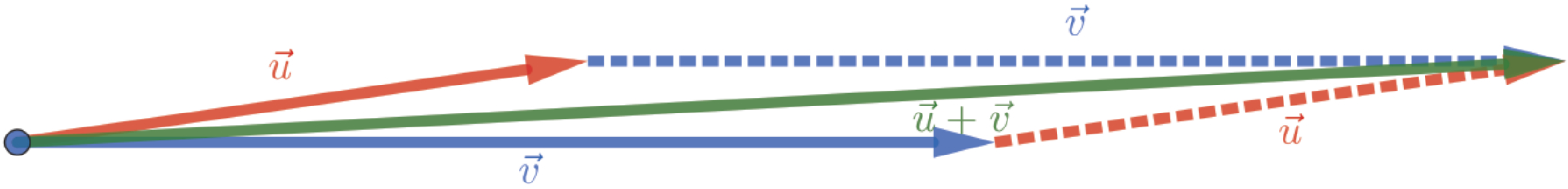
Exemplo



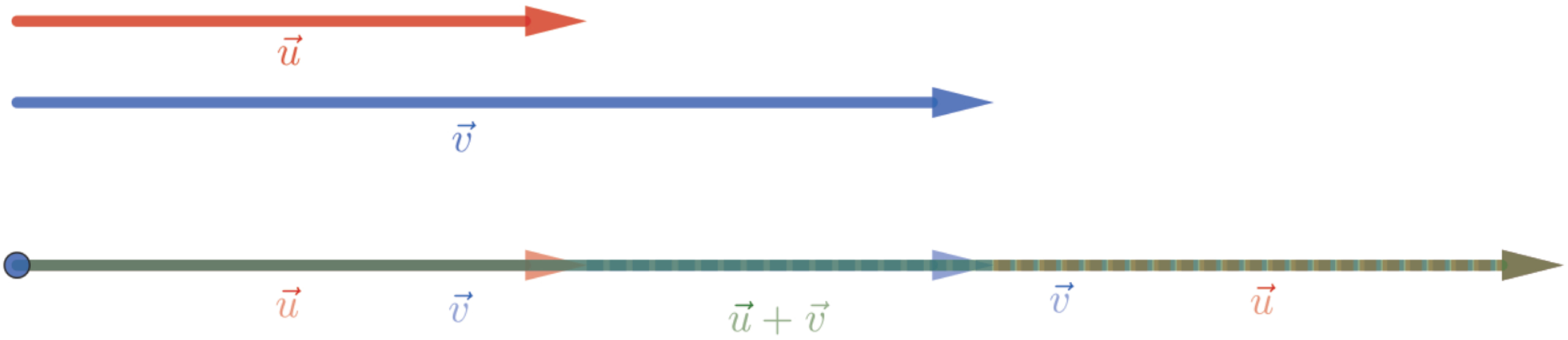


Regra do paralelogramo

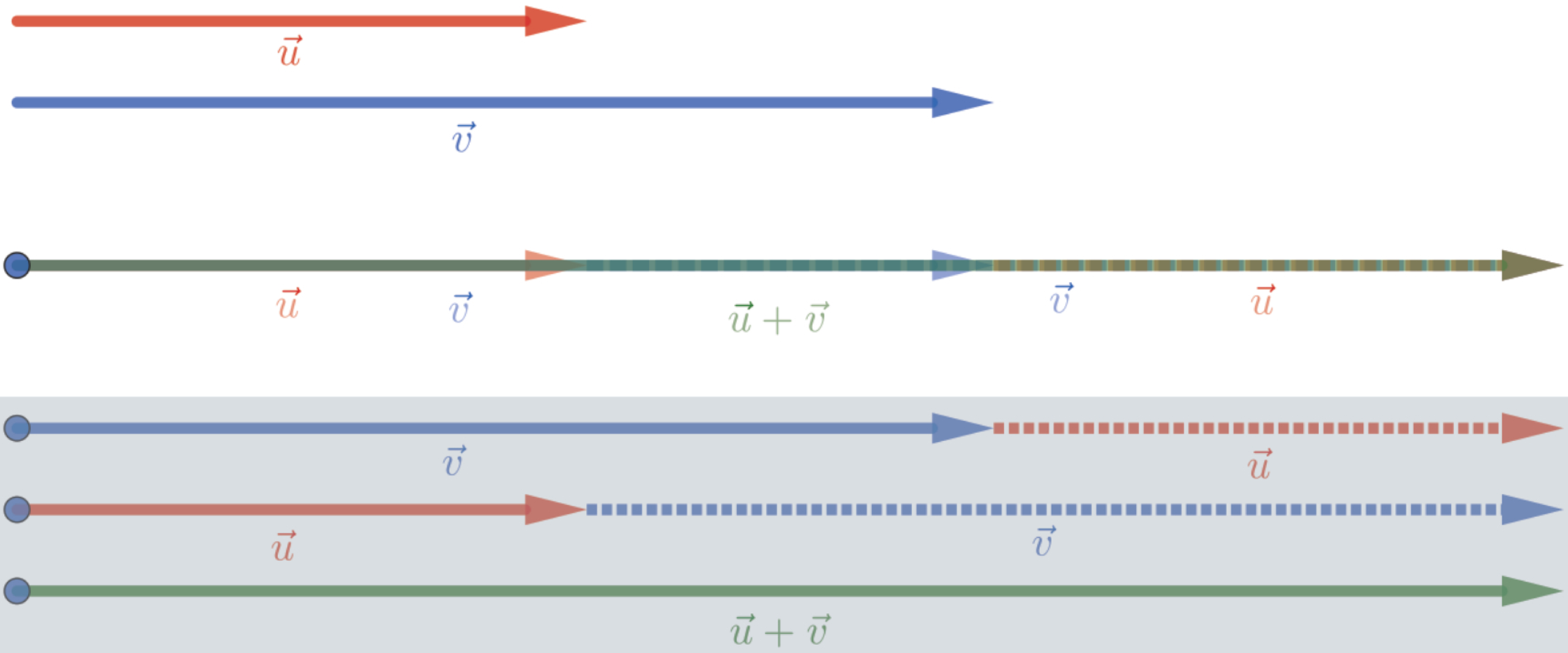
ADIÇÃO DE VETORES



ADIÇÃO DE VETORES

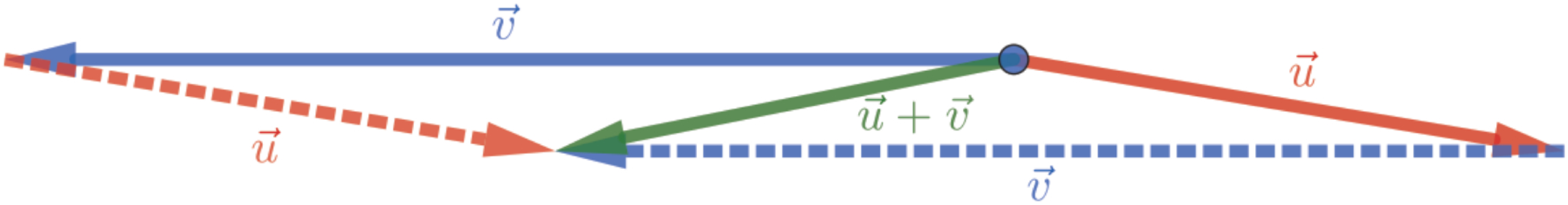


ADIÇÃO DE VETORES

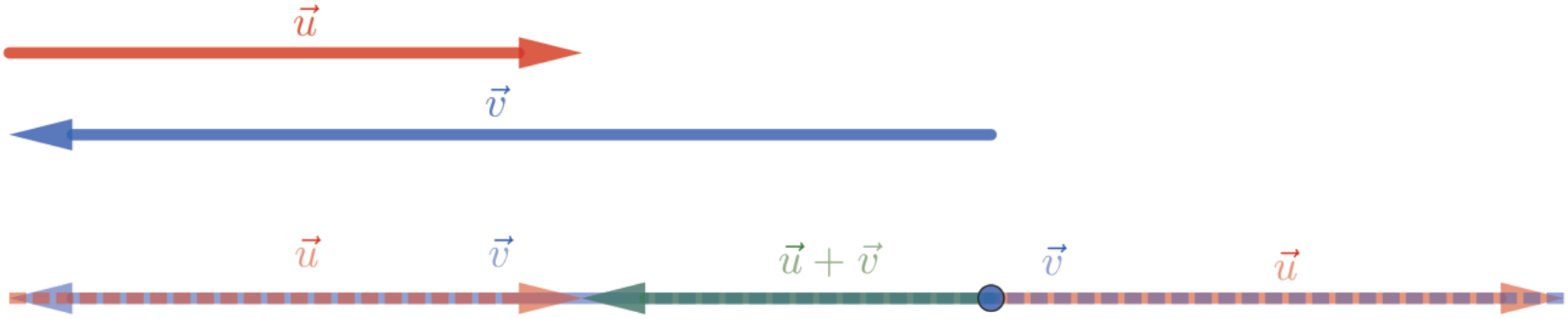


Os desenhos separados para visualizar melhor.

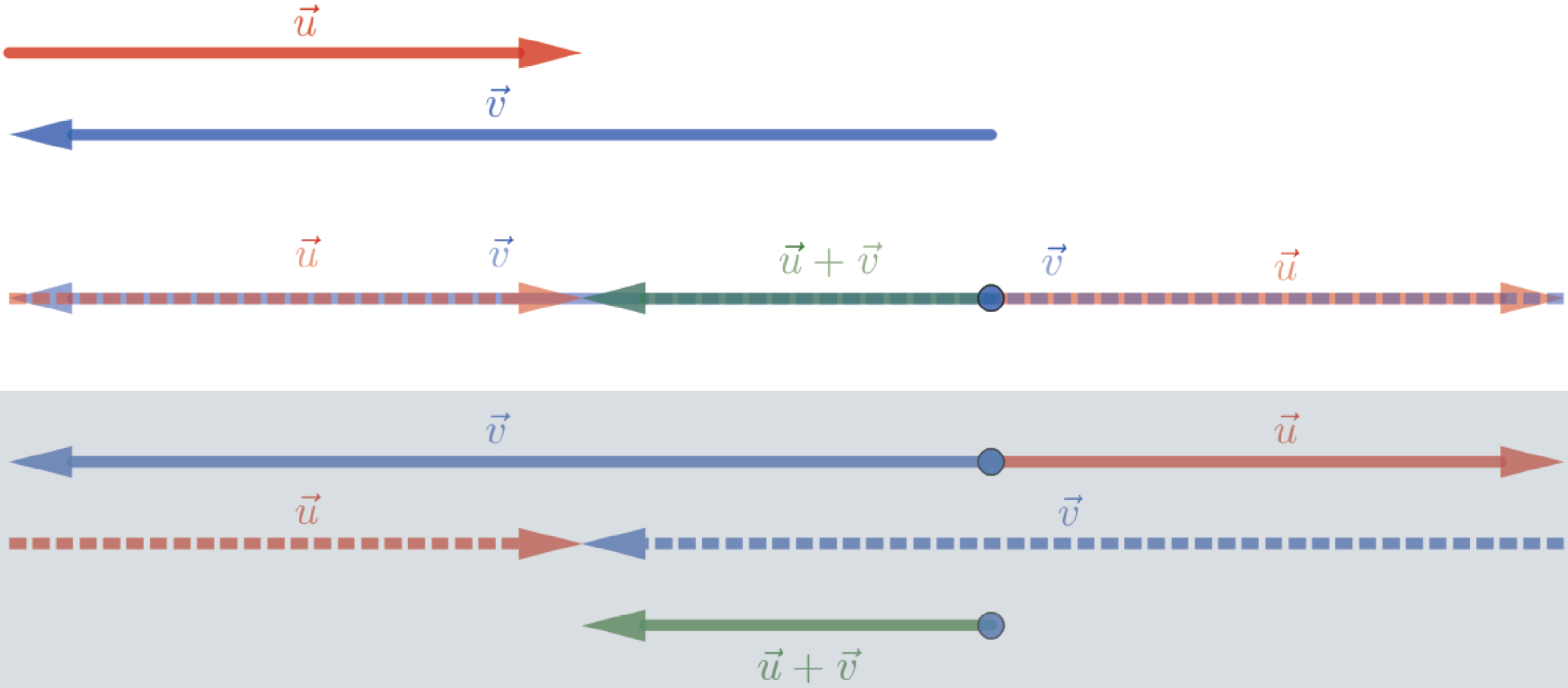
ADIÇÃO DE VETORES



Adição de vetores

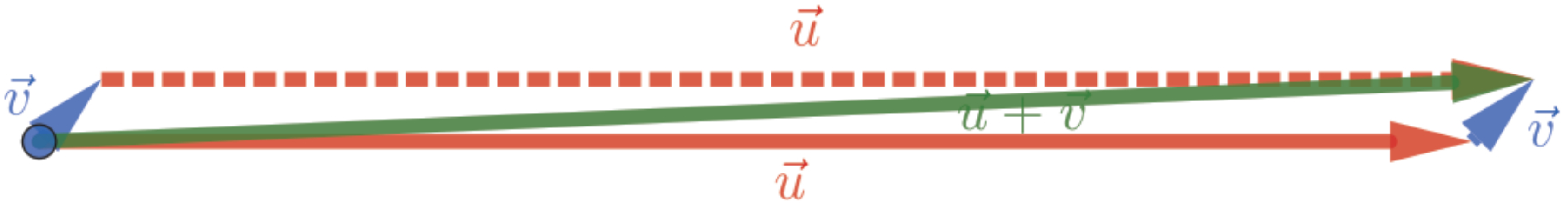


ADIÇÃO DE VETORES

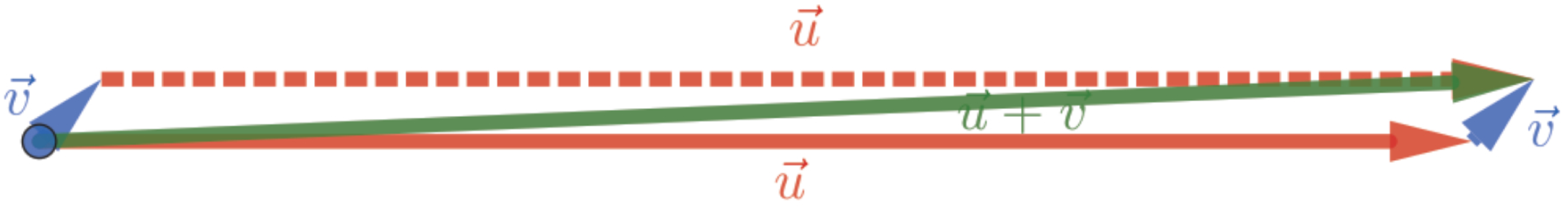


Os desenhos separados para visualizar melhor.

ADIÇÃO DE VETORES



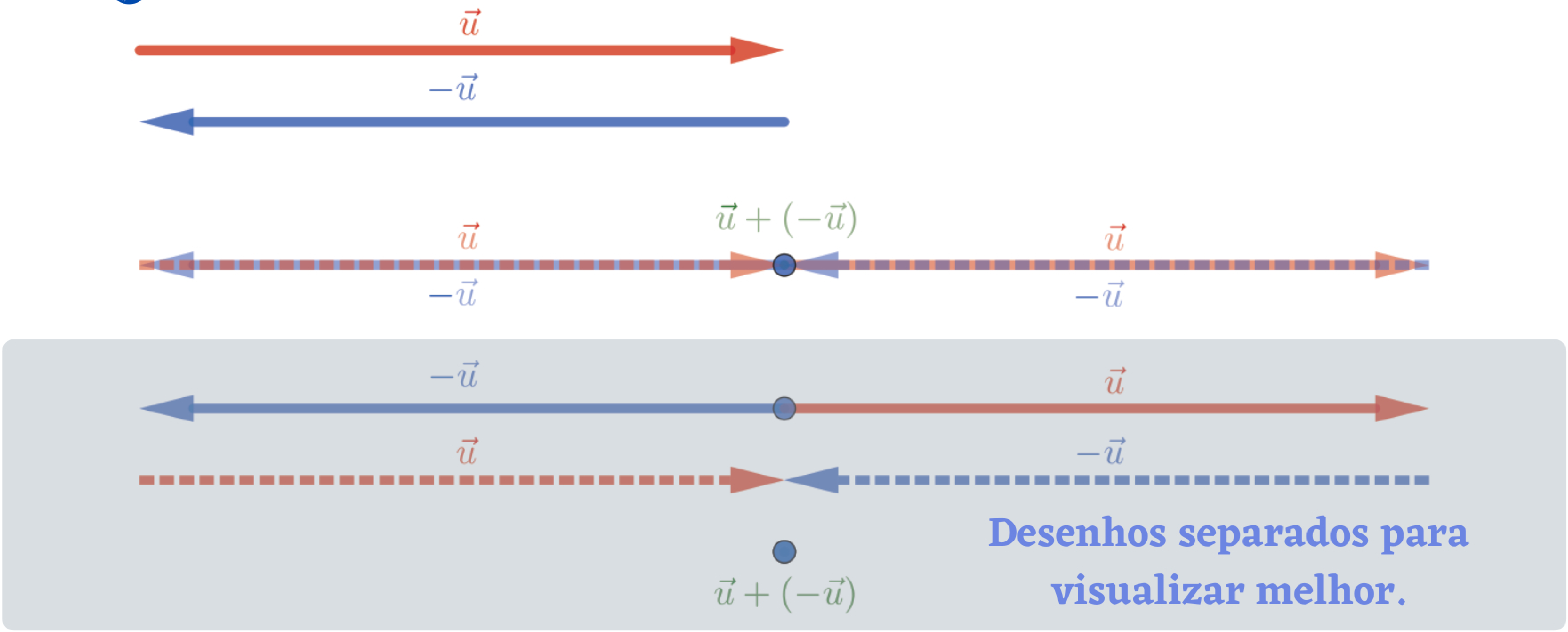
ADIÇÃO DE VETORES



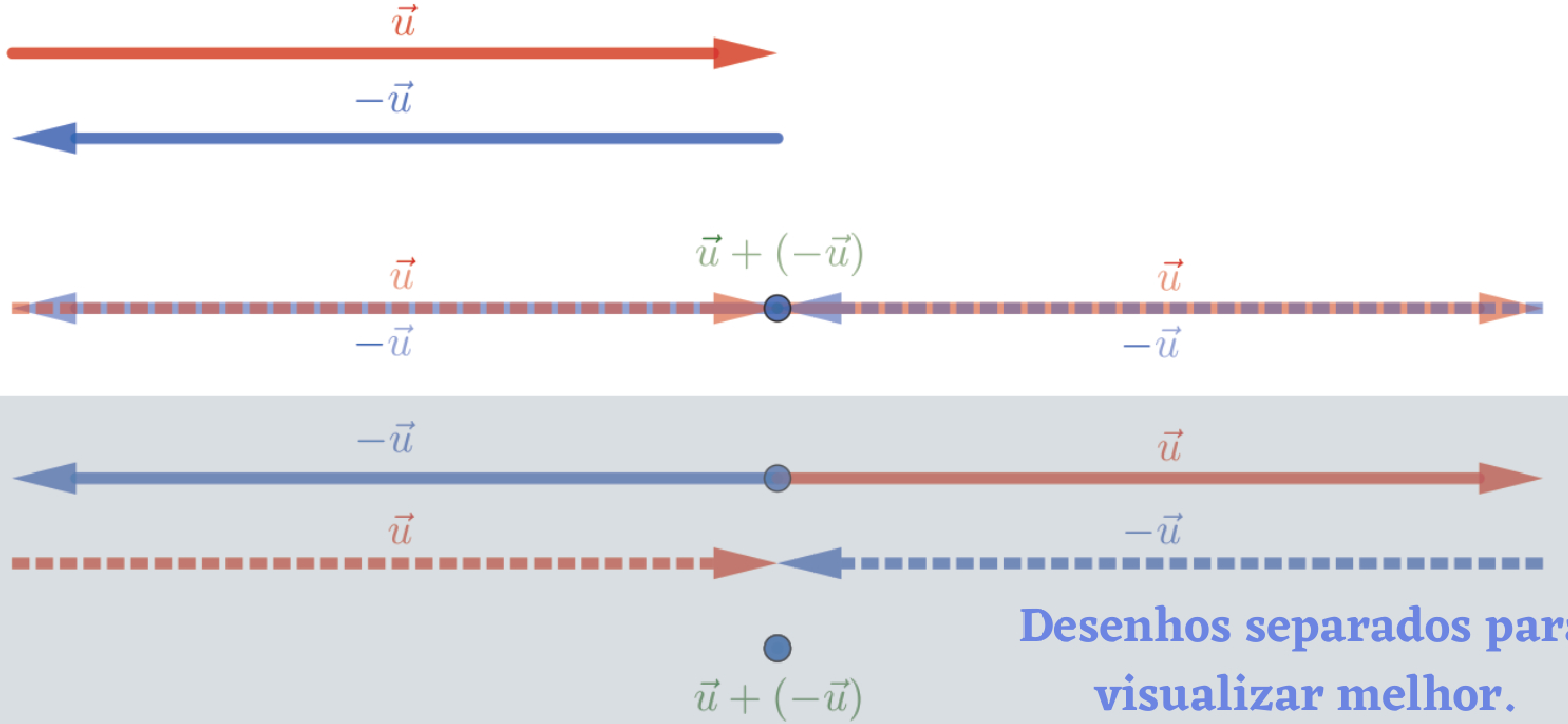
Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$,

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}.$$

ADIÇÃO DE VETORES



ADIÇÃO DE VETORES



Desenhos separados para visualizar melhor.

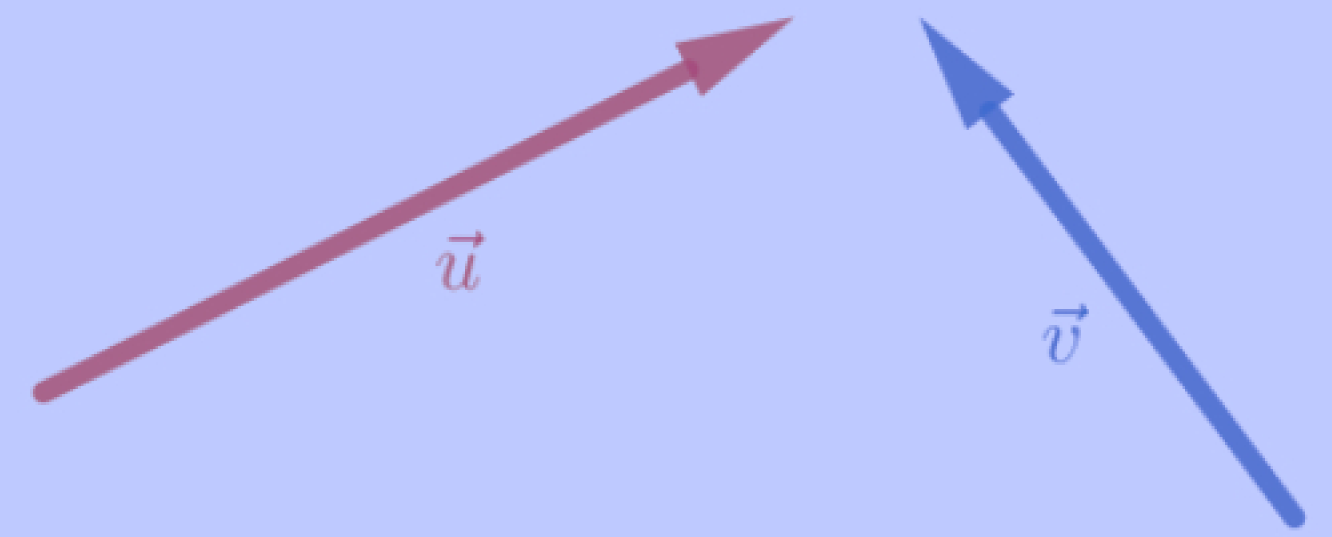
Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

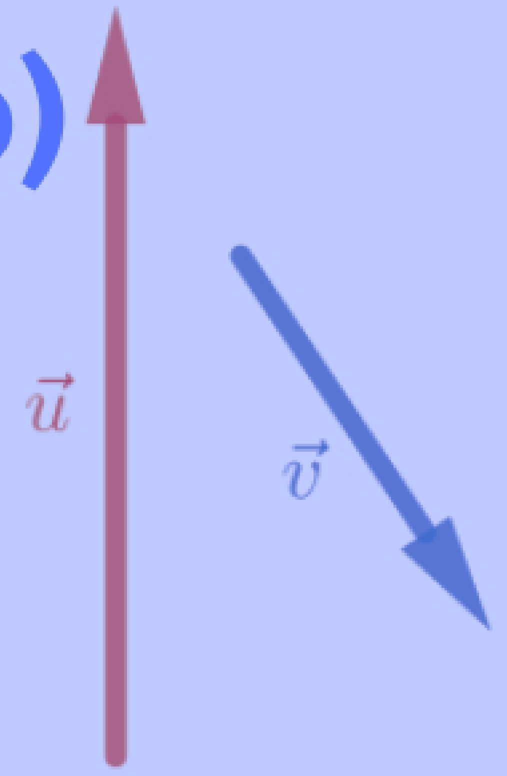
EXERCÍCIOS

Some os pares de vetores abaixo.

(a)



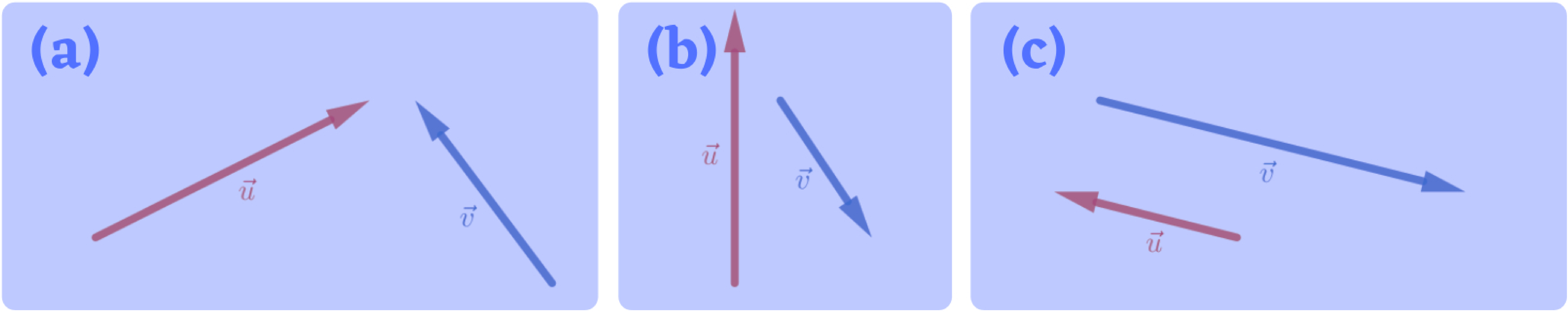
(b)

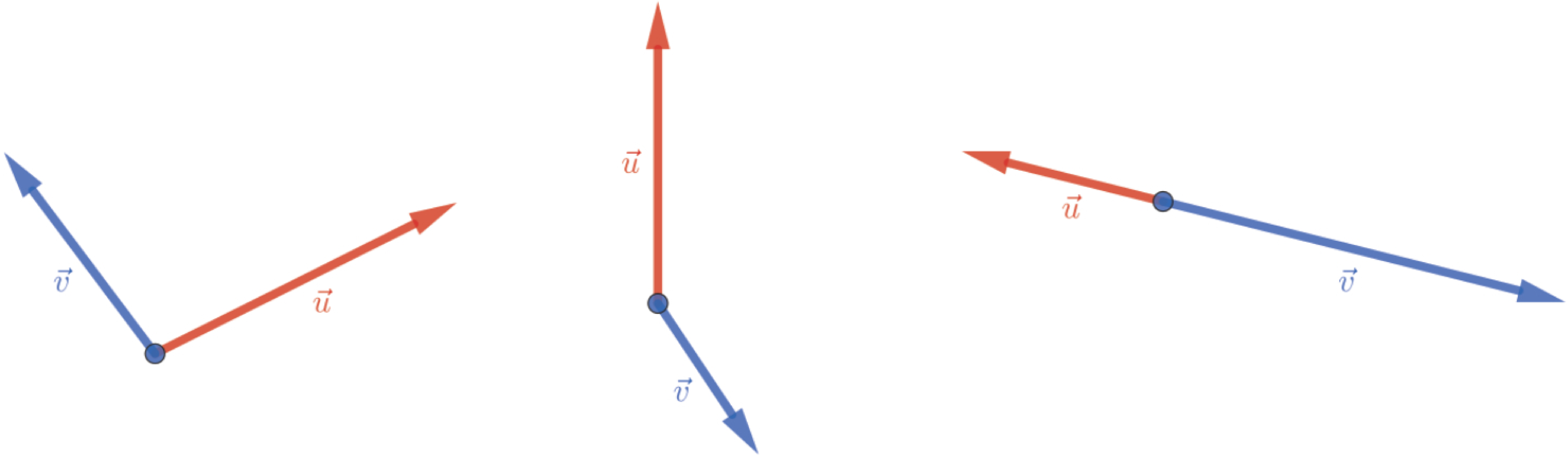


(c)

EXERCÍCIOS

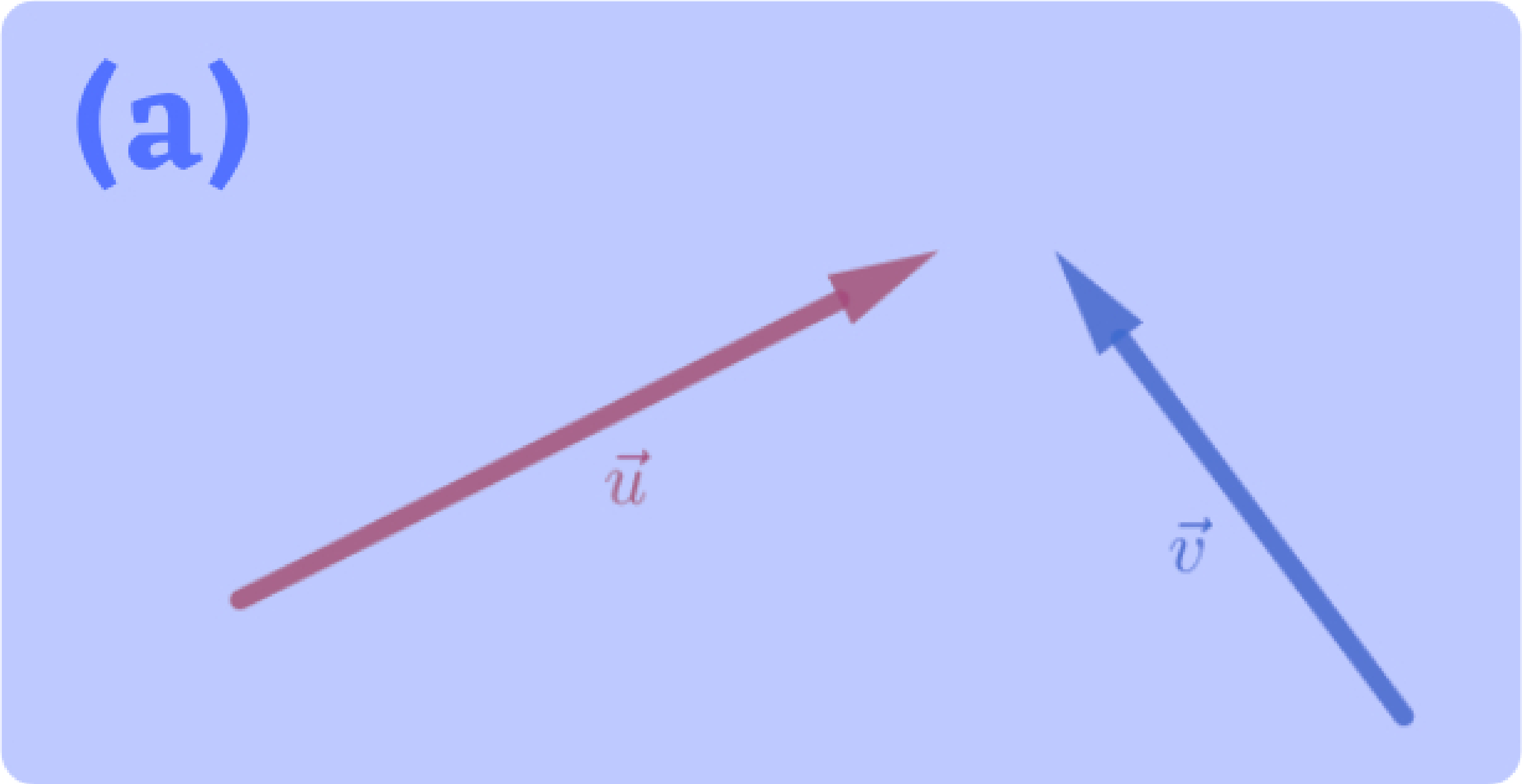
Some os pares de vetores abaixo.

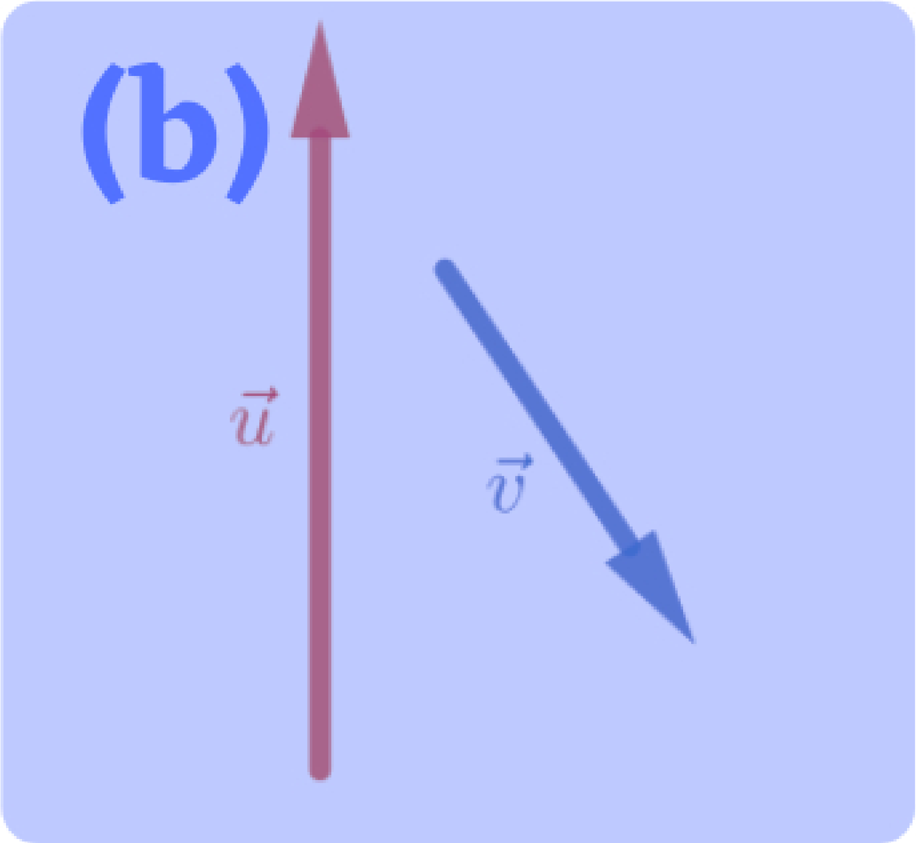


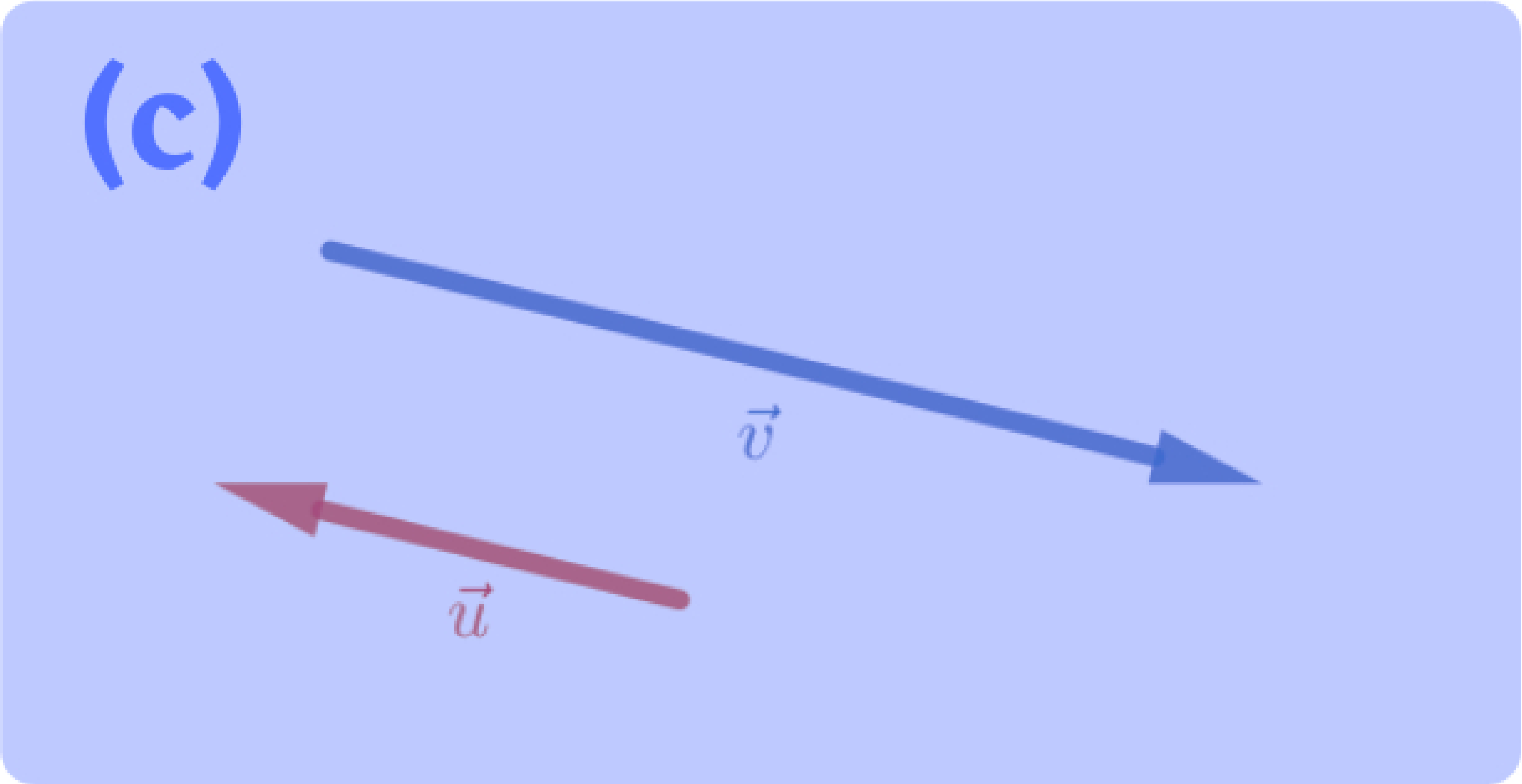


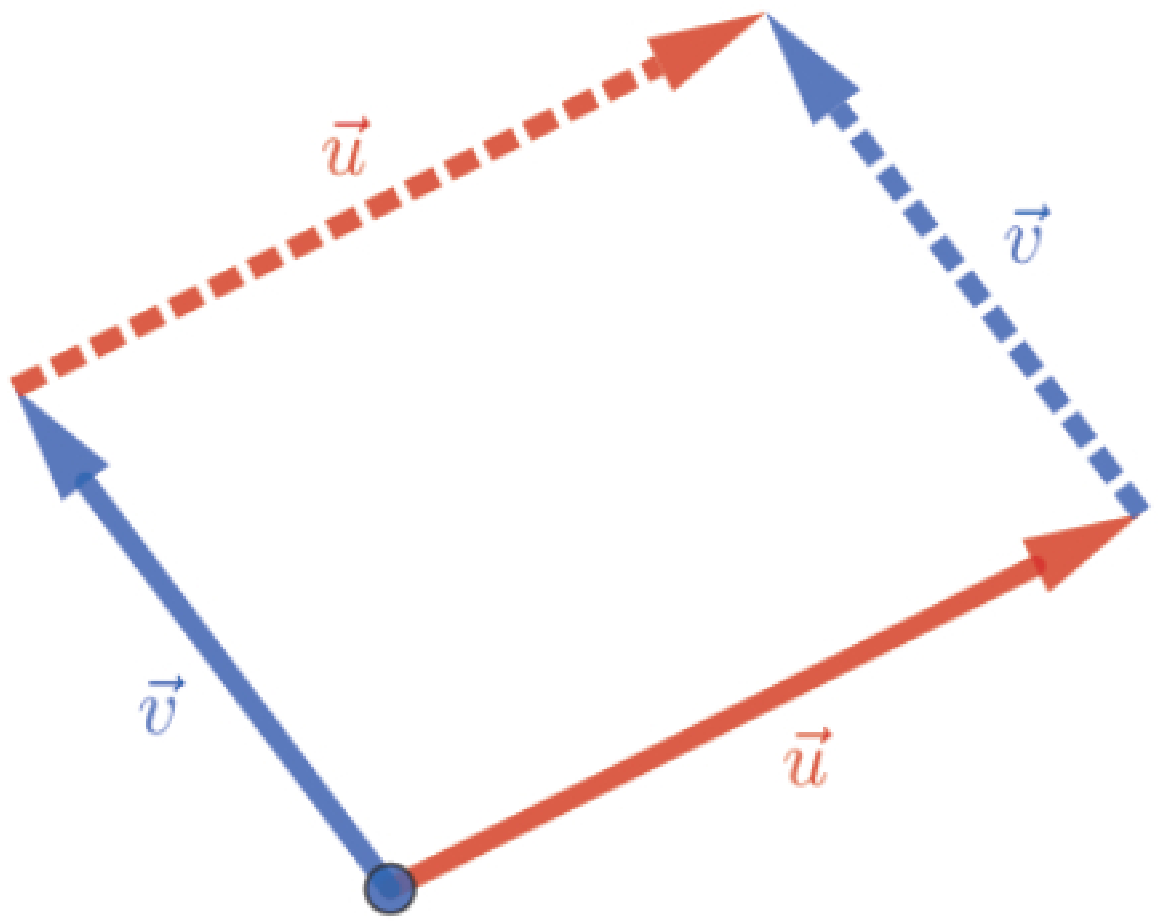
EXERCÍCIOS

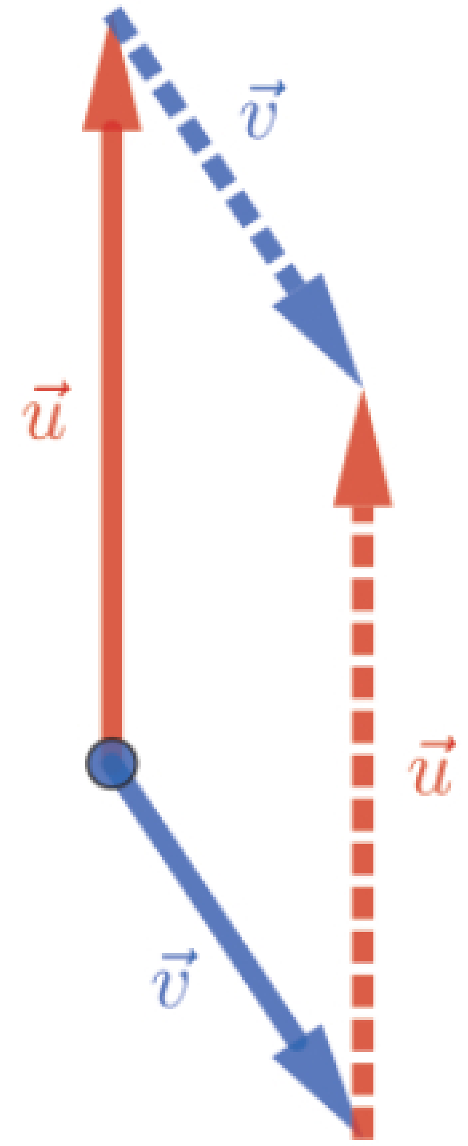
Some os pares de vetores abaixo.

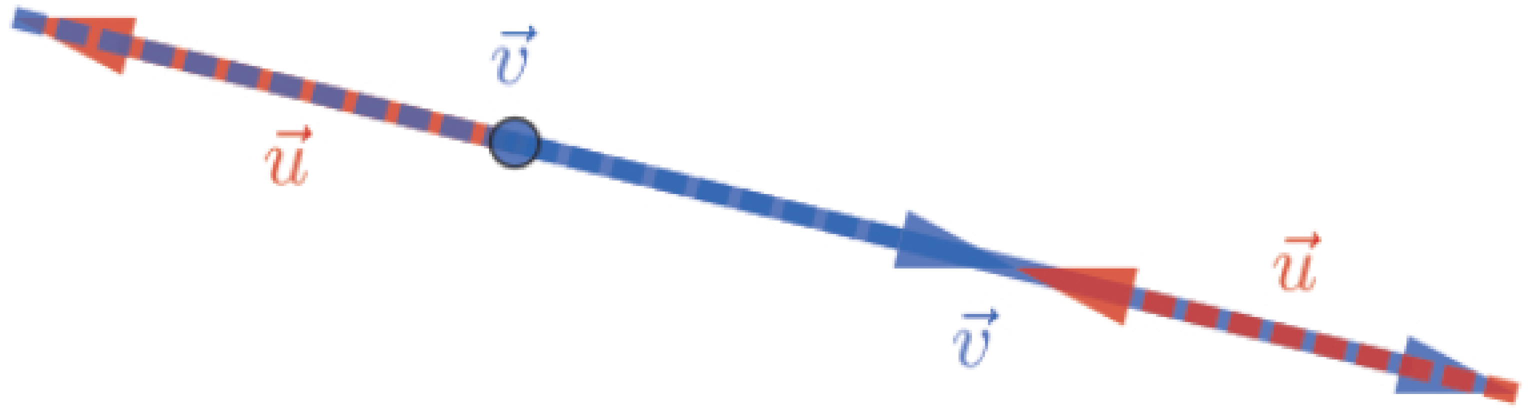








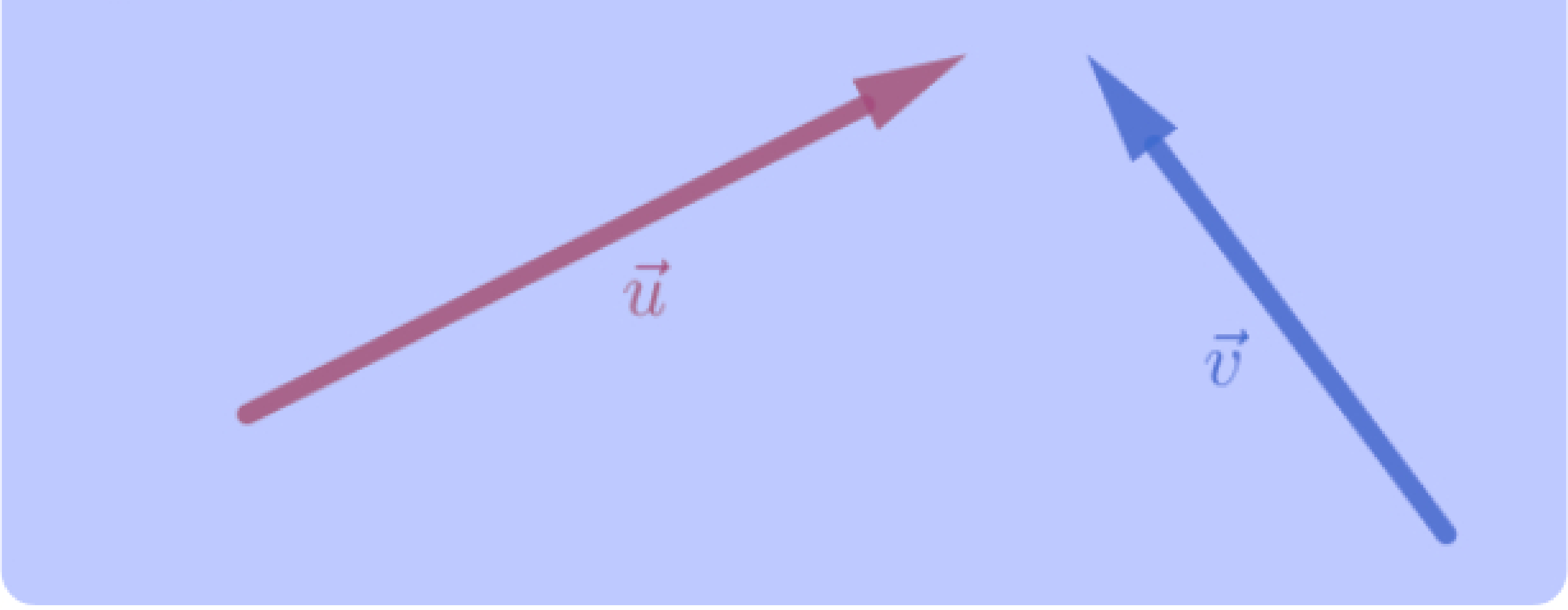




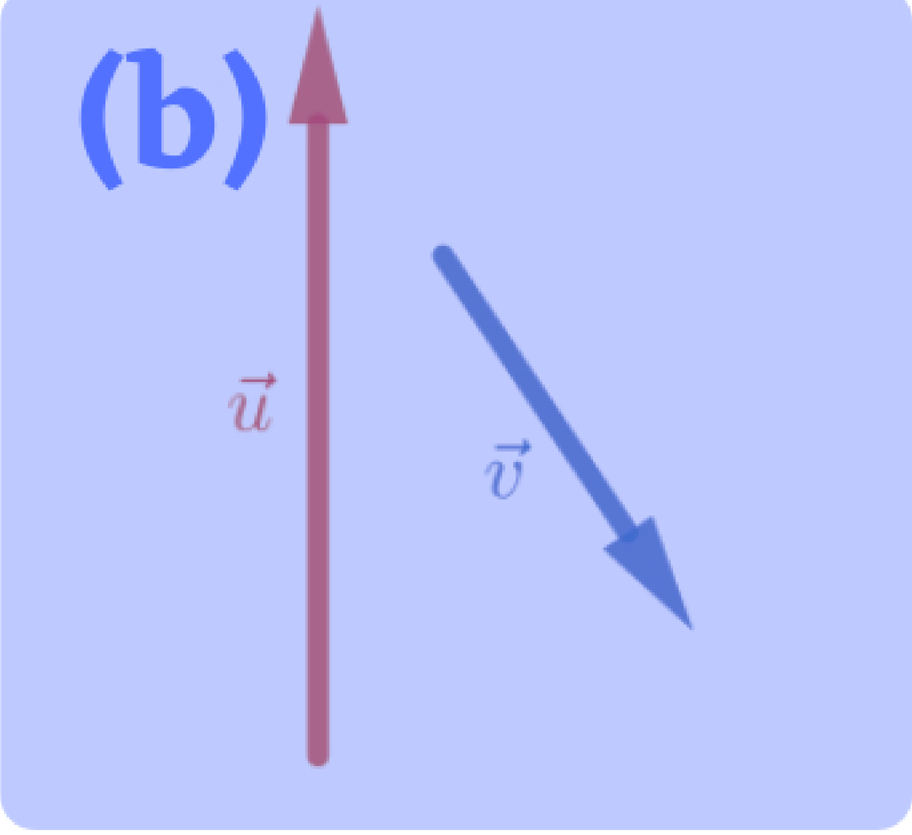
EXERCÍCIOS

Some os pares de vetores abaixo.

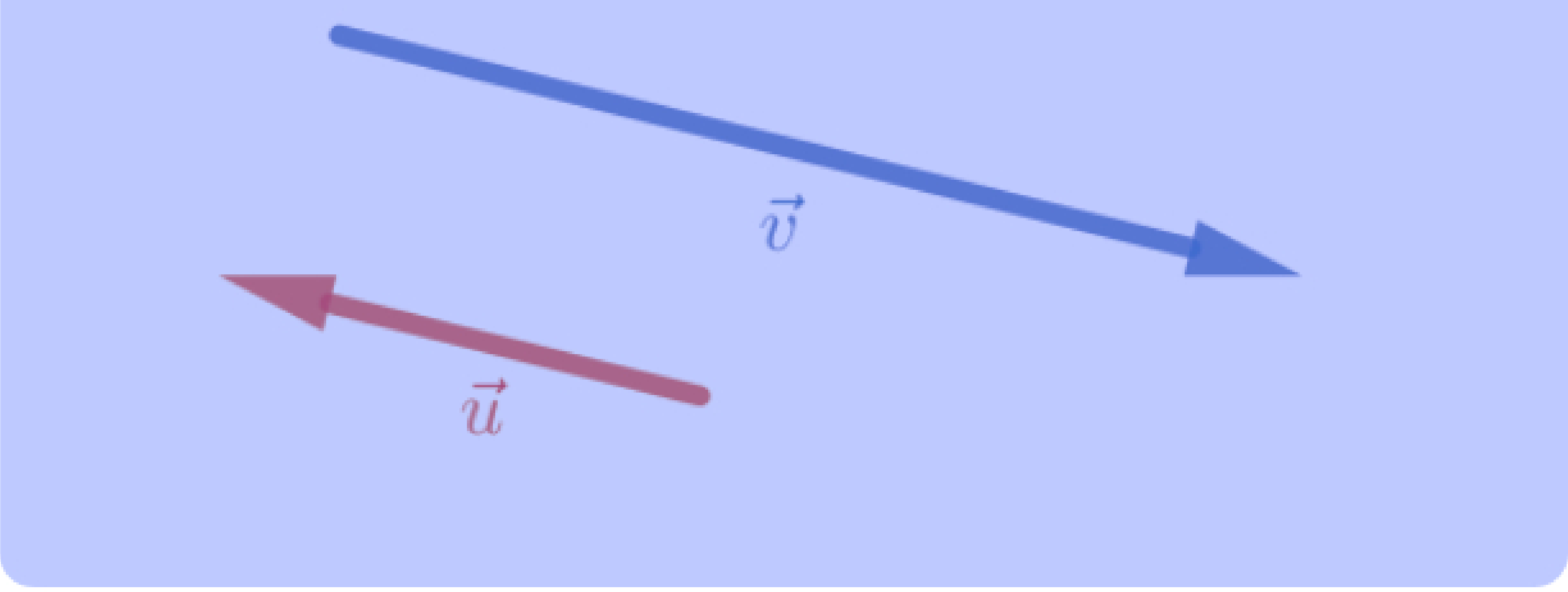
(a)

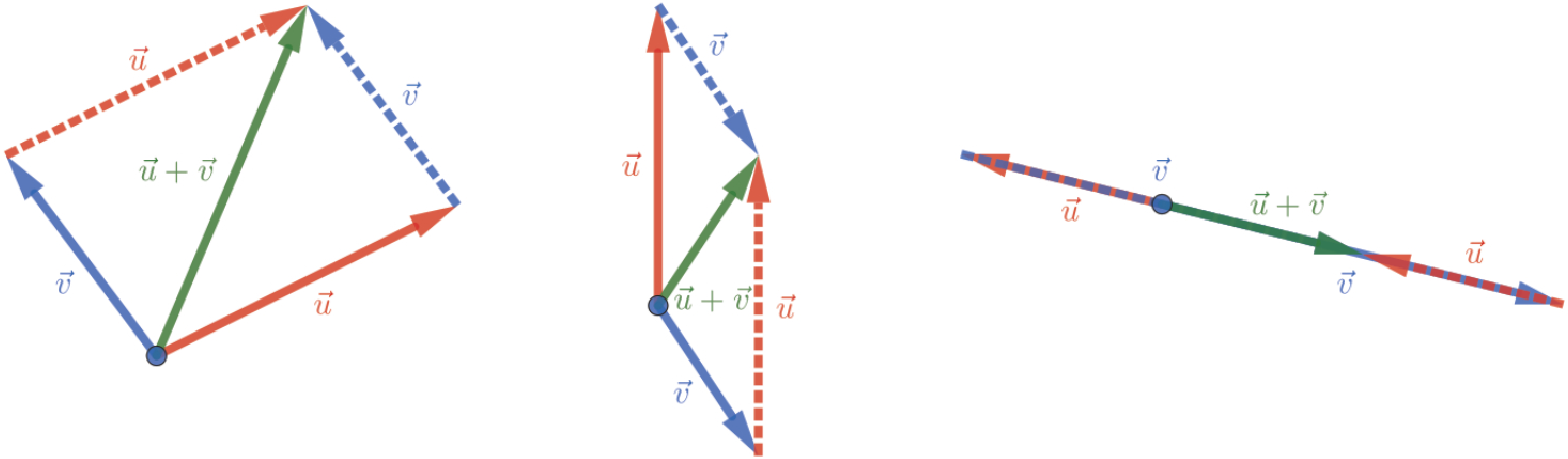


(b)



(c)





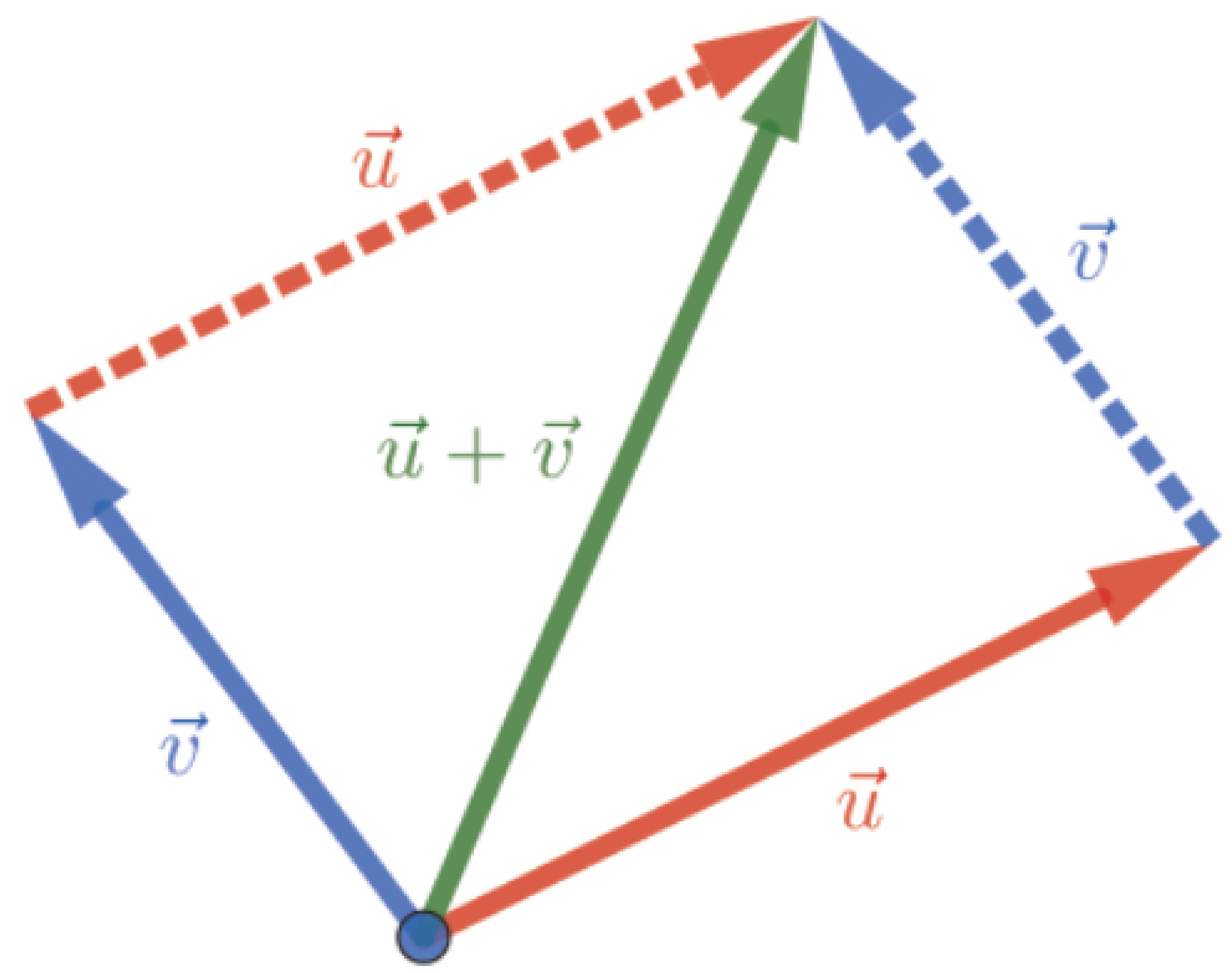
ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

Some os vetores abaixo

ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

Some os vetores abaixo

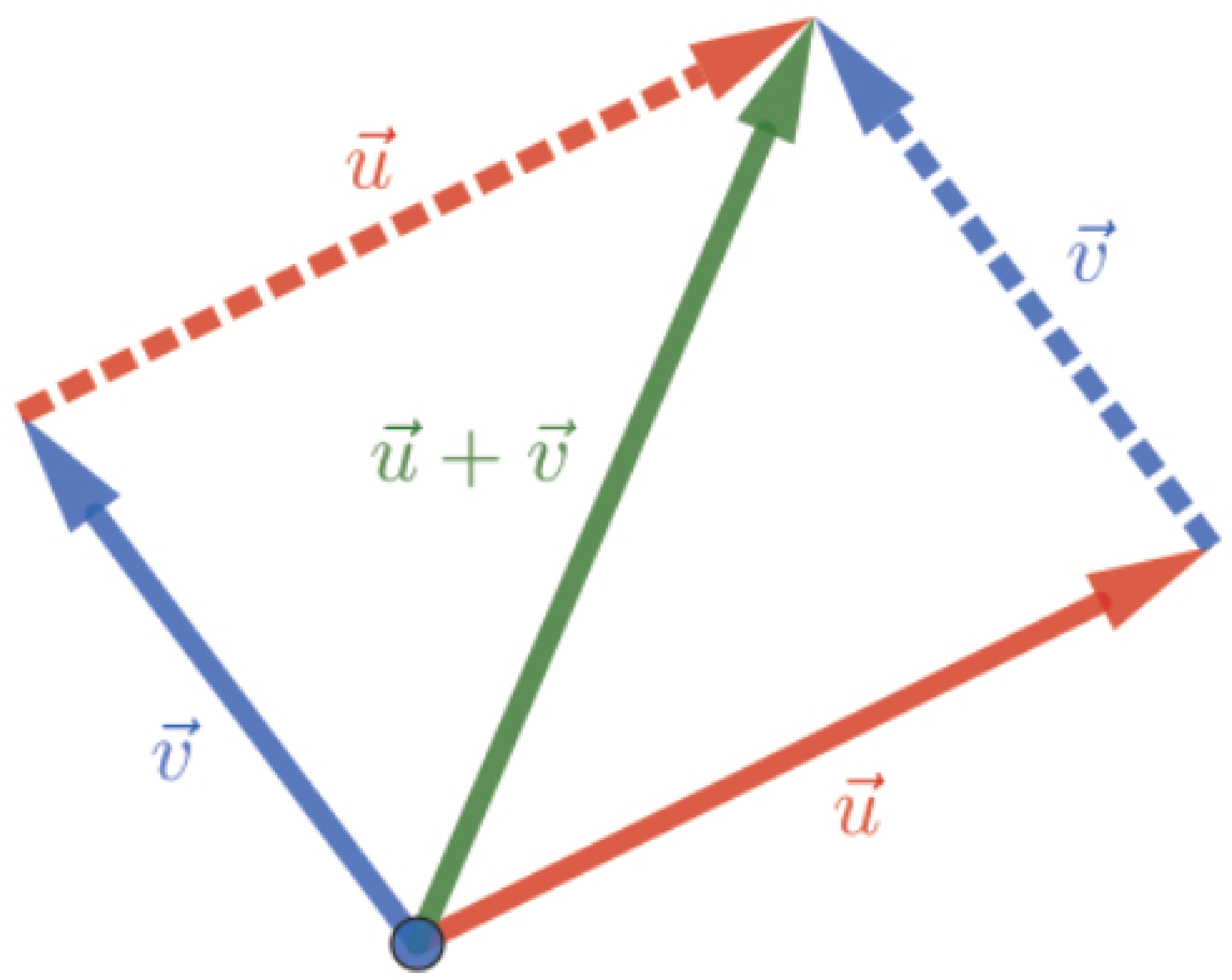
Regra do paralelogramo



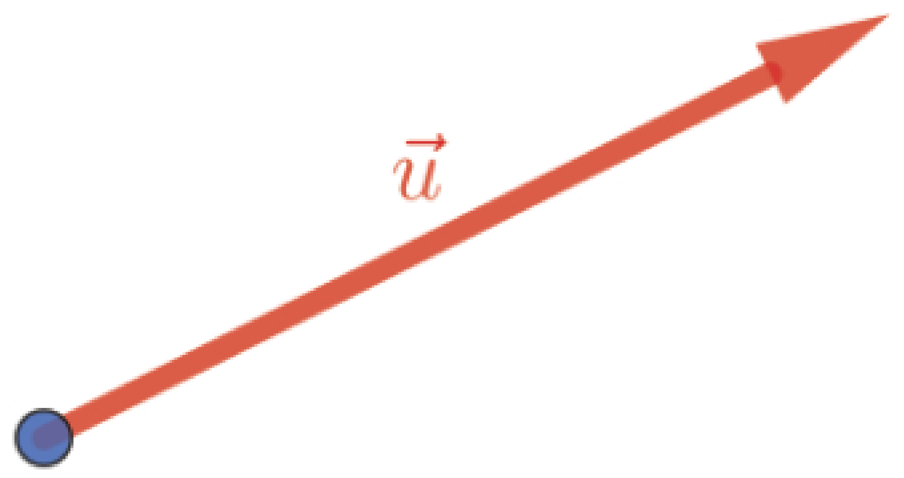
ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

Some os vetores abaixo

Regra do paralelogramo



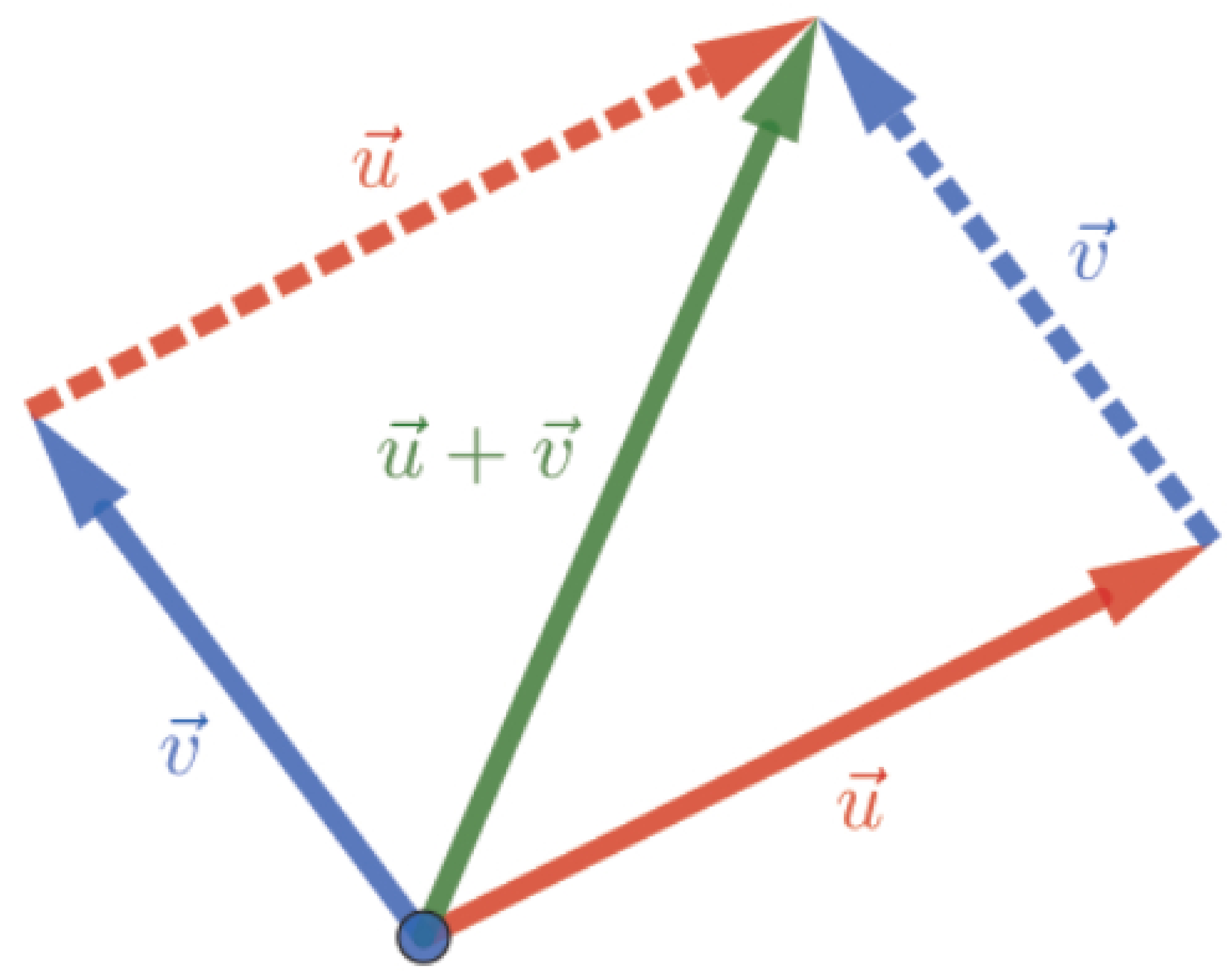
Regra do polígono



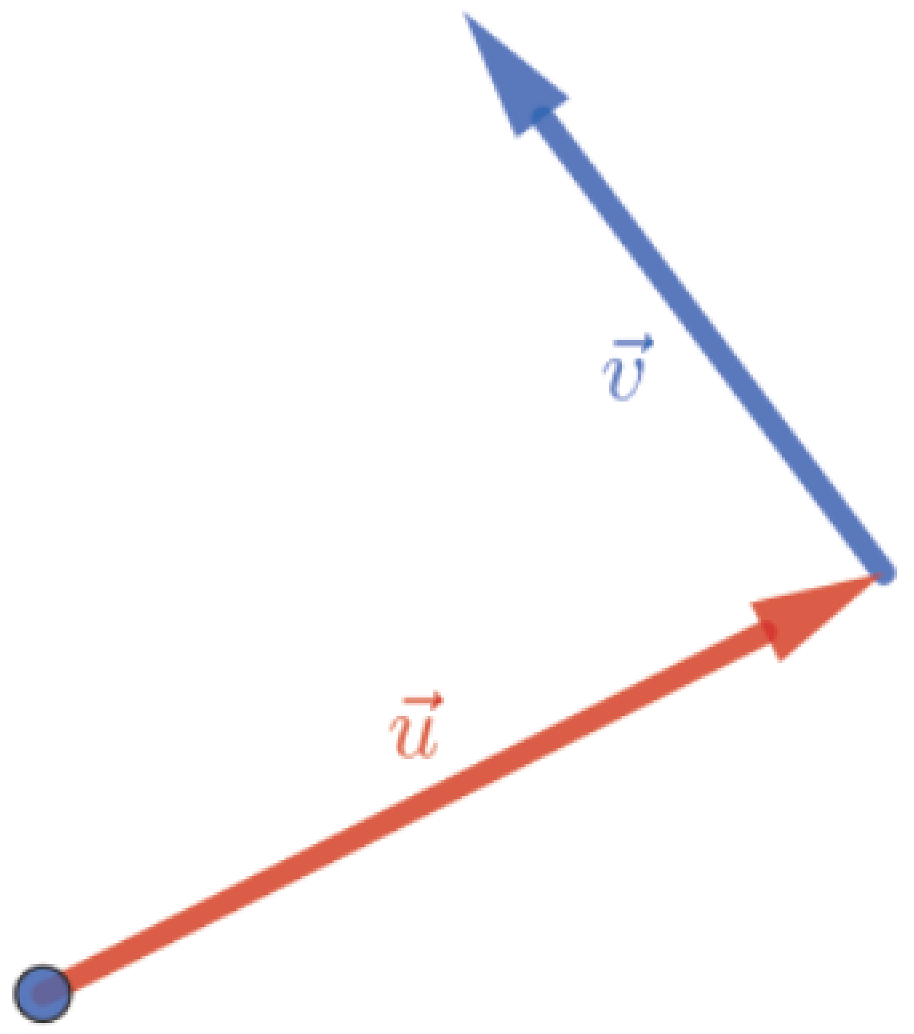
ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

Some os vetores abaixo

Regra do paralelogramo



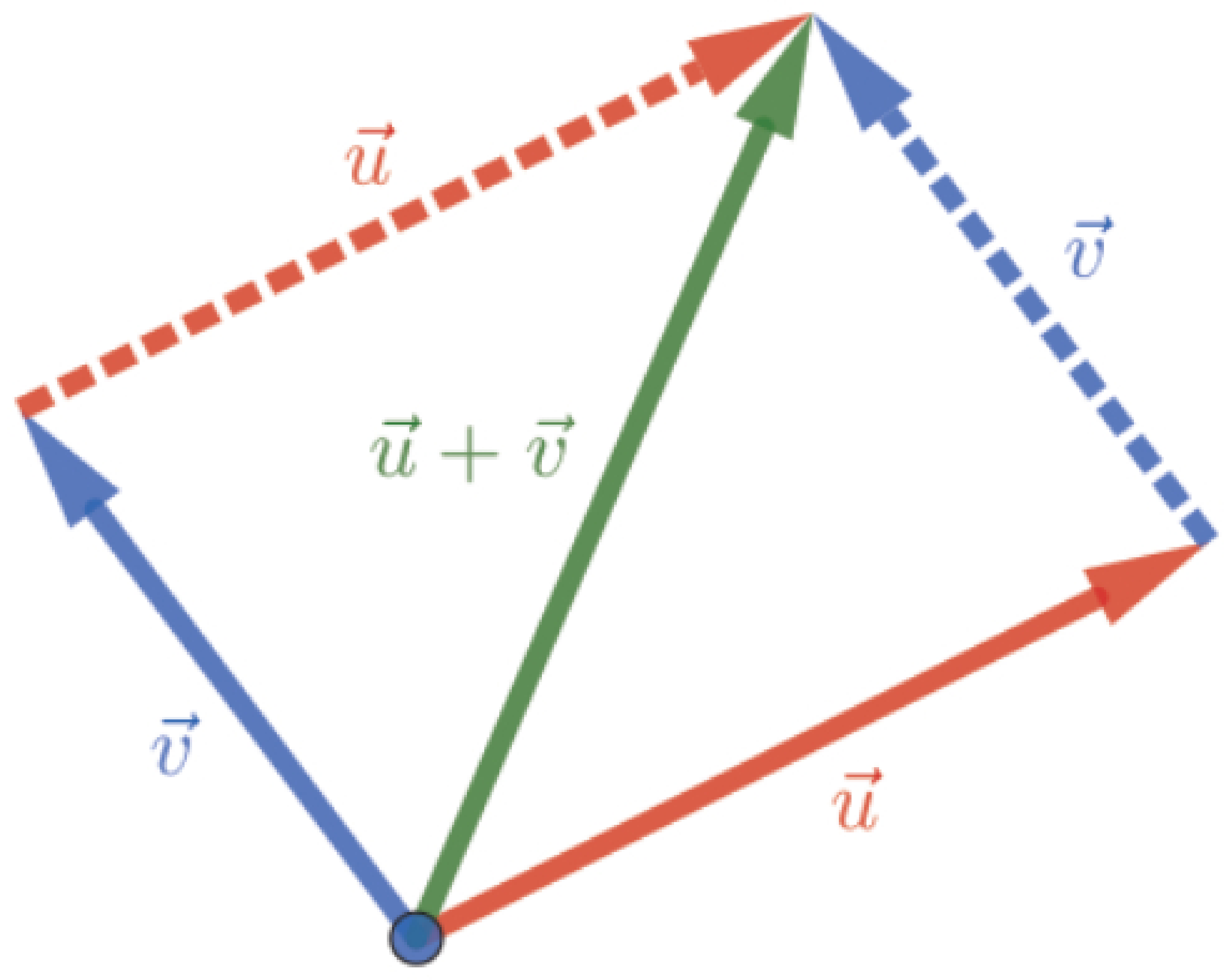
Regra do polígono



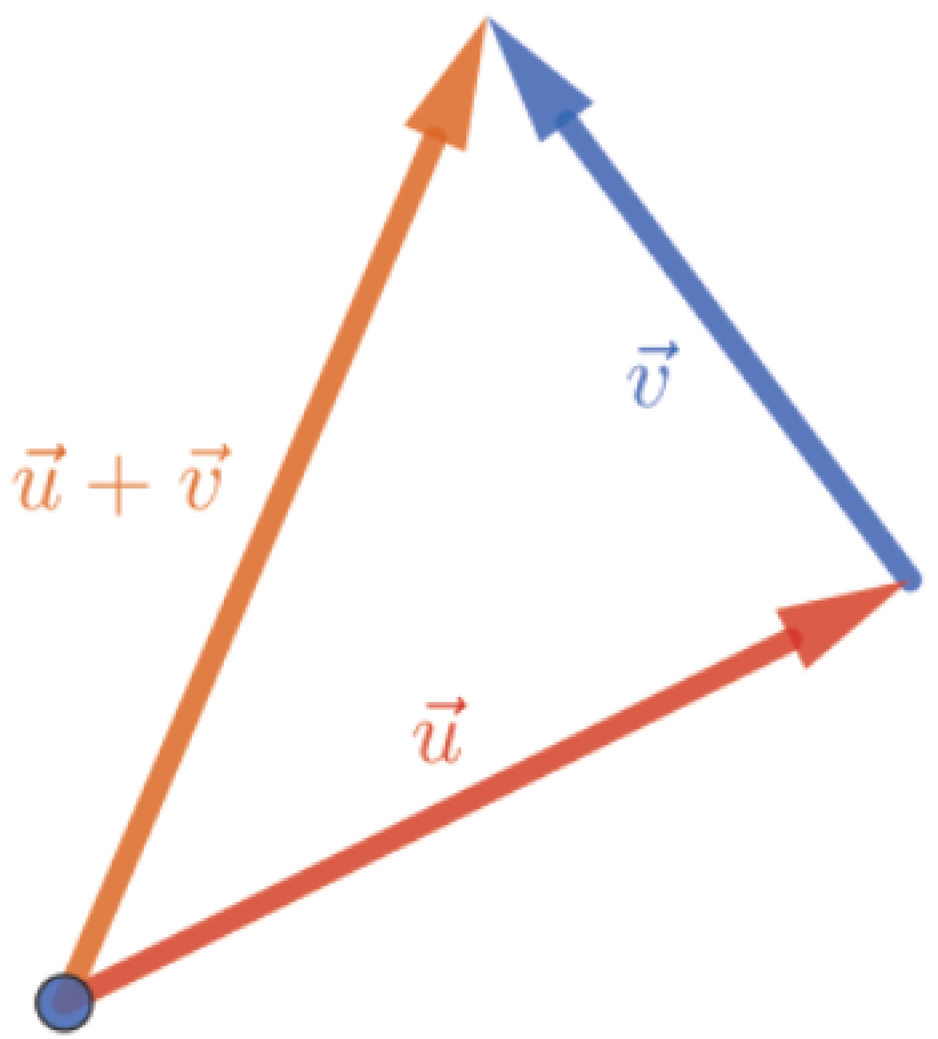
ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

Some os vetores abaixo

Regra do paralelogramo



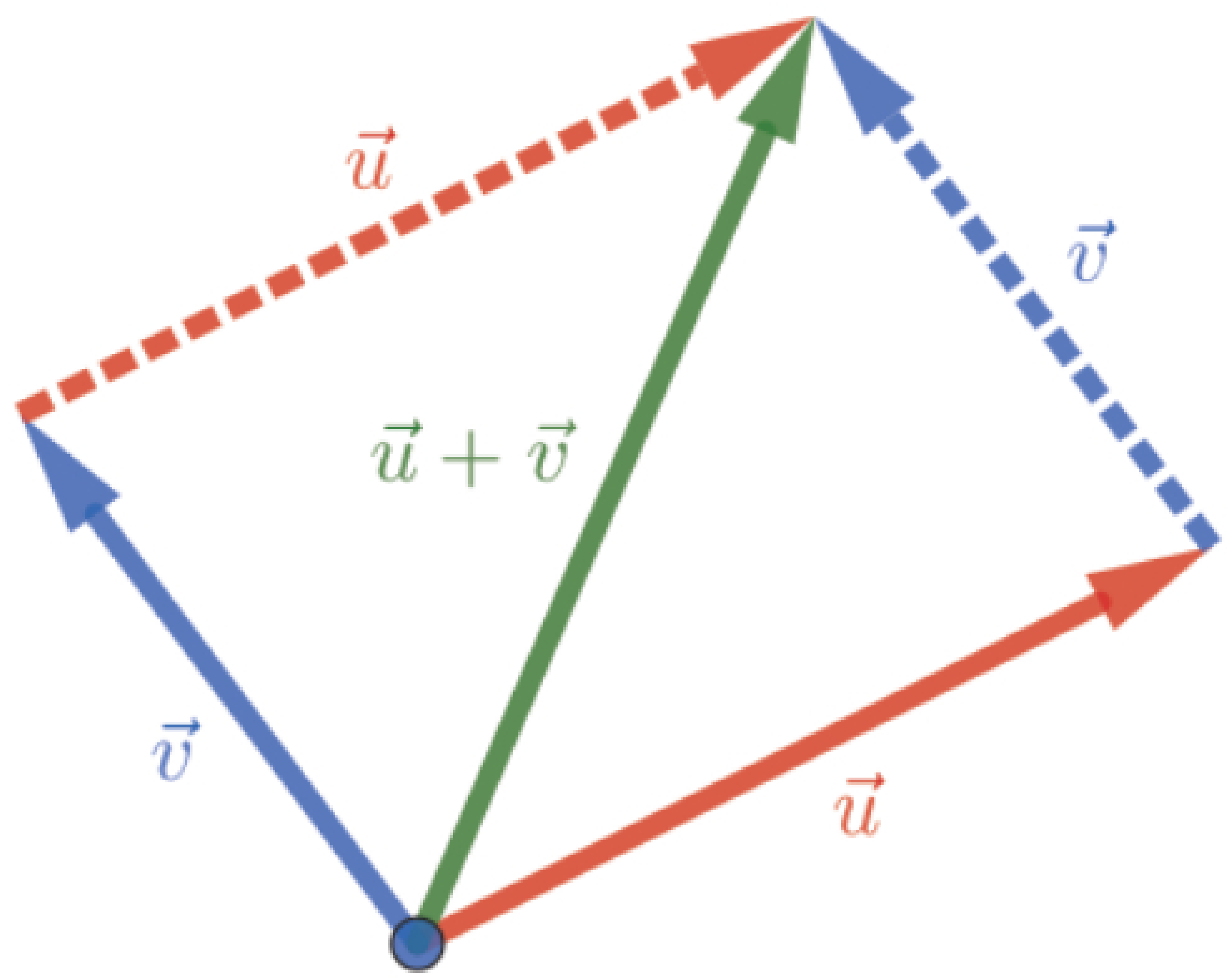
Regra do polígono



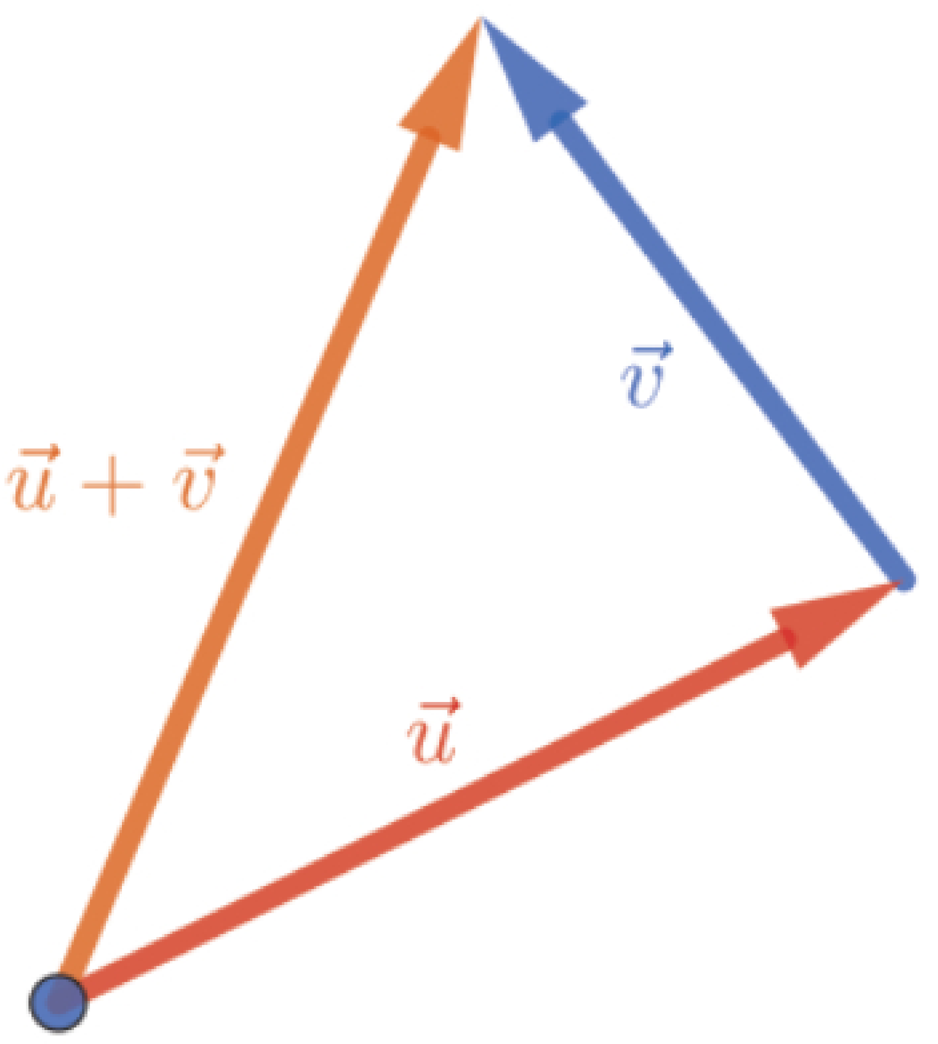
ADIÇÃO PELA REGRA DO POLÍGONO

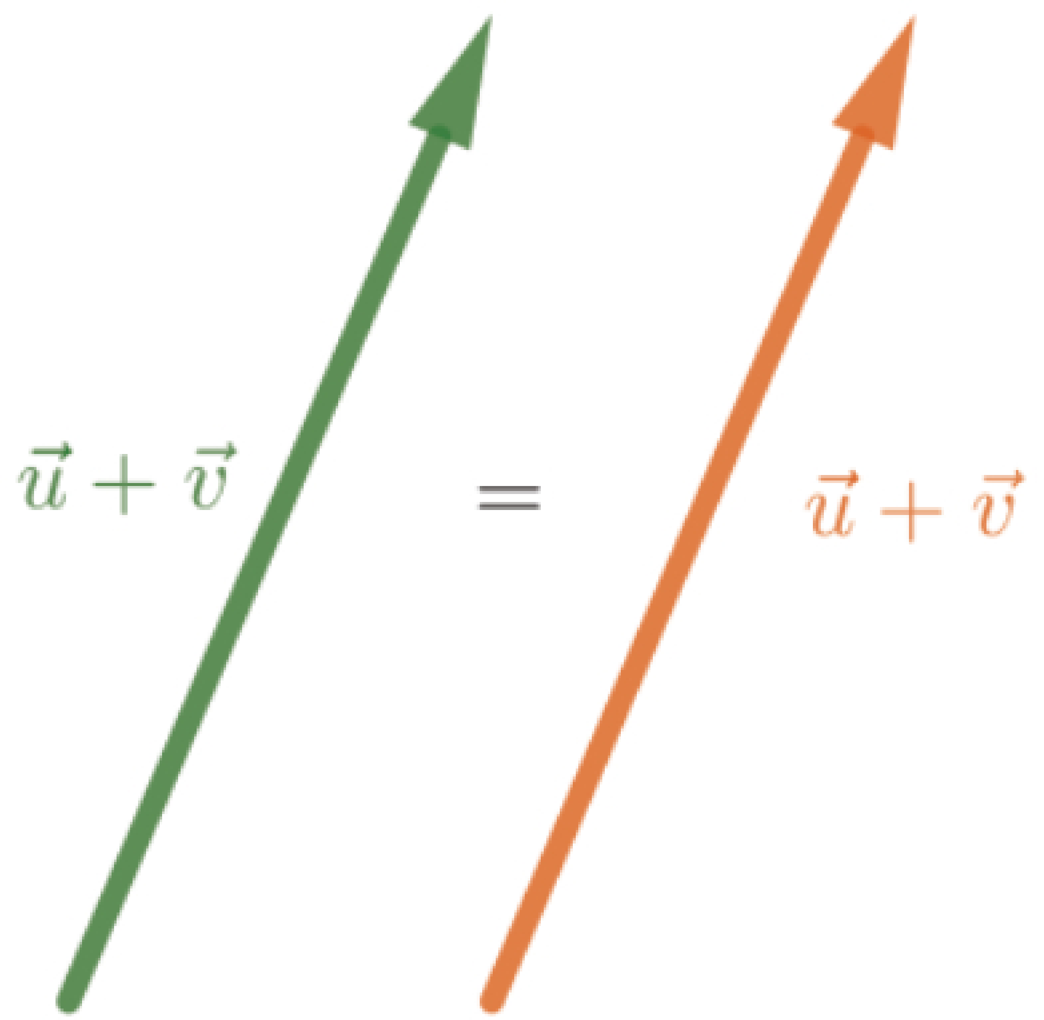
Some os vetores abaixo

Regra do paralelogramo



Regra do polígono

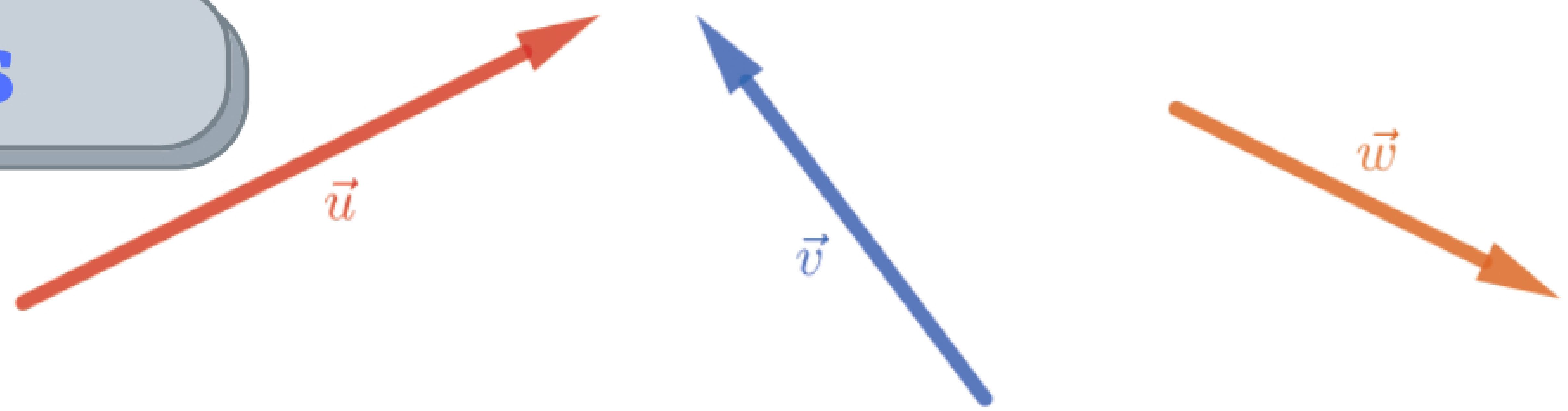




SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES

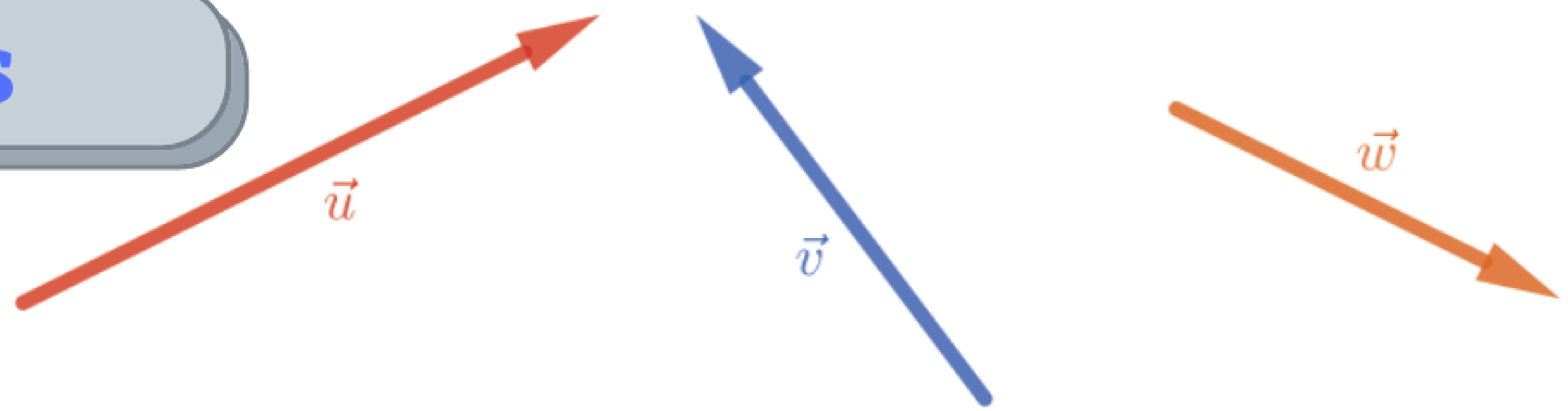
SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES

Some os vetores

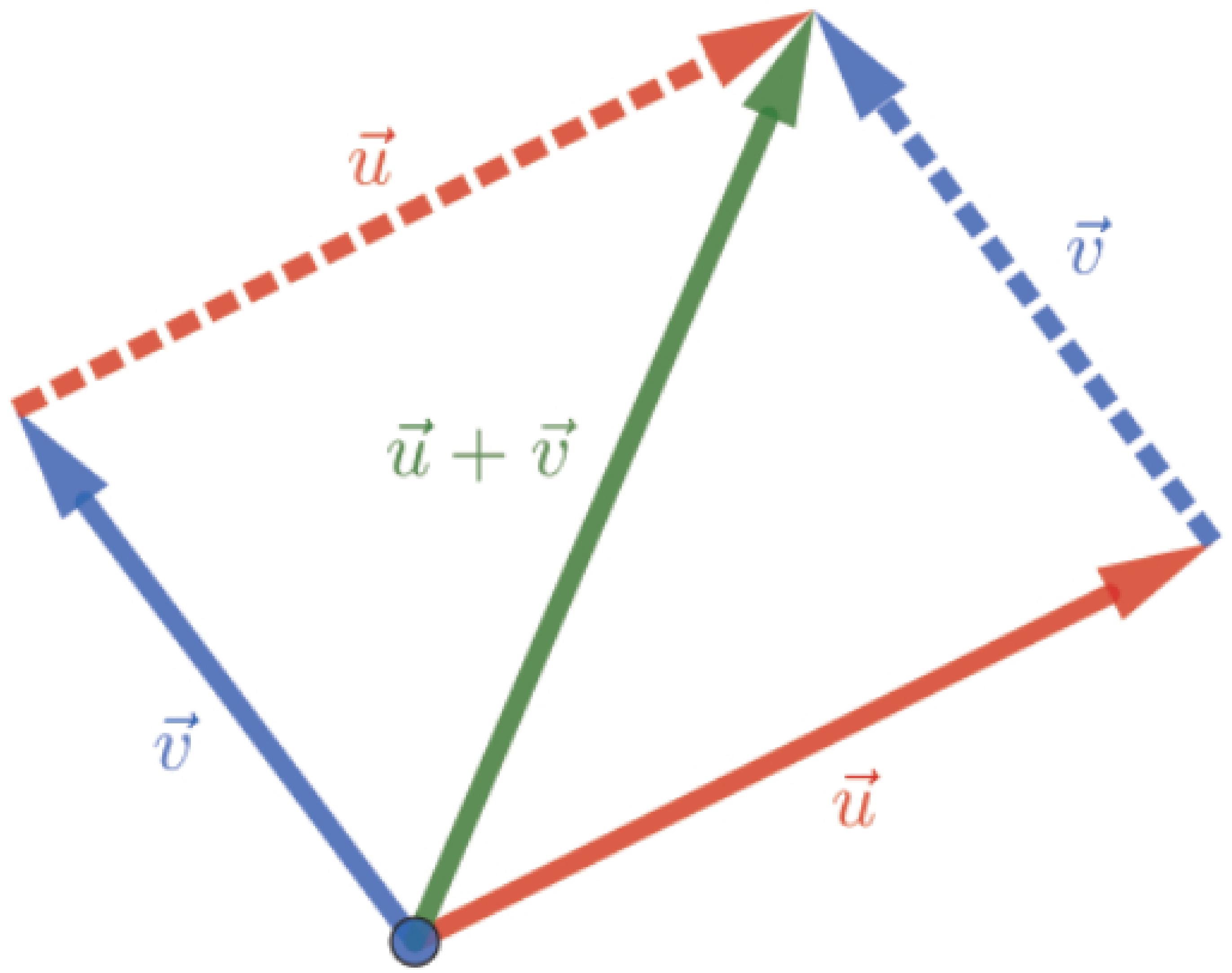


SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES

Some os vetores

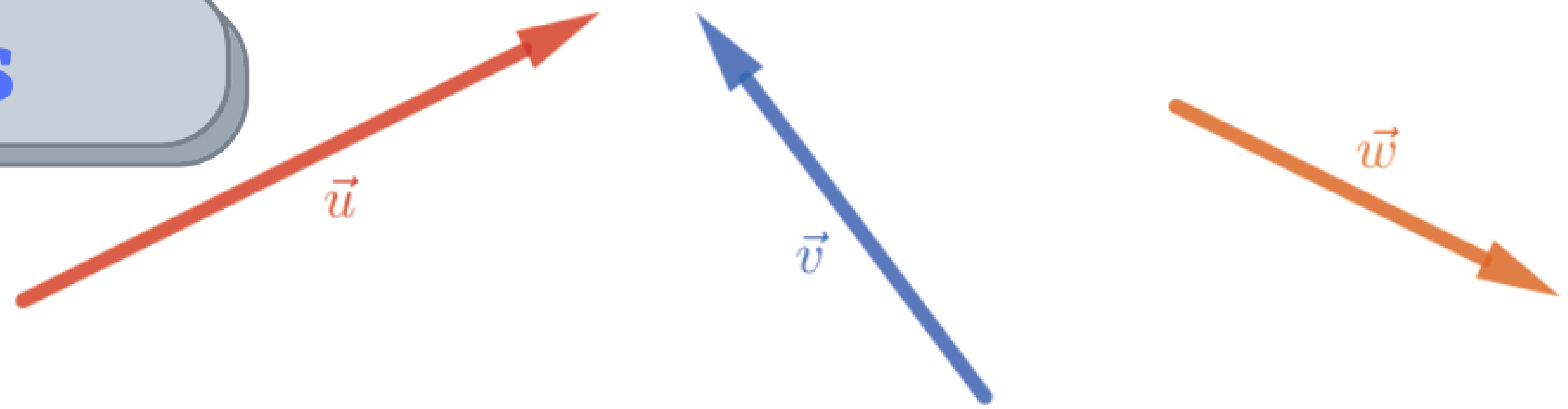


Regra do paralelogramo

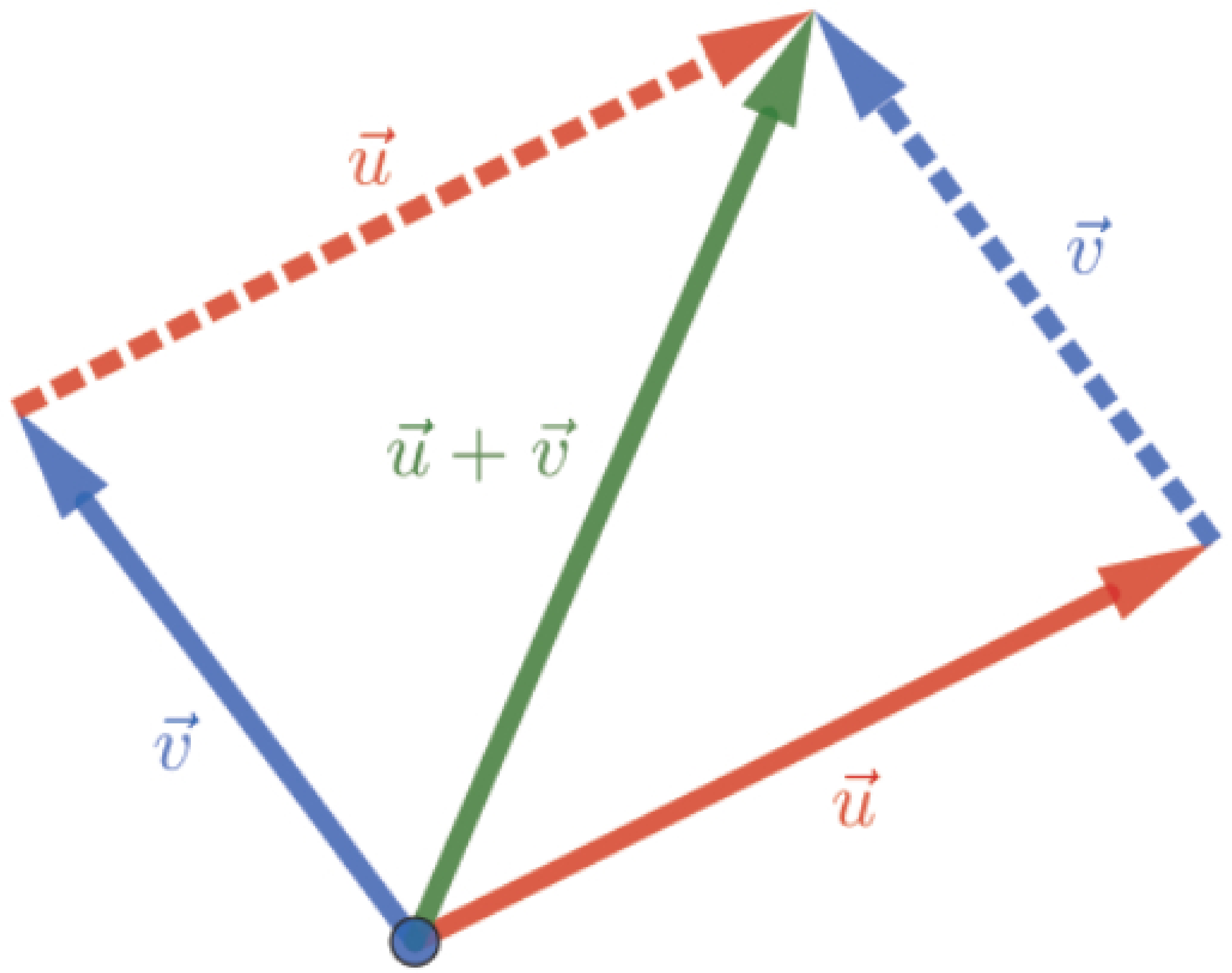


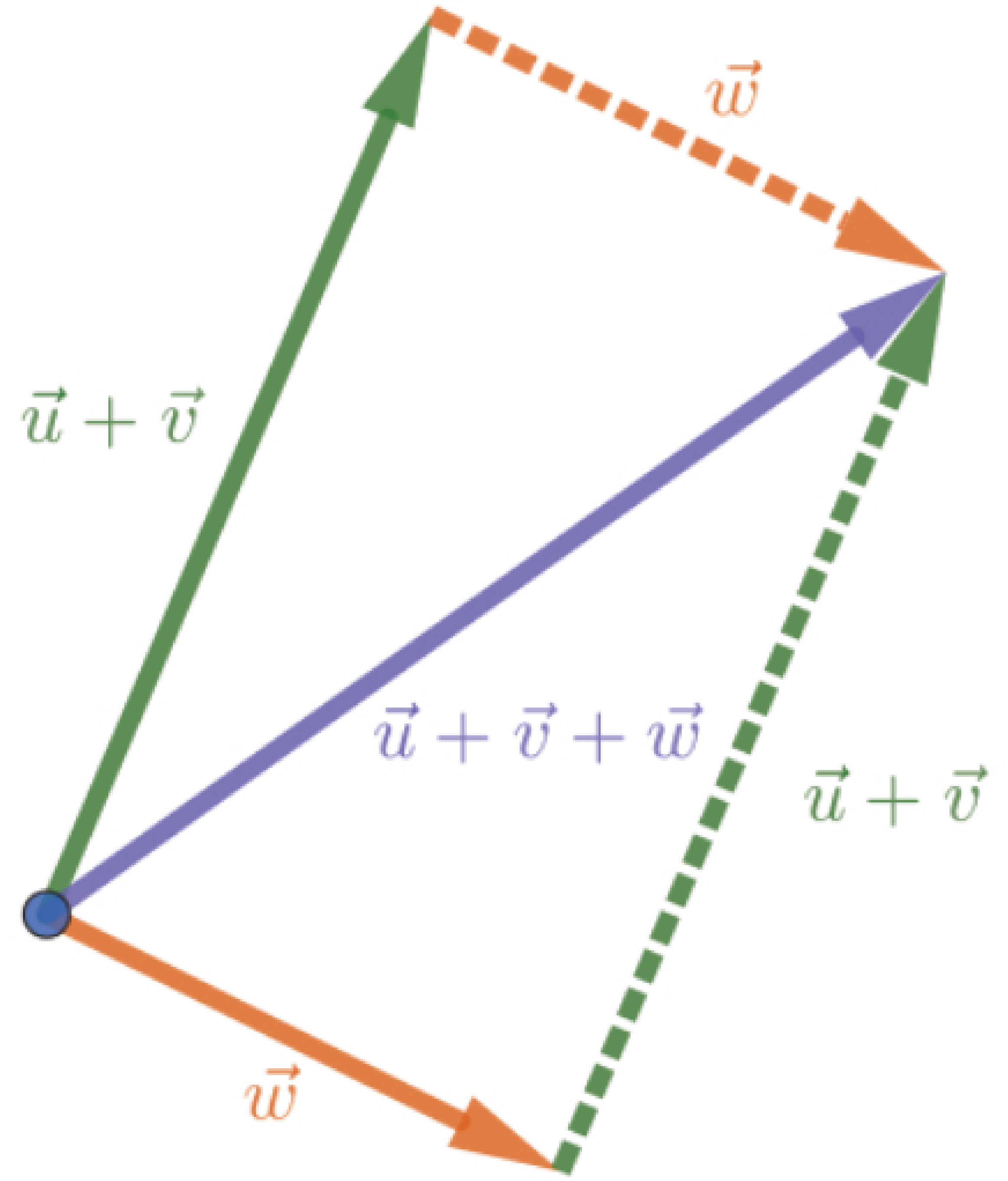
SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES

Some os vetores

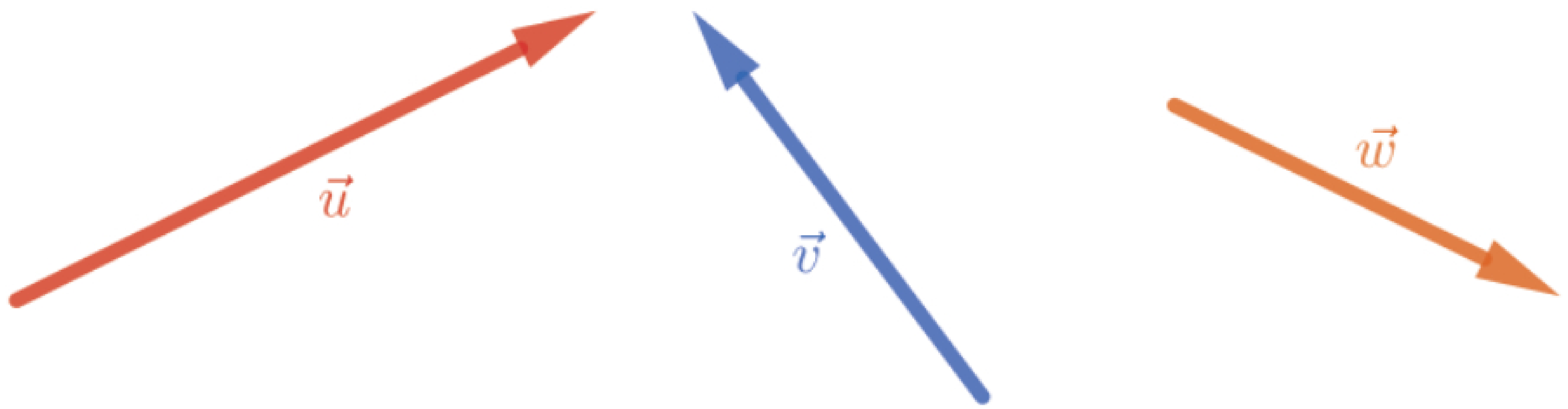


Regra do paralelogramo



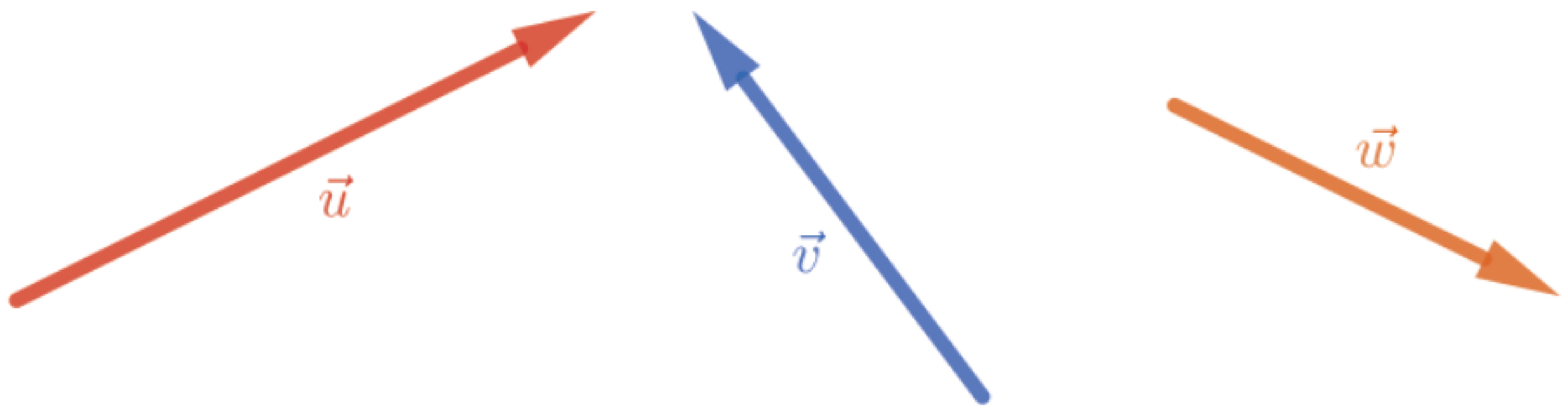


SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES

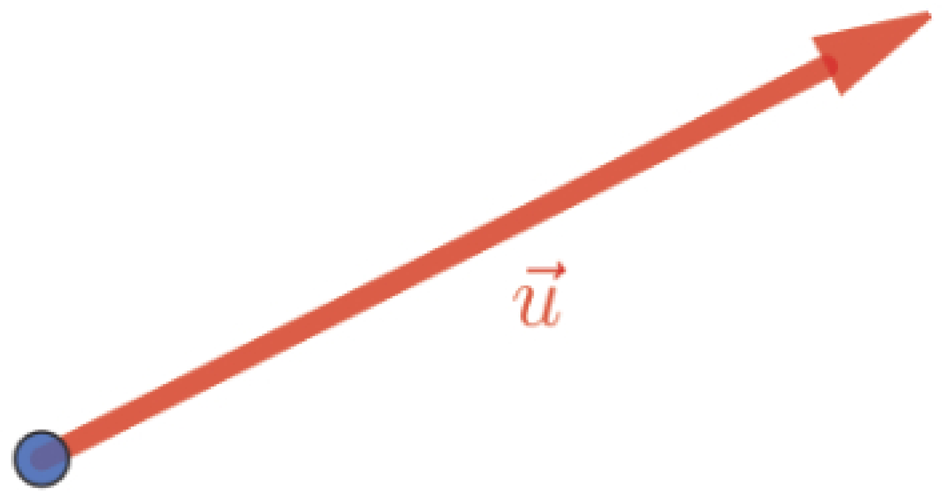


Regra do polígono

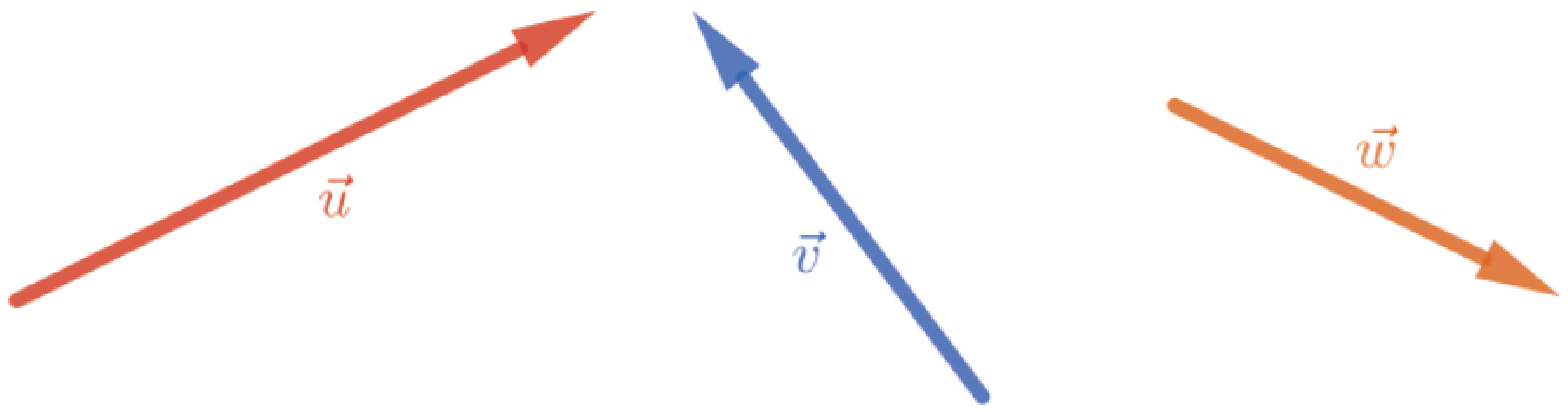
SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES



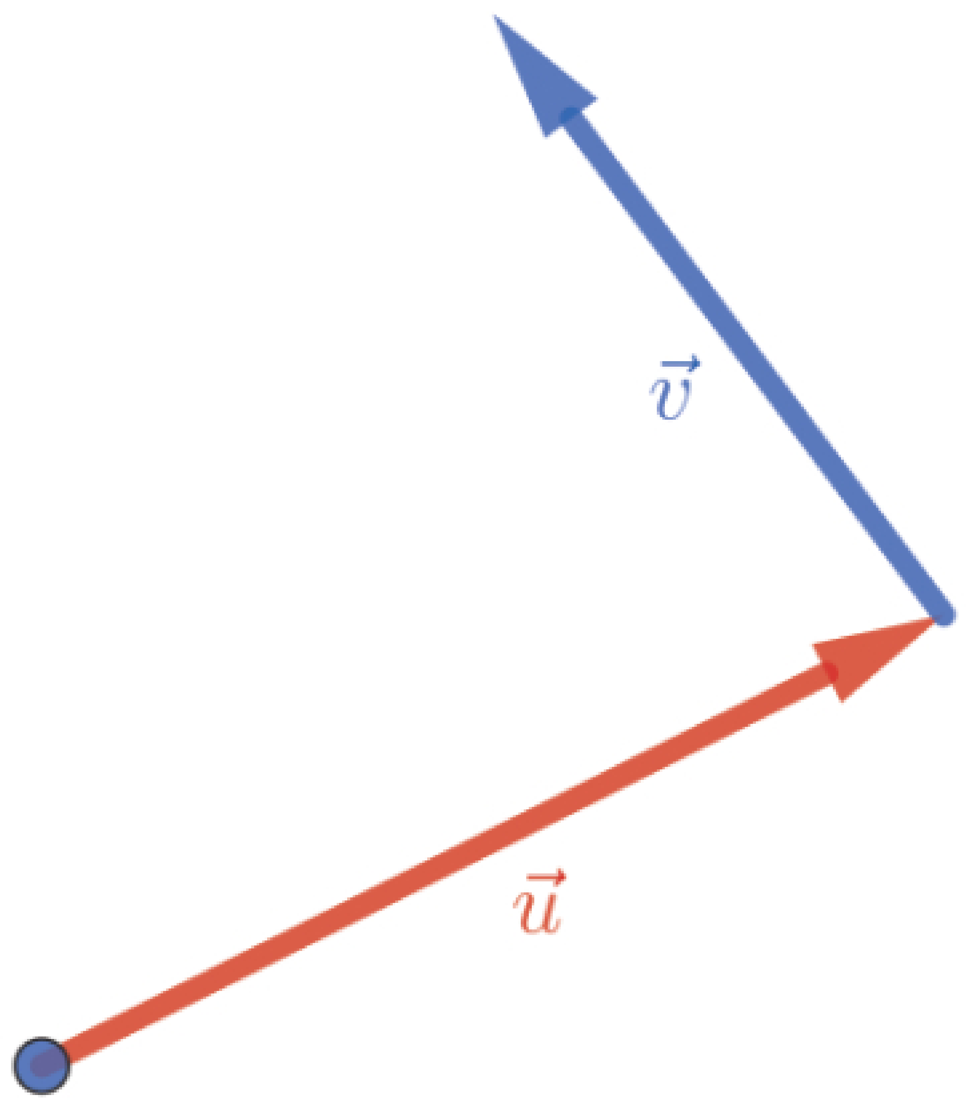
Regra do polígono



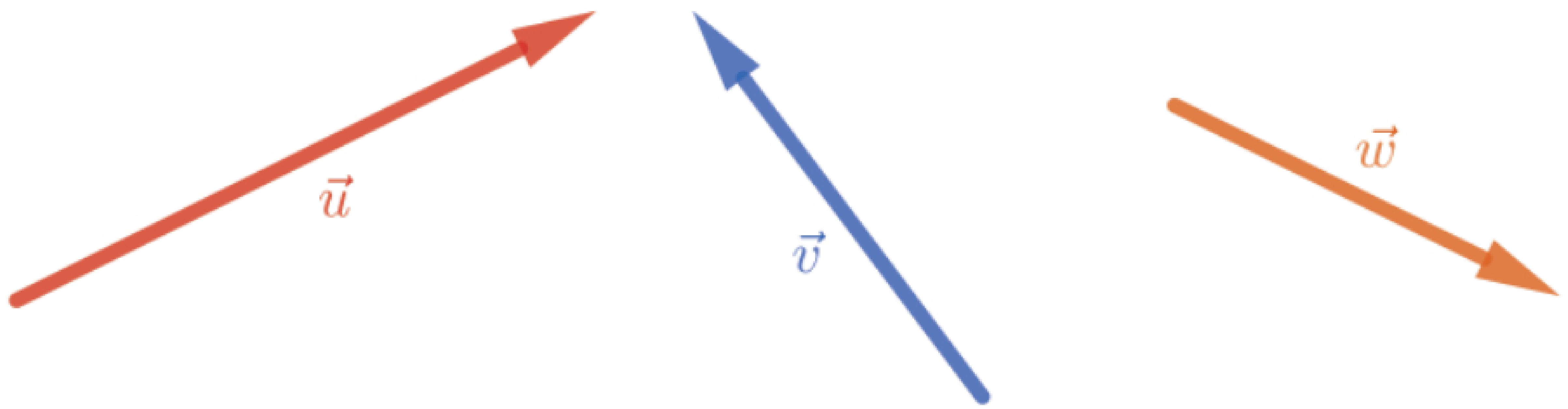
SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES



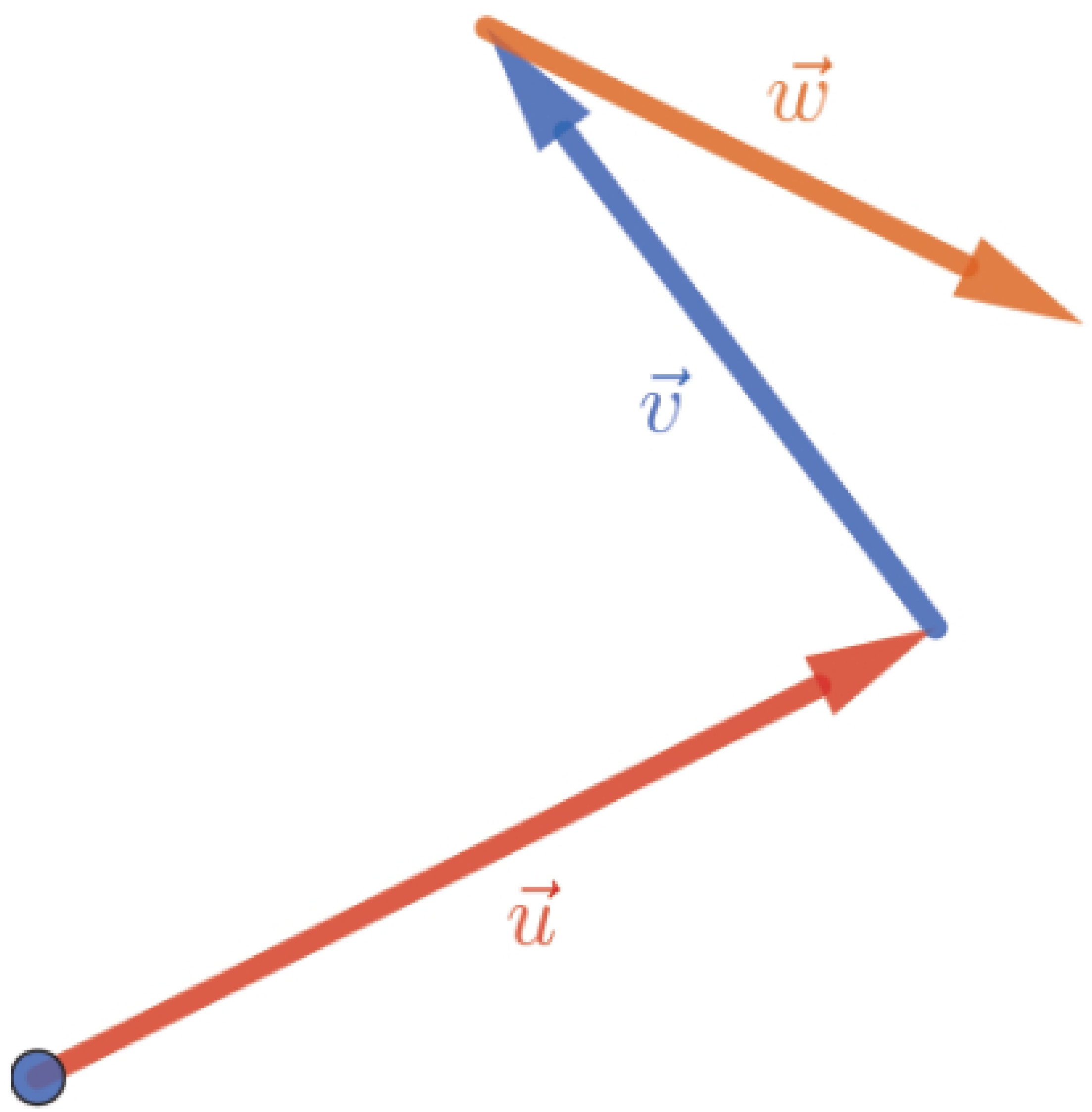
Regra do polígono



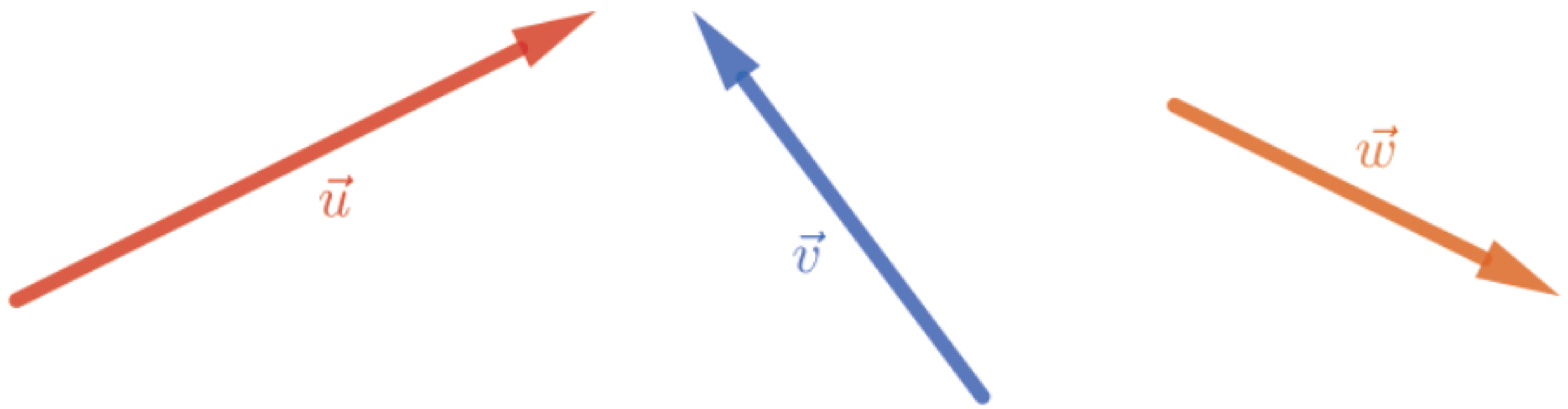
SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES



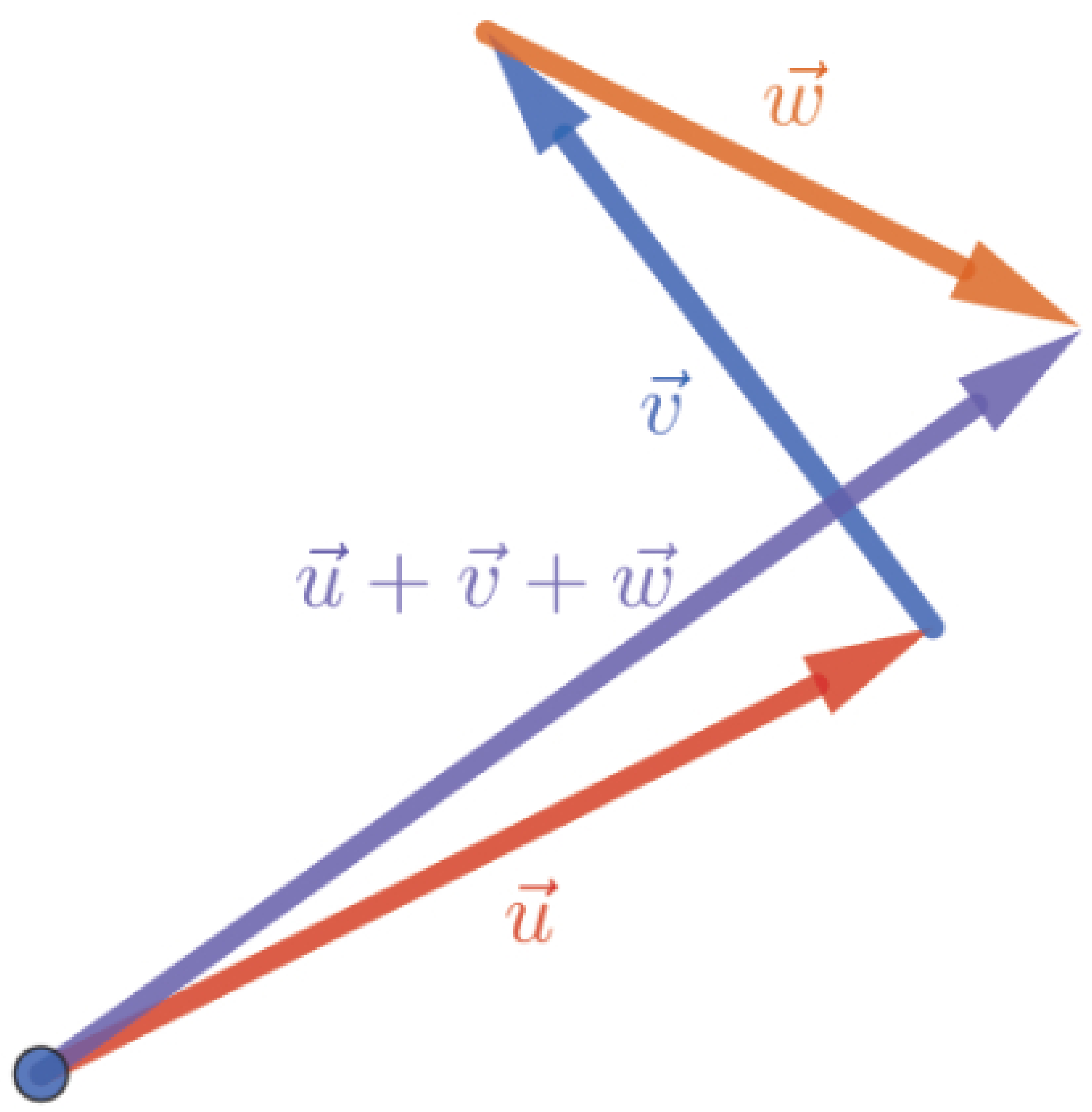
Regra do polígono



SOMA DE MAIS DE DOIS VETORES



Regra do polígono



SOMA DE VETORES EM 3 DIMENSÕES

SUBTRAÇÃO DE VETORES

SUBTRAÇÃO DE VETORES

Definição. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

SUBTRAÇÃO DE VETORES

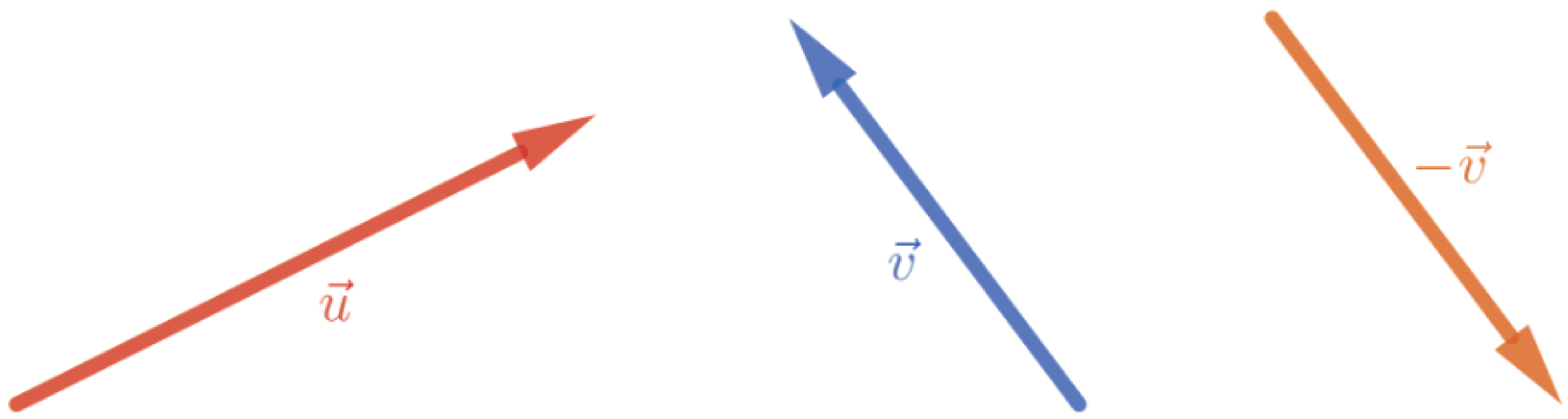
Definição. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Exemplo

SUBTRAÇÃO DE VETORES

Definição. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

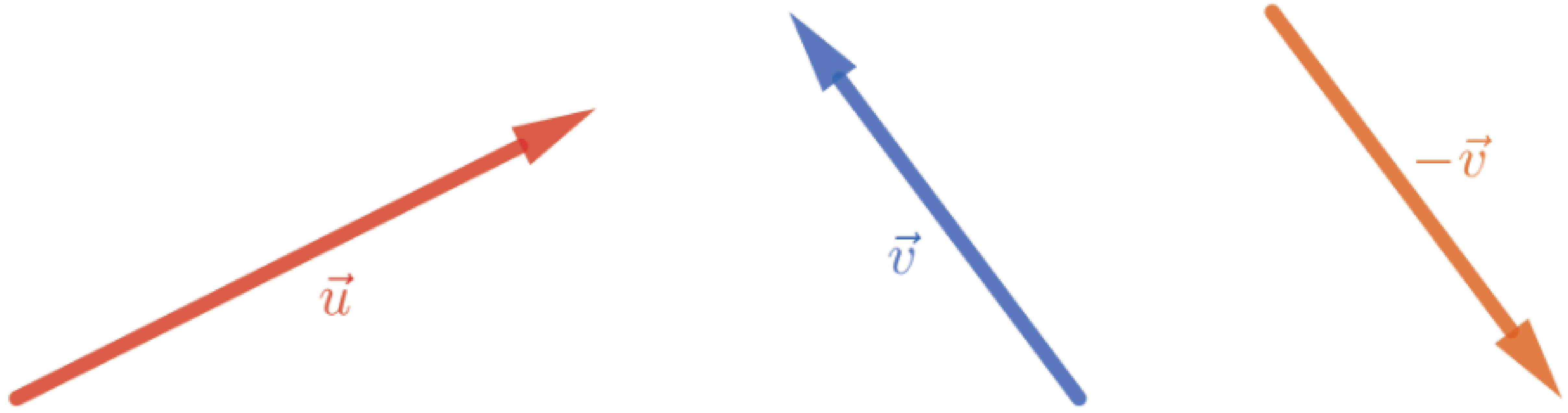
Exemplo



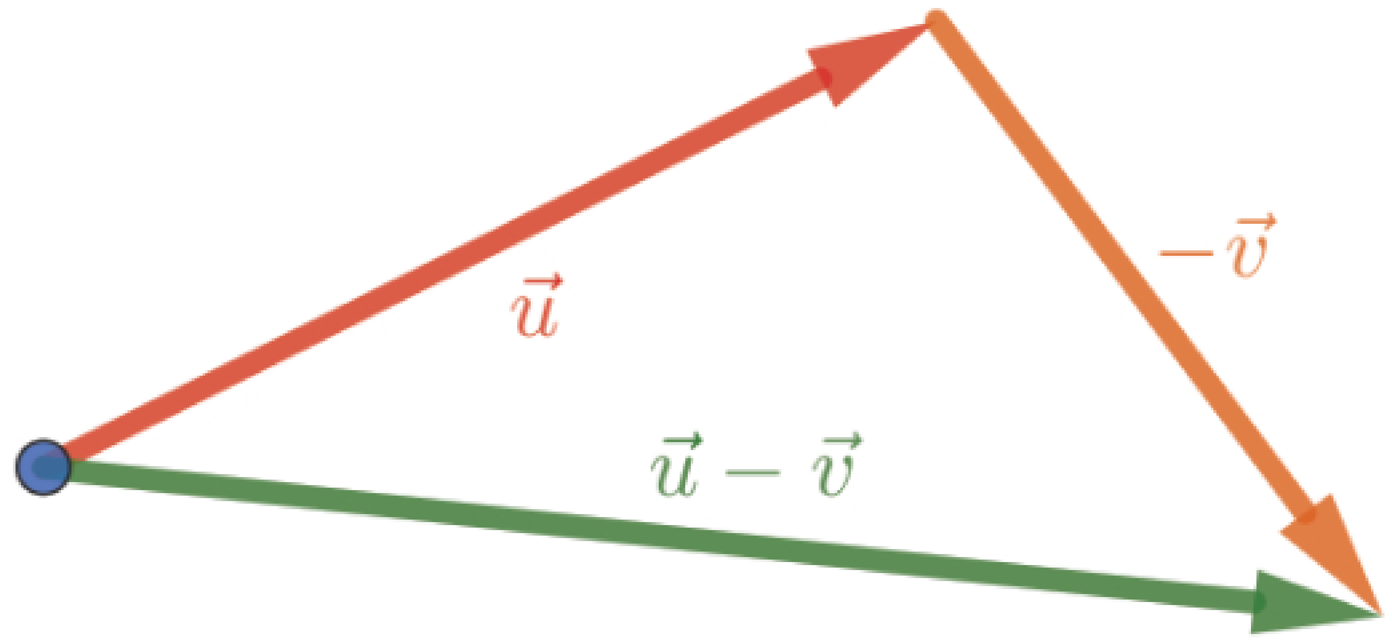
SUBTRAÇÃO DE VETORES

Definição. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

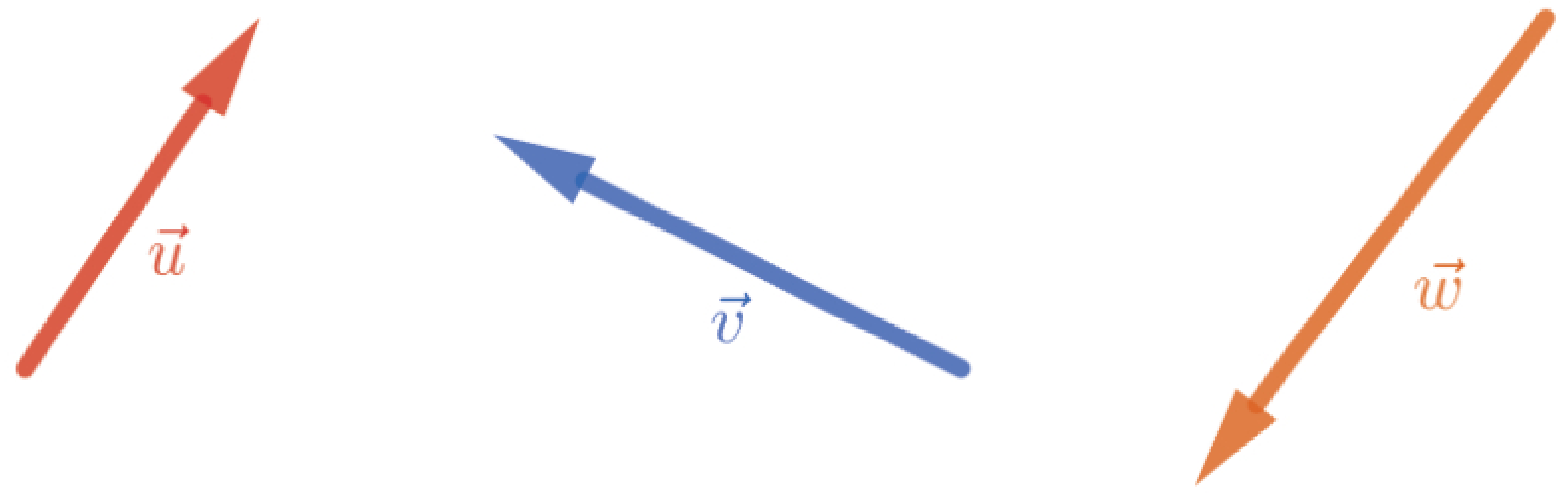
Exemplo



Regra do polígono

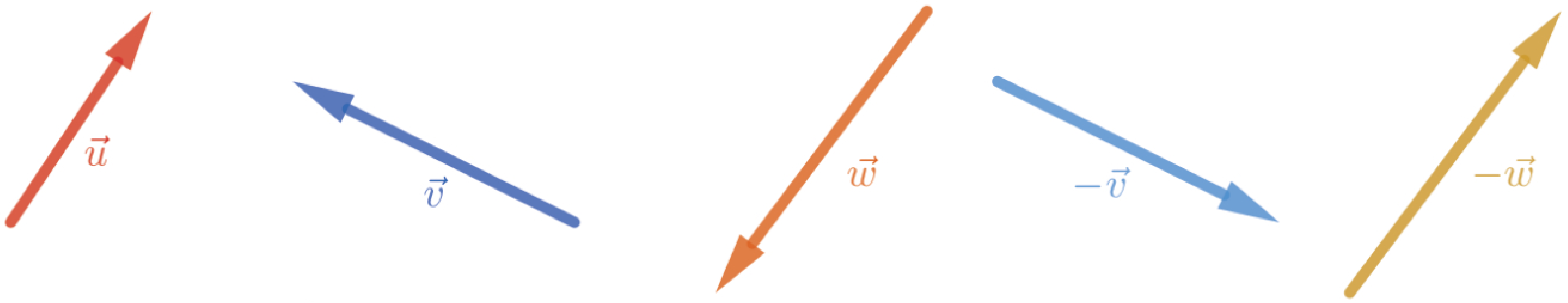


EXERCÍCIO



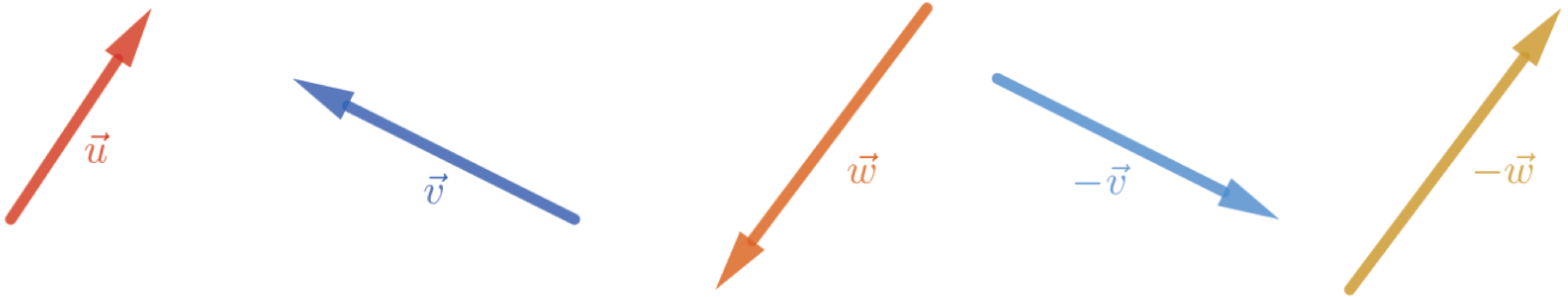
$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = ?$$

EXERCÍCIO



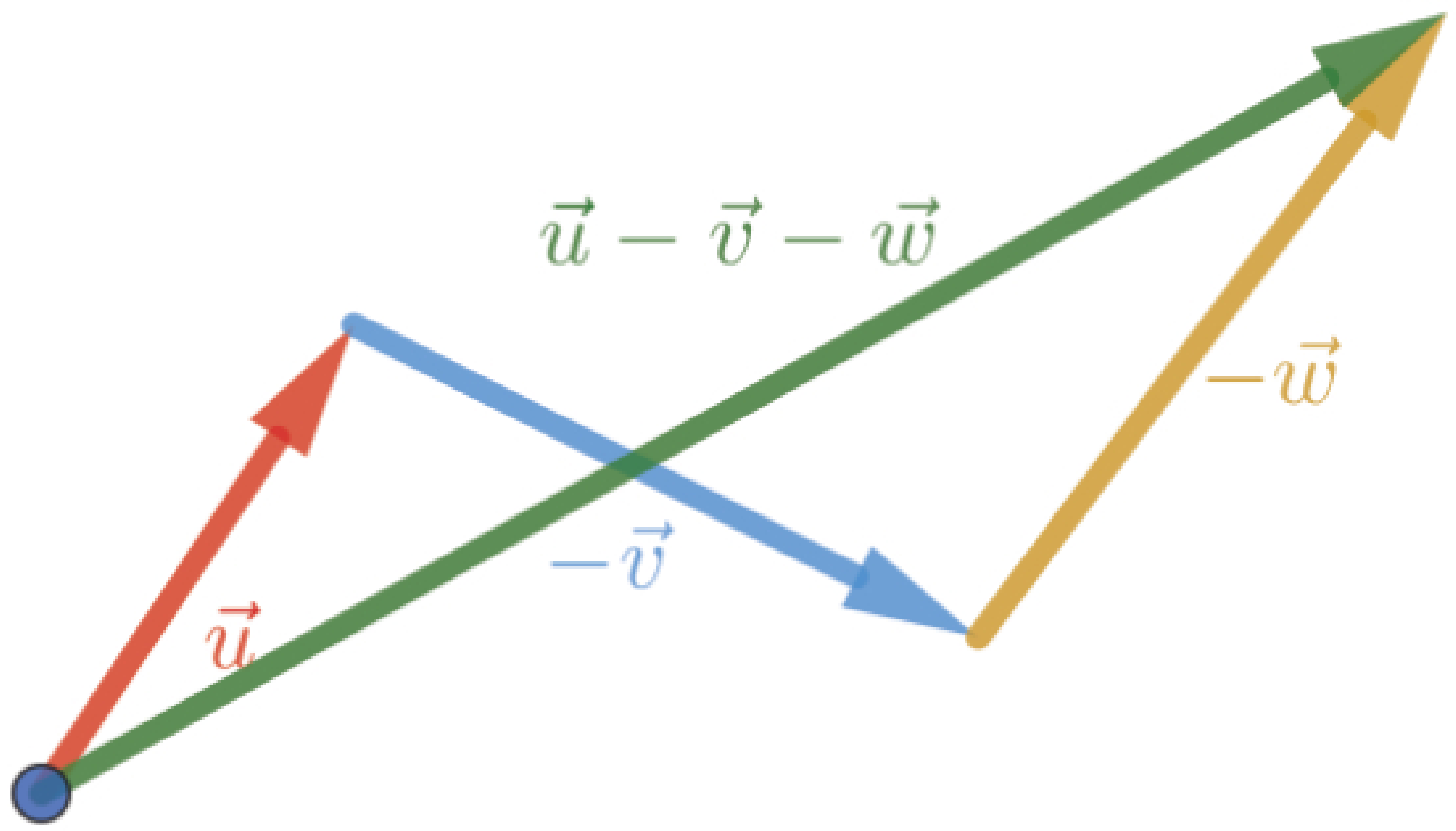
$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = ?$$

EXERCÍCIO

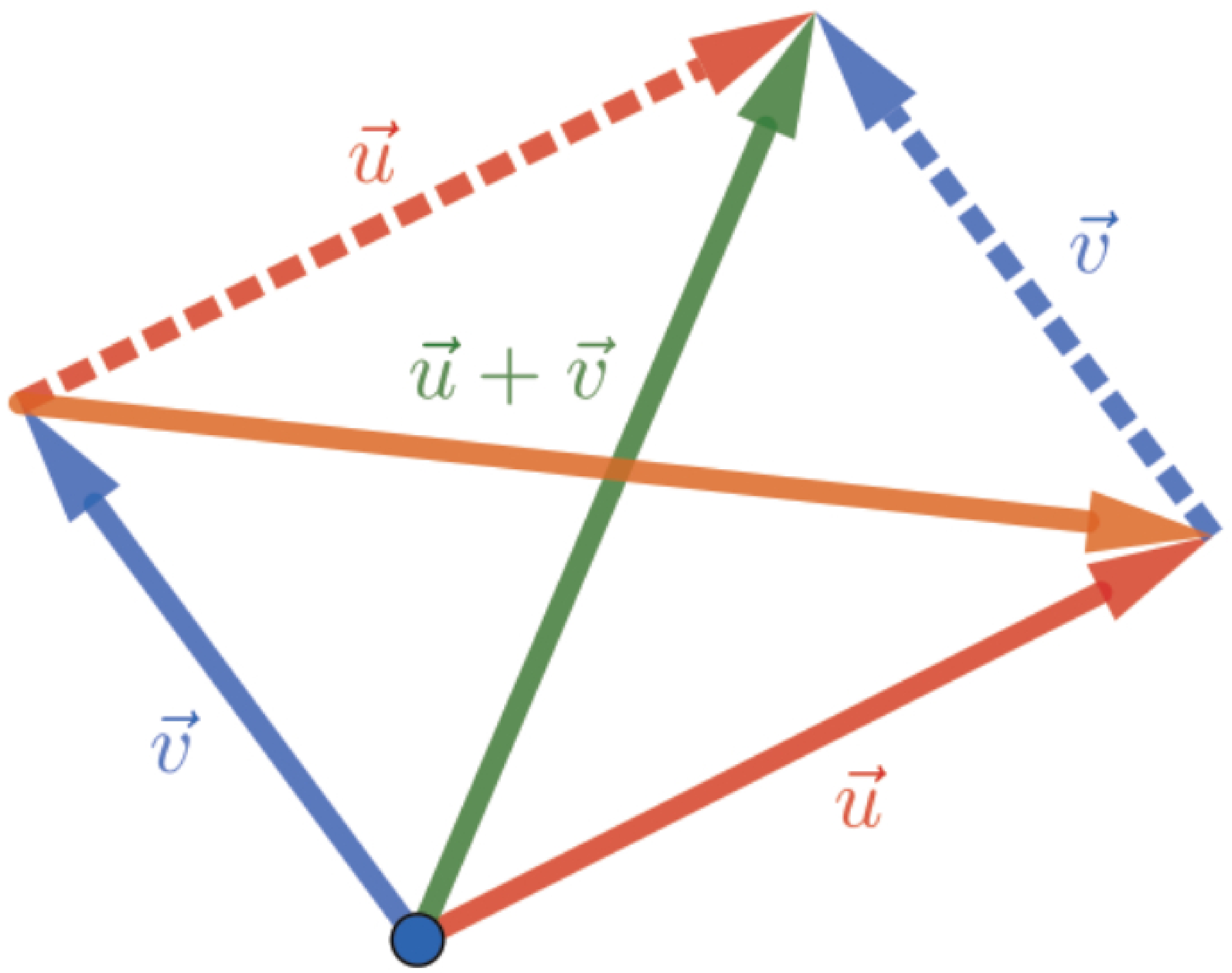


$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = ?$

Regra do polígono



PARA FILOSOFAR EM CASA

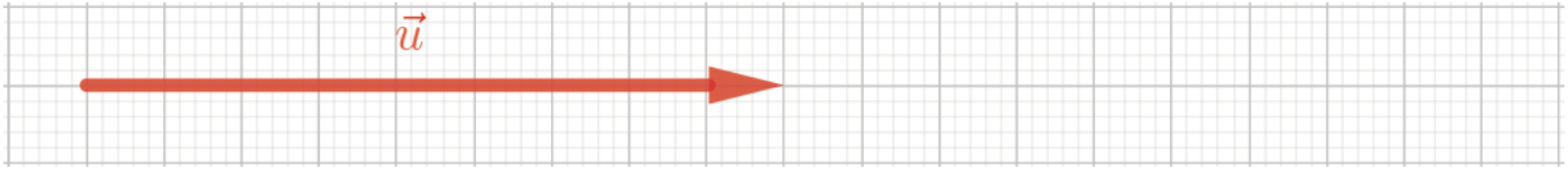


Descreva o vetor em alaranjado em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

$\vec{u}$



$2\vec{u}$

$\frac{1}{3}\vec{u}$

$(-1)\vec{u}$

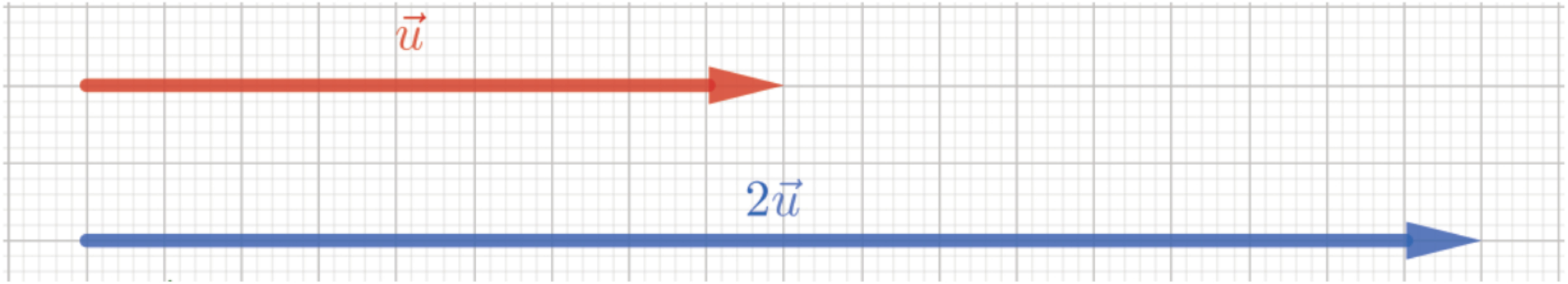
$-2\vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u}$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

$\vec{u}$

$2\vec{u}$



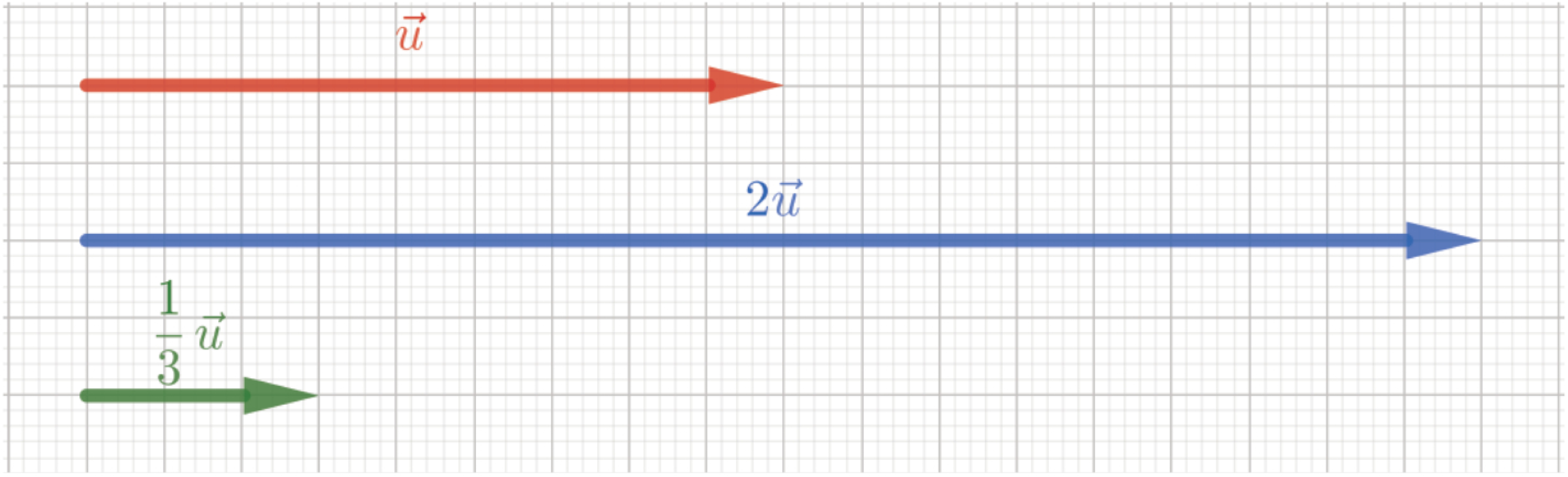
$\frac{1}{3}\vec{u}$

$(-1)\vec{u}$

$-2\vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u}$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR



$\vec{u}$

$2\vec{u}$

$\frac{1}{3}\vec{u}$

$(-1)\vec{u}$

$-2\vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u}$

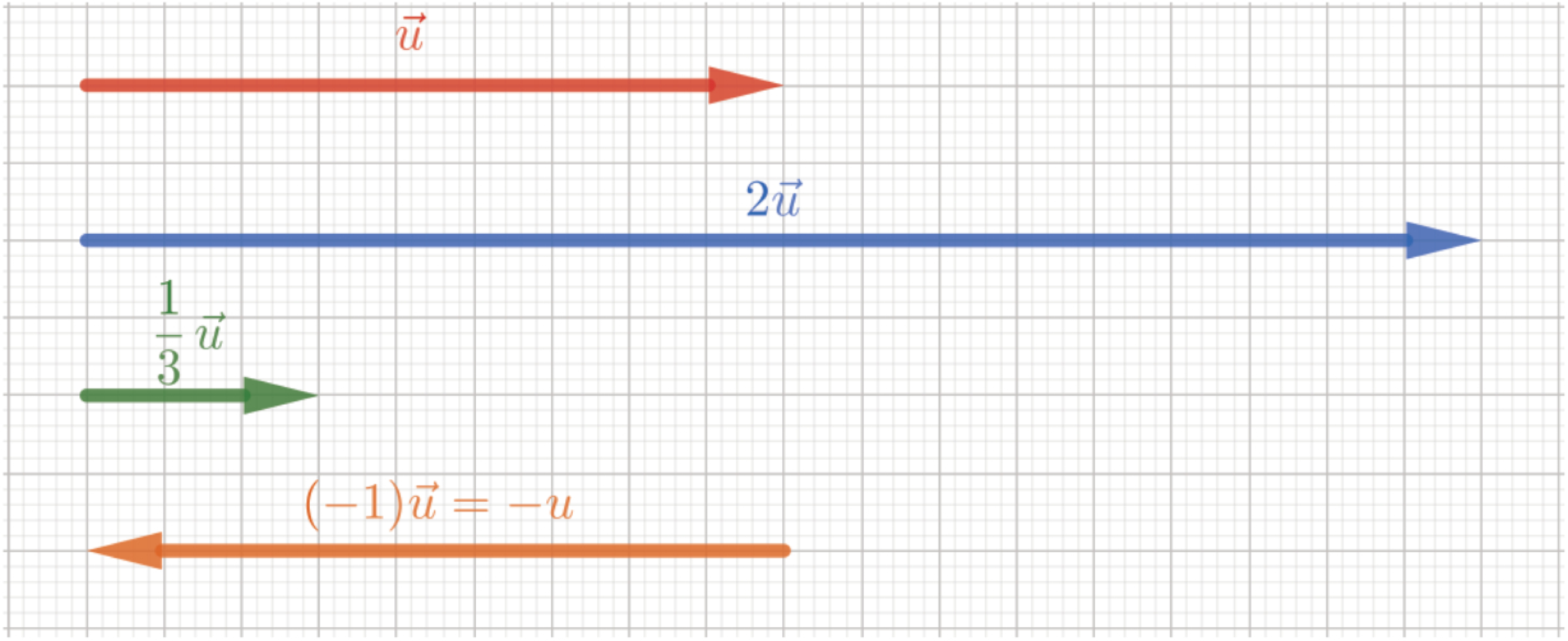
MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

$\vec{u}$

$2\vec{u}$

$\frac{1}{3}\vec{u}$

$(-1)\vec{u}$



$-2\vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u}$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

$\vec{u}$

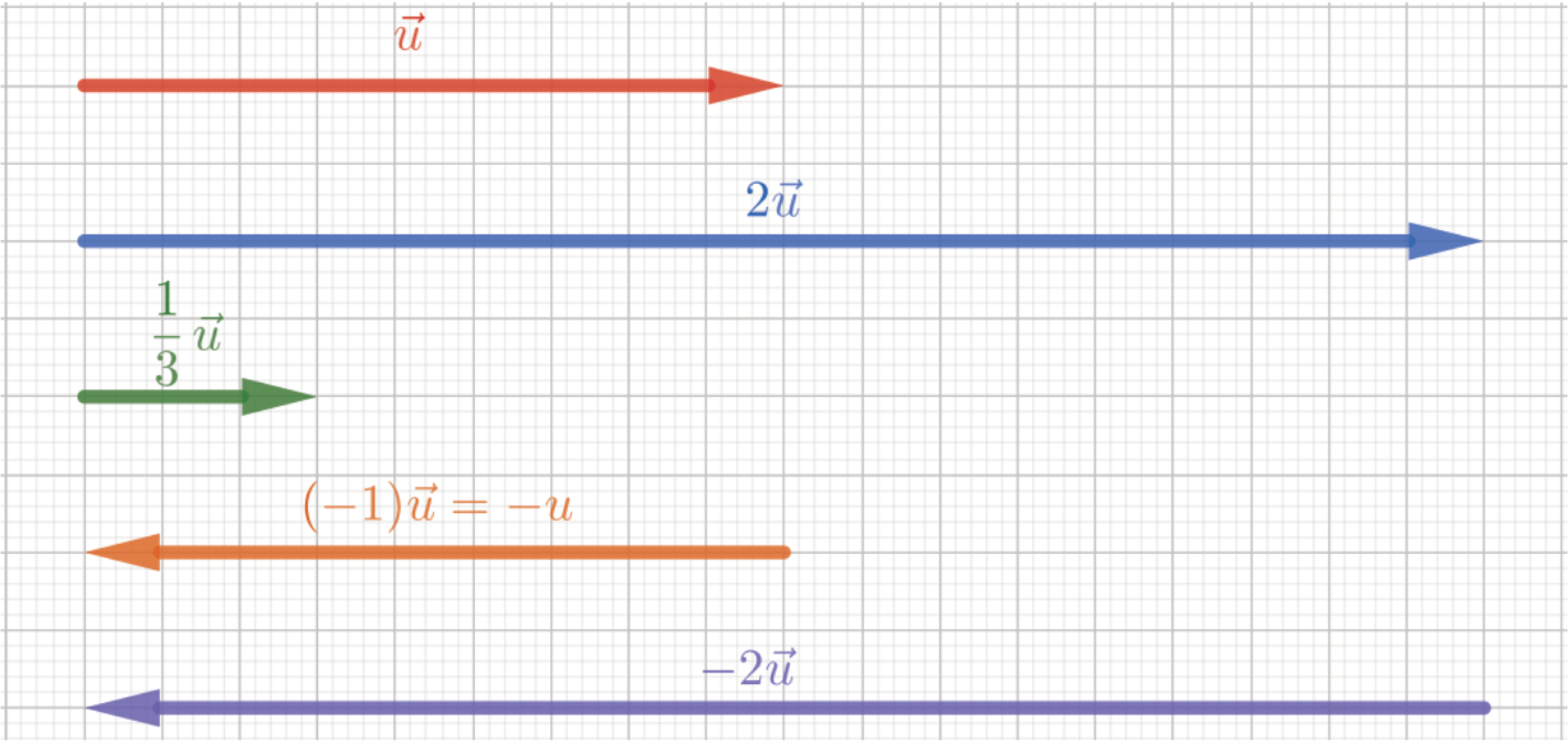
$2\vec{u}$

$\frac{1}{3}\vec{u}$

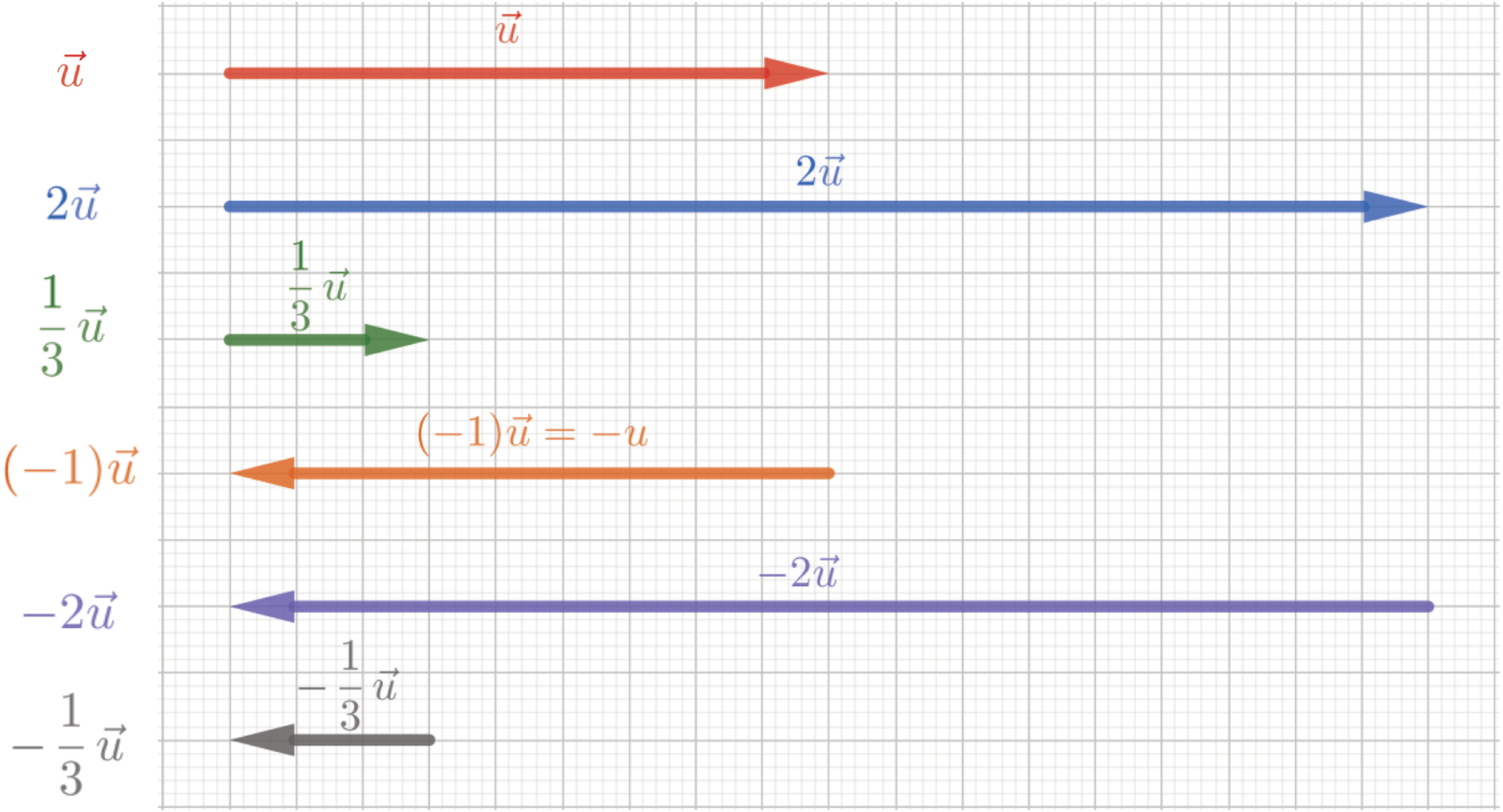
$(-1)\vec{u}$

$-2\vec{u}$

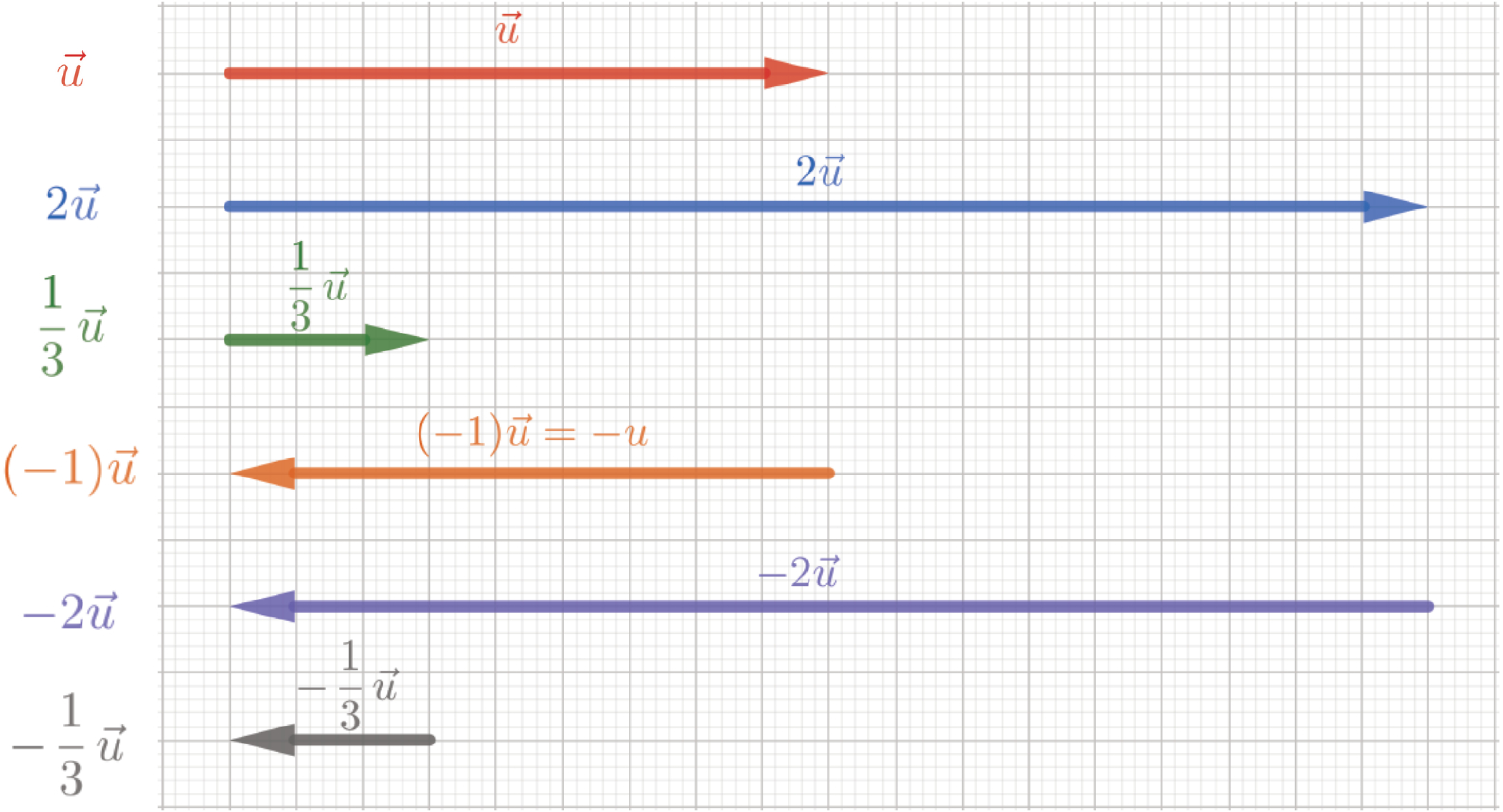
$-\frac{1}{3}\vec{u}$



MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR



MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

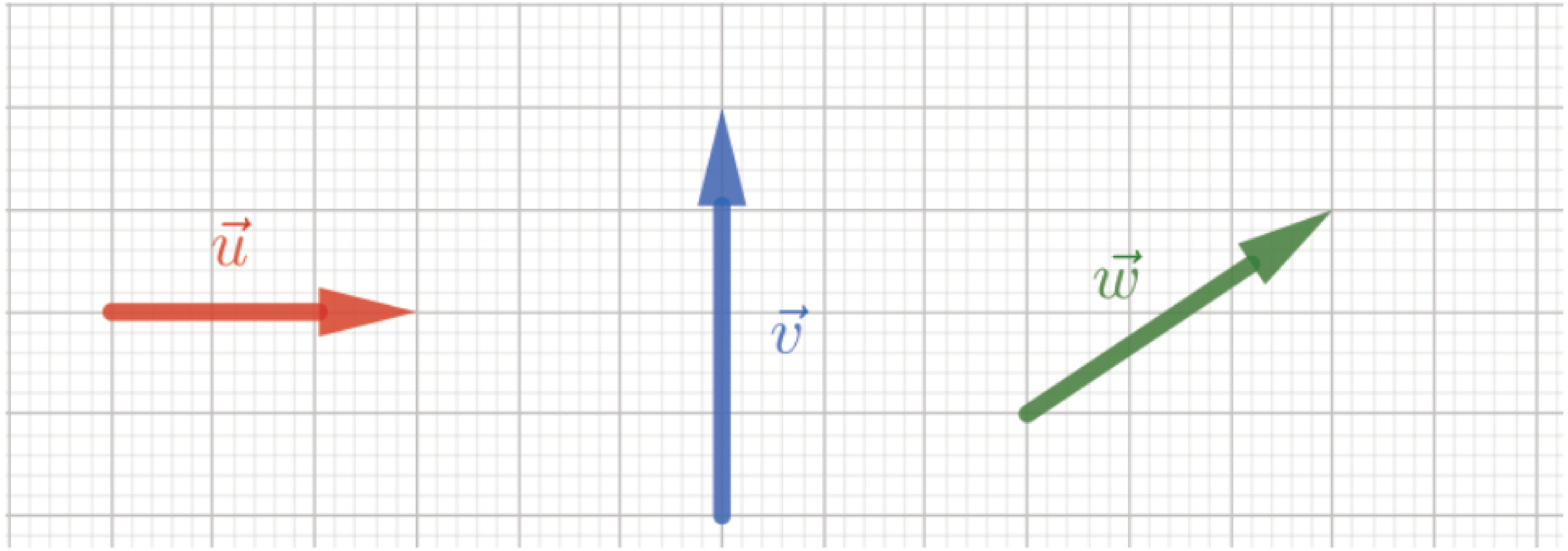


$$0\vec{u} = \vec{0}$$

EXERCÍCIO

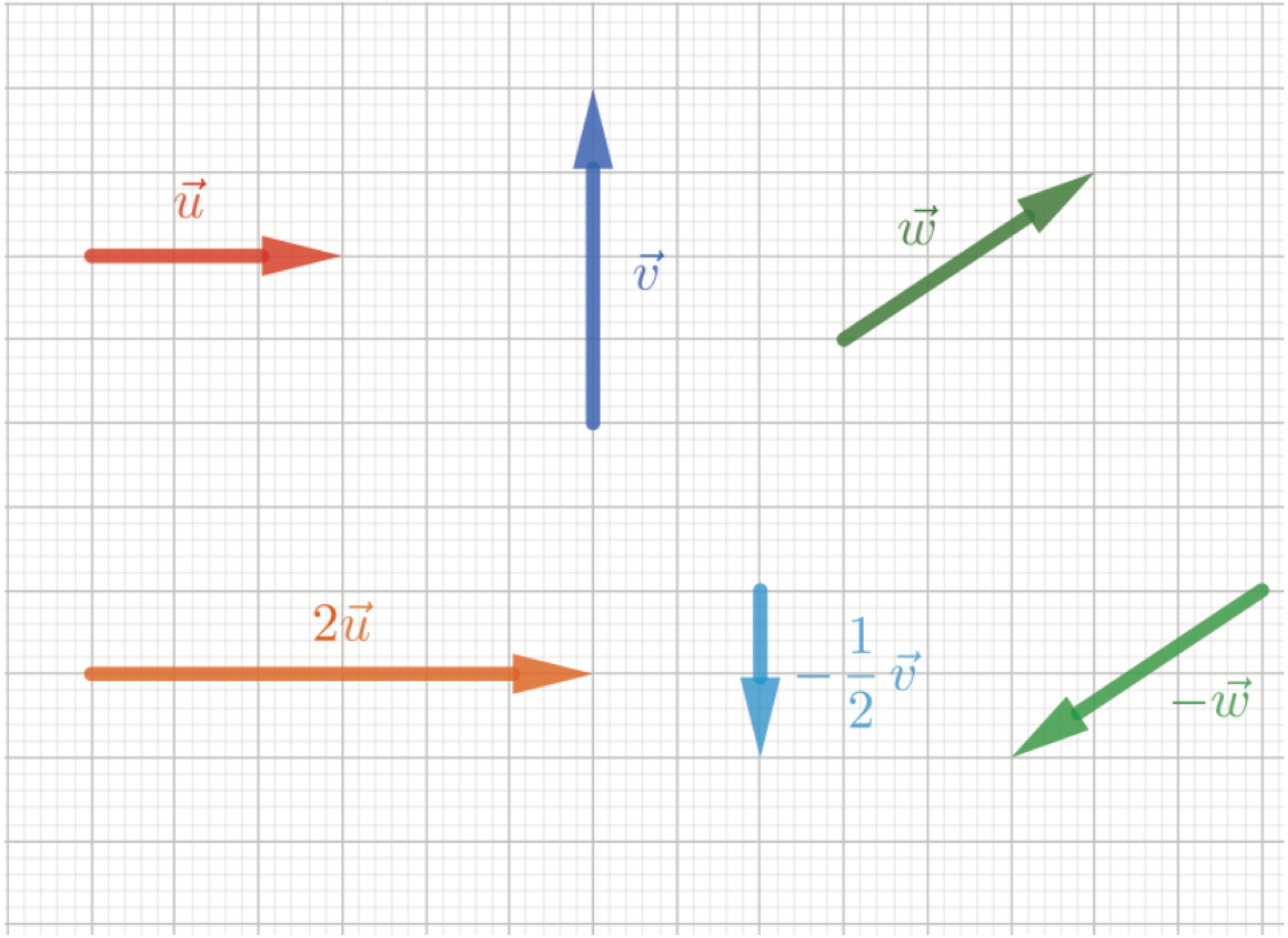
EXERCÍCIO

$$2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - w = ?$$



EXERCÍCIO

$$2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - w = ?$$



EXERCÍCIO

$$2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - w = ?$$

PARALELISMO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

PARALELISMO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Conforme definição, os vetores $\vec{u}$ e $a\vec{u}$ são sempre paralelos.

PARALELISMO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Conforme definição, os vetores $\vec{u}$ e $a\vec{u}$ são sempre paralelos.

A recíproca também é verdadeira. Se dois vetores são paralelos, então é possível multiplicar um deles por um número e obter o outro. Pense sobre isso!

PARALELISMO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Conforme definição, os vetores $\vec{u}$ e $a\vec{u}$ são sempre paralelos.

A recíproca também é verdadeira. Se dois vetores são paralelos, então é possível multiplicar um deles por um número e obter o outro. Pense sobre isso!

O vetor $a\vec{u}$ é chamado de múltiplo de $\vec{u}$. Isso justifica a nomenclatura dada a vetores paralelos como múltiplos um do outro.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{x}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{x}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Mas comprimento de $\vec{u}$ é $|\vec{u}|$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{x}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Mas comprimento de $\vec{u}$ é $|\vec{u}|$.

Logo, $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{x}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Mas comprimento de $\vec{u}$ é $|\vec{u}|$.

Logo, $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Assim como $\dfrac{1}{3} \cdot 4 = \dfrac{4}{3}$, também escrevemos $\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

VERSOR E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se $\vec{u}$ tem comprimento 5, então $\frac{1}{5}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{5}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento 3, então $\frac{1}{3}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{3}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ tem comprimento x, então $\frac{1}{x}\vec{u}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento 1.

Logo, $\frac{1}{x}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

Mas comprimento de $\vec{u}$ é $|\vec{u}|$.

Logo, $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ é o versor de $\vec{u}$.

O vetor nulo não possui versor!

Assim como $\dfrac{1}{3} \cdot 4 = \dfrac{4}{3}$, também escrevemos $\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(v) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$ e quaisquer números reais a e b.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(v) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$ e quaisquer números reais a e b.

(vi) $1\vec{u}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(v) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$ e quaisquer números reais a e b.

(vi) $1\vec{u}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(vii) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e qualquer número real a.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(iii) Para qualquer vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(v) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$ e quaisquer números reais a e b.

(vi) $1\vec{u}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

(vii) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e qualquer número real a.

(viii) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$ e quaisquer números reais a e b.

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\dfrac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\dfrac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \qquad \Leftrightarrow$$

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\dfrac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad 4\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow$$

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad 4\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\vec{w}+\vec{w}=2\vec{u}-4\vec{u}+4\vec{v} \quad \Leftrightarrow$$

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad 4\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\vec{w}+\vec{w}=2\vec{u}-4\vec{u}+4\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\vec{w}=4\vec{v}-2\vec{u} \quad \Leftrightarrow$$

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad 4\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\vec{w}+\vec{w}=2\vec{u}-4\vec{u}+4\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\vec{w}=4\vec{v}-2\vec{u} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{w}=\frac{3}{4}(4\vec{v}-2\vec{u}) \quad \Leftrightarrow$$

EXEMPLO

Sabendo que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$ determine o vetor $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

$$4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad\Leftrightarrow\quad 4\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\vec{w}+\vec{w}=2\vec{u}-4\vec{u}+4\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3}\vec{w}=4\vec{v}-2\vec{u} \quad\Leftrightarrow$$

$$\vec{w}=\frac{3}{4}(4\vec{v}-2\vec{u}) \quad\Leftrightarrow\quad \vec{w}=3\vec{v}-\frac{3}{2}\vec{u}$$

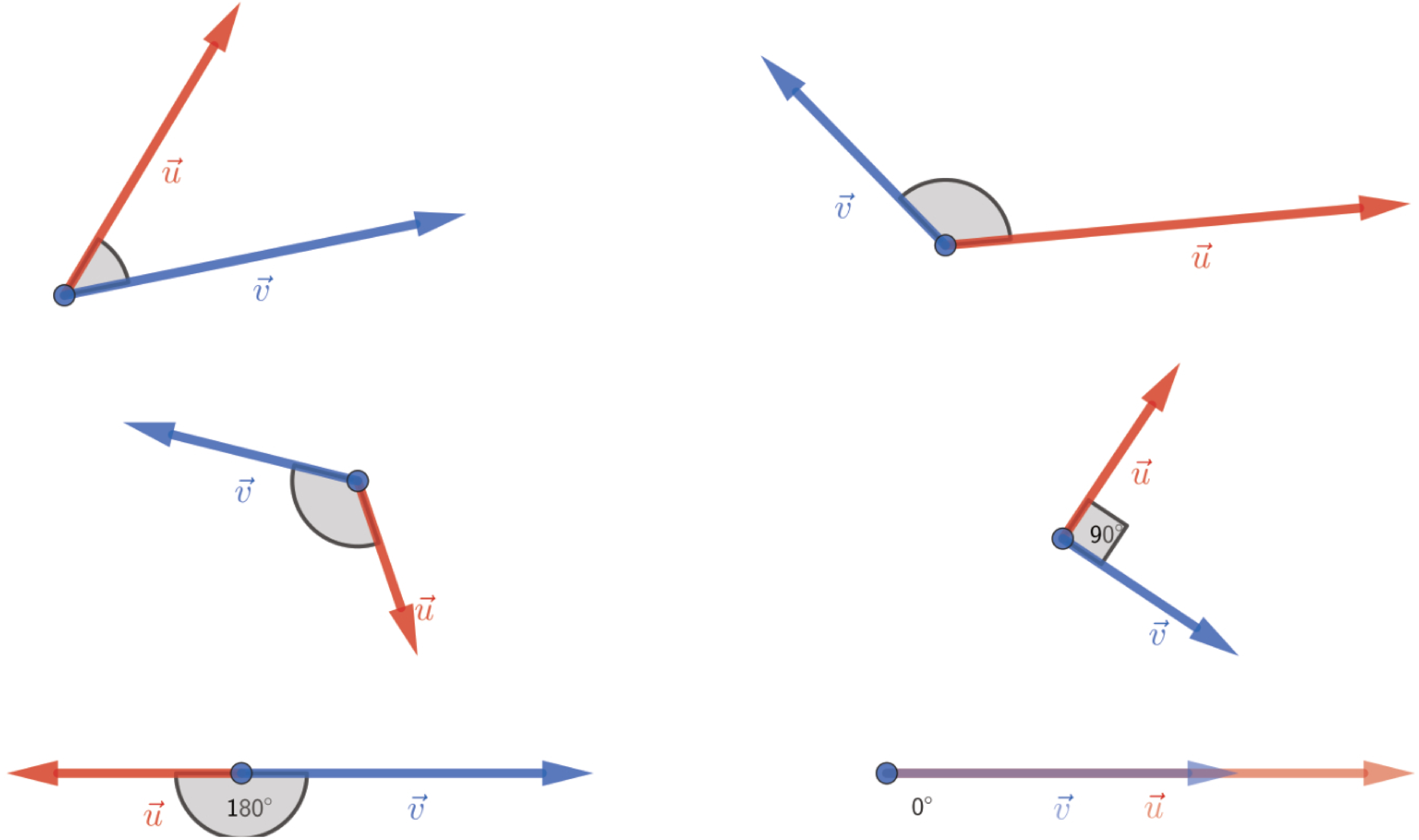
ÂNGULO ENTRE VETORES

ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo obtido ao se desenhar os dois vetores com a mesma origem.

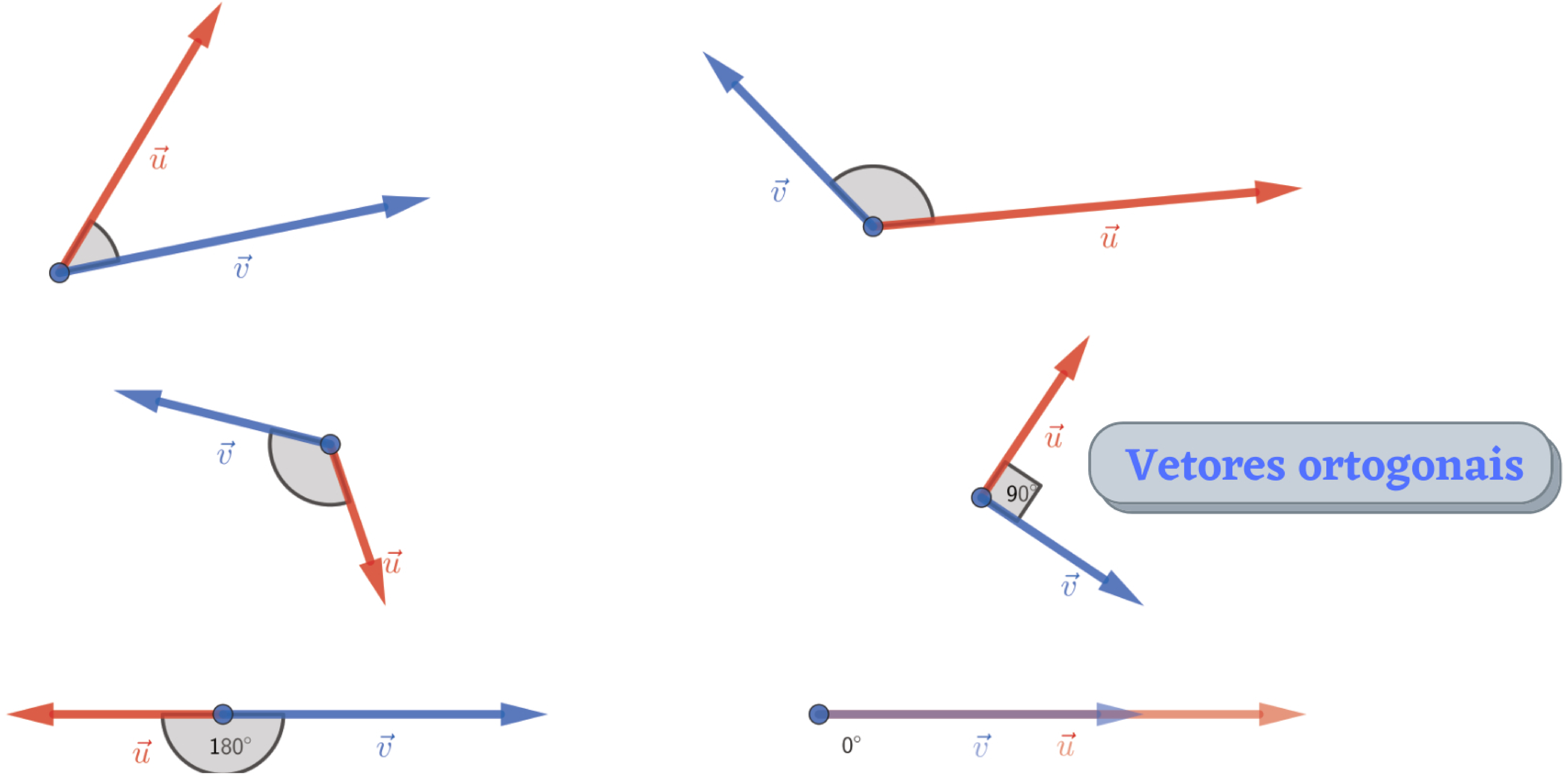
ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo obtido ao se desenhar os dois vetores com a mesma origem.



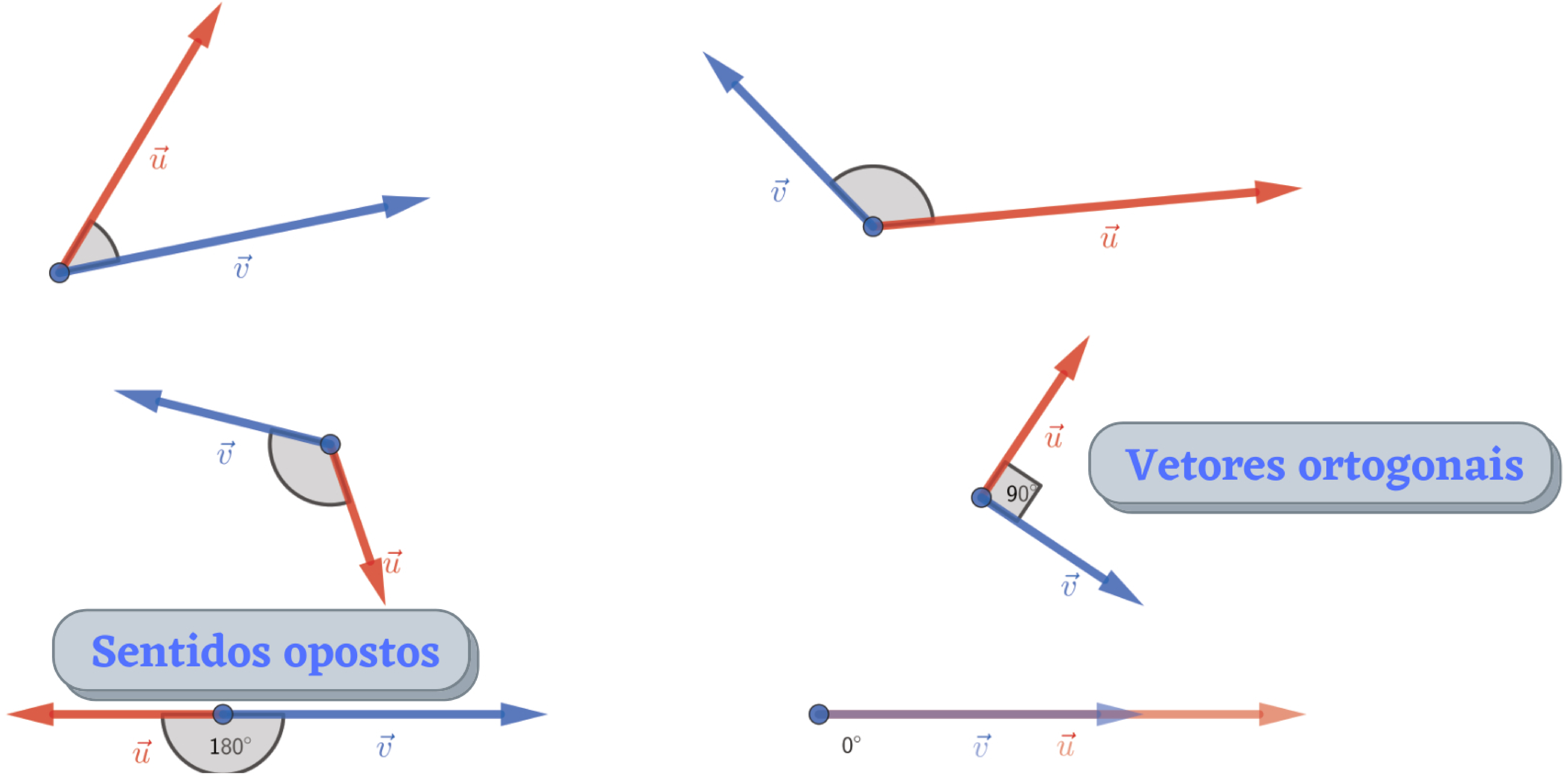
ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo obtido ao se desenhar os dois vetores com a mesma origem.



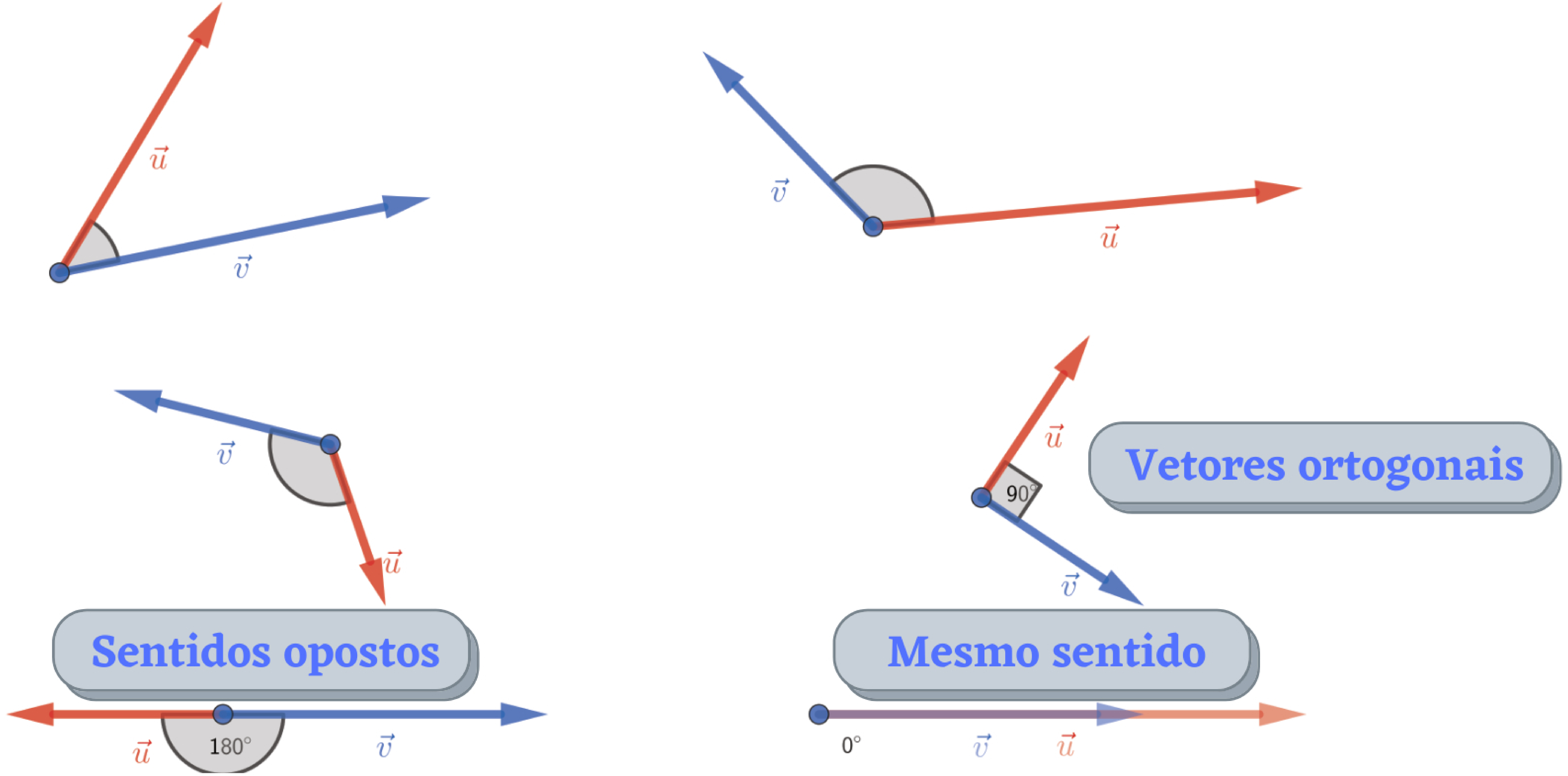
ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo obtido ao se desenhar os dois vetores com a mesma origem.



ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo obtido ao se desenhar os dois vetores com a mesma origem.



ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores está varia de 0 a 180 graus. Na maioria das vezes, usaremos radianos ao invés de graus.

Ângulo entre vetores

O ângulo entre dois vetores está varia de 0 a 180 graus. Na maioria das vezes, usaremos radianos ao invés de graus.

Não se define o ângulo quando um dos vetores é o vetor nulo.

ÂNGULO ENTRE VETORES

O ângulo entre dois vetores está varia de 0 a 180 graus. Na maioria das vezes, usaremos radianos ao invés de graus.

Não se define o ângulo quando um dos vetores é o vetor nulo.

Por convenção, o vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer outro vetor.

ÂNGULO ENTRE VETORES

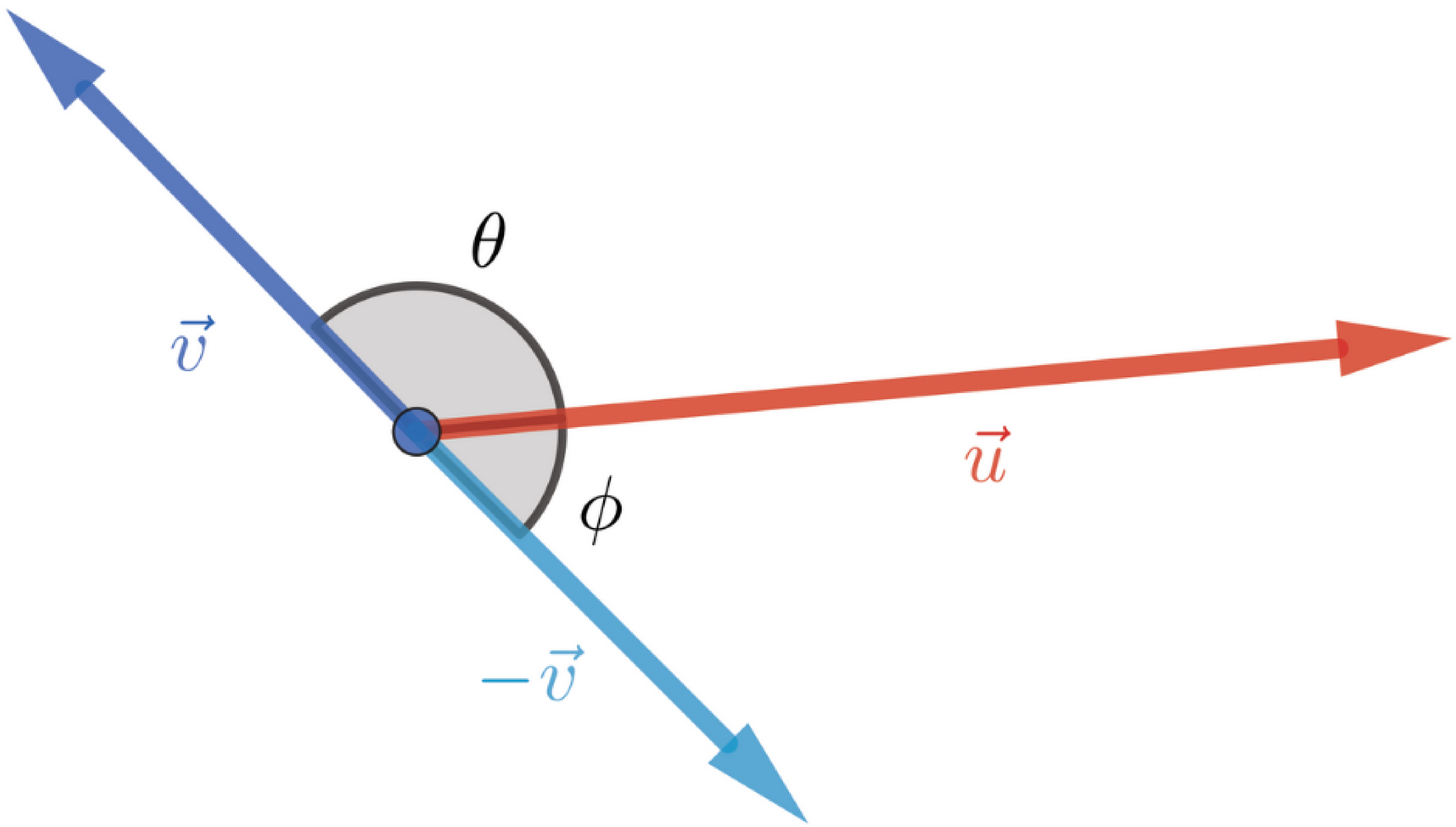
O ângulo entre dois vetores está varia de 0 a 180 graus. Na maioria das vezes, usaremos radianos ao invés de graus.

Não se define o ângulo quando um dos vetores é o vetor nulo.

Por convenção, o vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer outro vetor.

Essa convenção pode variar entre livros.

ÂNGULO ENTRE VETORES



Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$: θ

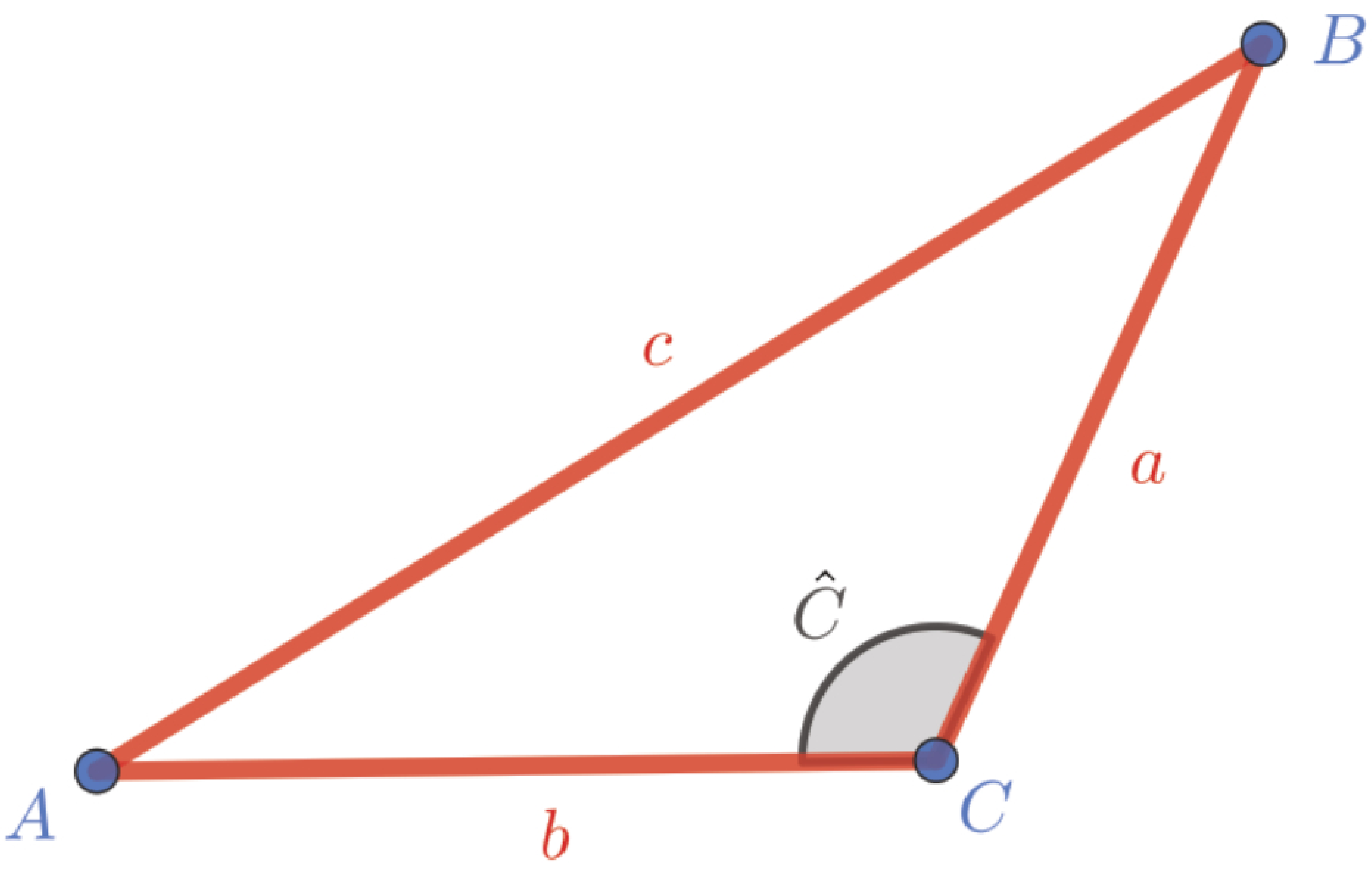
Ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$: ϕ

Então $\theta + \phi = 180°$

MÓDULO DA SOMA DE VETORES

MÓDULO DA SOMA DE VETORES

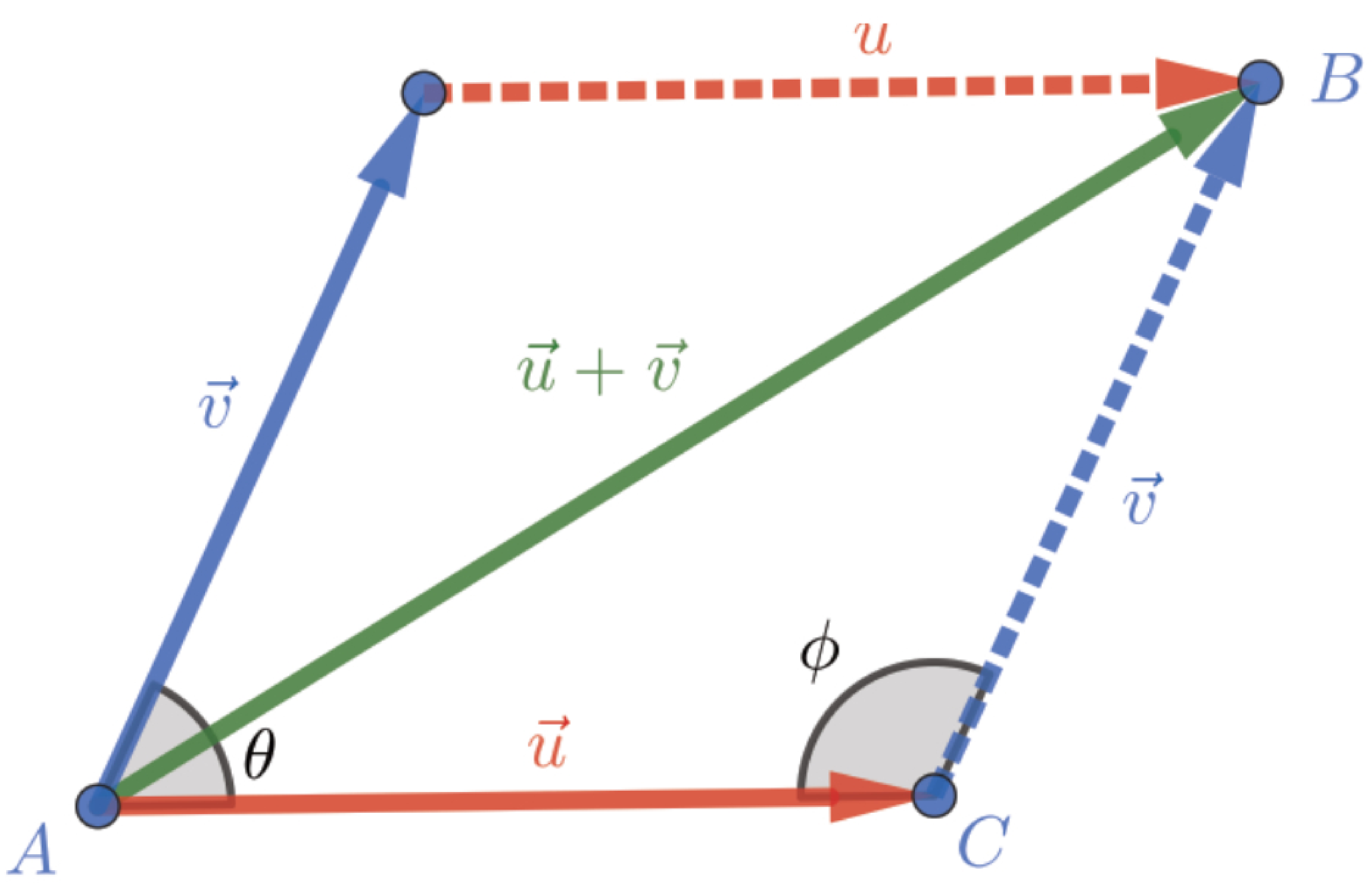
Lei dos cossenos



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

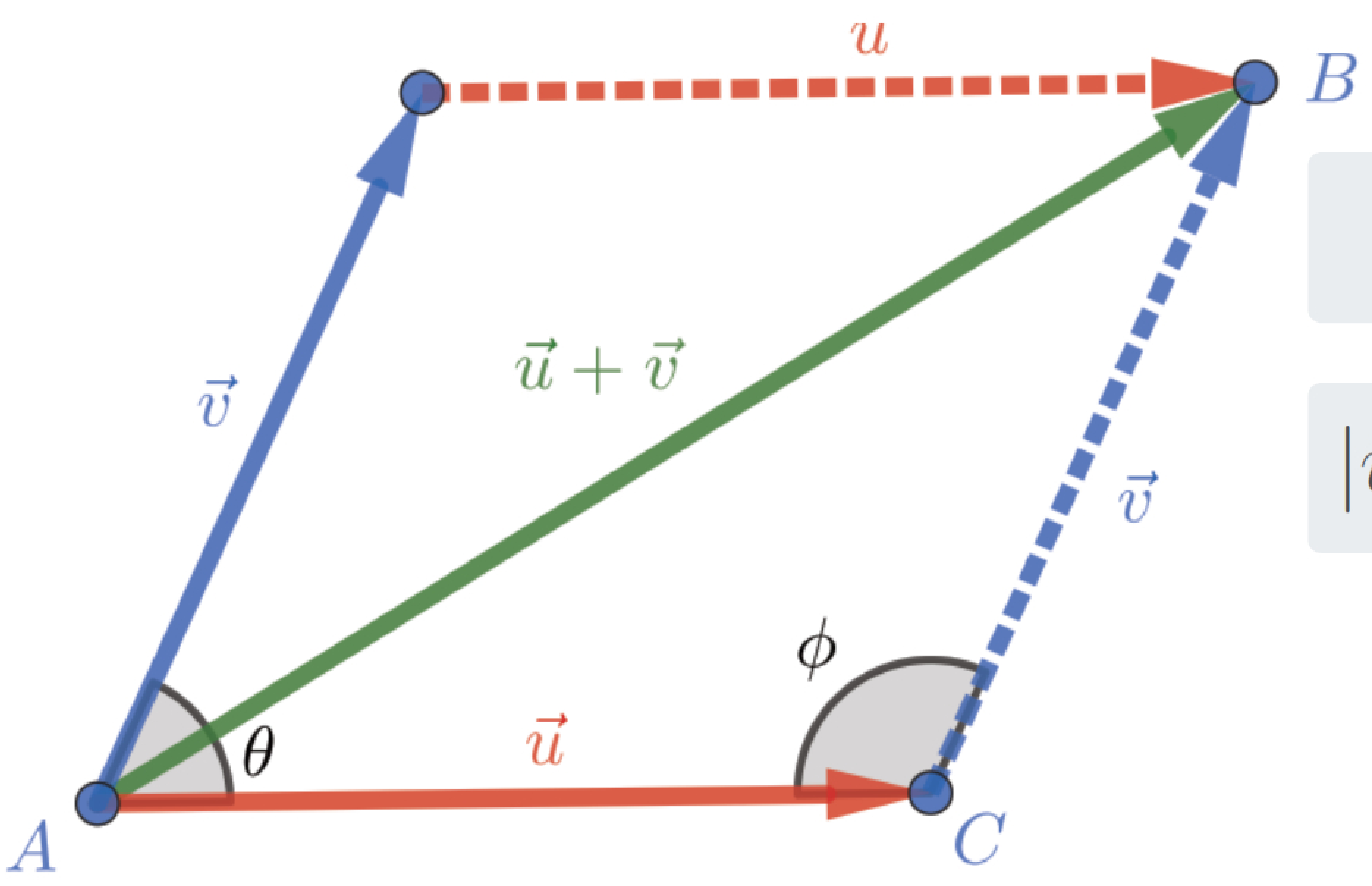
MÓDULO DA SOMA DE VETORES

Lei dos cossenos adaptada para vetores



MÓDULO DA SOMA DE VETORES

Lei dos cossenos adaptada para vetores

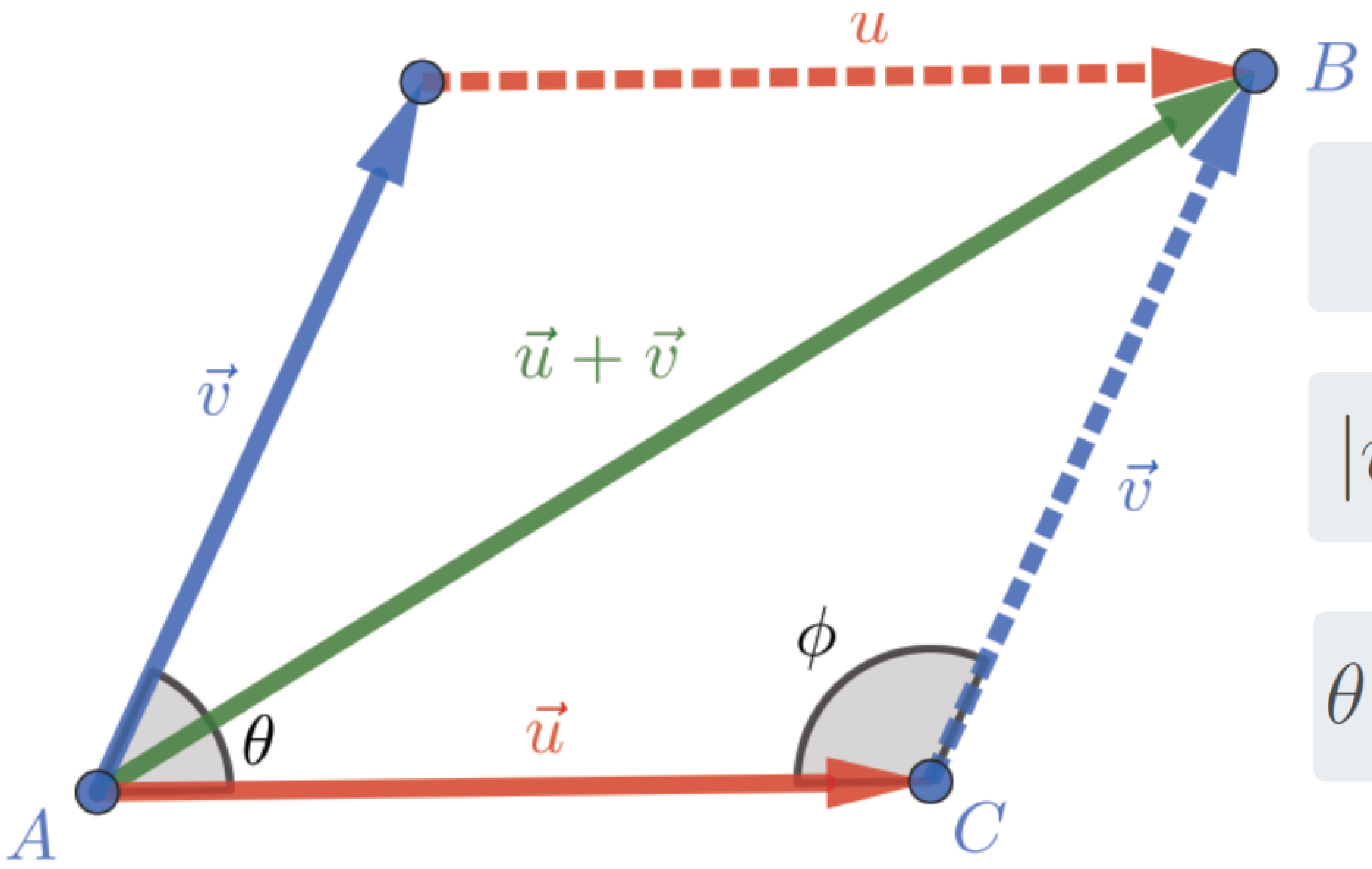


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\phi$$

MÓDULO DA SOMA DE VETORES

Lei dos cossenos adaptada para vetores



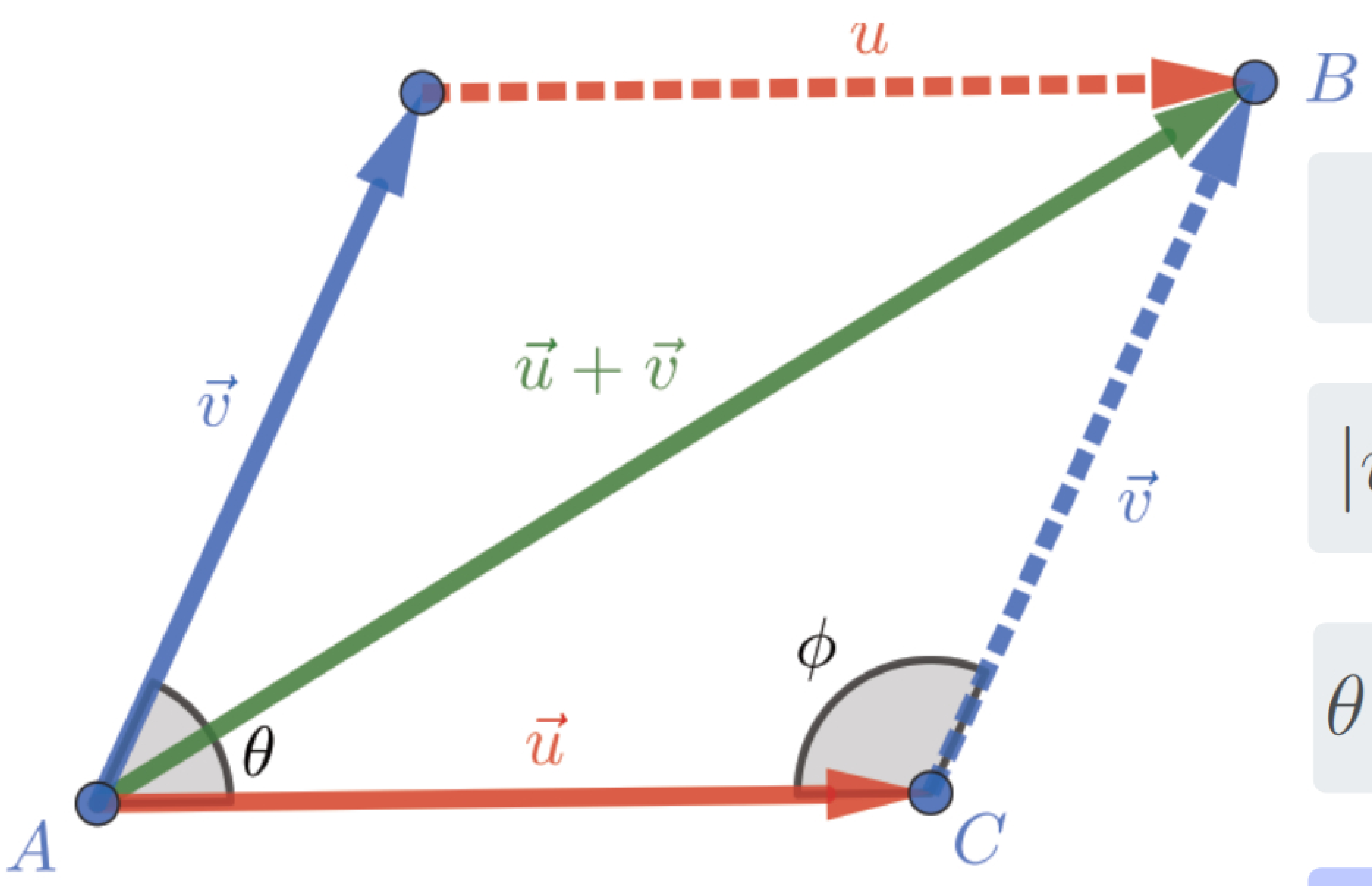
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\phi$$

$$\theta + \phi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\cos\phi$$

MÓDULO DA SOMA DE VETORES

Lei dos cossenos adaptada para vetores



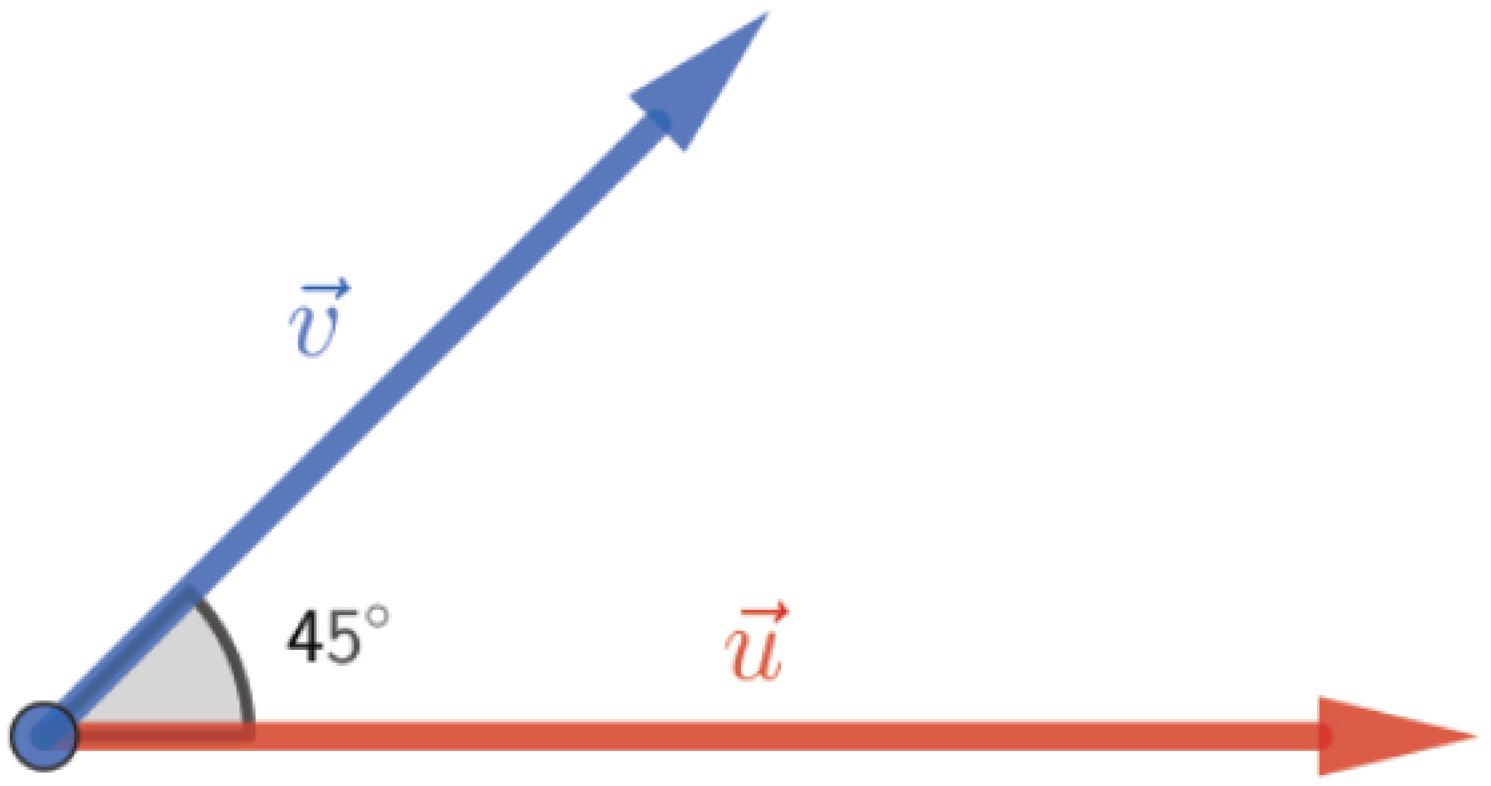
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\phi$$

$$\theta + \phi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\cos\phi$$

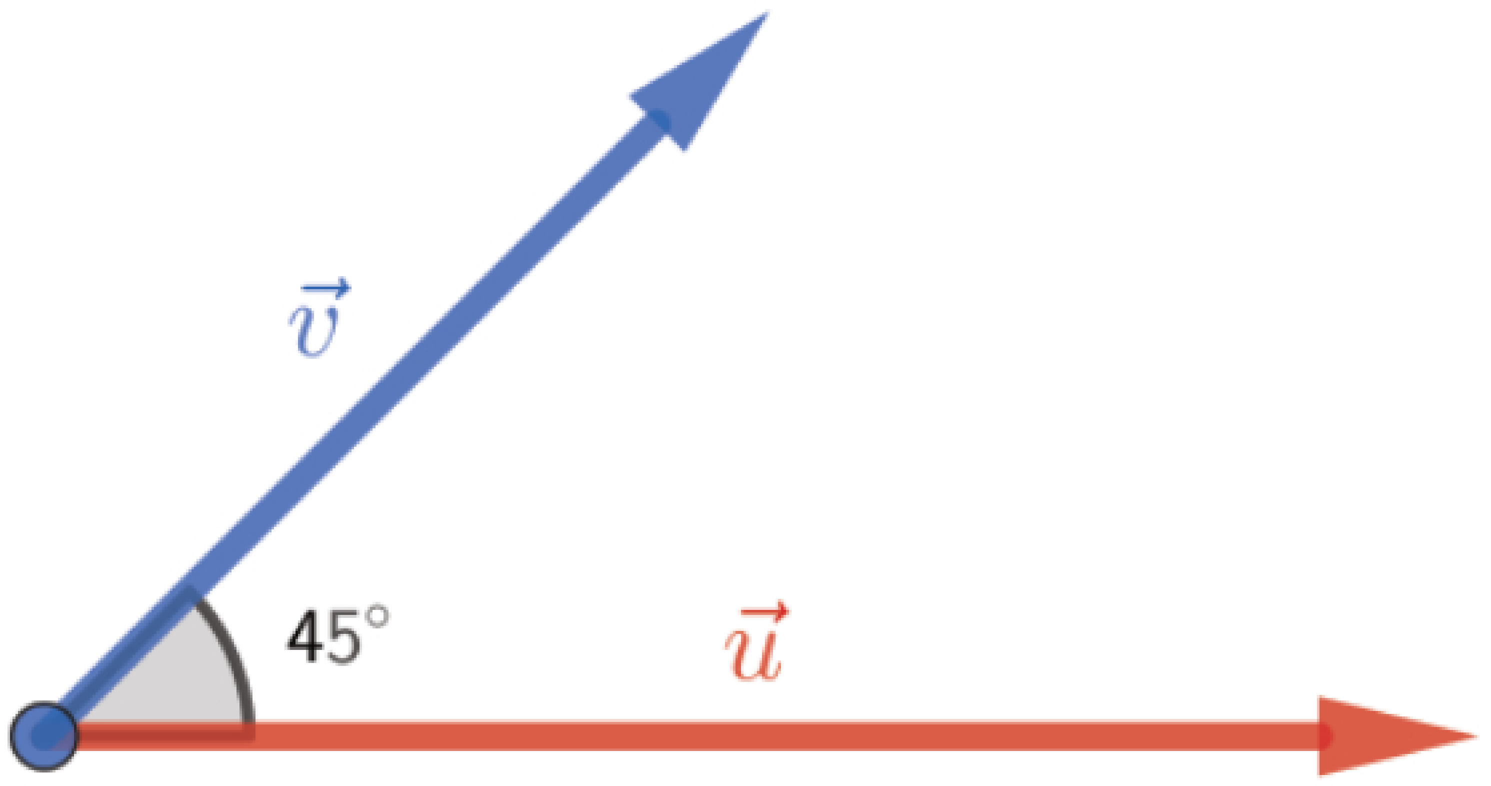
$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

EXEMPLO



$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u} + \vec{v}| = ?$$

EXEMPLO

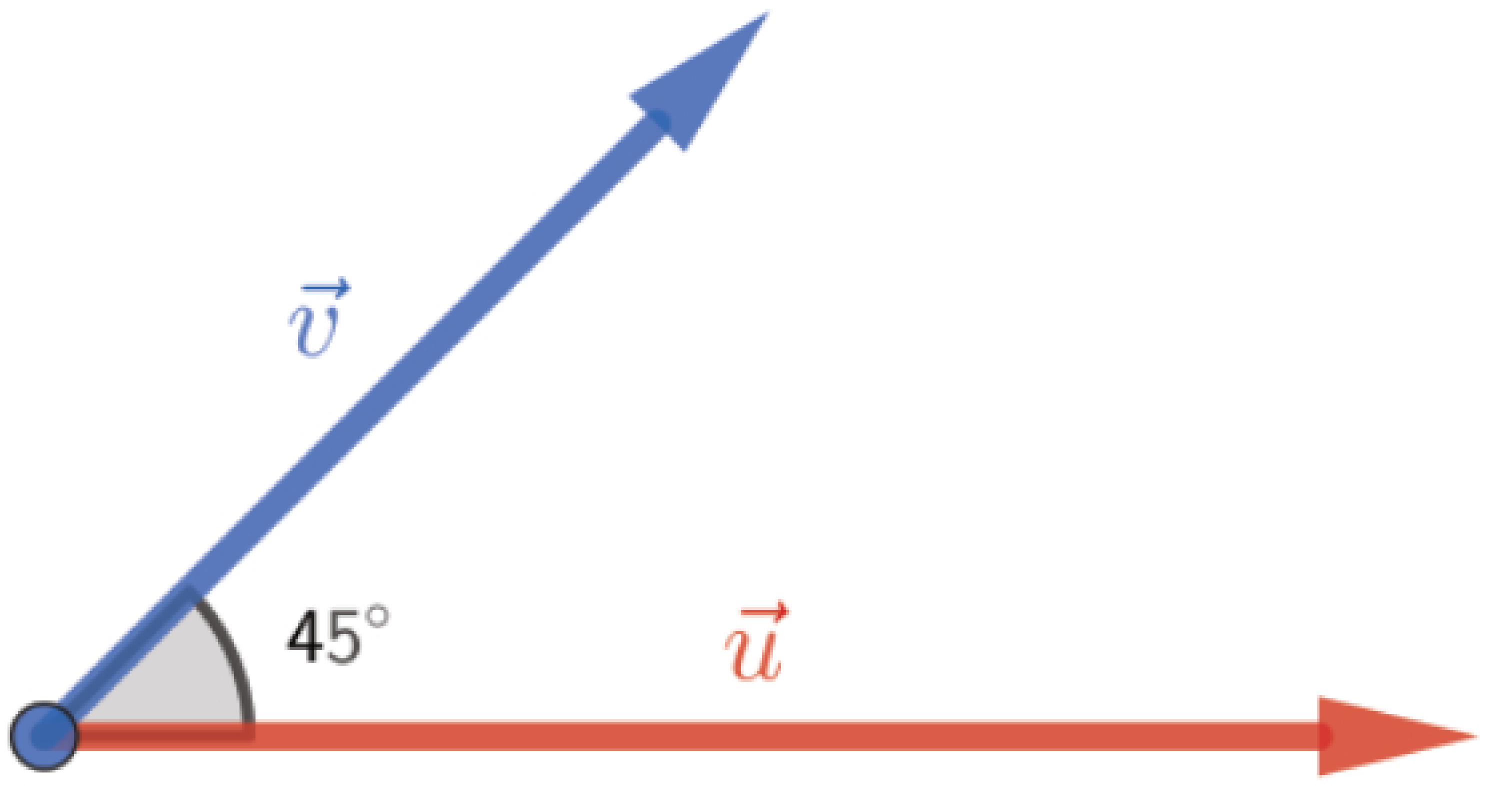


$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = ?$$

Solução

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

EXEMPLO



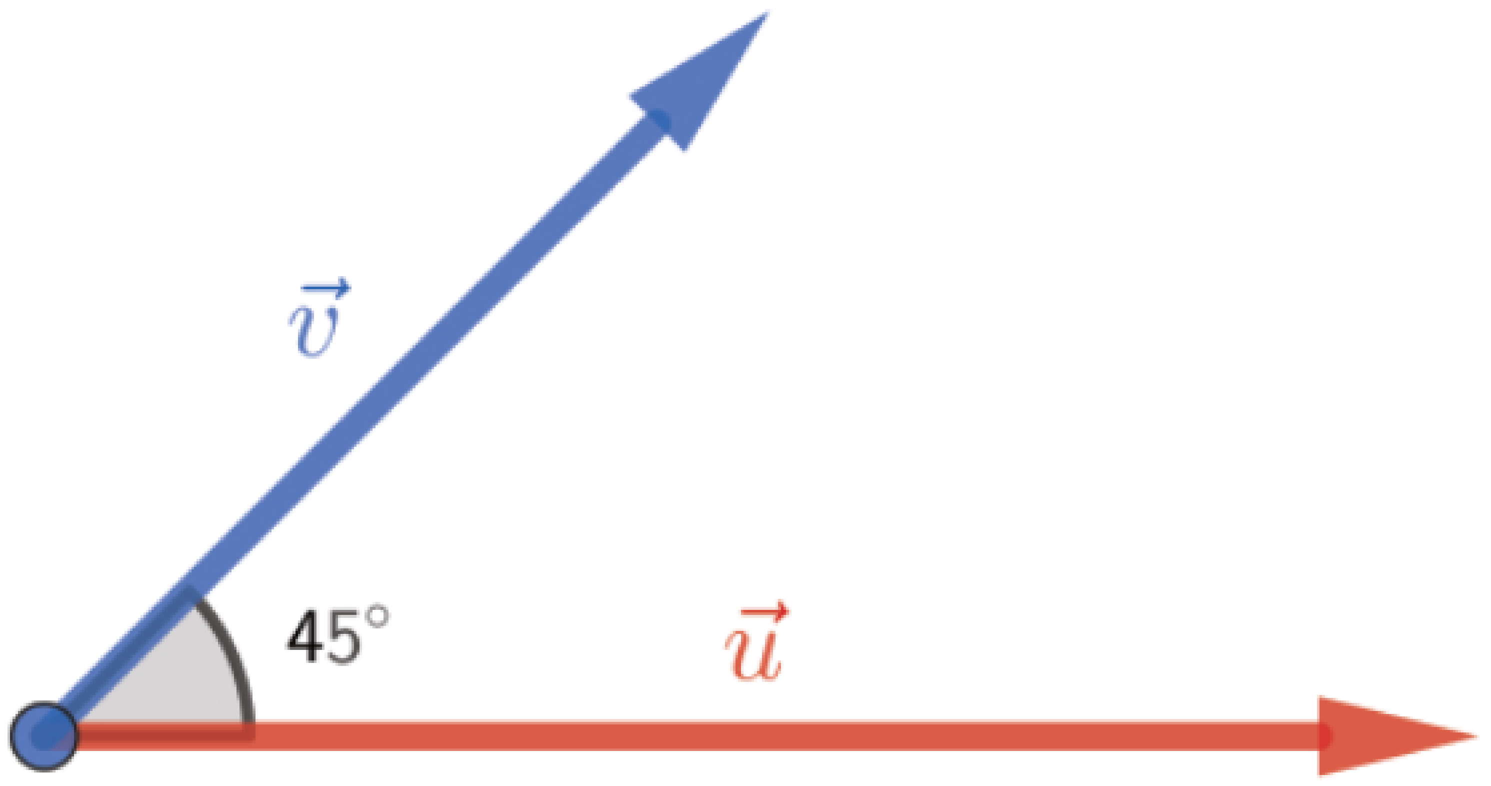
$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = ?$$

Solução

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cos 45^\circ$$

EXEMPLO



$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \,?$$

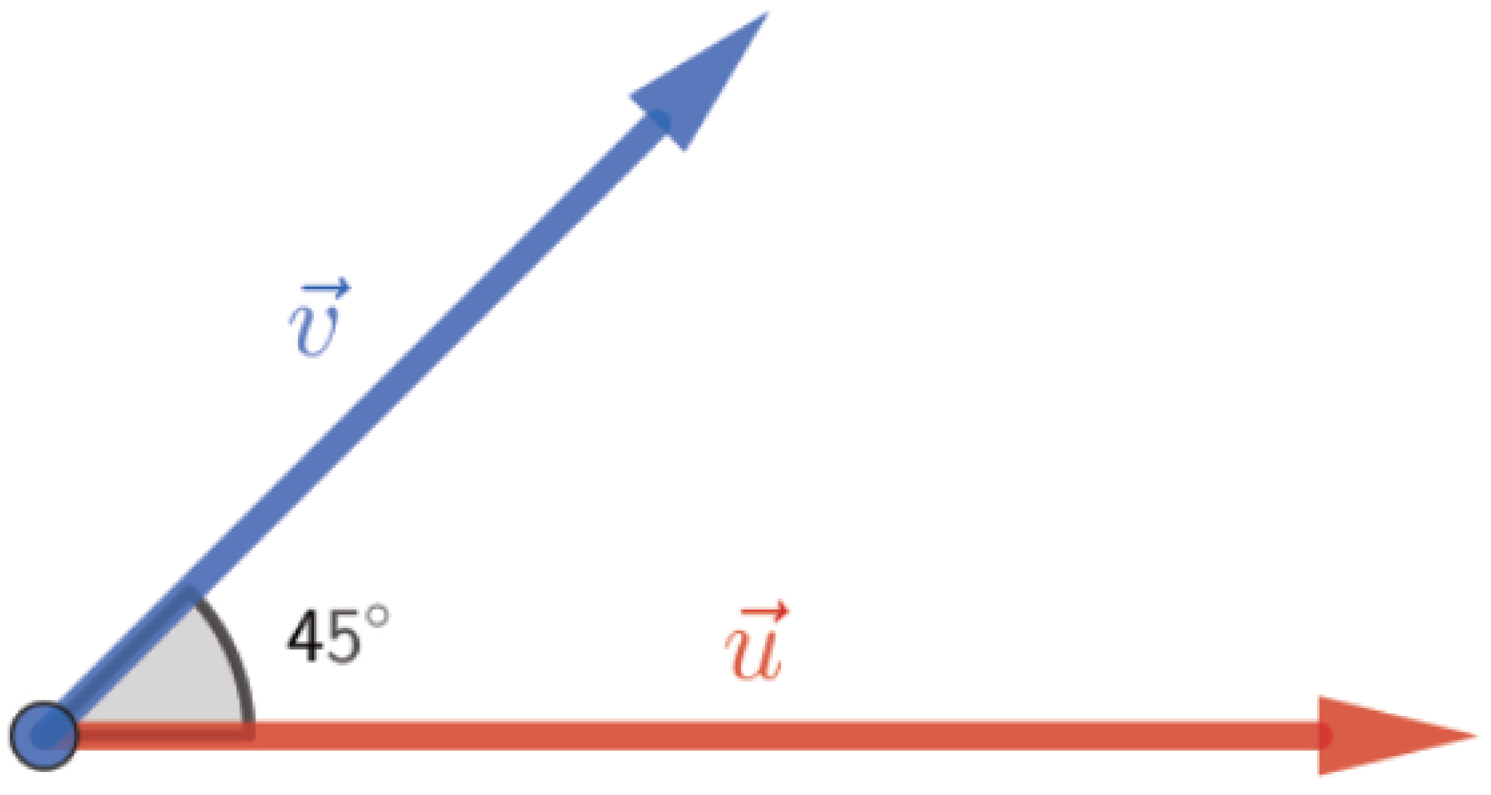
Solução

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cos 45^\circ$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 49 + 25 + 70\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXEMPLO



$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \,?$$

Solução

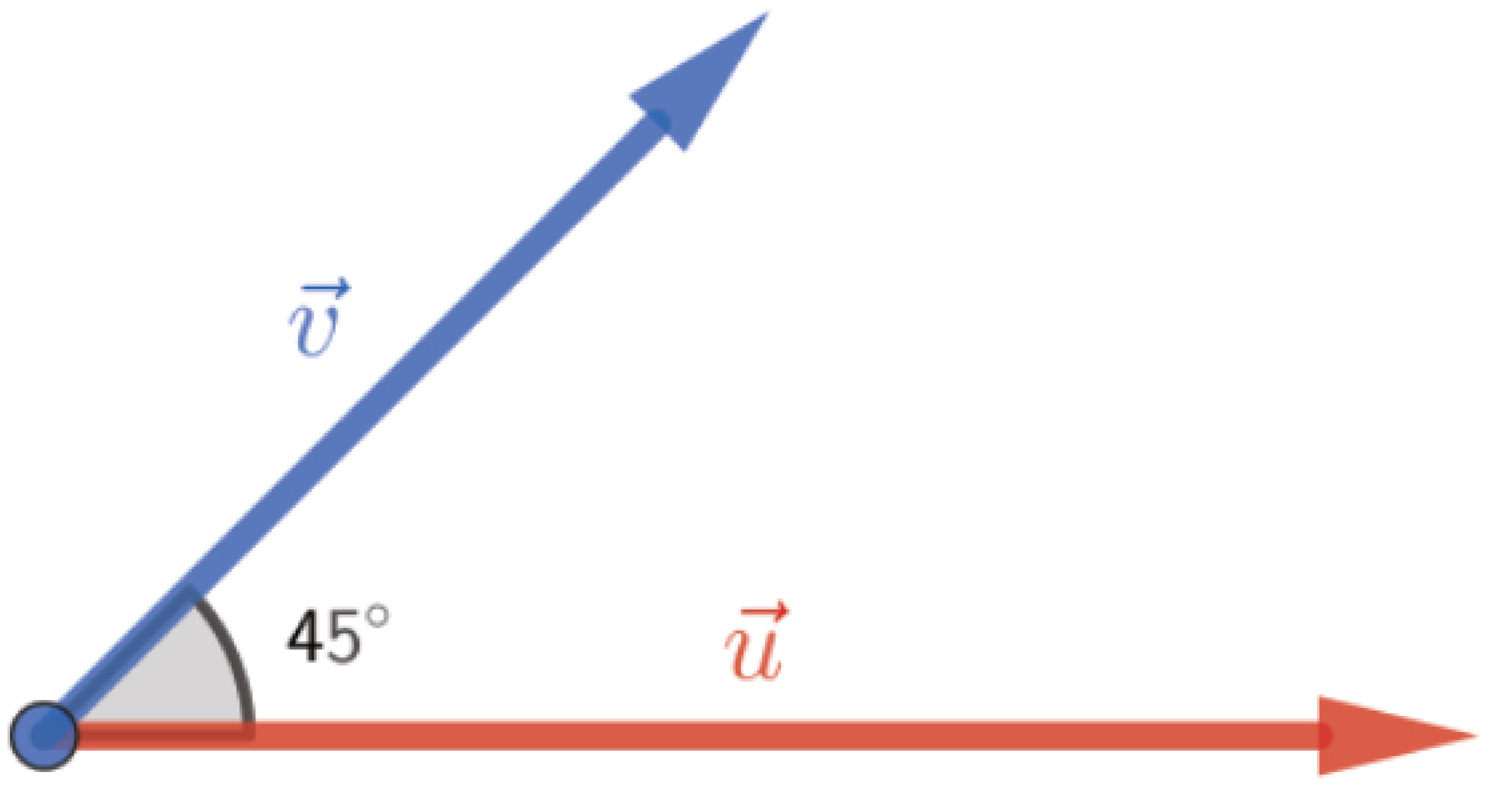
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cos 45^\circ$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 49 + 25 + 70\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 74 + 35\sqrt{2}$$

EXEMPLO



$$|\vec{u}| = 7, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \,?$$

Solução

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

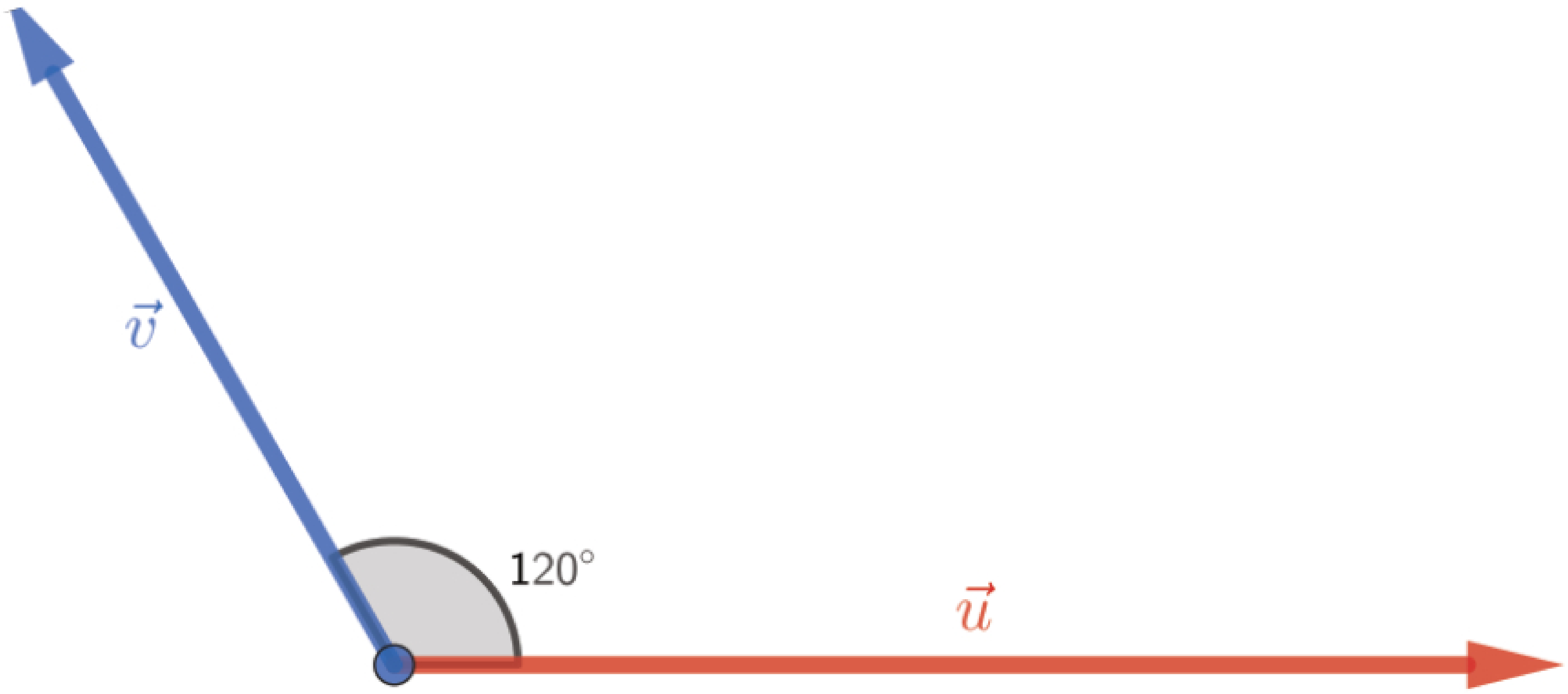
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cos 45^\circ$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 49 + 25 + 70\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 74 + 35\sqrt{2}$$

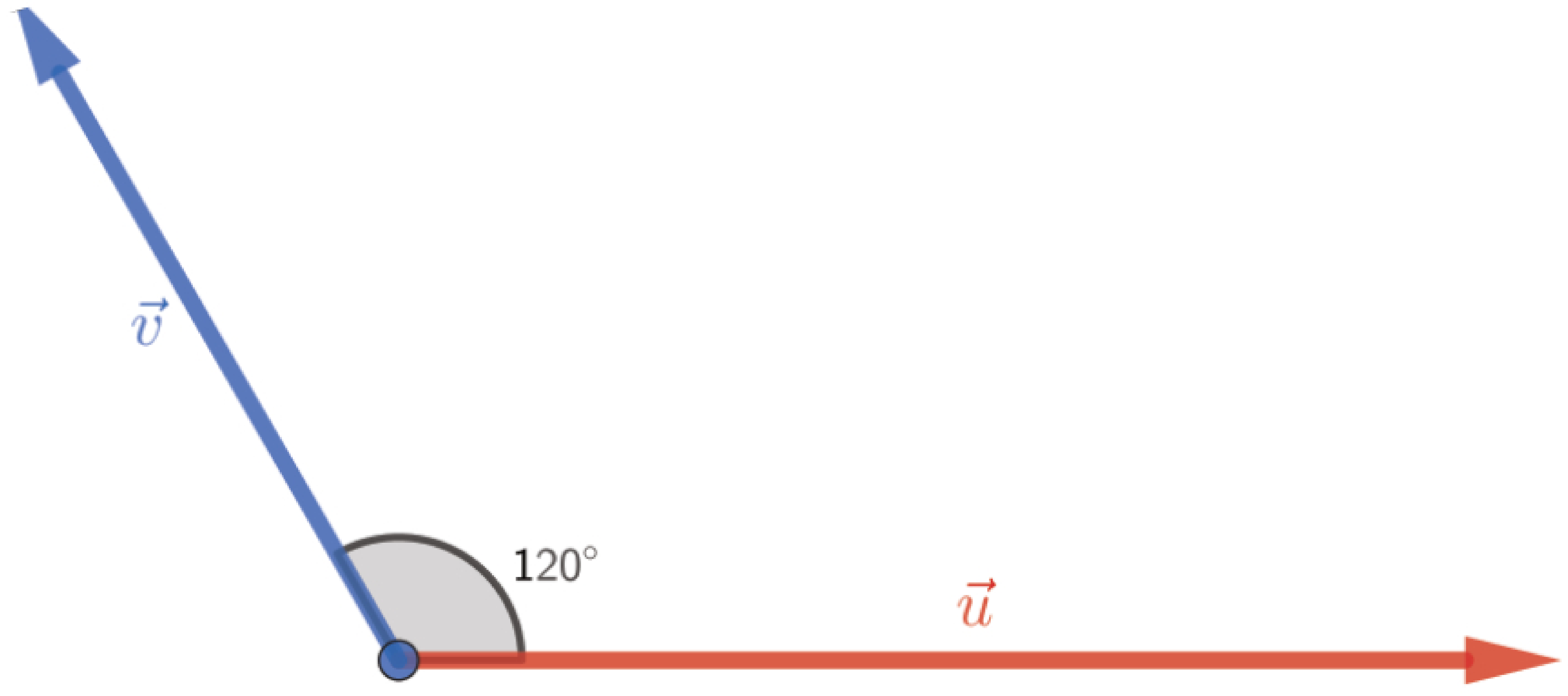
$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{74+35\sqrt{2}}$$

EXERCÍCIO



$$|\vec{u}| = 3, \quad |\vec{v}| = 2, \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \,?$$

EXERCÍCIO



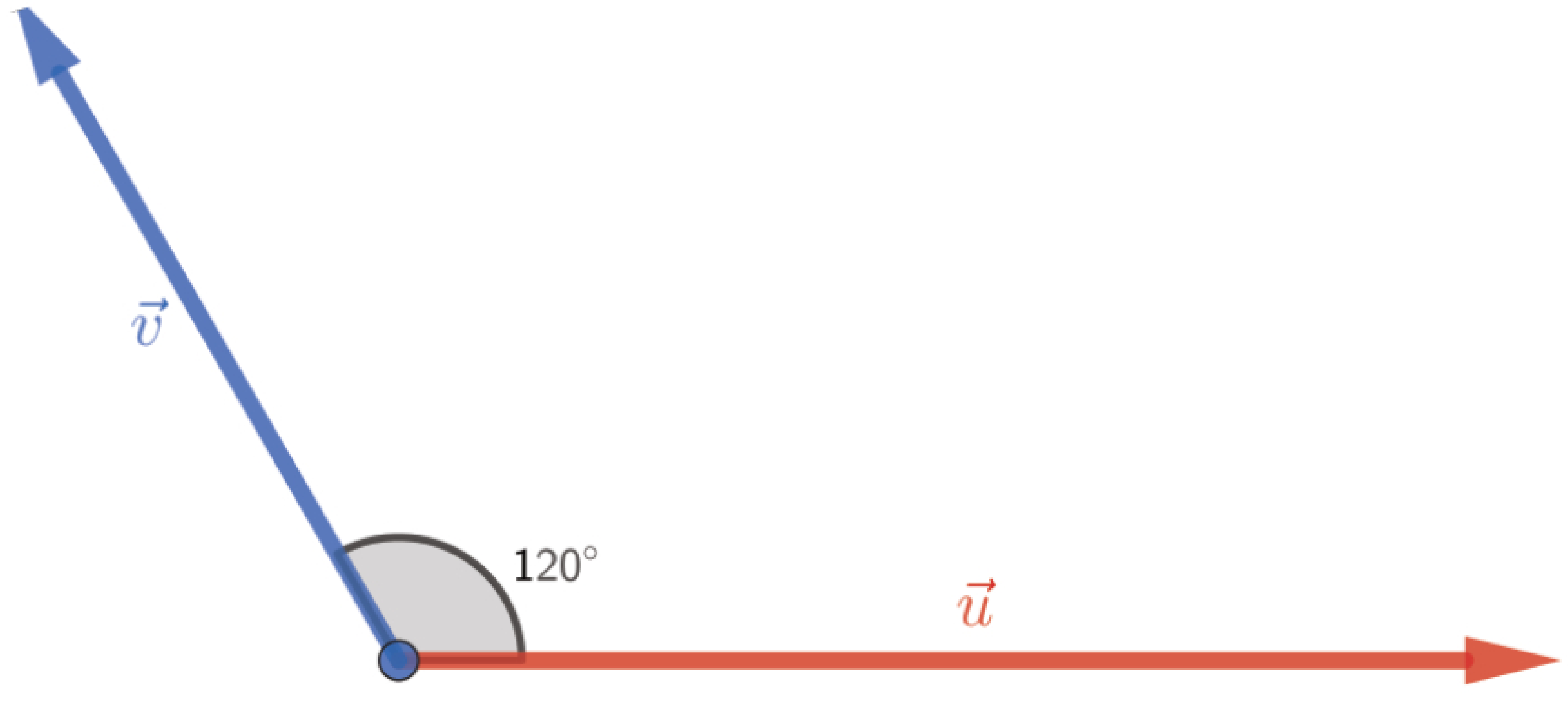
$$|\vec{u}| = 3, \quad |\vec{v}| = 2, \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \,?$$

Solução

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\cos 120°$$

EXERCÍCIO



$$|\vec{u}| = 3, \quad |\vec{v}| = 2, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \,?$$

Solução

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 3^2 + 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cos 120^\circ$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 9 + 4 + 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 13 - 6$$

$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{7}$$

Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.