MODELOS TEÓRICOS DISCRETOS

Prof. José Fletes
U F S C

Introdução

Modelos discretos:

- Bernoulli e Binomial;
- Poisson;
- Aproximação da Binomial pela Poisson.

Outros Modelos discretos:

- Geométrica e Binomial Negativa
- Hipergeométrica

Modelo Bernoulli

- **$\mathcal{E}a$: observação da ocorrência numa situação dicotômica (BINÁRIA)**

S (Sucesso) → X = 1 → P(X=1) = *p*

ou

S' (Insucesso) → X = 0 → P(X=0) = *q* = *1-p*

Modelo Bernoulli

- **$\mathcal{E}a$:** observação da ocorrência numa situação dicotômica (BINÁRIA)

X = 1 se ocorre SUCESSO ..... (S)
X = 0 se ocorre INSUCESSO ..... (S')

P (X =1) = p e P (X = 0) = $1 - p = q$

Exemplos: lançamento da moeda uma única vez.
lançamento do dado uma única vez.

Modelo Bernoulli

- Considere uma prova Bernoulli

- Observe que a soma das probabilidades é igual à unidade:
  eventos excludentes
  $(p + q) = 1$

Evento	**Variável X**	**Prob. P(X=x)**
S	X=1	*p*
S’	X=0	*q*
TOTAL	---	*p+q = 1*

Modelo Bernoulli

- Modelo Matemático

$$P(X = x) = p^{x} * (1 - p)^{1 - x}$$

COMPROVAÇÃO:

$$P(X = 1) = p^{1} * (1 - p)^{1 - 1} = p$$

$$P(X = 0) = p^{0} * (1 - p)^{1 - 0} = q$$

Modelo Bernoulli

Propriedades:

1- O valor esperado da distribuição bernoulli é:

$$E(X) = p$$

2-A variância é:

$$V(X) = p^* (1 - p) = p^*q$$

Demonstração: próximo slide.

Modelo Bernoulli

Evento	X	p(x)	x*p(x)	$(x-p)^2 * p(x)$
S	1	p	1*p	$(1-p)^2 * p$
S’	0	q	0*q	$(0-p)^2 * q$
SOMA	---	1	p	$q^2 * p + p^2 * q$

$pq(q+p) = \mathbf{p * q}$

Modelo Binomial

- **Ɛa:** número de sucessos que ocorrem em **n** experiências tipo Bernoulli.

  Y = {**nº de <u>sucessos</u>** em **n provas** tipo Bernoulli}

- $$Y = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ldots;\ n\} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

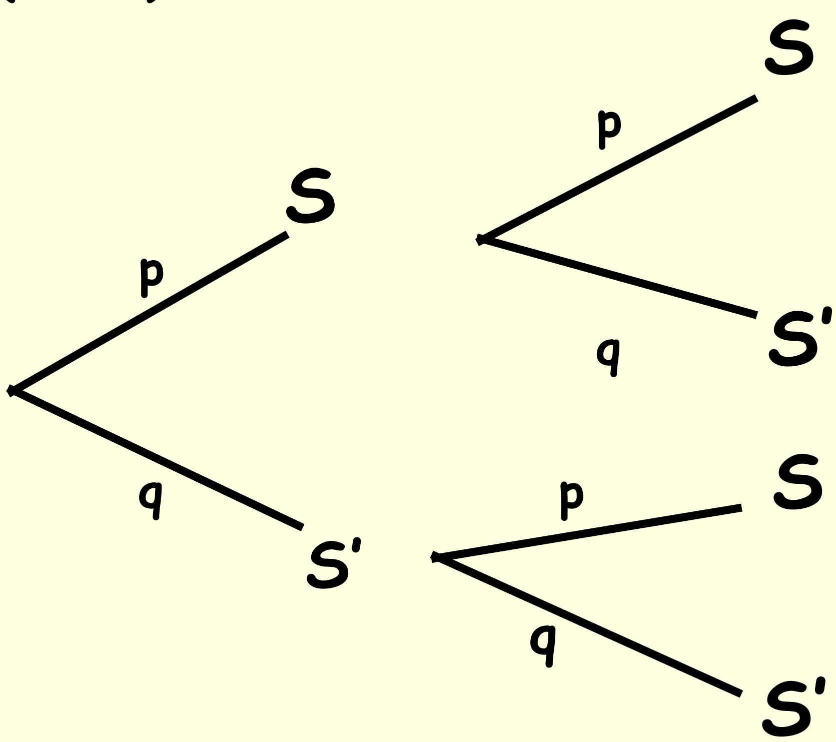
  Isto é, a variável Y representa a SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES, IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS

- onde cada X_i é binário (0; 1)

Modelo Binomial

- $\mathcal{E}a$: observação da ocorrência em **n=2** provas tipo Bernoulli

($X_1;X_2$)



	Eventos	Variáveis	Prob.
S →	$S \cap S$ →	(1;1) →	$p*p=p^2$
S' →	$S \cap S'$ →	(1;0) →	$p*q=pq$
S →	$S' \cap S$ →	(0;1) →	$q*p=pq$
S' →	$S' \cap S'$ →	(0;0) →	$q*q=q^2$

Modelo Binomial

- Considere duas provas Bernoulli: n=2

- Observe que a soma das probabilidades sendo igual à unidade reproduz o binômio:

$(p + q)^2 = p^2 + 2*\mathbf{pq} + q^2$

Evento	**Variável** $Y=X_1+X_2$	**Prob.**
$(\mathbf{S} \cap \mathbf{S})$	$Y=1+1=2$	$p*p = p^2$
$(\mathbf{S} \cap \mathbf{S'})$	$Y=1+0=1$	$p*q=\mathbf{pq}$
$(\mathbf{S'} \cap \mathbf{S})$	$Y=0+1=1$	$q*p=\mathbf{pq}$
$(\mathbf{S'} \cap \mathbf{S'})$	$Y=0+0=0$	$q*q=q^2$

Modelo Binomial

- Cada termo do binômio representa a probabilidade de um determinado número de sucessos e pode ser calculada utilizando a expressão abaixo que define a função massa de probabilidade, **p(y)**:
- **P(Y=y) = p(y) =** $\binom{n}{y} * p^y * q^{(n-y)}$

Modelo Binomial

- A função massa de probabilidade binomial dá a probabilidade para um número exato de "sucessos" em **n** ensaios independentes, onde a probabilidade de sucesso **p** em uma única tentativa é constante.

$$P(Y=y) = \mathbf{p(y)} = \binom{n}{y} * p^{y} * q^{(n-y)}$$

em que: $\binom{n}{y} = n!/[y!*(n-y)!]$

Modelo Binomial

Propriedades:

1- O valor esperado da distribuição binomial é:

$$E(Y) = n*p$$

2-A variância é:

$$V(Y) = n*p*(1-p) = n*p*q$$

Obs. Importante:

*Parâmetros característicos do Modelo Binomial → **n** e **p***

Problema 1

Suponha que 25% de todos os motoristas habilitados de SC não possuam seguro. Em uma amostra aleatória de 50 motoristas, qual a probabilidade de **no máximo 10** não terem seguro?

Modelo-Base: **Bernoulli** --> **X** = {ter seguro} = 1 -> p=0,25

Dados:

n = 50; p=0,25 $\rightarrow Y = \Sigma X_i$

Aplicando **Binomial**:

$P(Y \leq 10) = \Sigma P(Y= y)$

$= P(Y=0) + P(Y=1) + ... + P(Y=5) + ...+ P(Y=10)$

$= 0,000001+0,000009+......+0,004938+.......+ 0,098518$

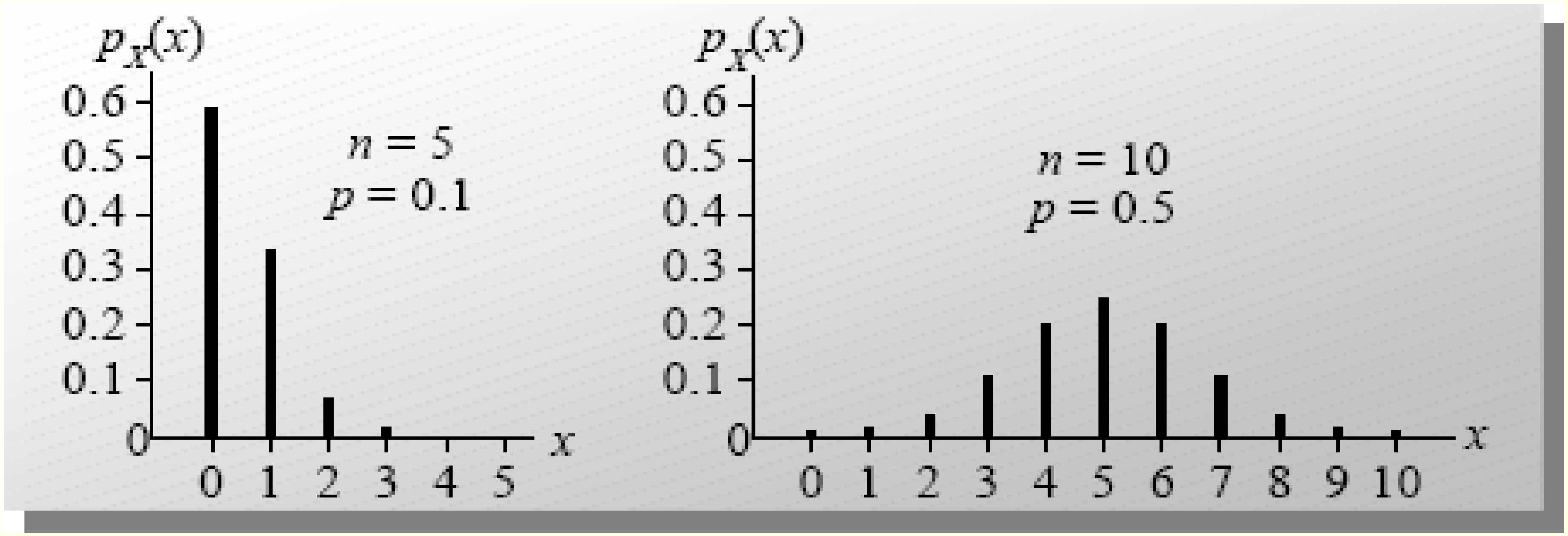
$= \mathbf{0,2622}$

(Veja tabela no próximo slide onde com os cálculos realizados no Excel aplicando a função: **DISTR.BINOM**)

Problema 1 – Cálculos

y	P(y)
0	0,000001
1	0,000009
2	0,000077
3	0,000411
4	0,001610
5	0,004938
6	0,012345
7	0,025865
8	0,046341
9	0,072087
10	0,098518
Total	**0,262202**

Modelo Binomial - Simulações

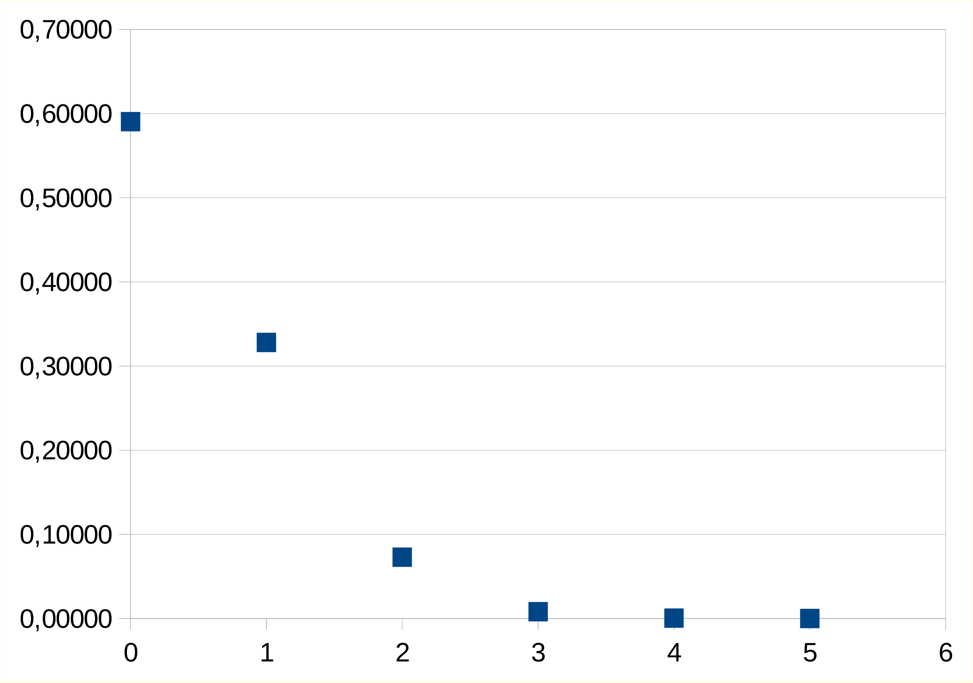


Nas figuras acima, simulam-se duas situações que nos permite concluir que:

- a distribuição binomial é <u>assimétrica</u> quando ***p*** se aproxima de 0 ou 1 e <u>simétrica</u> quando ***p*** *=0,5*. (Os slides a seguir mostram a visualização)

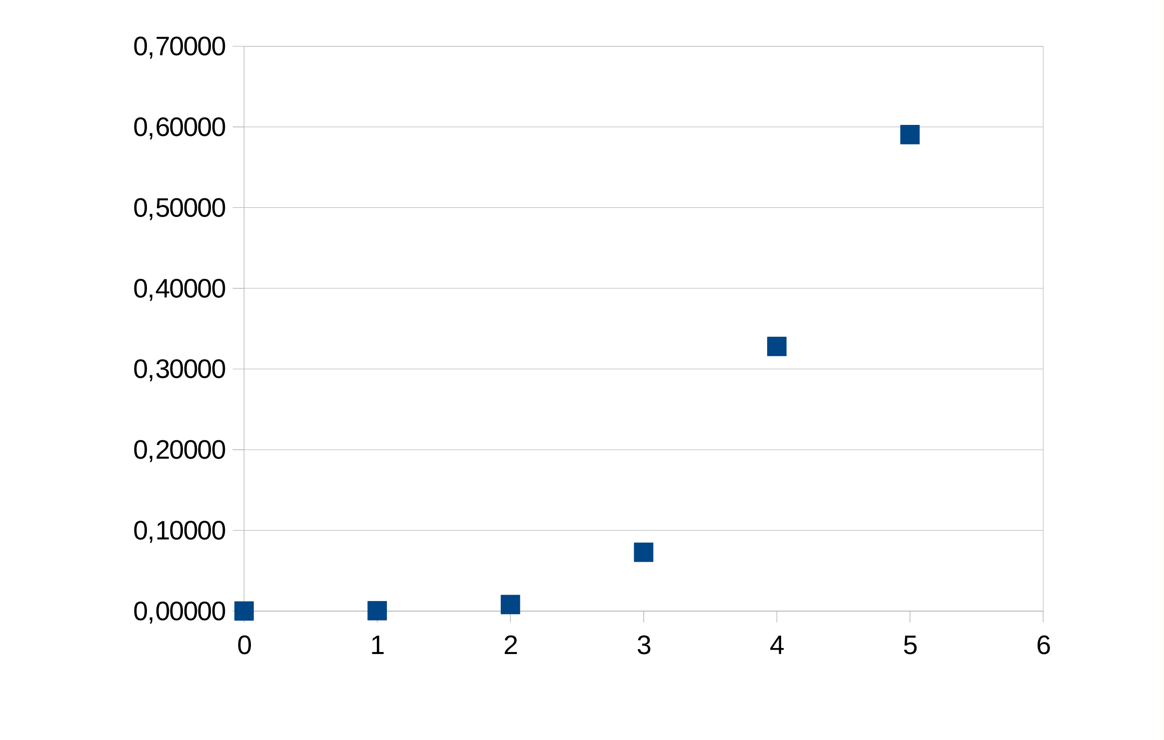
Modelo Binomial – Simulações n = 5 e p=0,1

x	p(x)
0	0,59049
1	0,32805
2	0,07290
3	0,00810
4	0,00045
5	0,00001
soma	1,00



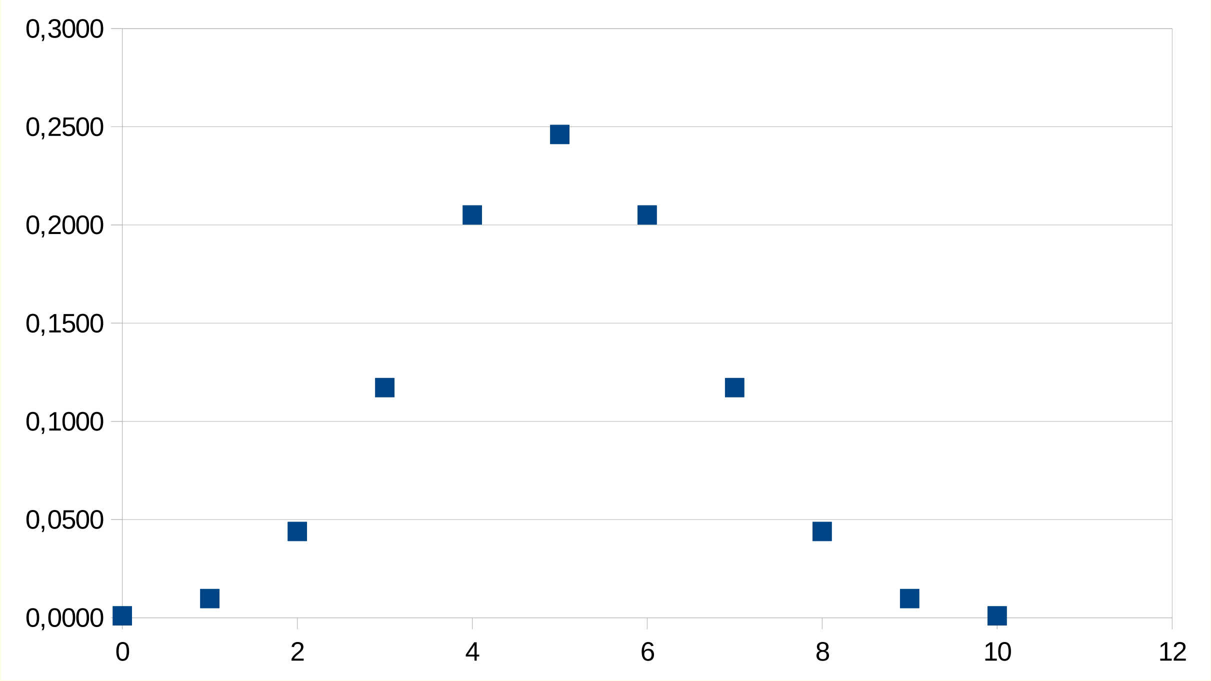
Modelo Binomial – Simulações n = 5 e p=0,9

x	p(x)
0	0,00001
1	0,00045
2	0,00810
3	0,07290
4	0,32805
5	0,59049
soma	**1,00**



Modelo Binomial – Simulações
n = 10 e p=0,5

x	p(x)
0	0,0010
1	0,0098
2	0,0439
3	0,1172
4	0,2051
5	0,2461
6	0,2051
7	0,1172
8	0,0439
9	0,0098
10	0,0010
soma	1,00



Problema 2

- Registros mostram que há uma probabilidade de 0,33 de uma pessoa, ao fazer compras em um supermercado, adquirir uma promoção especial de creme dental.
- Determine a probabilidade de que, dentre dez (10) pessoas que estão fazendo compras no supermercado: a) três (3) adquiram a promoção; b) no mínimo duas (2) adquiram a promoção.
  Dados: $n = 10$ e $p = 0{,}33$
  Aplicando o modelo binomial, se obtém a probabilidade para:
- a) $P(Y=3)$ = **0,26014** ou aproximadamente 26%;

b) $P(Y \geq 2) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] = 1 - (2 \times 0{,}0182) =$ **0,9636**

Problema 3

- Uma grande remessa de peças de uma compra é recebida em um armazém e uma amostra de 10 peças é retirada para o controle de qualidade.
- O fabricante declara que haverá no máximo 3% de peças defeituosas.
- Qual a probabilidade de encontrar no <u>máximo</u> uma (1) peças defeituosas na amostra?

  Dados: $n = 10$ e $p \leq 0{,}03$ (aplicar com o limite)
- Aplicando o modelo binomial, se obtém a probabilidade para $P(Y \leq 1) = 0{,}96549$ ou aproximadamente **96,55%**.

Modelo Poisson

- Aproximação da Binomial por Poisson

Na prática:

n $\rightarrow$ ∞ (n>30) **e** **p** $\rightarrow$ **0** (eventos raros: p<0,10)

A Média da Binomial = n*p $\rightarrow \lambda$ = n*p $\rightarrow$ p = λ/n

Substituindo o valor "**p = λ/n**" de no Modelo Binomial

Obtém-se no limite

$P(Y=y) = p(y) = e^{-\lambda} * (\lambda^y / y!)$

$E(Y) = V(Y) = \lambda$

Problema 4 : **Modelo Poisson**

Avalia-se uma amostra aleatória de 50 peças da produção de uma máquina em que, sabe-se historicamente que 2% de produção defeituosa, qual a probabilidade de encontrar **no máximo duas (2) peças defeituosas**?

Aplique o modelo Binomial e a aproximação por Poisson.

Dados: $n = 50$ e $p = 0{,}03 \rightarrow \lambda = n*p = 50*0{,}03 = 1{,}5$

1) Por Binomial: $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

2) Por Poisson: $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

3) Erro relativo entre os modelos: (ϵ_r)

y	0	1	2	**P(Y≤2)**
P(y)_Bin	0,3642	0,3716	0,1858	**0,9216**
P(y)_Poi	0,3679	0,3679	0,1839	**0,9197**
Erro Rel. ($\boldsymbol{\epsilon_r}$)				**0,20%**

Problema 5: Modelo Poisson

Um telefone recebe em média 0,25 chamadas/h.

- **Qual é a probabilidade de em 4 horas**

a) receber **no máximo** 2 chamadas? **$P(Y \leq 2)=?$**

Média = λ = 4*0,25 = 1,0

y	0	1	2	$P(Y \leq 2)$
P(y)_Poi	0,3679	0,3679	0,1839	**0,9197**

b) receber **no mínimo 3** chamadas? **$P(Y \geq 3)=1-P(Y<3)=?$**

$P(Y \geq 3)= 1-P(Y \leq 2) = 0,0803$