



Geometria Analítica

Videoaula 3.9

Ângulo entre vetores

Departamento de Matemática (UFSC)

Professora ALDA MORTARI

Professor CHRISTIAN WAGNER

Professor FELIPE TASCA

Professor GIULIANO BOAVA

Professor LEANDRO MORGADO

Professora MARÍA ASTUDILLO

Professor MYKOLA KHRYPCHENKO

Ângulo entre vetores

O ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é o menor ângulo formado quando consideramos esses vetores com a mesma origem.

Como calcular o ângulo?

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos.

O ângulo θ formado por esses vetores é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Como deduzir essa fórmula?

Exemplo

Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

Condição de ortogonalidade

O produto escalar entre dois vetores é igual a zero se e somente se o ângulo formado entre eles é um **ângulo reto**.

Exercício

Encontre o valor de k para que os vetores

$\vec{v} = (1, 2, 3)$ e $\vec{u} = (-2, k, 4)$ sejam ortogonais.

Outras observações

- O produto escalar entre dois vetores é positivo se e somente se o ângulo formado entre eles é um **ângulo agudo ou nulo**.
- O produto escalar entre dois vetores é negativo se e somente se o ângulo formado entre eles é um **ângulo obtuso ou raso**.

Condição de paralelismo

Lembre que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos se um é múltiplo do outro, ou seja, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \vec{u}$.

Observação

- O vetor $\vec{0}$ é paralelo a qualquer vetor \vec{u} , pois $\vec{0} = 0 \vec{u}$.
- O vetor $\vec{0}$ é ortogonal a qualquer vetor \vec{u} , pois $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

Exercício

Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.

Encontre o vetor \vec{w} que é paralelo a \vec{u} , e que satisfaz $\vec{v} \cdot \vec{w} = 10$.

Projeção Ortogonal

Suponha dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} , com ângulo θ entre eles.

Vamos deduzir as coordenadas do vetor \vec{w} , que representa a projeção de \vec{u} sobre \vec{v} .

Conclusão

Suponha dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} , com ângulo θ entre eles.

A projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}.$$

Exercício

Determine a projeção ortogonal de $\vec{u} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{v} = (1, -1, 0)$.