5.2. Elipse

Professores:
Alda Dayana Mattos Mortari
Christian Wagner
Giuliano Boava (autor e voz)
Leandro Batista Morgado
María Rosario Astudillo Rojas
Mykola Khrypchenko

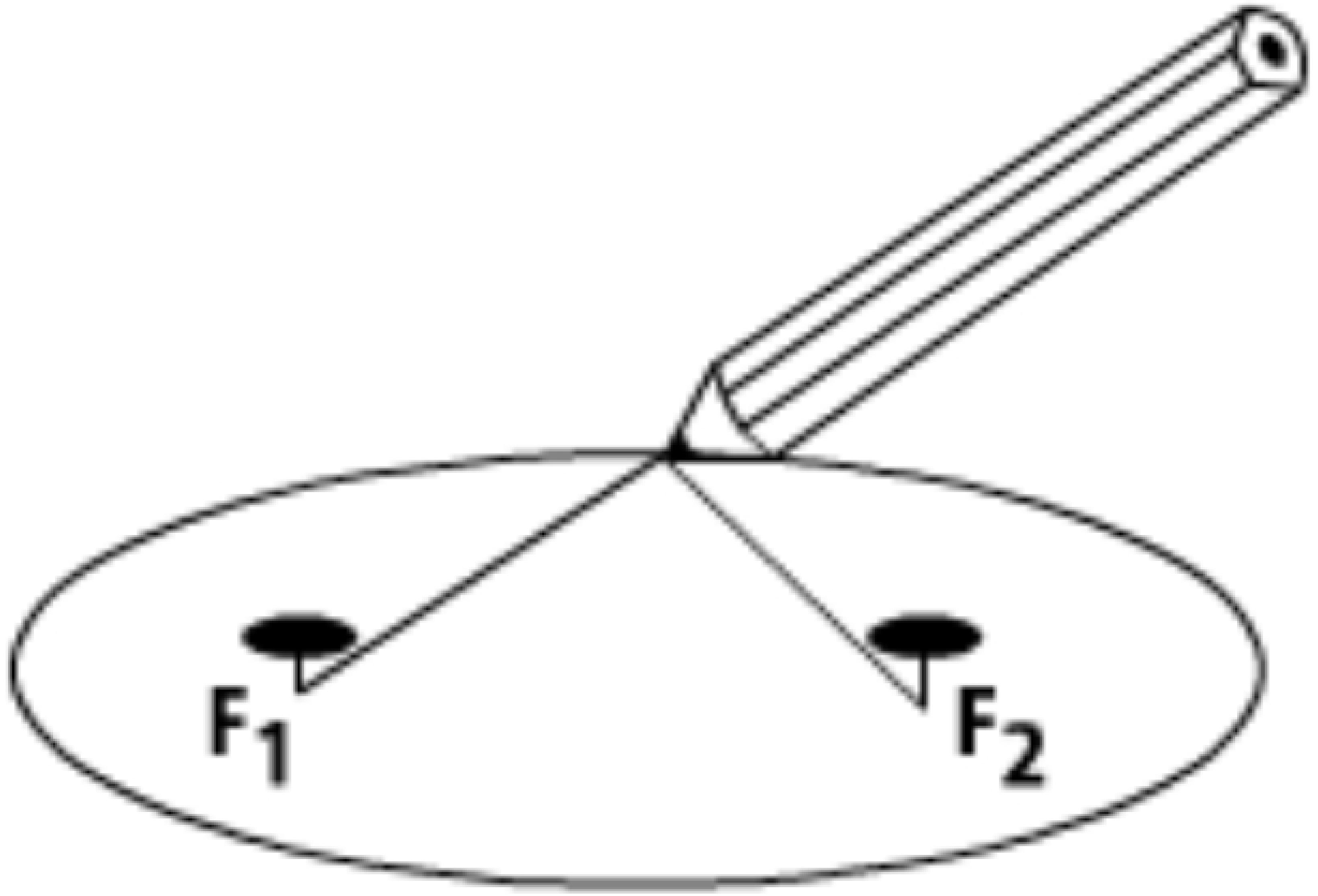
DEFINIÇÃO

Definição. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano e $a > 0$ um número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$. A elipse com focos F_1 e F_2 e comprimento do fio $2a$ é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias até F_1 e F_2 é igual a $2a$.

Vídeo

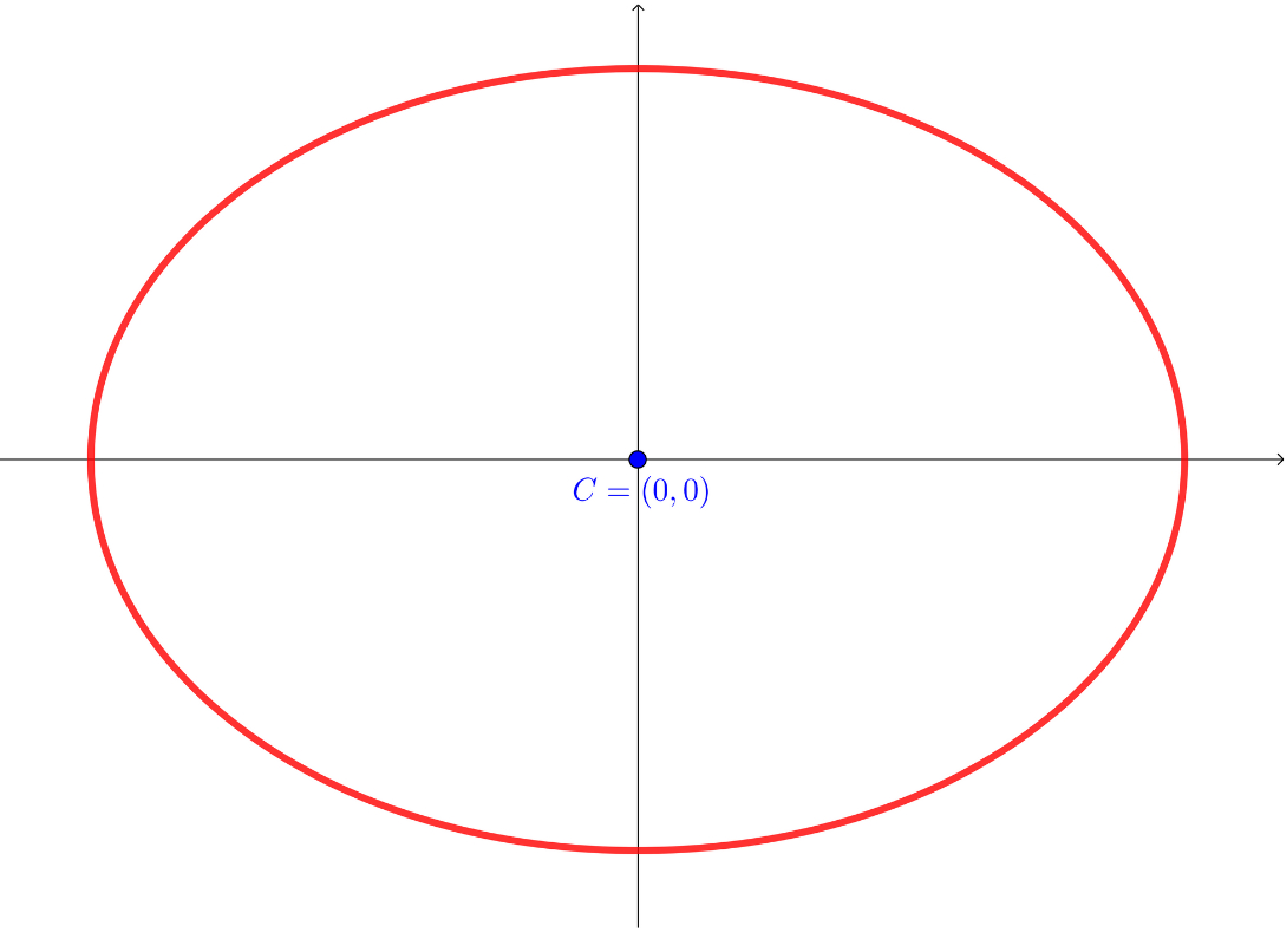
DEFINIÇÃO

Definição. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano e $a > 0$ um número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$. A elipse com focos F_1 e F_2 e comprimento do fio $2a$ é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias até F_1 e F_2 é igual a $2a$.



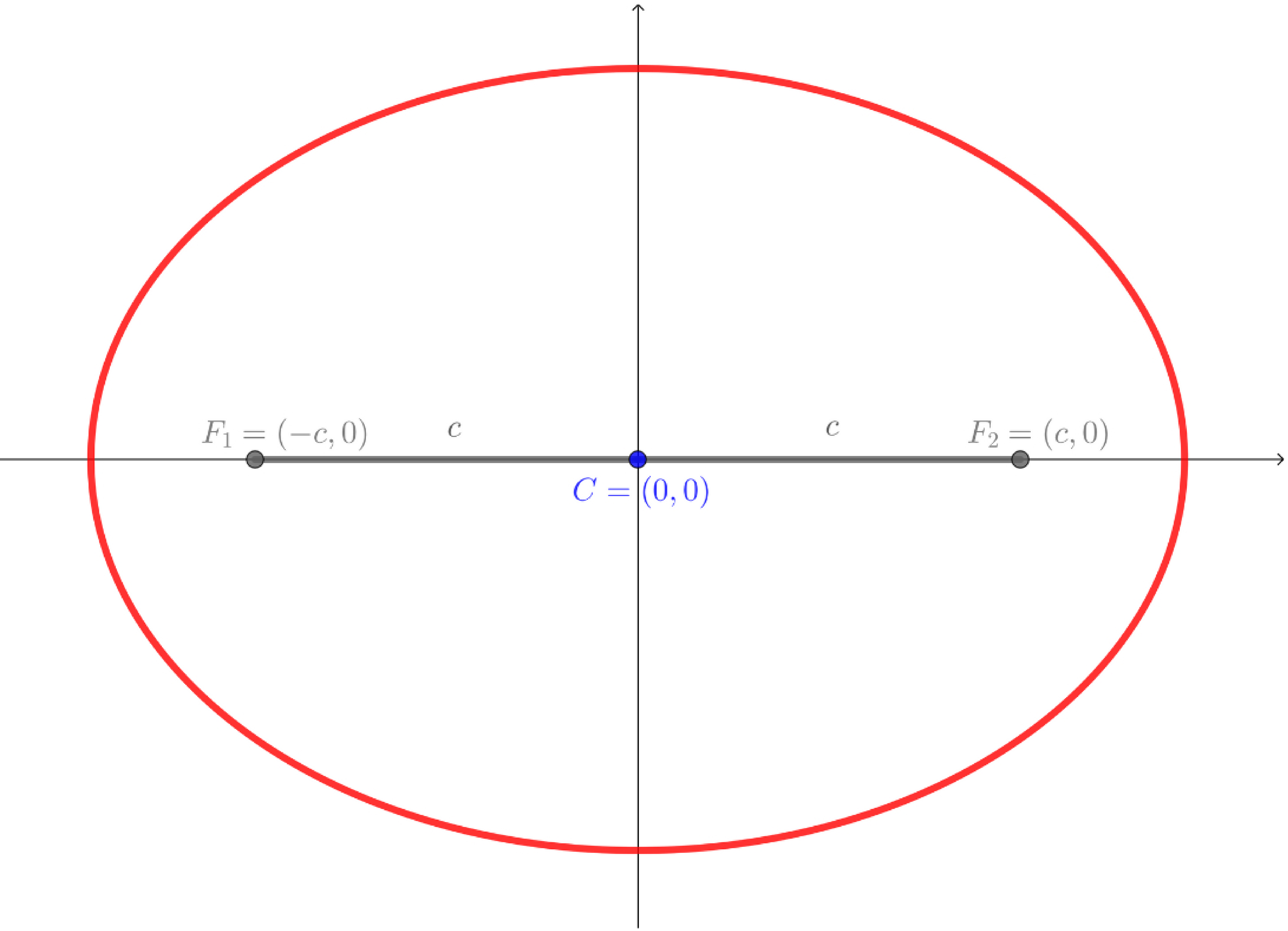
ALGUMAS DEDUÇÕES

ALGUMAS DEDUÇÕES



Centro na origem

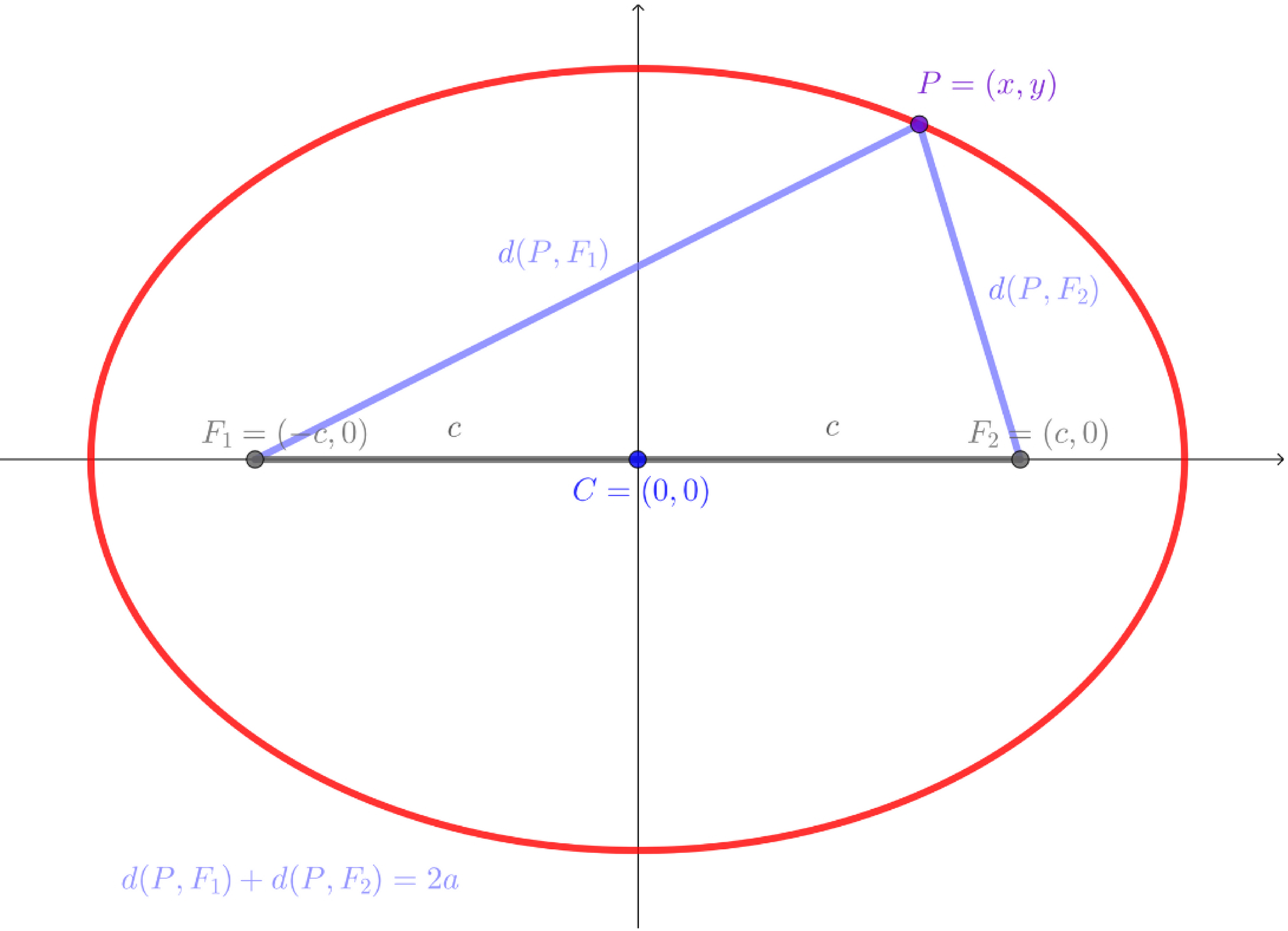
ALGUMAS DEDUÇÕES



Centro na origem

Focos distam c do centro

ALGUMAS DEDUÇÕES

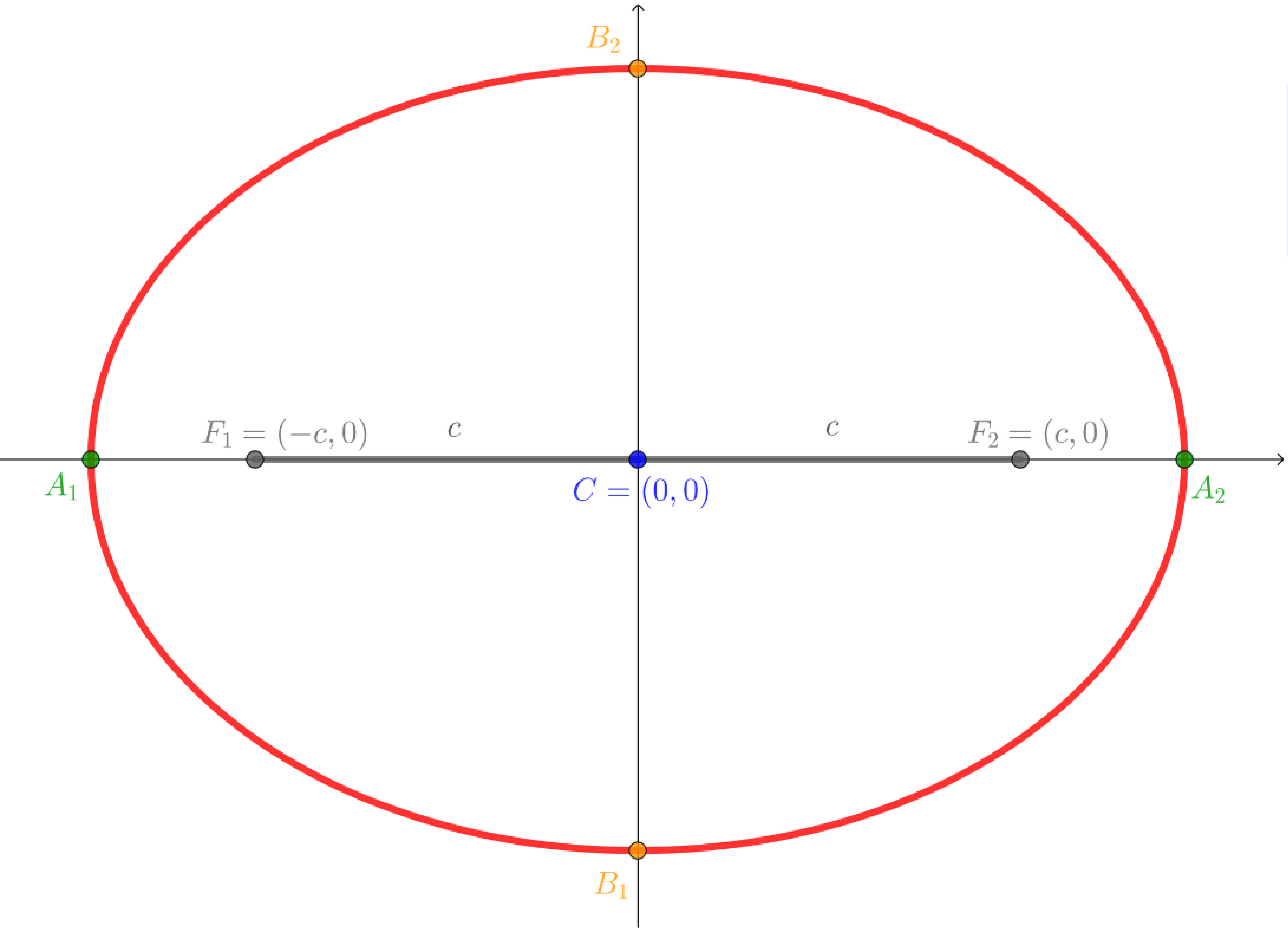


Centro na origem

Focos distam c do centro

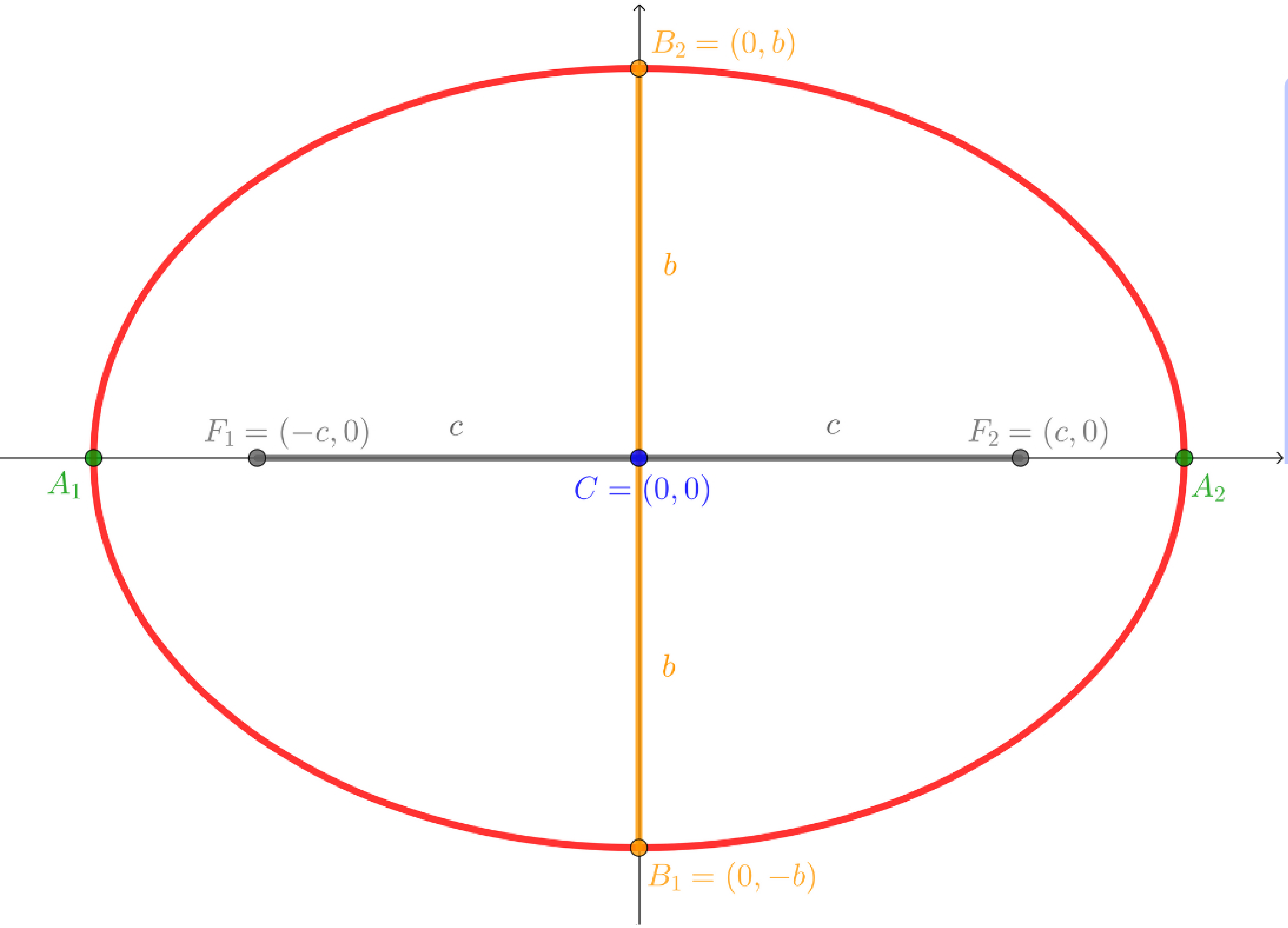
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

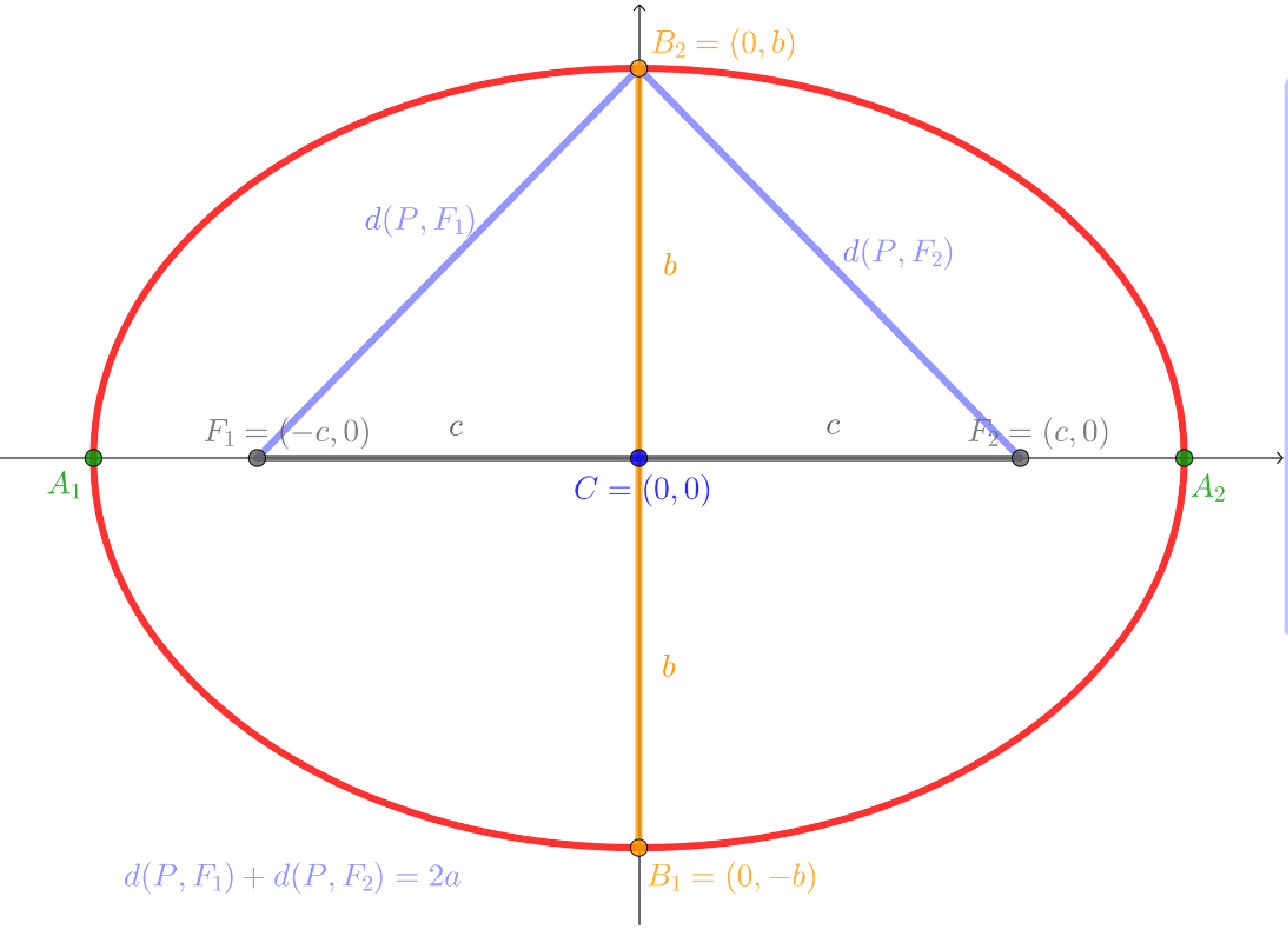
ALGUMAS DEDUÇÕES



Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Vértices B_1 e B_2 distam b do centro

ALGUMAS DEDUÇÕES

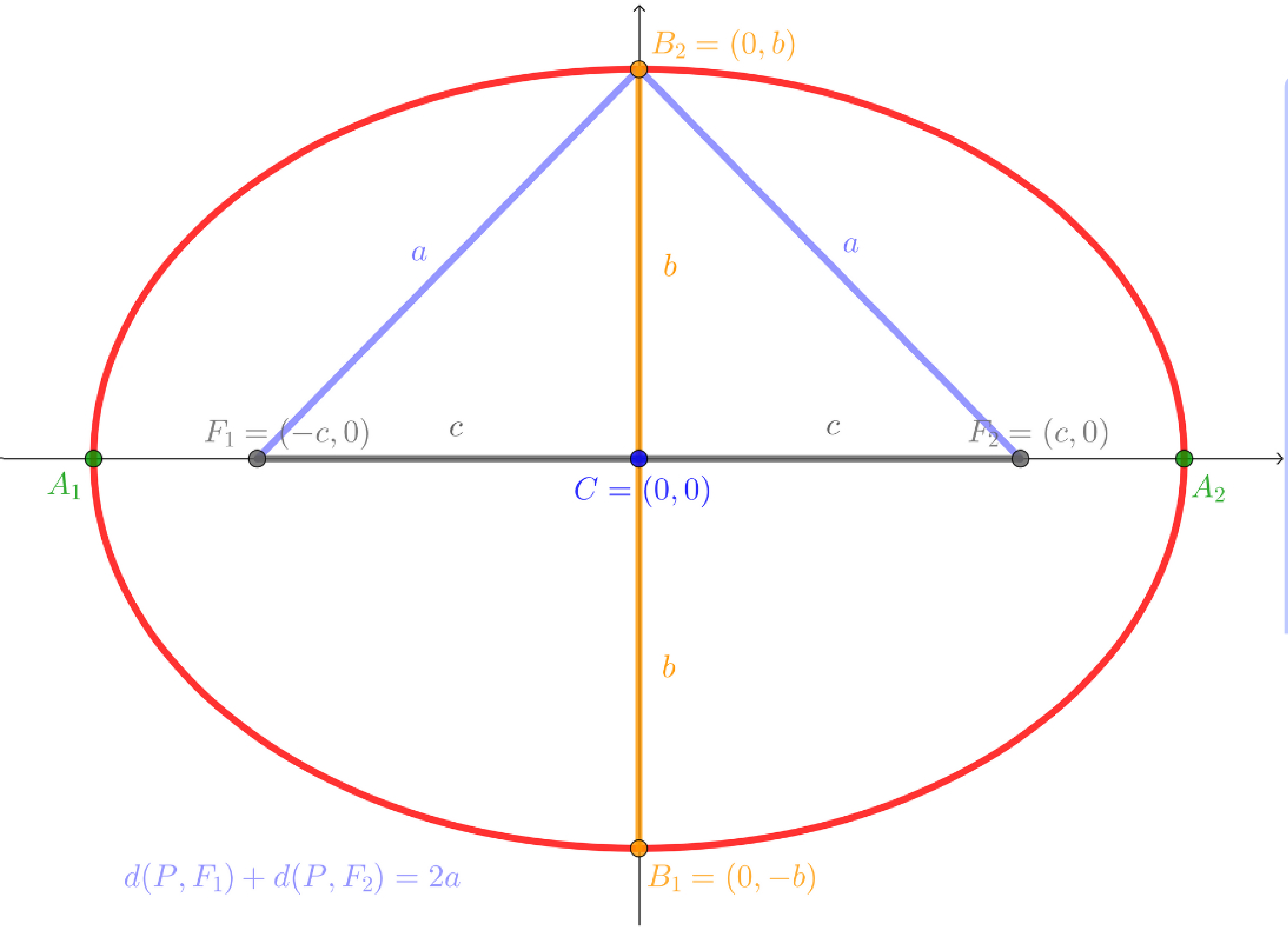


Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Vértices B_1 e B_2 distam b do centro

$$d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = 2a$$

ALGUMAS DEDUÇÕES

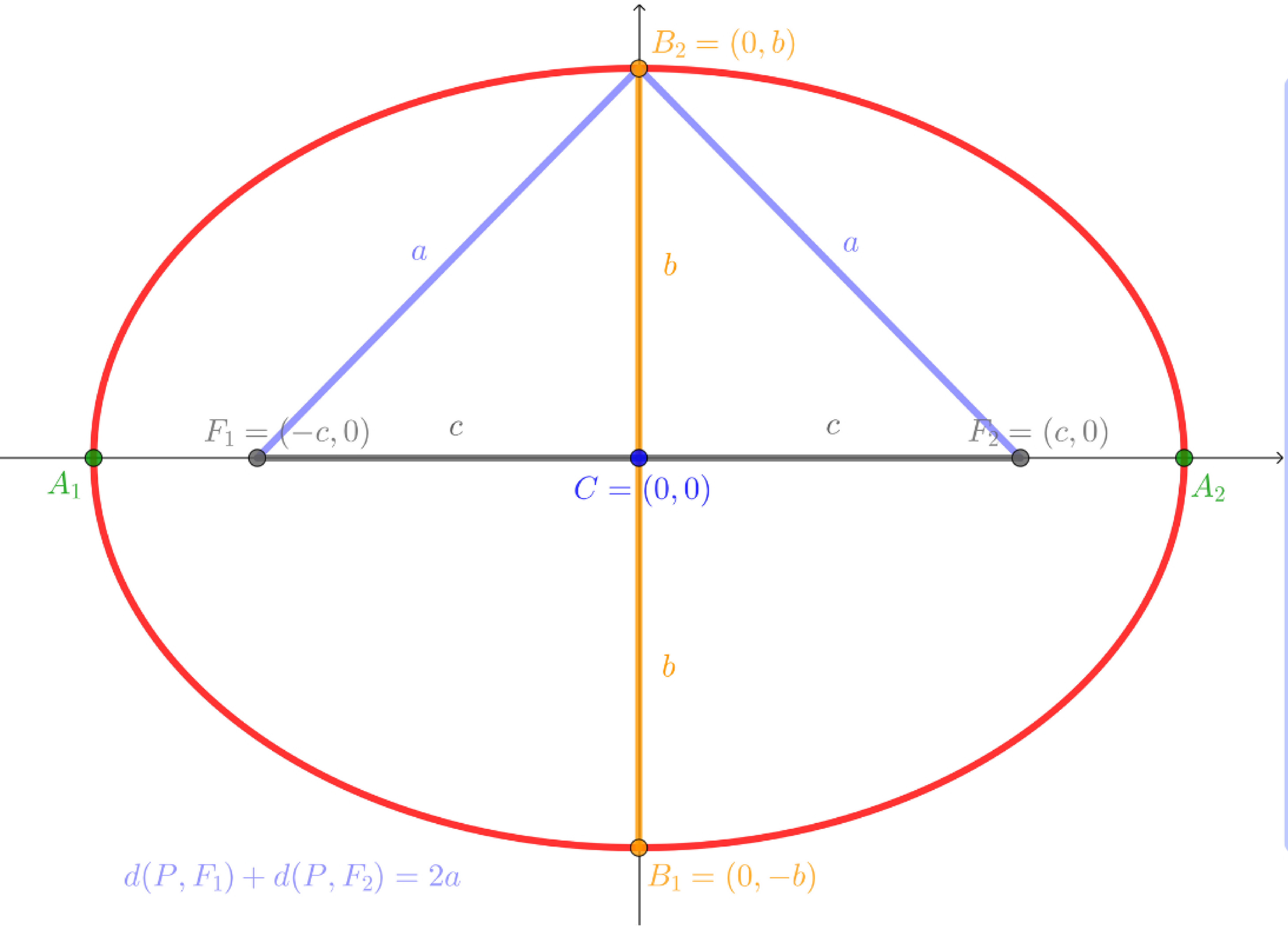


Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Vértices B_1 e B_2 distam b do centro

$$d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = 2a$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



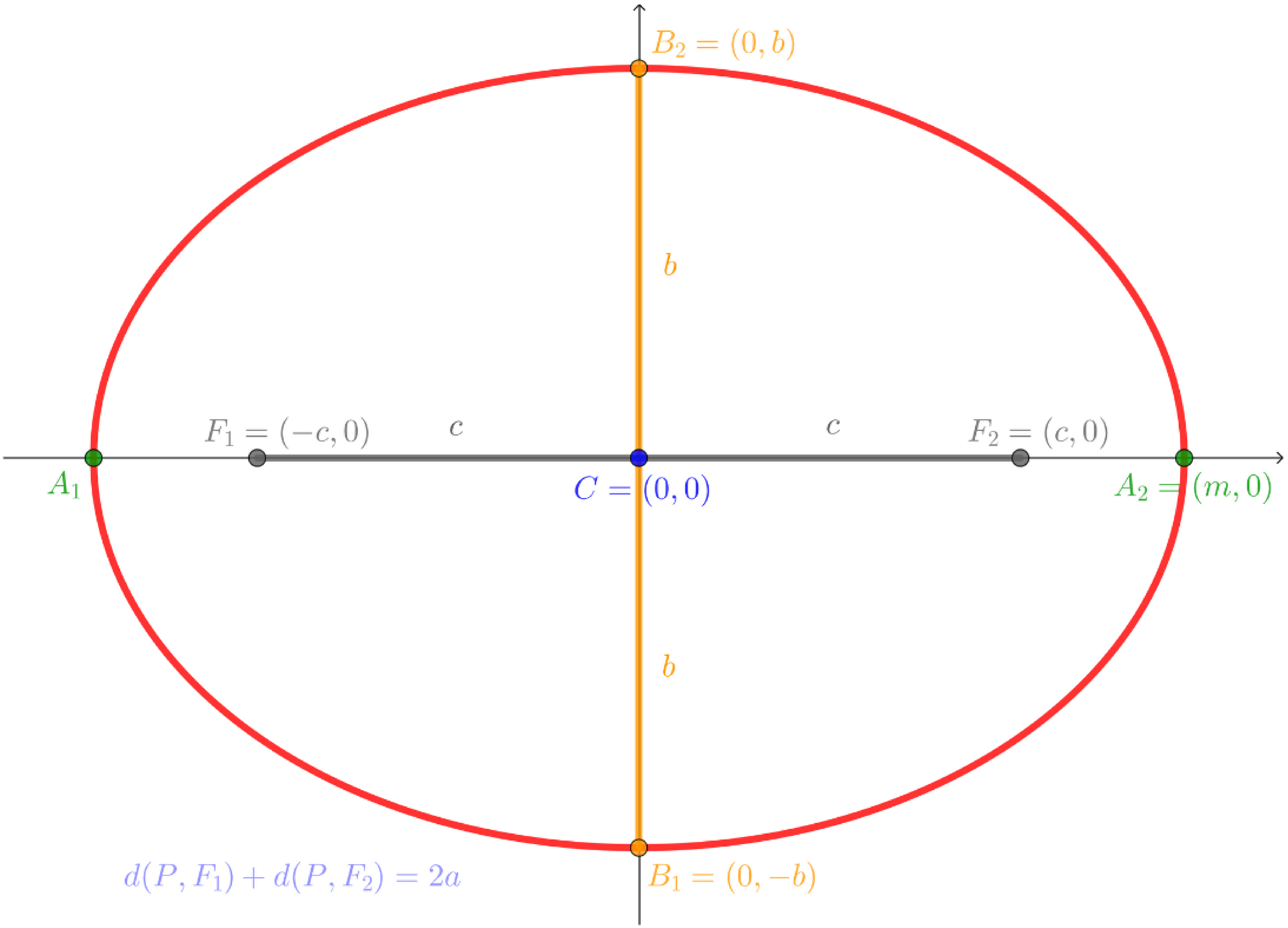
Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Vértices B_1 e B_2 distam b do centro

$$d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = 2a$$

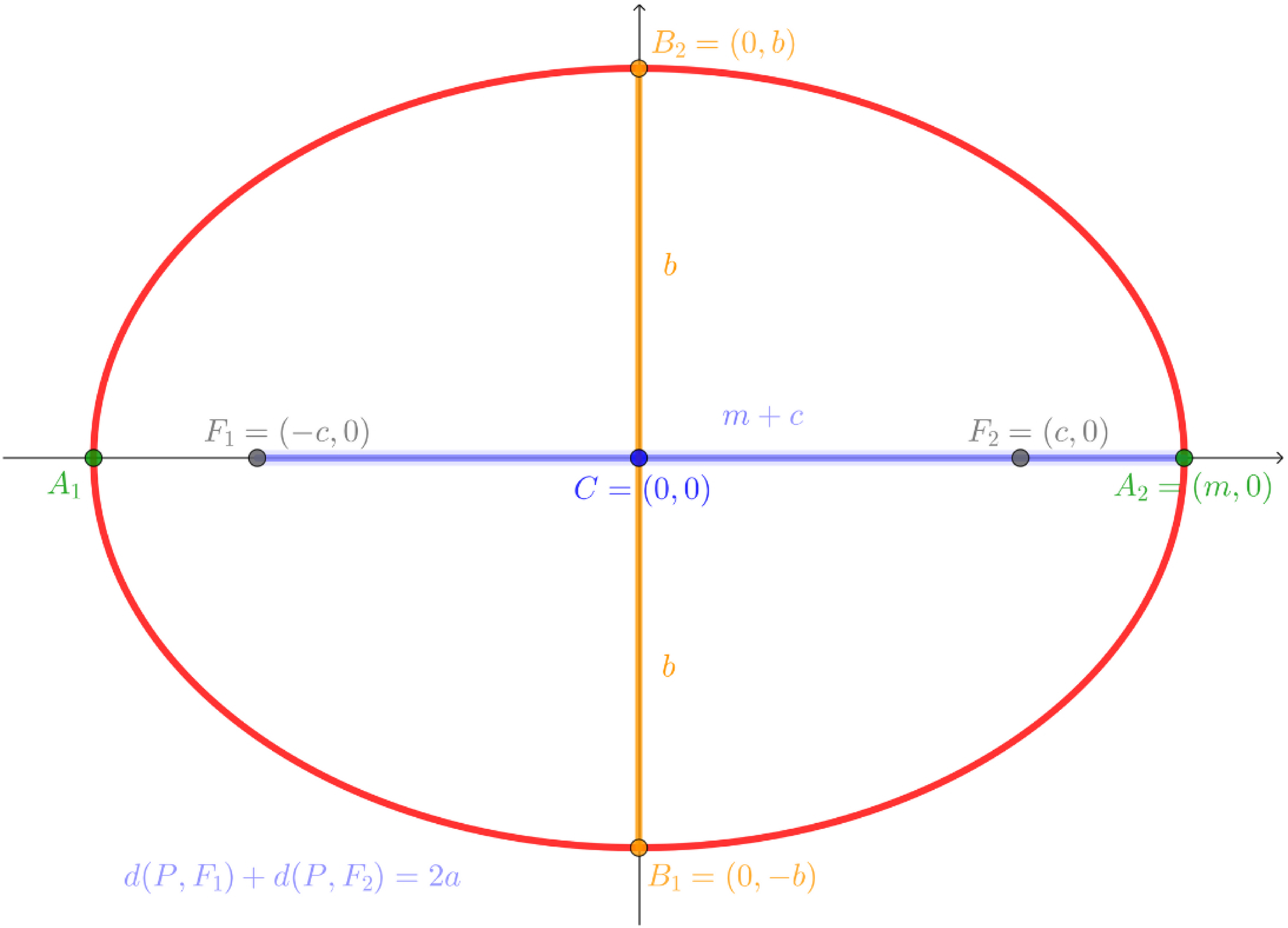
$$a^2 = b^2 + c^2$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



$$A_2 = (m, 0)$$

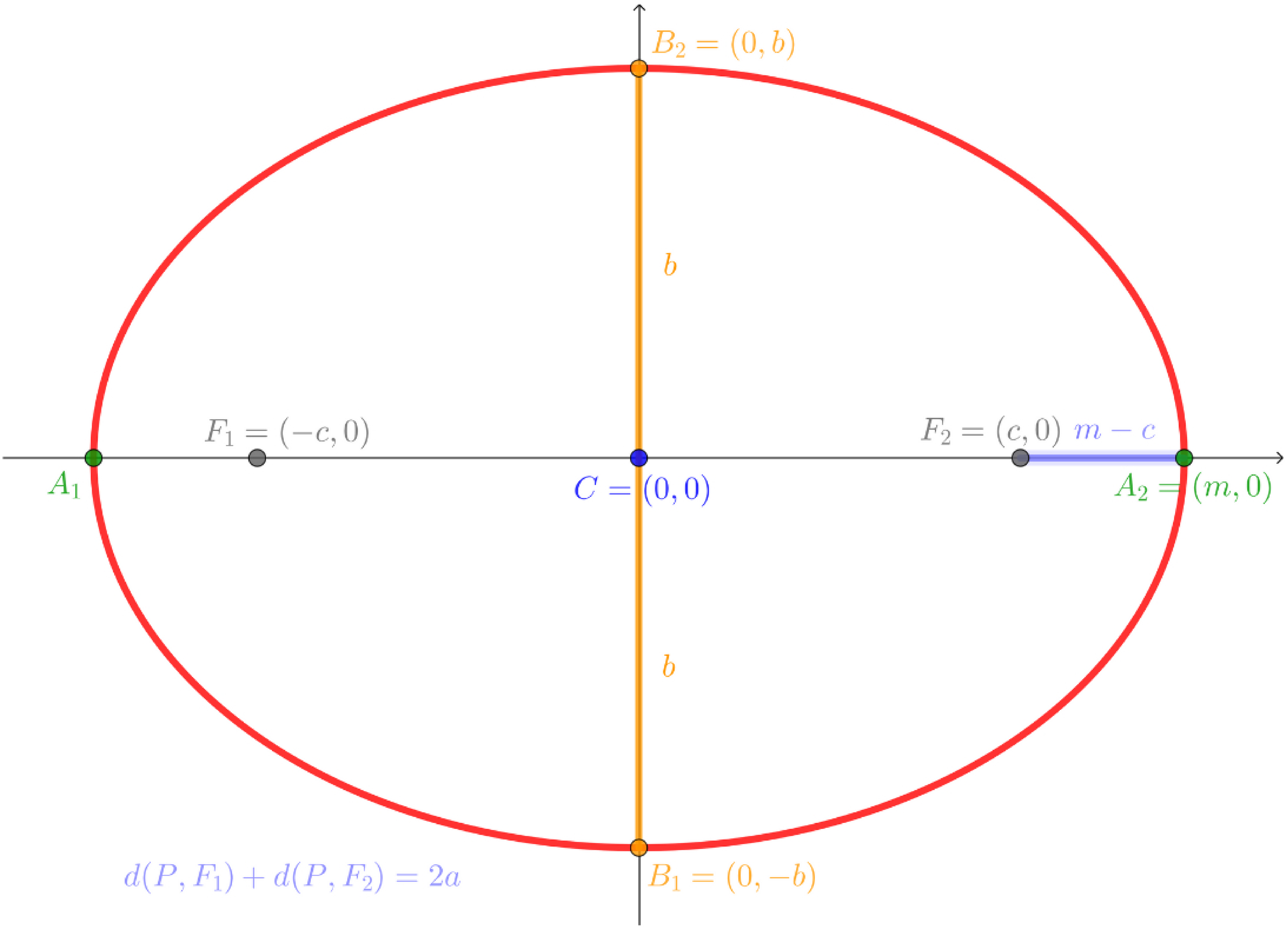
ALGUMAS DEDUÇÕES



$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

ALGUMAS DEDUÇÕES

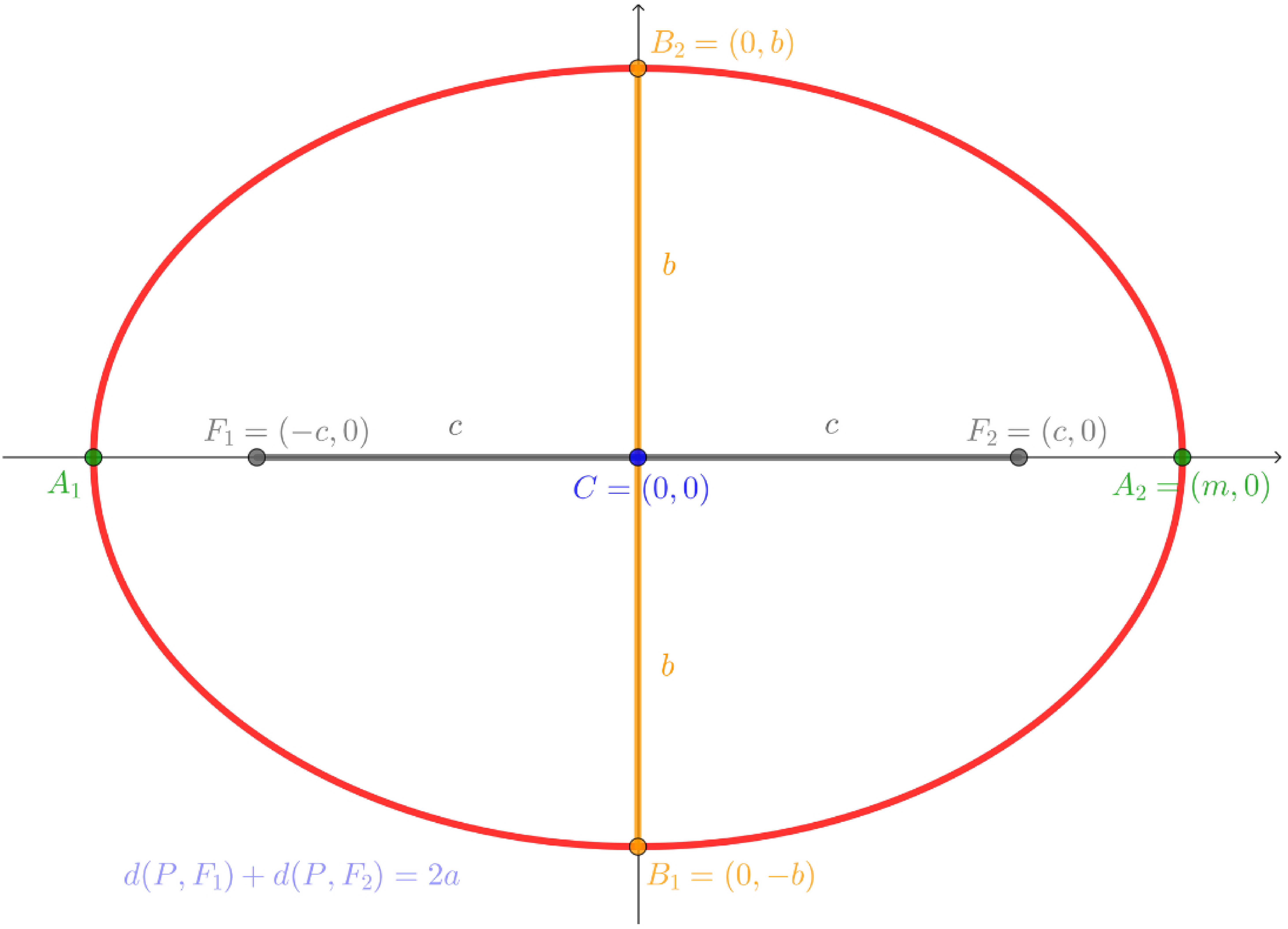


$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

$$d(A_2, F_2) = m - c$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



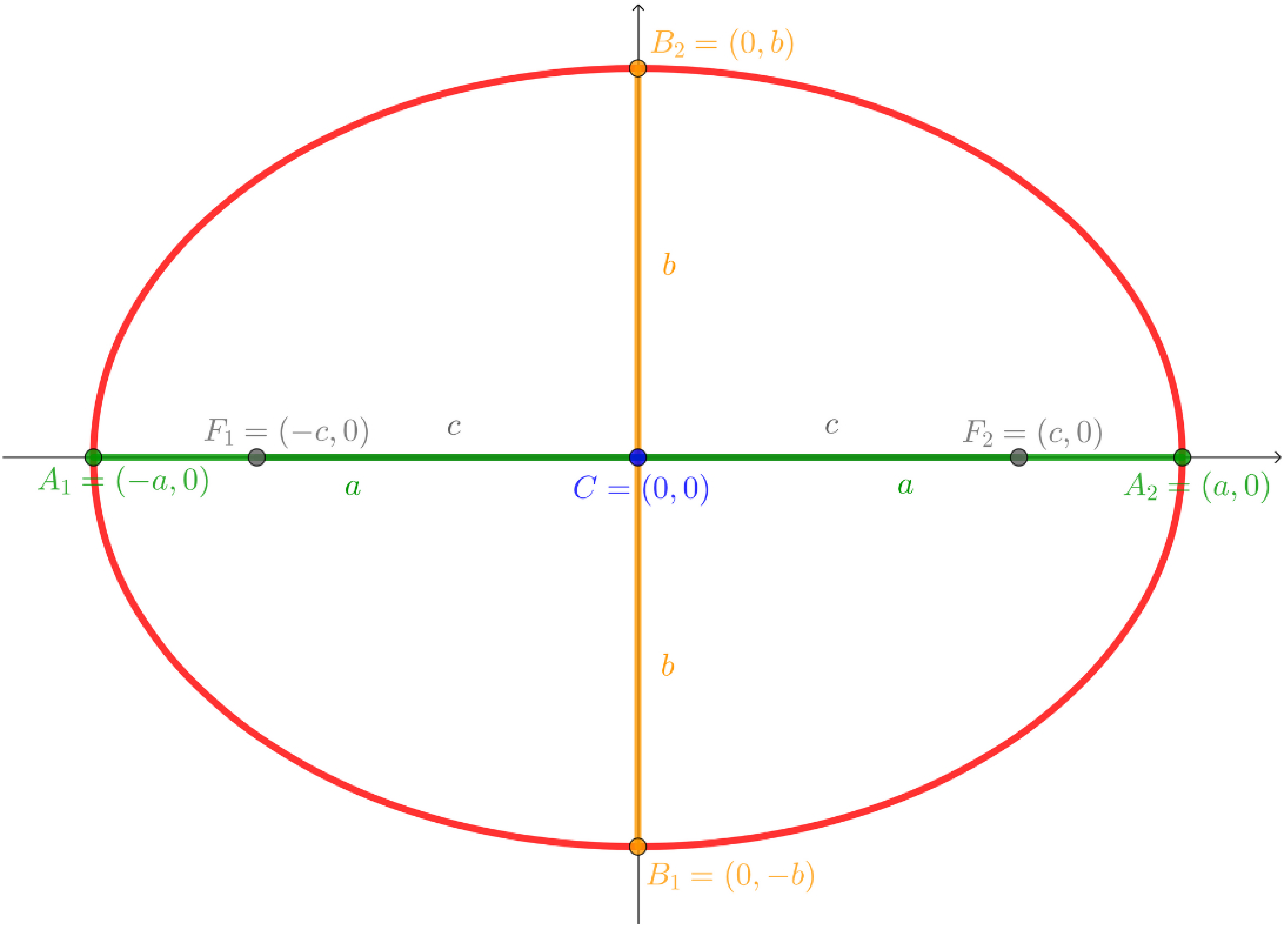
$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

$$d(A_2, F_2) = m - c$$

$$d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = 2m$$

ALGUMAS DEDUÇÕES



$$A_2 = (m, 0)$$

$$d(A_2, F_1) = m + c$$

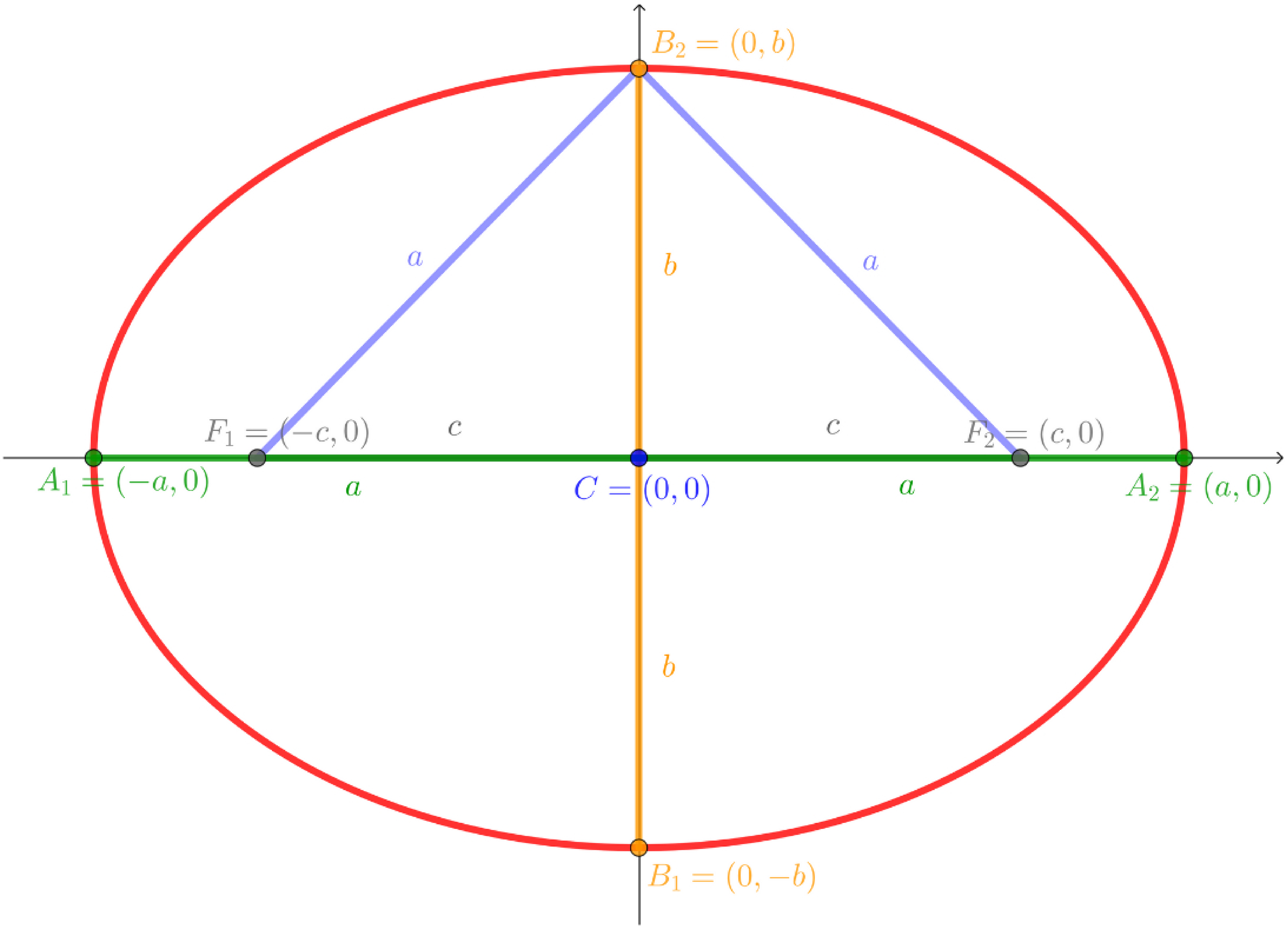
$$d(A_2, F_2) = m - c$$

$$d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = 2m$$

$$m = a$$

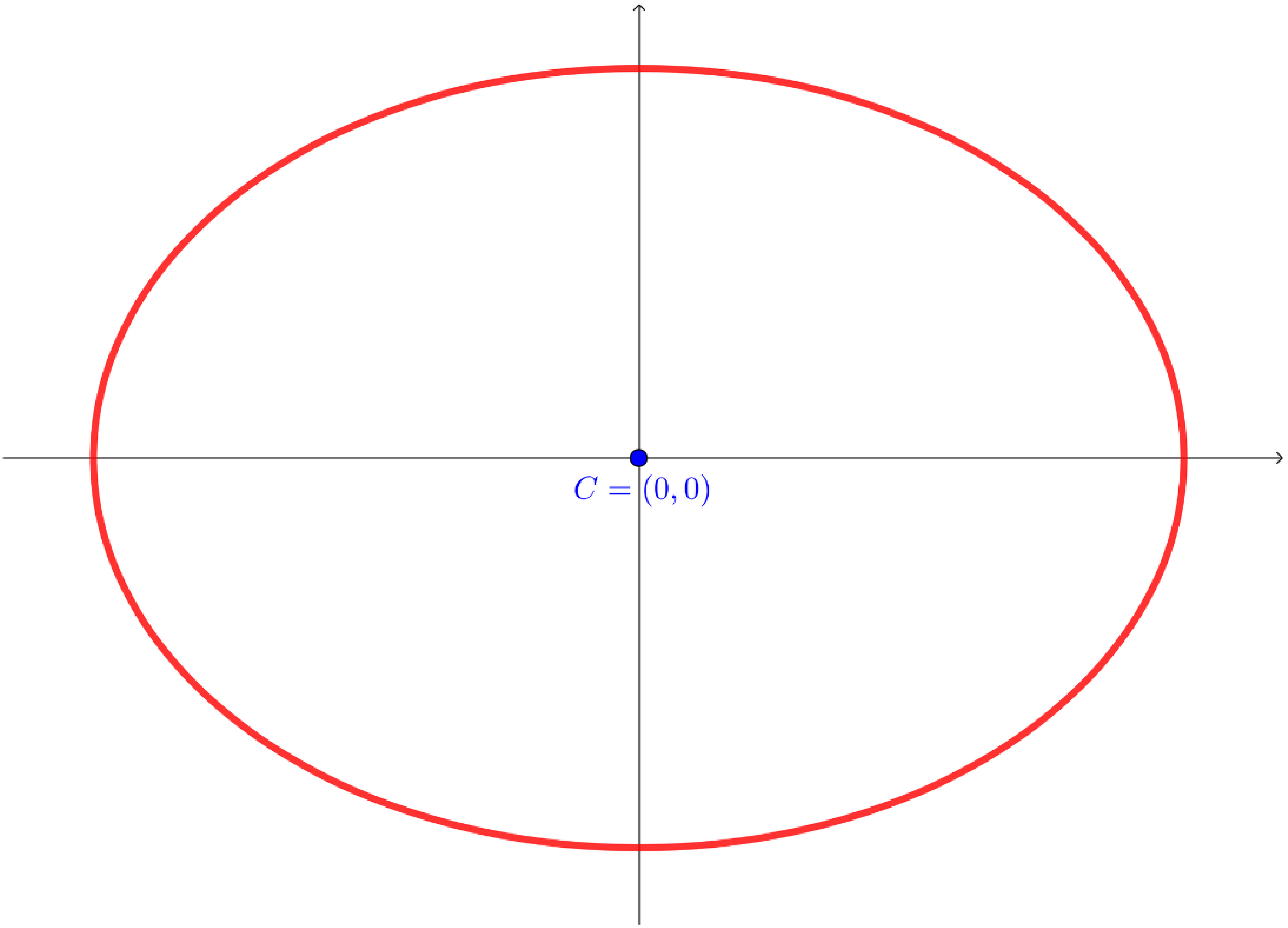
$$A_2 = (a, 0) \text{ e } A_1(-a, 0)$$

ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

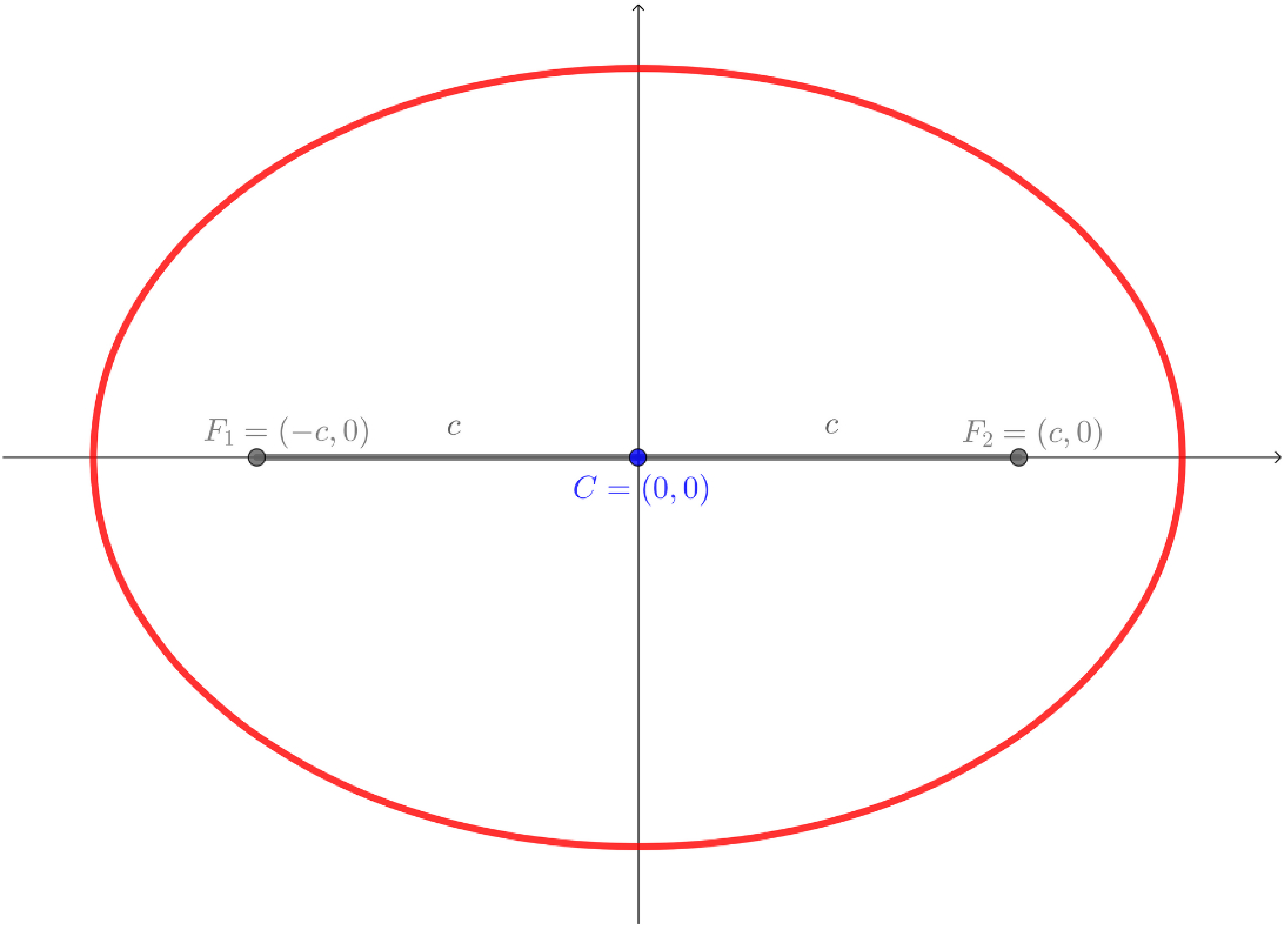
ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Centro: C.

ALGUMAS CONVENÇÕES

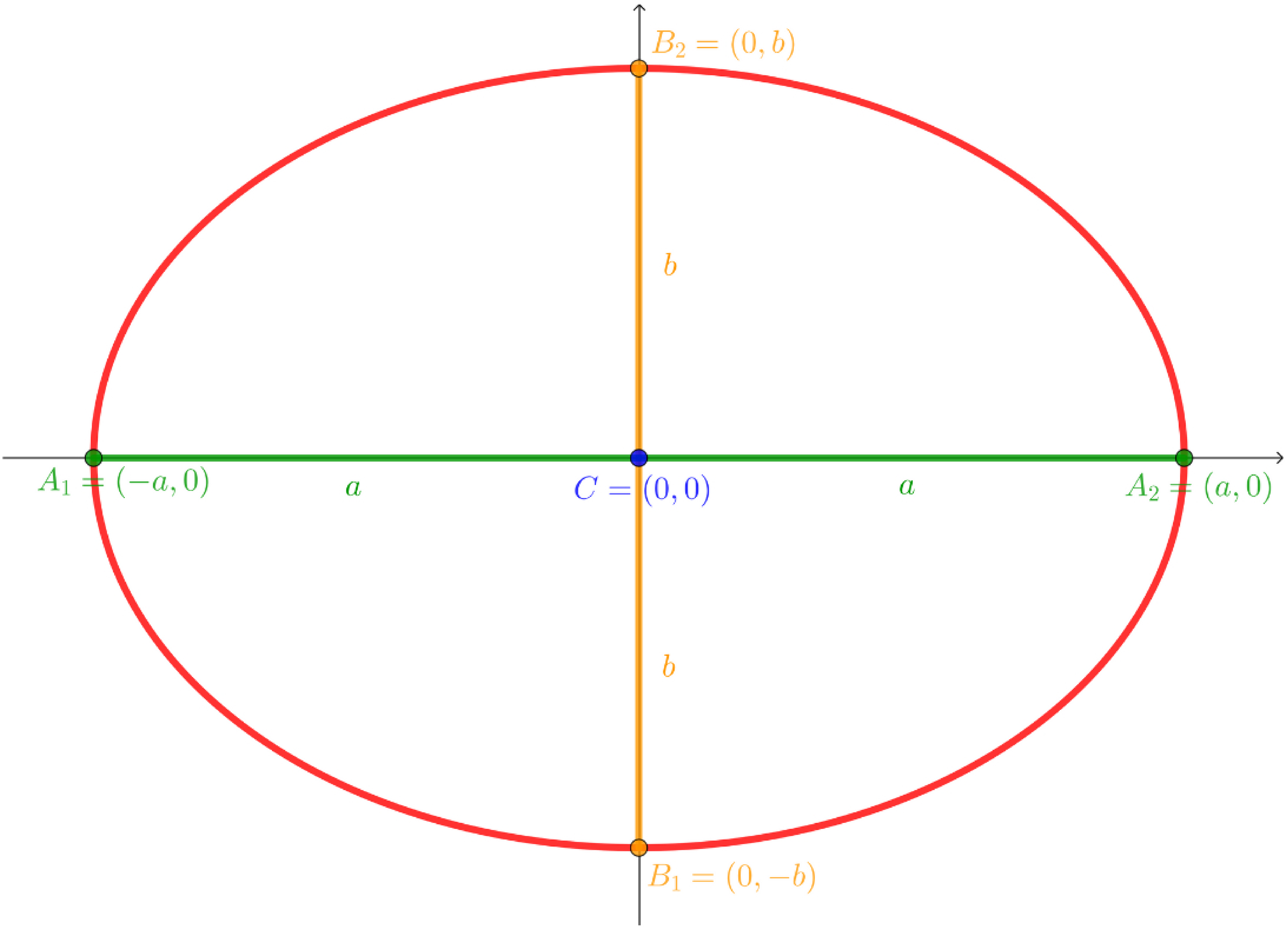


Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Centro: C.

Focos: F_1 e F_2.

ALGUMAS CONVENÇÕES



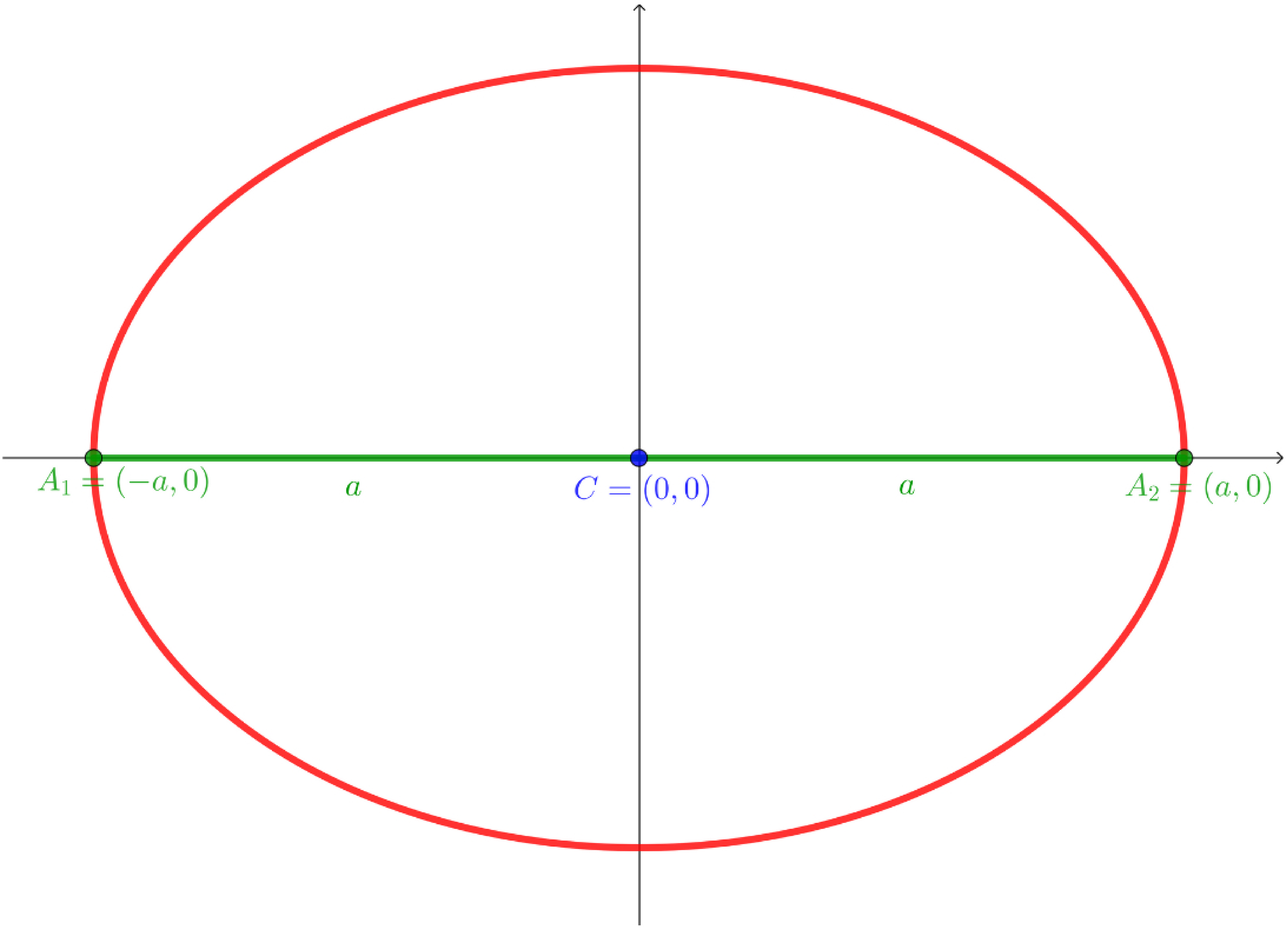
Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Centro: C.

Focos: F_1 e F_2.

Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

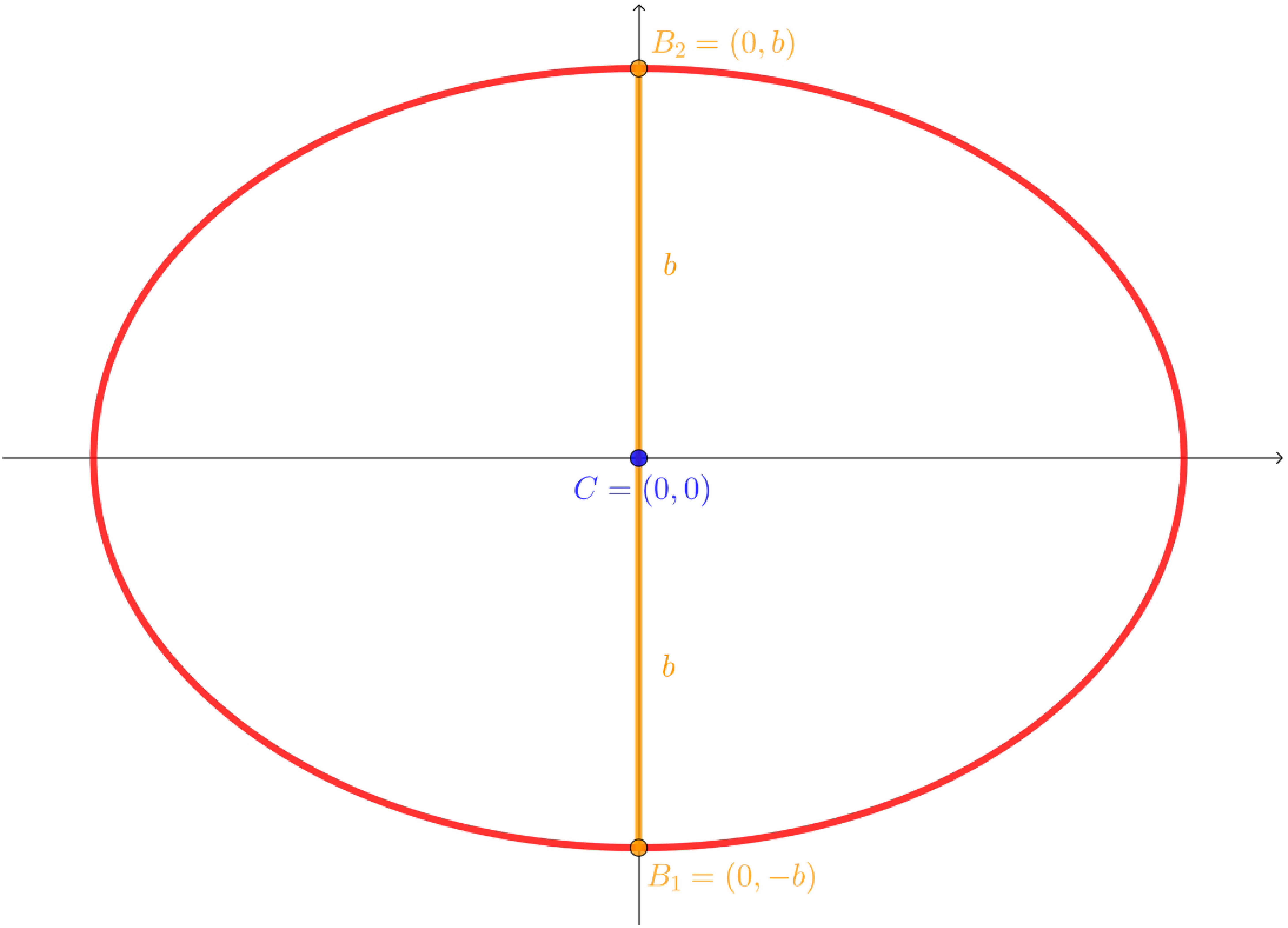
Centro: C.

Focos: F_1 e F_2.

Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2.

Eixo maior: segmento $\overline{A_1A_2}$. Sua medida: $2a$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Centro: C.

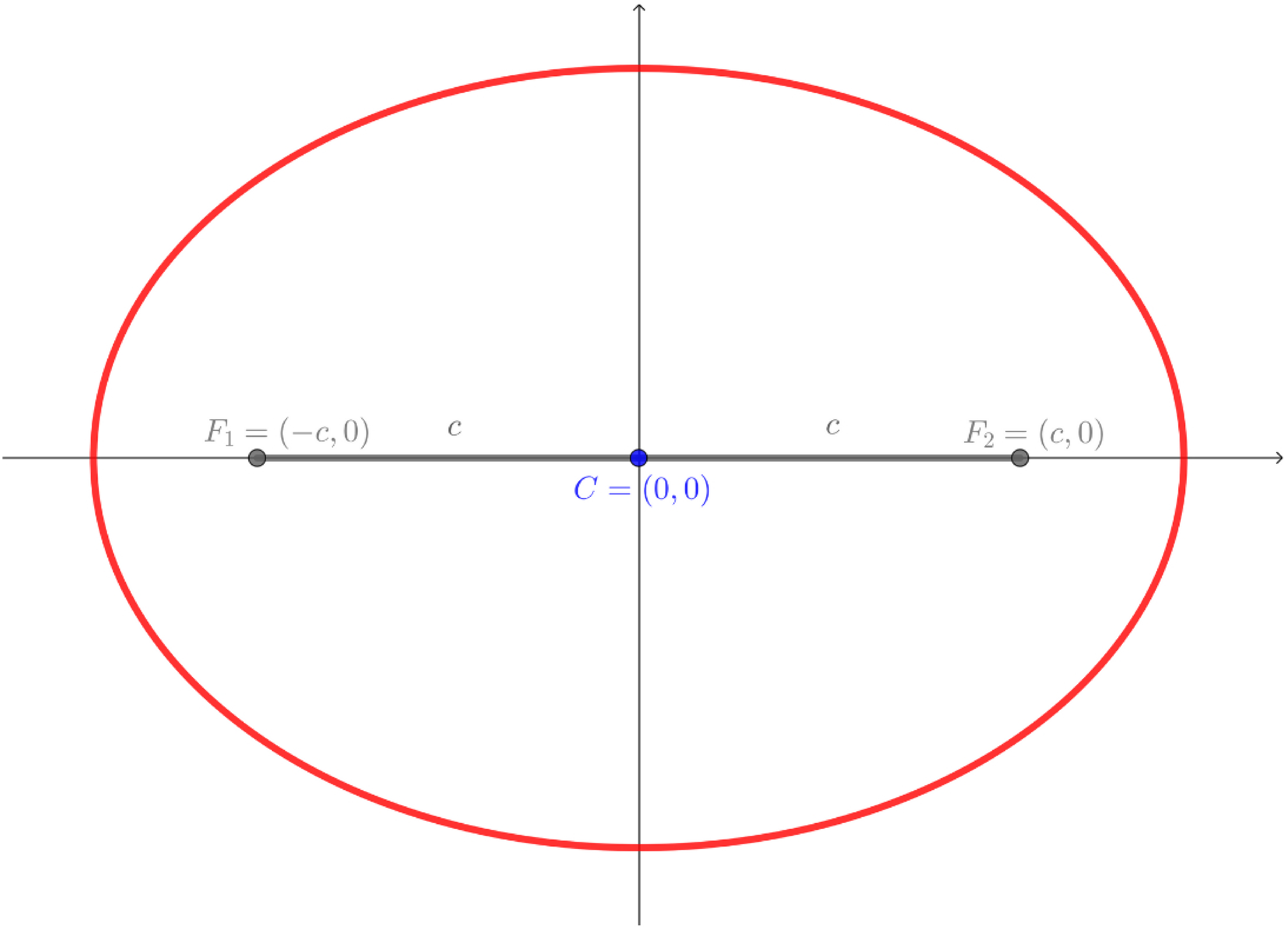
Focos: F_1 e F_2.

Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2.

Eixo maior: segmento $\overline{A_1A_2}$. Sua medida: $2a$.

Eixo menor: segmento $\overline{B_1B_2}$. Sua medida: $2b$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Parâmetros: $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
Relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Centro: C.

Focos: F_1 e F_2.

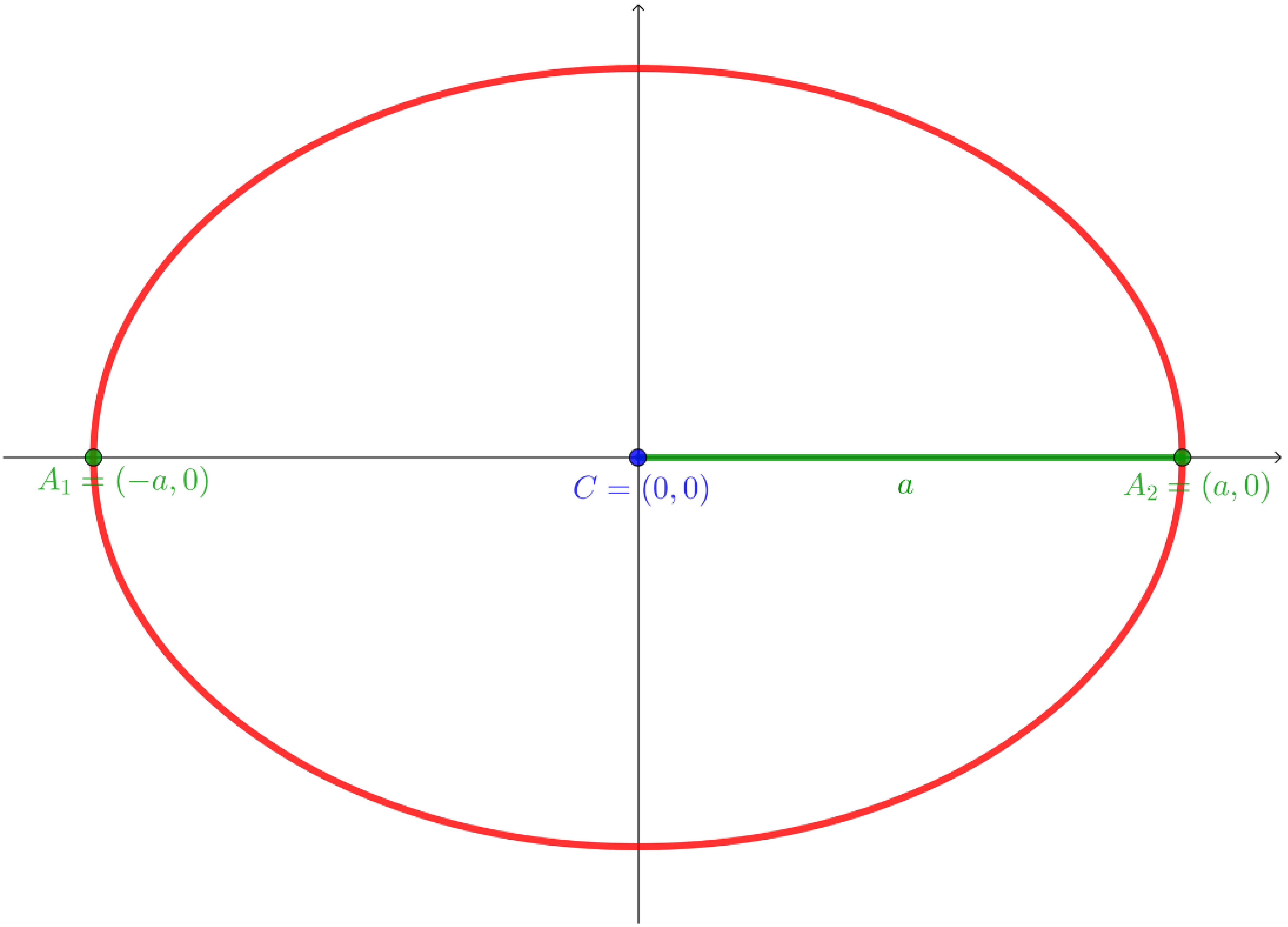
Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2.

Eixo maior: segmento $\overline{A_1A_2}$. Sua medida: $2a$.

Eixo menor: segmento $\overline{B_1B_2}$. Sua medida: $2b$.

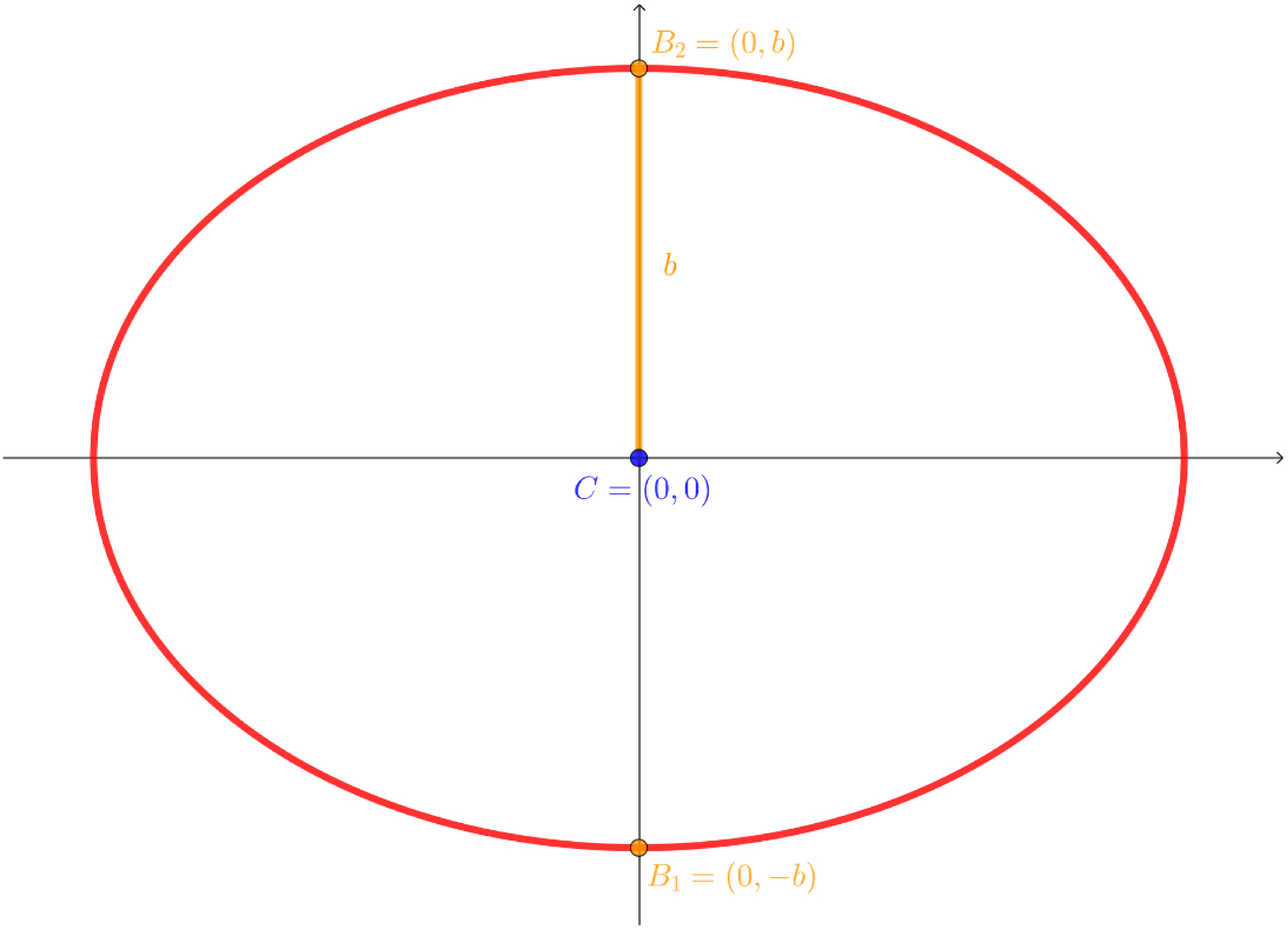
Eixo focal: segmento $\overline{F_1F_2}$. Sua medida: $2c$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

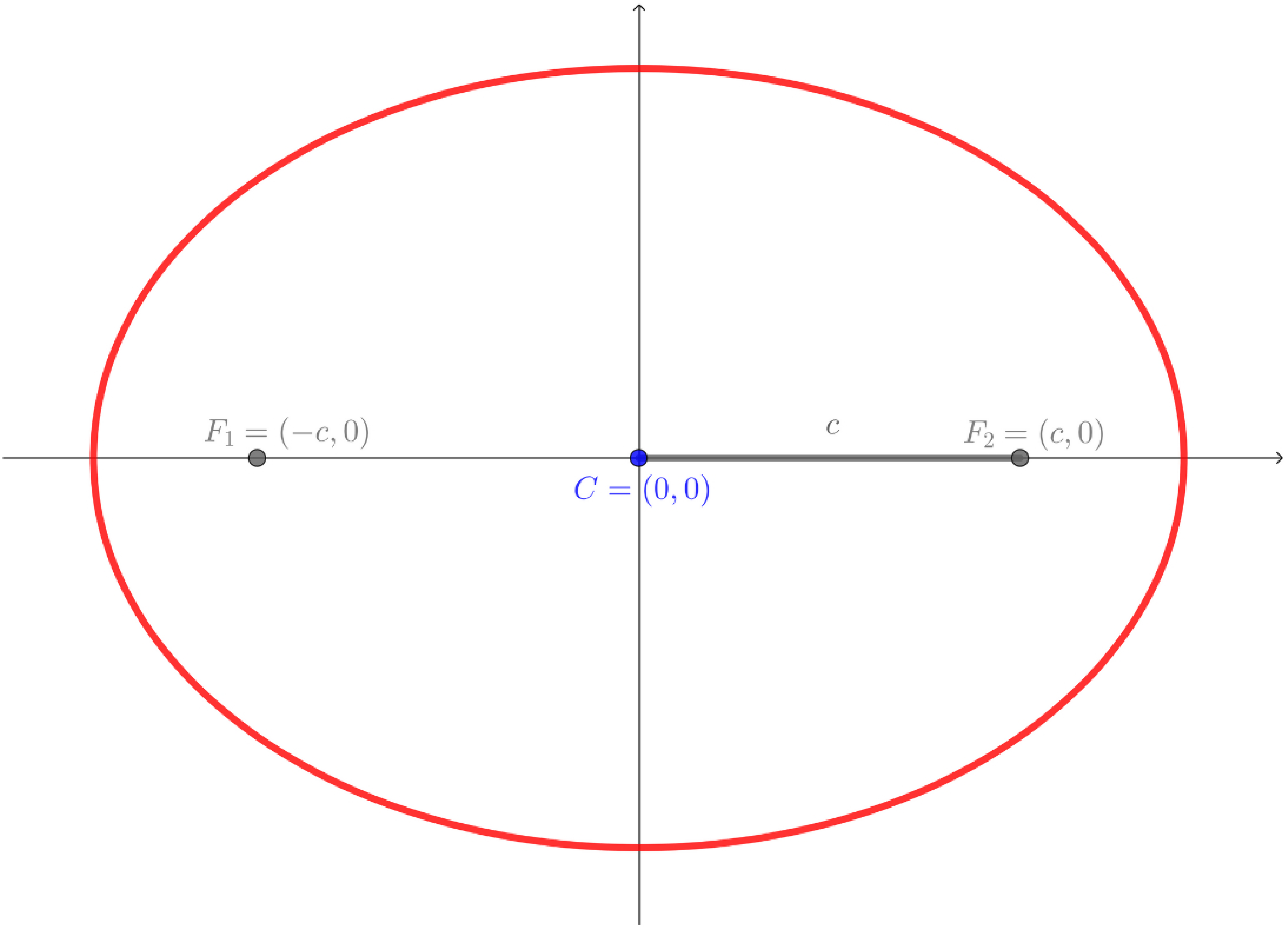
ALGUMAS CONVENÇÕES



Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

Semieixo menor: qualquer um dos segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

ALGUMAS CONVENÇÕES

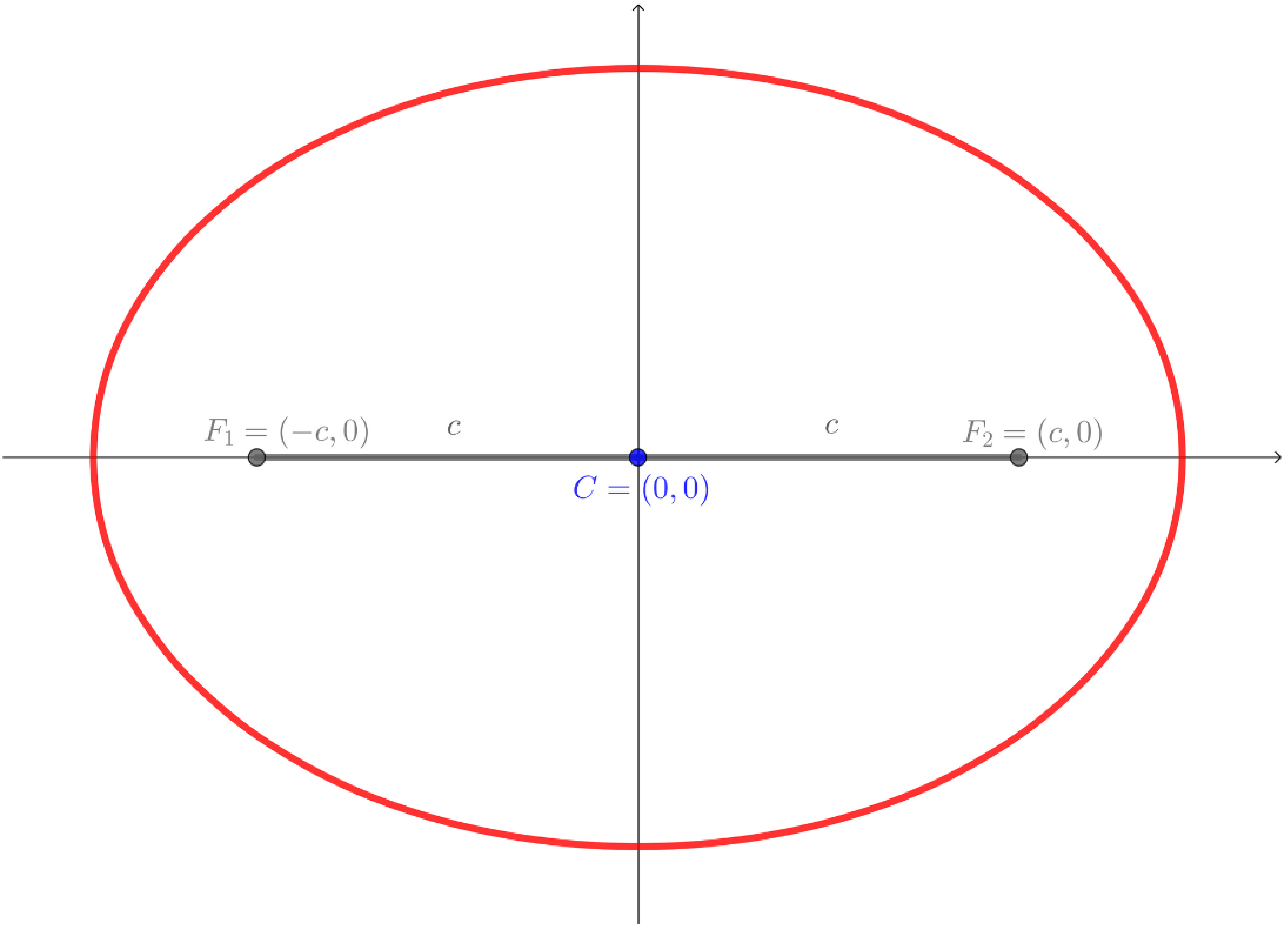


Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

Semieixo menor: qualquer um dos segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

Semieixo focal: qualquer um dos segmentos $\overline{F_1C}$ ou $\overline{CF_2}$. Sua medida: c.

ALGUMAS CONVENÇÕES



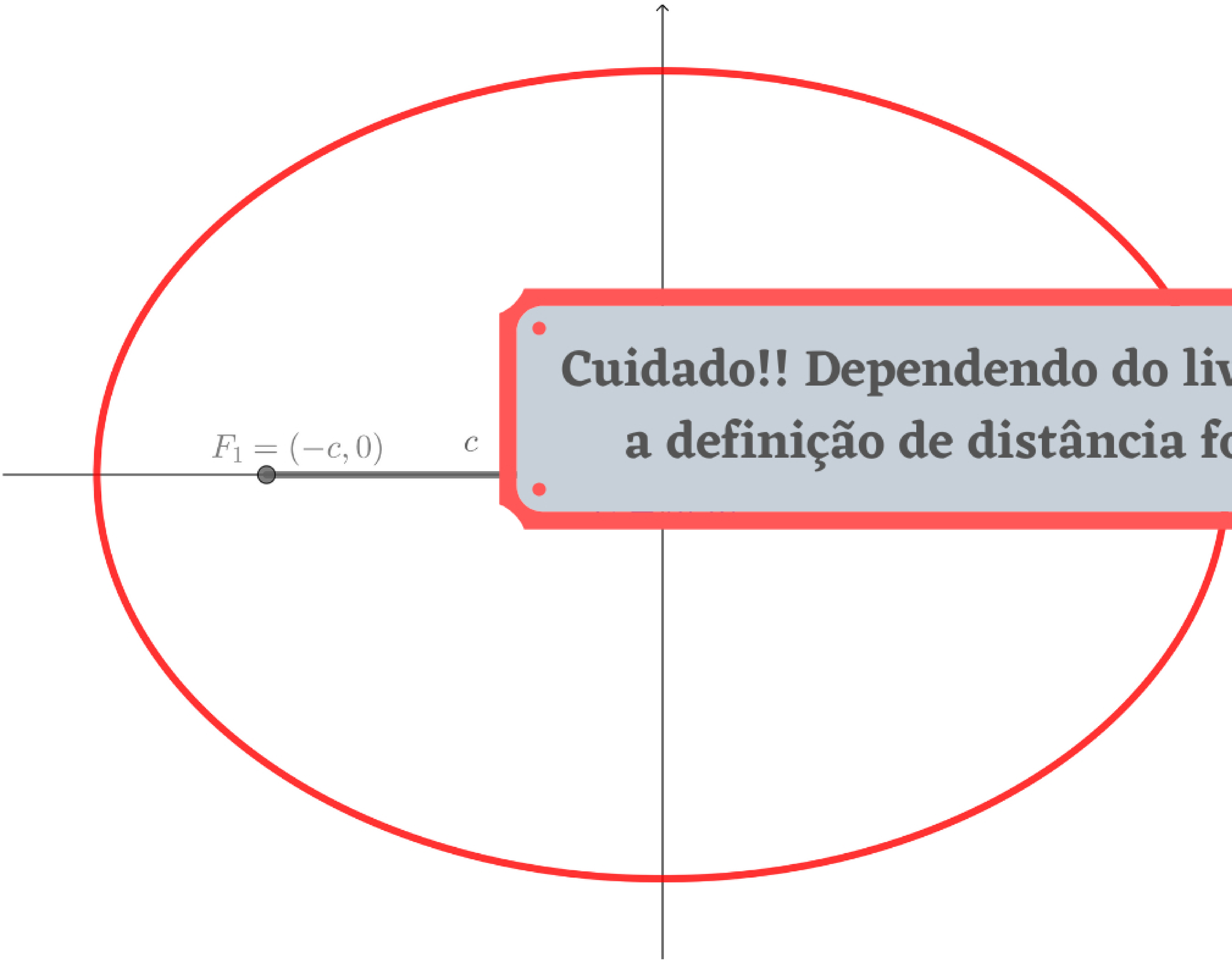
Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

Semieixo menor: qualquer um dos segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

Semieixo focal: qualquer um dos segmentos $\overline{F_1C}$ ou $\overline{CF_2}$. Sua medida: c.

Distância focal: $2c$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

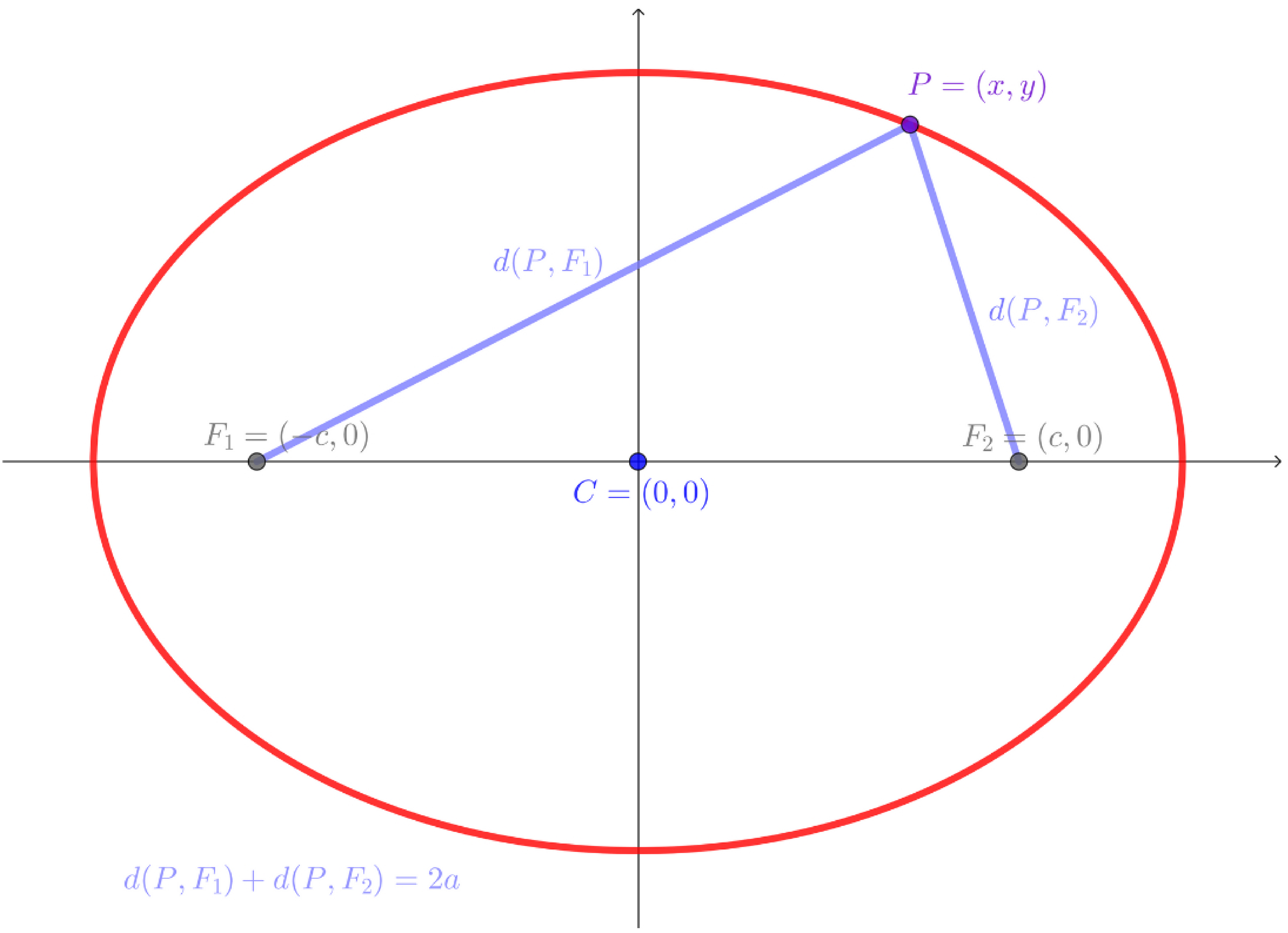
Semieixo menor: qualquer um dos segmentos ... dida: b.

... er um dos segmentos ... ida: c.

Distância focal: $2c$.

Cuidado!! Dependendo do livro, autor ou professor, a definição de distância focal pode ser c ou 2c.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

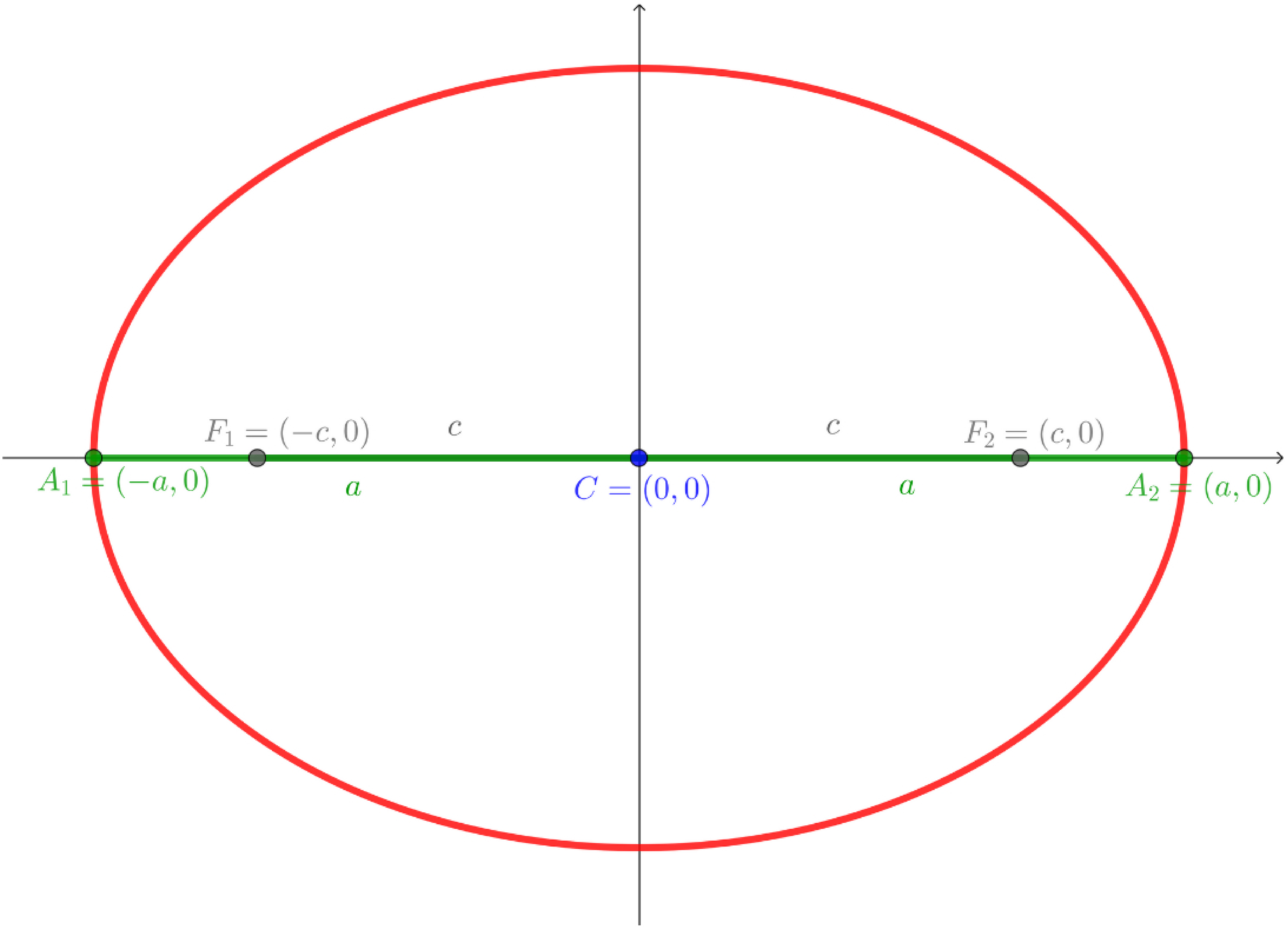
Semieixo menor: qualquer um dos segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

Semieixo focal: qualquer um dos segmentos $\overline{F_1C}$ ou $\overline{CF_2}$. Sua medida: c.

Distância focal: $2c$.

Comprimento do fio: $2a$.

ALGUMAS CONVENÇÕES



Semieixo maior: qualquer um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{CA_2}$. Sua medida: a.

Semieixo menor: qualquer um dos segmentos $\overline{B_1C}$ ou $\overline{CB_2}$. Sua medida: b.

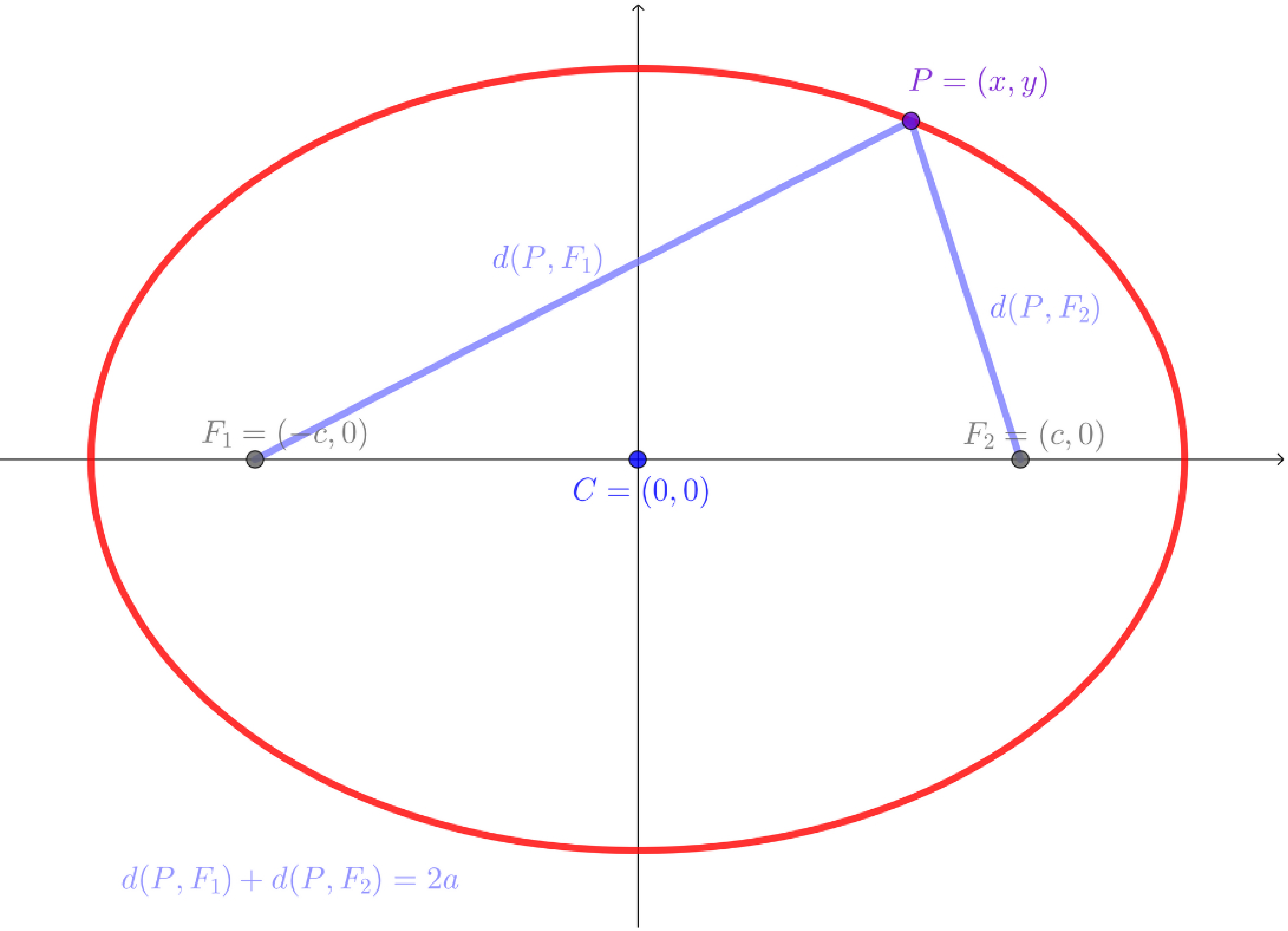
Semieixo focal: qualquer um dos segmentos $\overline{F_1C}$ ou $\overline{CF_2}$. Sua medida: c.

Distância focal: $2c$.

Comprimento do fio: $2a$.

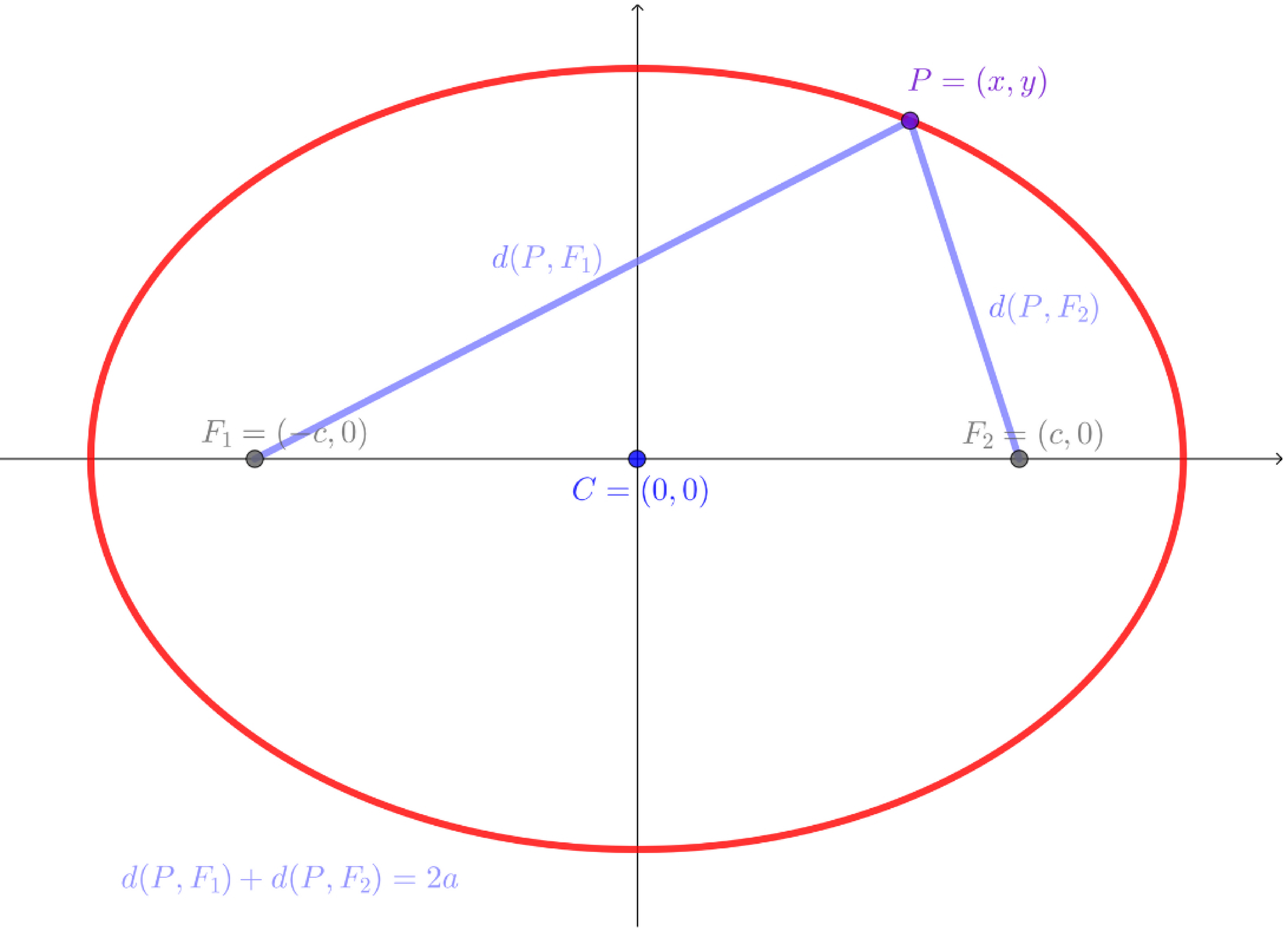
Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Usamos a definição de distância

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Trocamos uma raiz de lado

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos os dois lados ao quadrado

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

Desenvolvemos os quadrados perfeitos

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Cortamos alguns termos e ajeitamos outros

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Cortamos um fator 4

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Mudamos de folha
porque acabou o espaço

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Mesma fórmula da folha anterior

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Elevamos os dois lados ao quadrado

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2$$

Desenvolvemos os quadrados perfeitos

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

Cortamos alguns termos e ajeitamos outros

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

Ajeitamos mais um pouquinho

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Usamos a relação $a^2 = b^2 + c^2$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dividimos ambos os lados por a^2b^2 e chegamos à fórmula procurada

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1.$

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1.$

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $b = 3$ e $c = 2$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1.$

Determine uma equação da elipse centrada na origem, com eixo maior horizontal, $b = 3$ e $c = 2$.

Solução. $a^2 = 3^2 + 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{13}.$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{13})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Solução. $C = (0,0)$, $a = 5$ e $b = 4$.

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0, 0)$, $a = 5$ e $b = 4$.

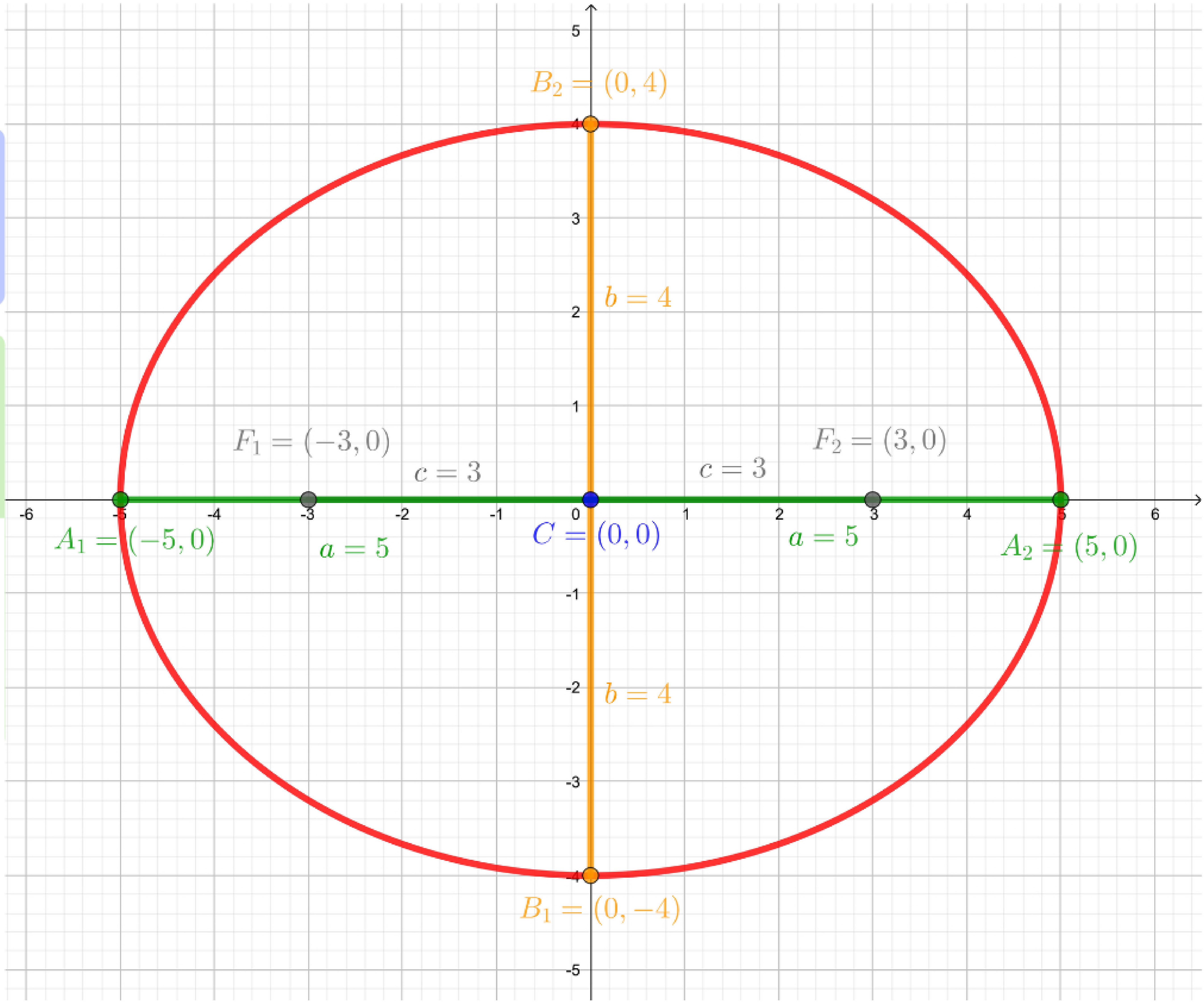
$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0,0)$, $a = 5$ e $b = 4$.

$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$



EXEMPLOS

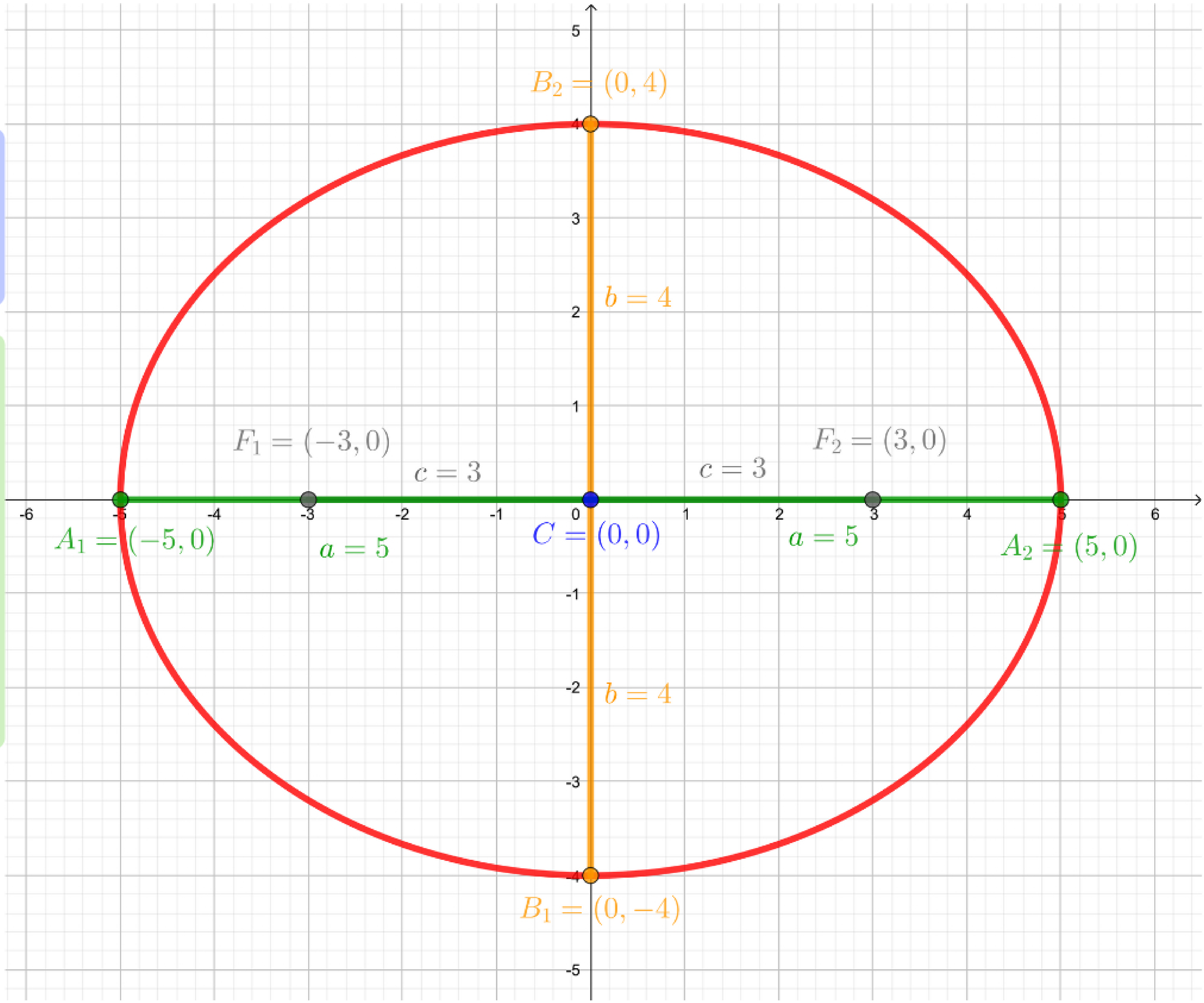
Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (0, 0)$, $a = 5$ e $b = 4$.

$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$

$A_1 = (-5, 0),\ A_2 = (5, 0),\ B_1 = (0, -4),\ B_2 = (0, 4),$

$F_1 = (-3, 0),\ F_2 = (3, 0),\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}.$



EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solução. Elipse, eixo maior horizontal,

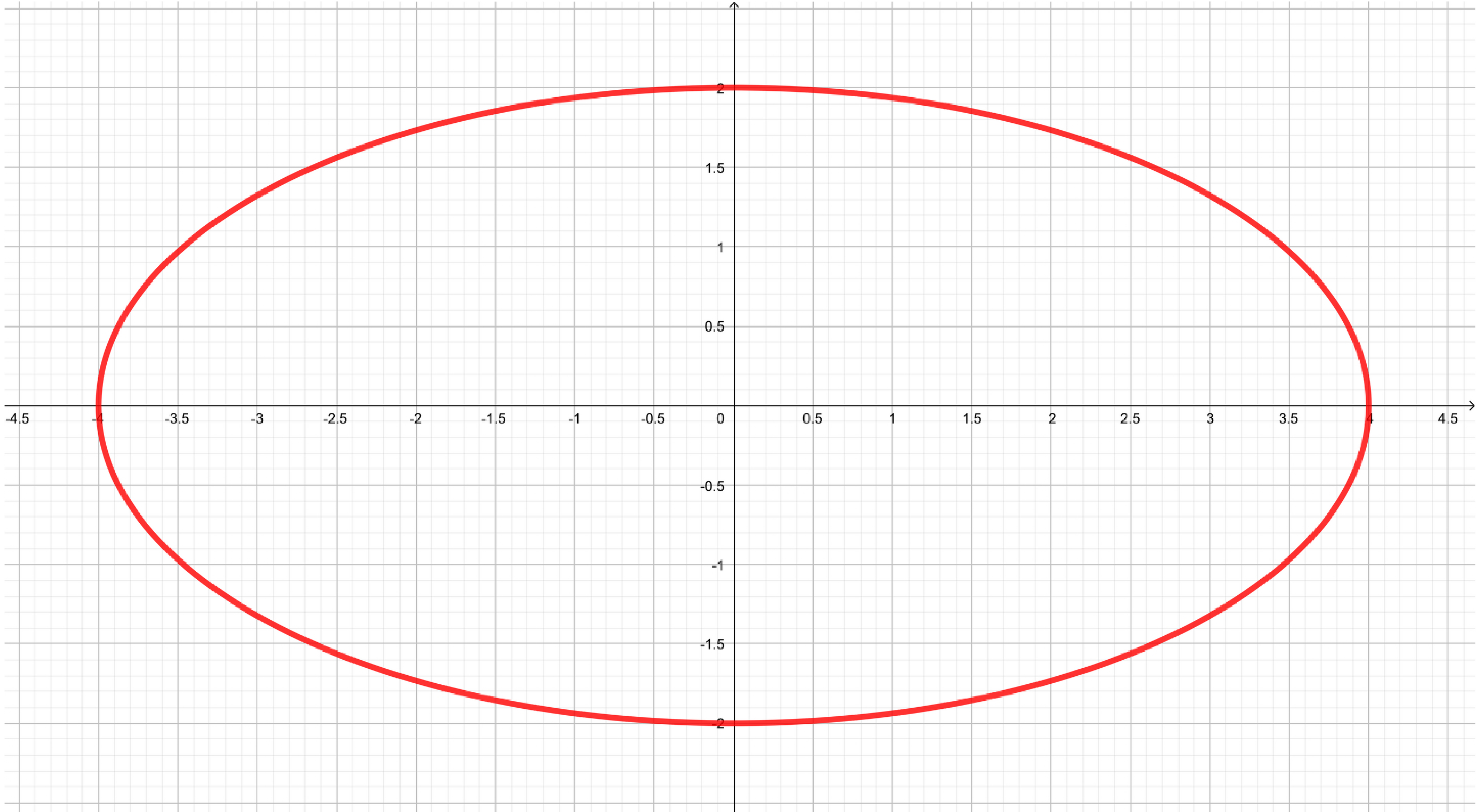
$C = (0, 0)$, $a = 4$, $b = 2$.

EXEMPLOS

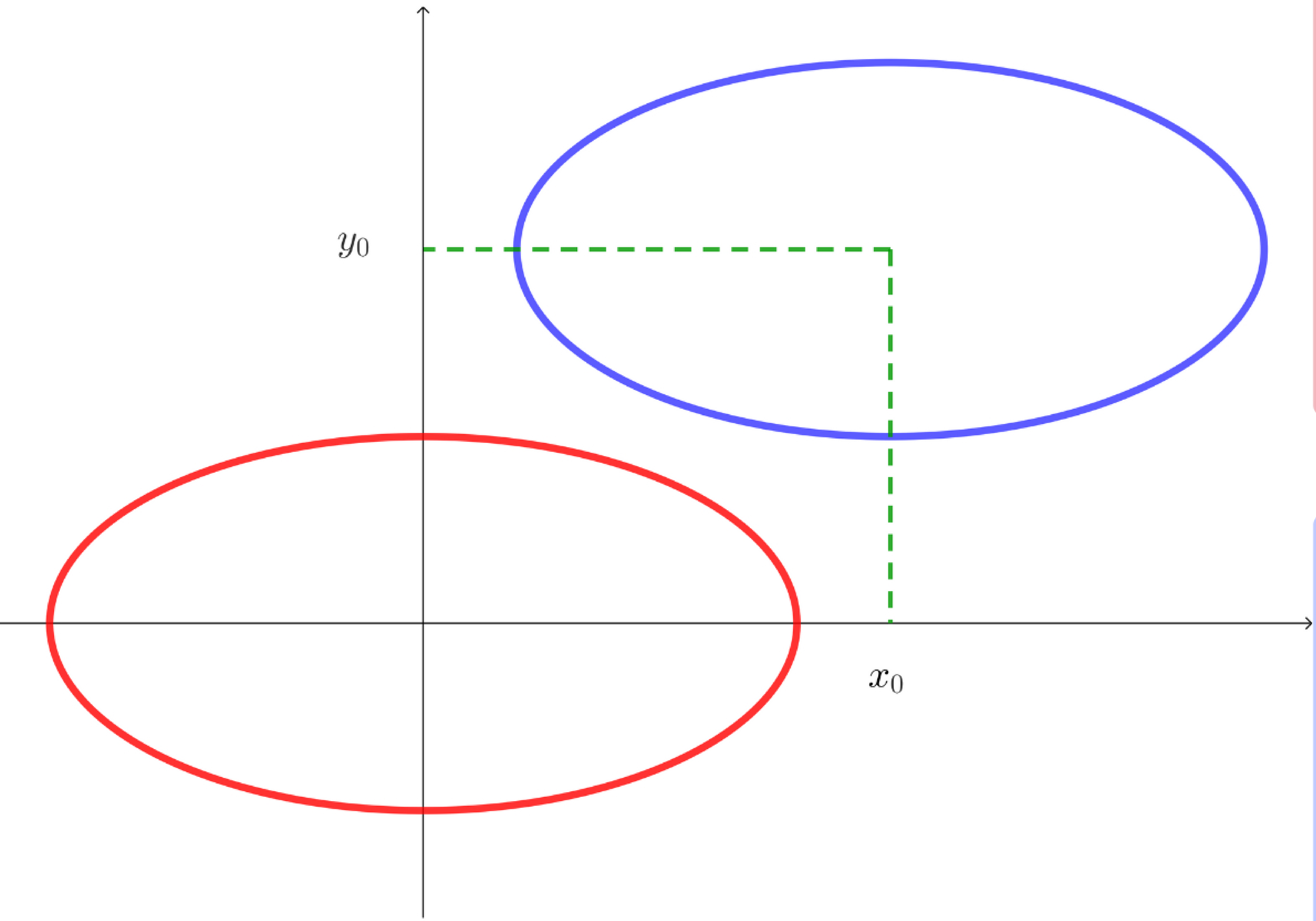
Faça o gráfico da equação $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Solução. Elipse, eixo maior horizontal,

$C=(0,0)$, $a=4$, $b=2$.



EQUAÇÃO COM CENTRO EM QUALQUER POSIÇÃO



Centro: $C = (0, 0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

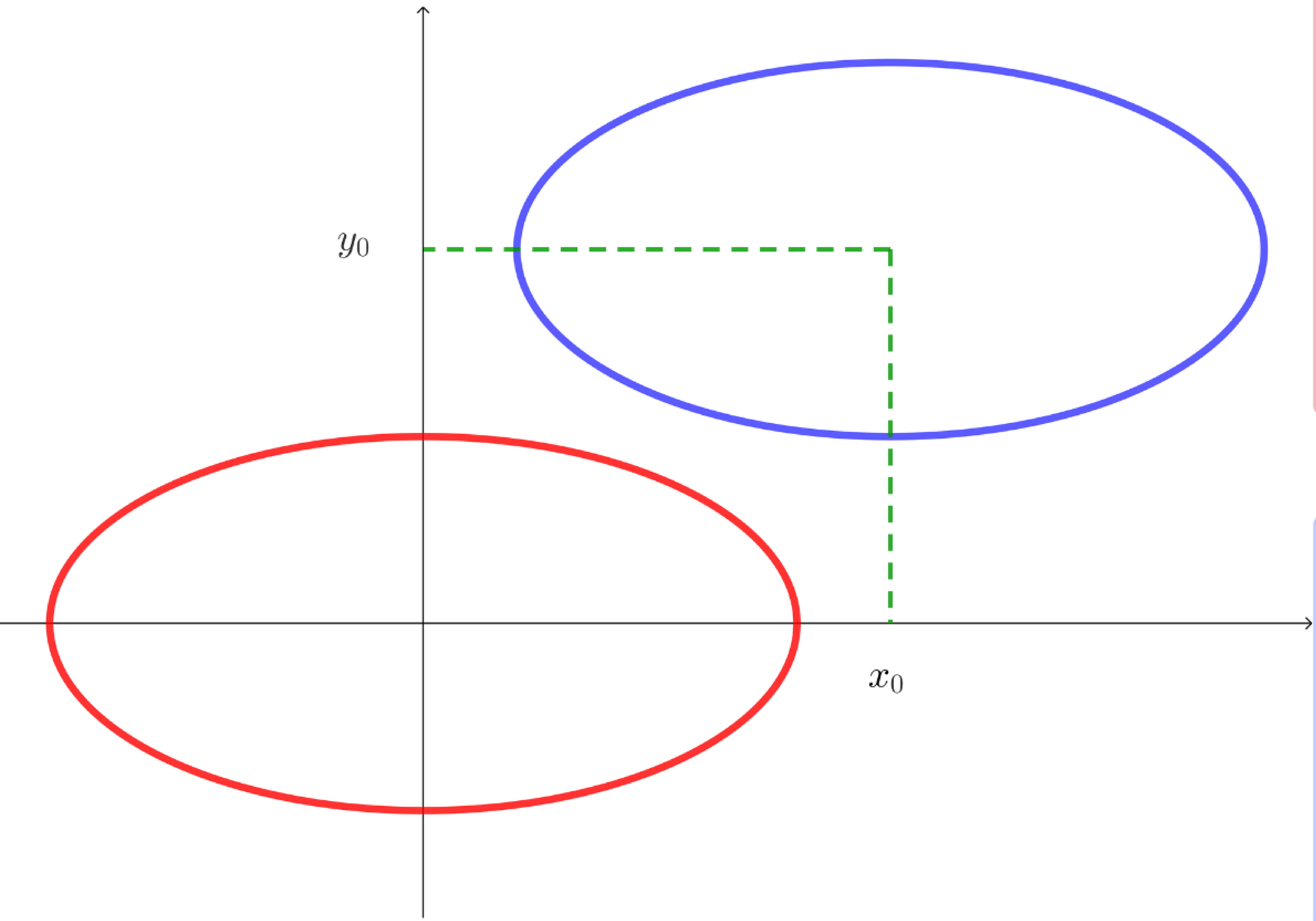
Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

EQUAÇÃO COM CENTRO EM QUALQUER POSIÇÃO



Centro: $C = (0, 0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Equação ⟷ Centro, orientação, a e b ⟷ Gráfico

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Equação

Centro, orientação, a e b

Gráfico

Elementos auxiliares:

- Parâmetros,
- Focos,
- Vértices,
- Eixos e semieixos,
- Excentricidade.

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse com $C = (-1, 4)$,
eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

EXEMPLOS

Determine uma equação da elipse com $C = (-1, 4)$,
eixo maior horizontal, $a = 3$ e $b = 1$.

Solução. $$\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{9} + (y-4)^2 = 1.$$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$.

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1.$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 5$ e $b = 4$.

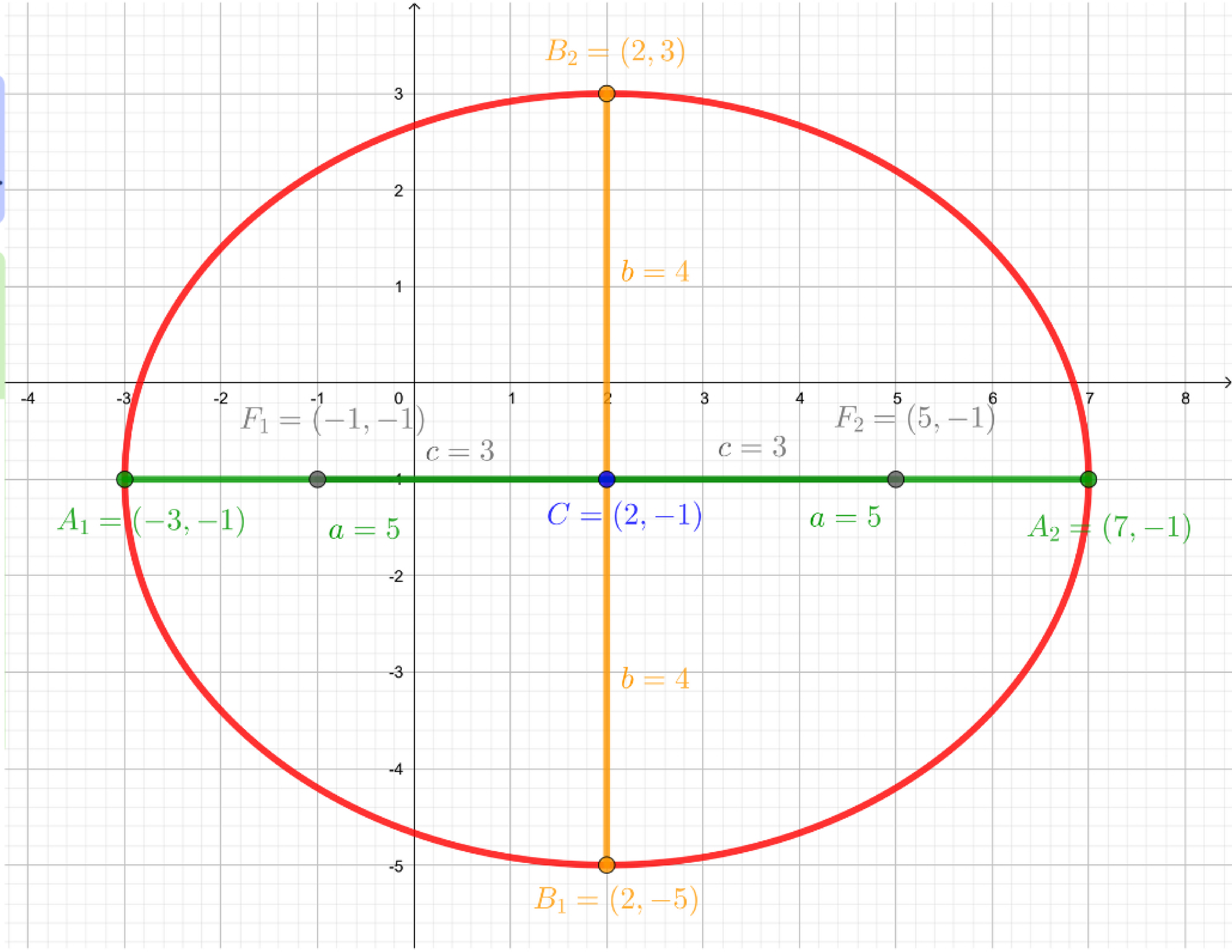
$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$

EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1.$

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 5$ e $b = 4$.

$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$



EXEMPLOS

Determine o centro, a, b, c, focos, vértices e excentricidade da elipse de equação $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$.

Solução. $C = (2, -1)$, $a = 5$ e $b = 4$.

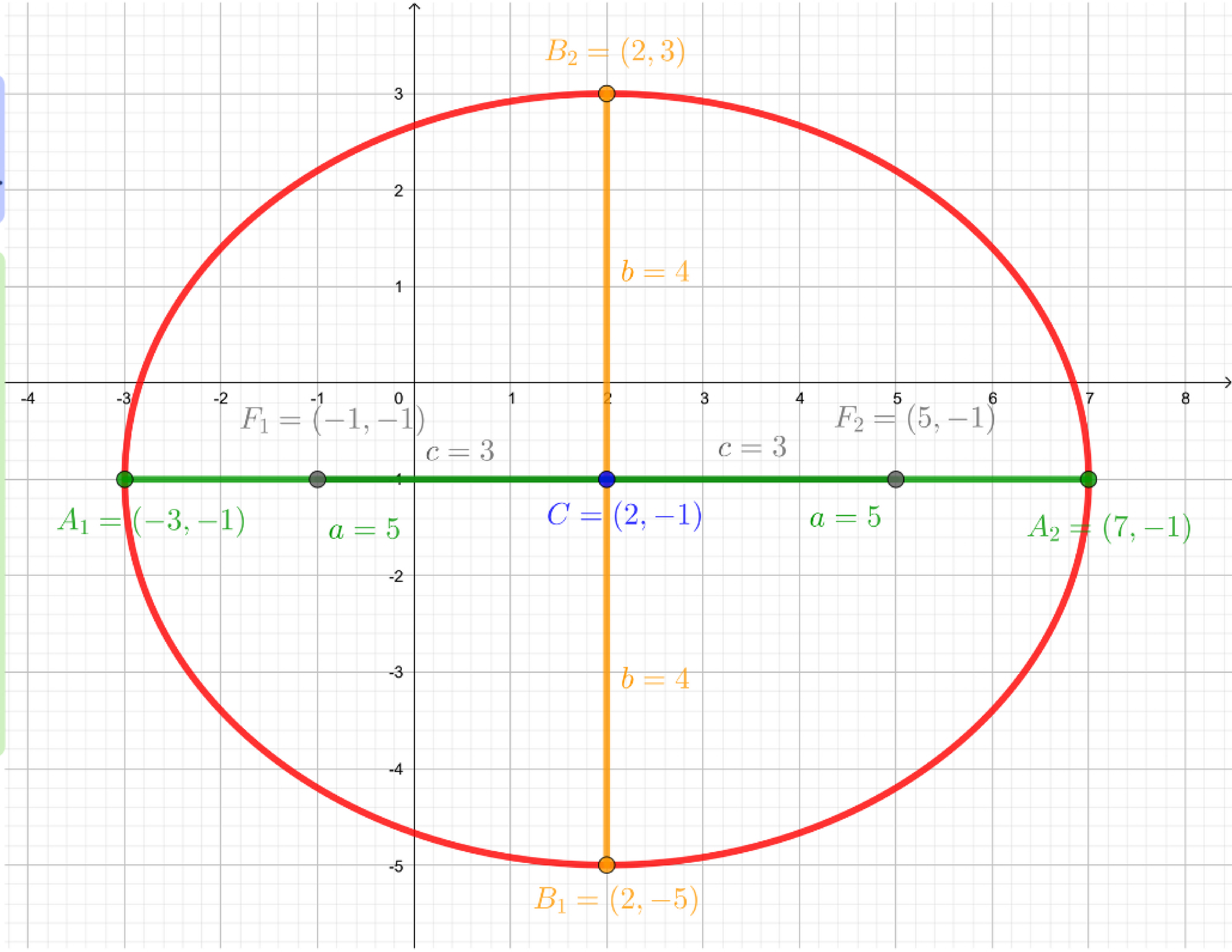
$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$

$A_1 = (2-5, -1) = (-3, -1), \quad A_2 = (2+5, -1) = (7, -1),$

$B_1 = (2, -1-4) = (2, -5), \quad B_2 = (2, -1+4) = (2, 3),$

$F_1 = (2-3, -1) = (-1, -1), \quad F_2 = (2+3, -1) = (5, -1),$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}.$



EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

Solução. Elipse,

eixo maior horizontal,

$C = (5,4)$, $a = 4$, $b = 2$.

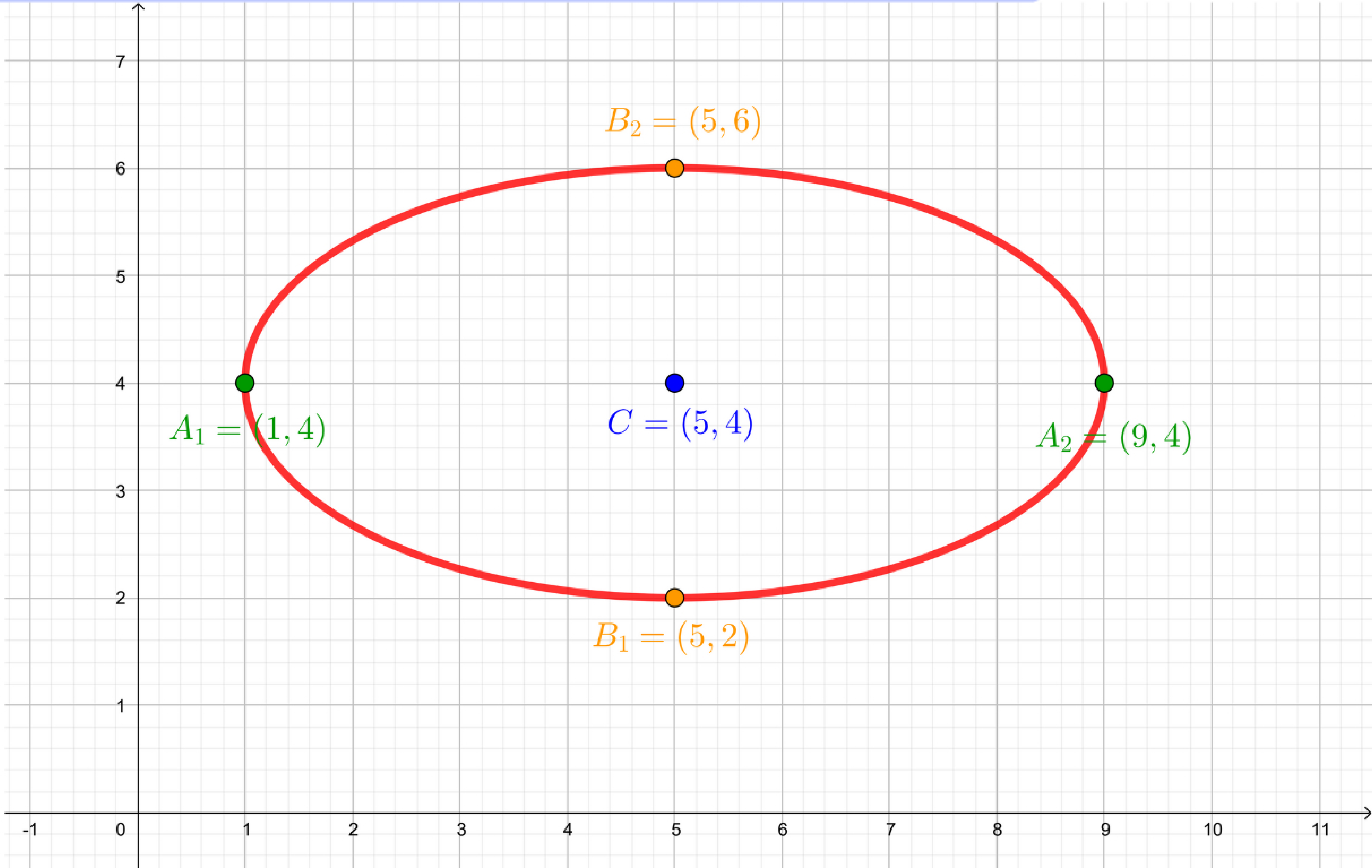
EXEMPLOS

Faça o gráfico da equação $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$

Solução. Elipse,

eixo maior horizontal,

$C = (5,4)$, $a = 4$, $b = 2.$



EQUAÇÃO COM EIXO MAIOR VERTICAL

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

EQUAÇÃO COM EIXO MAIOR VERTICAL

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo maior: horizontal

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Eixo maior: vertical

Medida do semieixo maior: a

Medida do semieixo menor: b

Equação: $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

EXERCÍCIOS

Reescreva a equação na forma padrão, classifique, encontre os elementos e faça o gráfico.

(a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0.$

(b) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0.$

(c) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 13 = 0.$

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$$

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Elipse

EXERCÍCIOS

Solução. **(a)** $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Elipse

Elementos: $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $C = (2, -3)$,

EXERCÍCIOS

Solução. (a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 36 + 16(y+3)^2 - 144 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

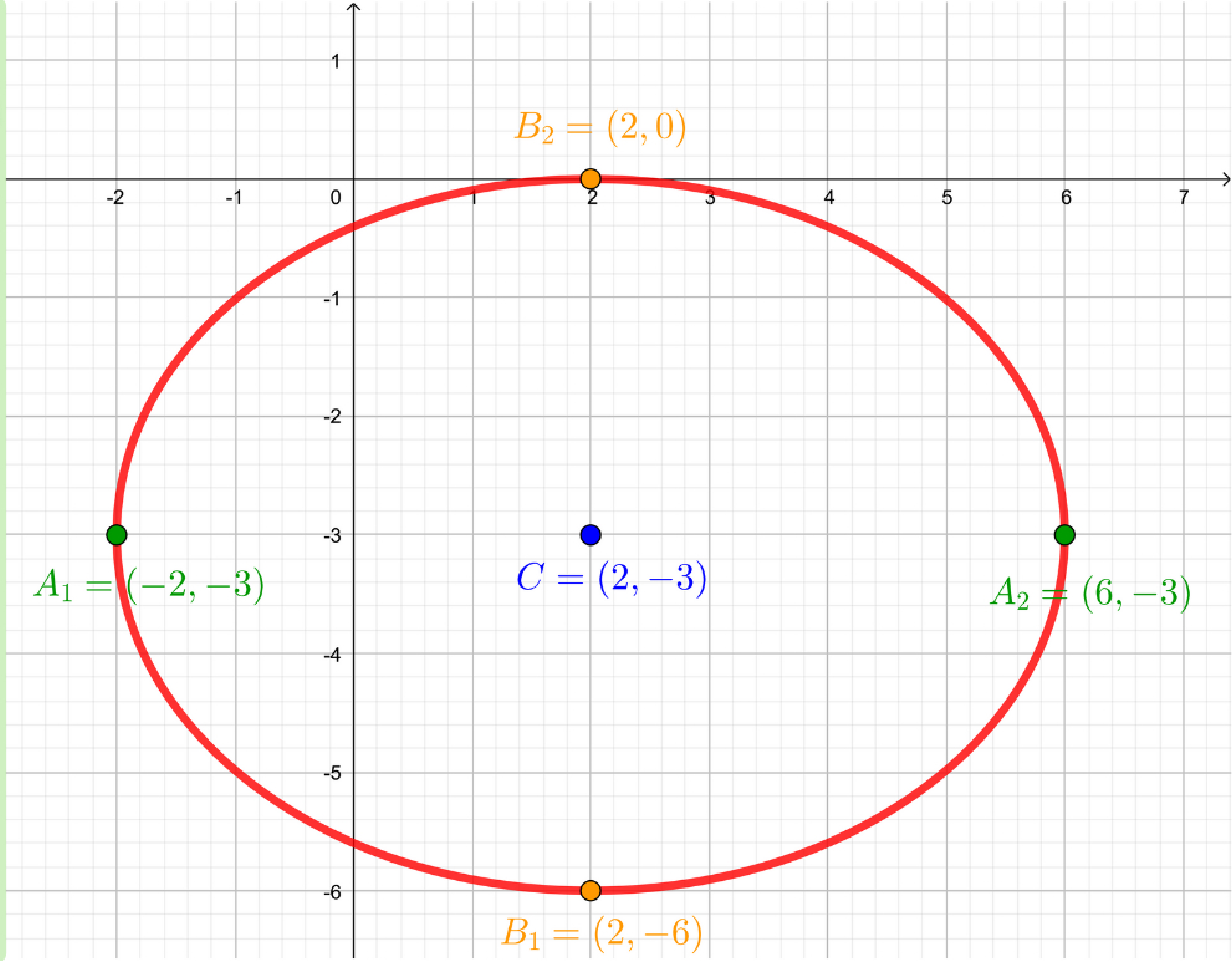
$$\Leftrightarrow \quad \frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Elipse

Elementos: $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $C = (2, -3)$, $A_1 = (-2, -3)$, $A_2 = (6, -3)$, $B_1 = (2, -6)$, $B_2 = (2, 0)$, $F_1 = (2 - \sqrt{7}, -3)$, $F_2 = (2 + \sqrt{7}, -3)$, $e = \sqrt{7}/4$.



EXERCÍCIOS

Solução. **(b)** $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 8y + 16 - 16) + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 - 144 + 9(y+4)^2 - 144 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

EXERCÍCIOS

Solução. **(b)** $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 8y + 16 - 16) + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 - 144 + 9(y+4)^2 - 144 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y+4)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

Elipse

EXERCÍCIOS

Solução. **(b)** $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 8y + 16 - 16) + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 - 144 + 9(y+4)^2 - 144 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y+4)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

Elipse

Elementos: $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $C = (3, -4)$,

EXERCÍCIOS

Solução. (b) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 8y + 16 - 16) + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 - 144 + 9(y+4)^2 - 144 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(x-3)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

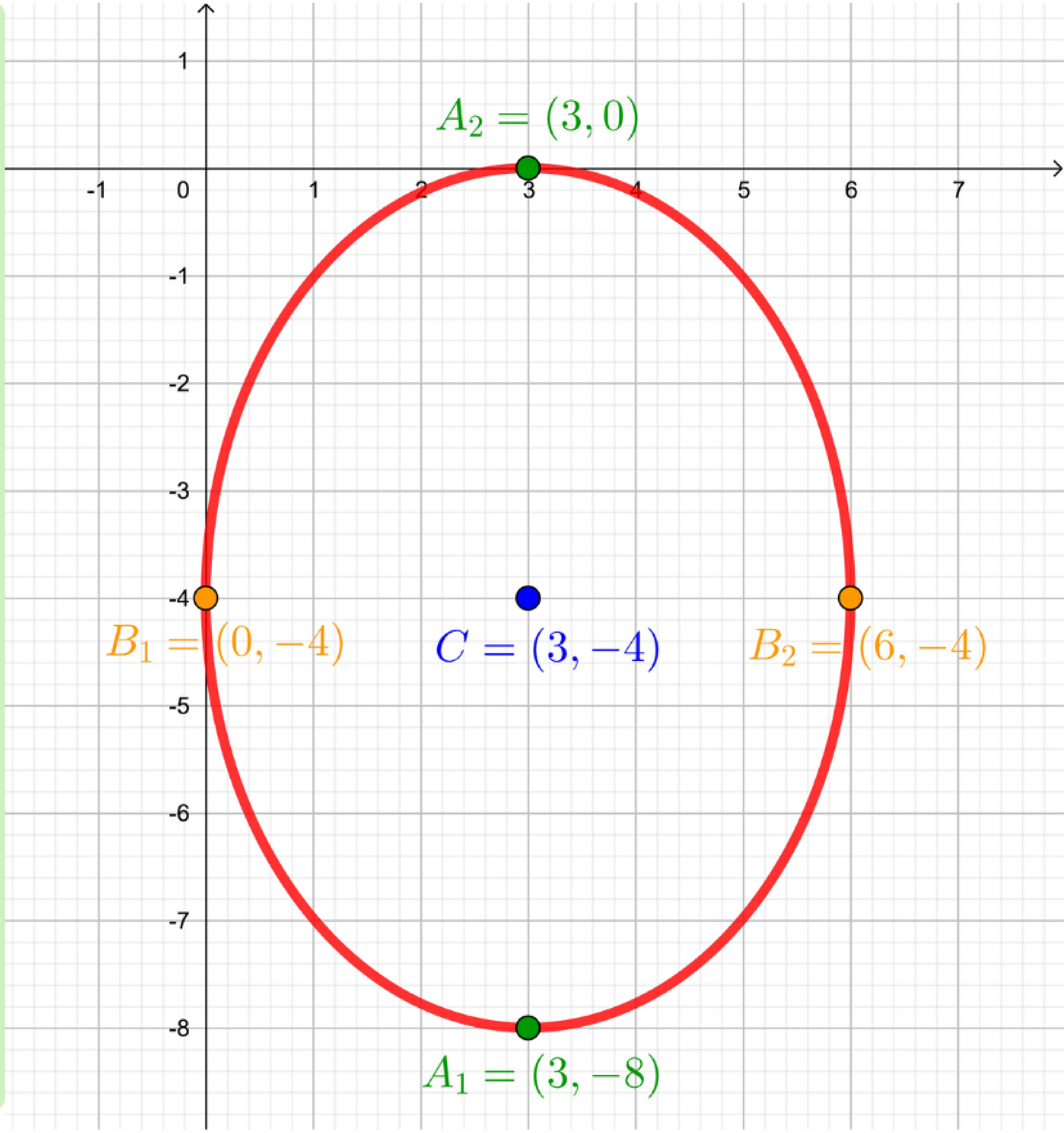
$$\Leftrightarrow \quad \frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y+4)^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

Elipse

Elementos: $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $C = (3, -4)$,
$A_1 = (3, -8)$, $A_2 = (3, 0)$, $B_1 = (0, -4)$, $B_2 = (6, -4)$,
$F_1 = (3, -4 - \sqrt{7})$, $F_2 = (3, -4 + \sqrt{7})$, $e = \sqrt{7}/4$.



EXERCÍCIOS

Solução. **(c)** $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 - 4 + 9(y+1)^2 - 9 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 0$$

EXERCÍCIOS

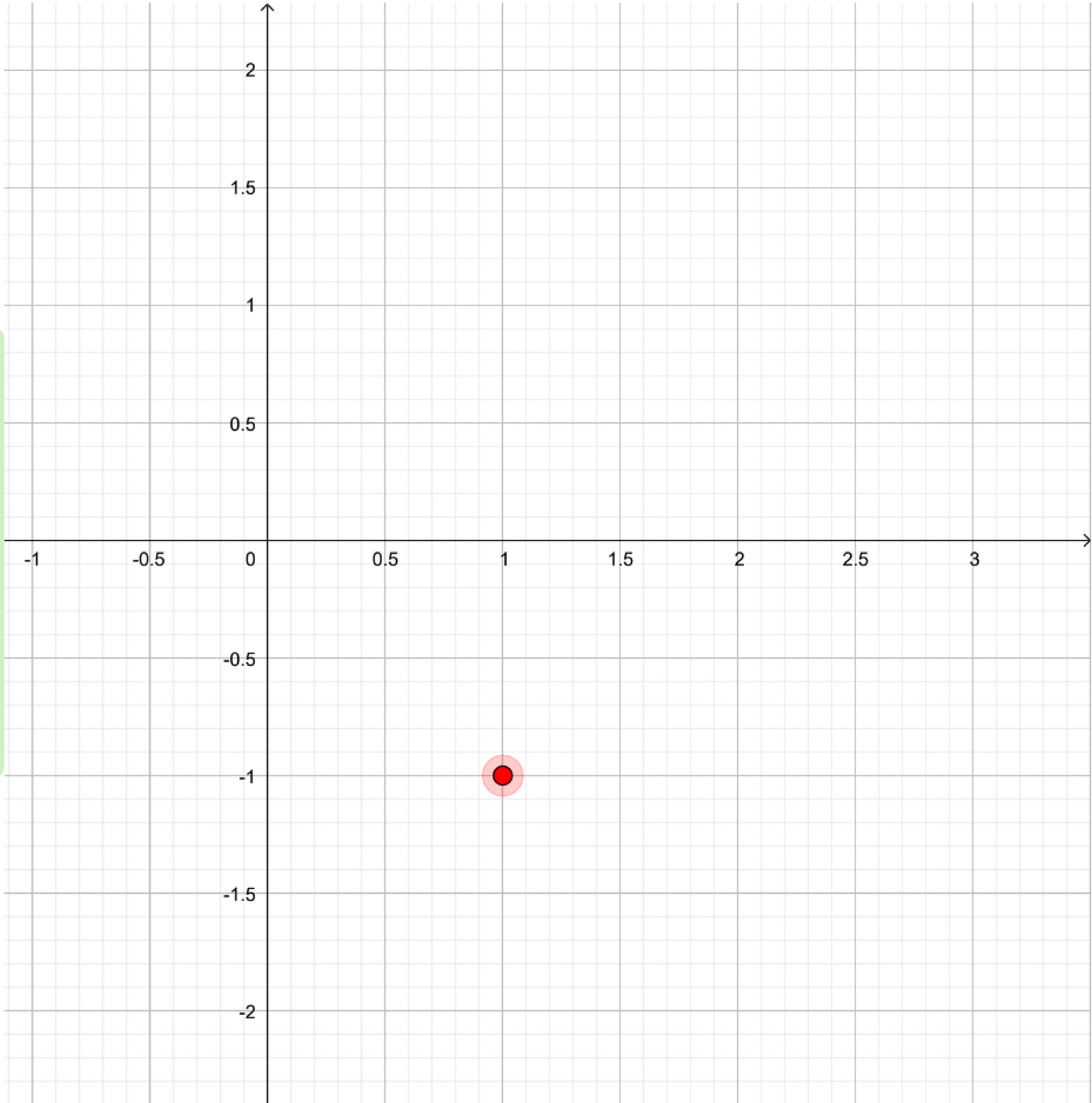
Solução. (c) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 - 4 + 9(y+1)^2 - 9 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 0$$

Elementos: o gráfico é um único ponto.



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2, 4)$, um foco em $(5, 4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

2. Determine uma equação para a elipse com vértices $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$ e excentricidade $e = 2/3$.

EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2,4)$, um foco em $(5,4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

Solução. 1.

$C = (2,4)$.

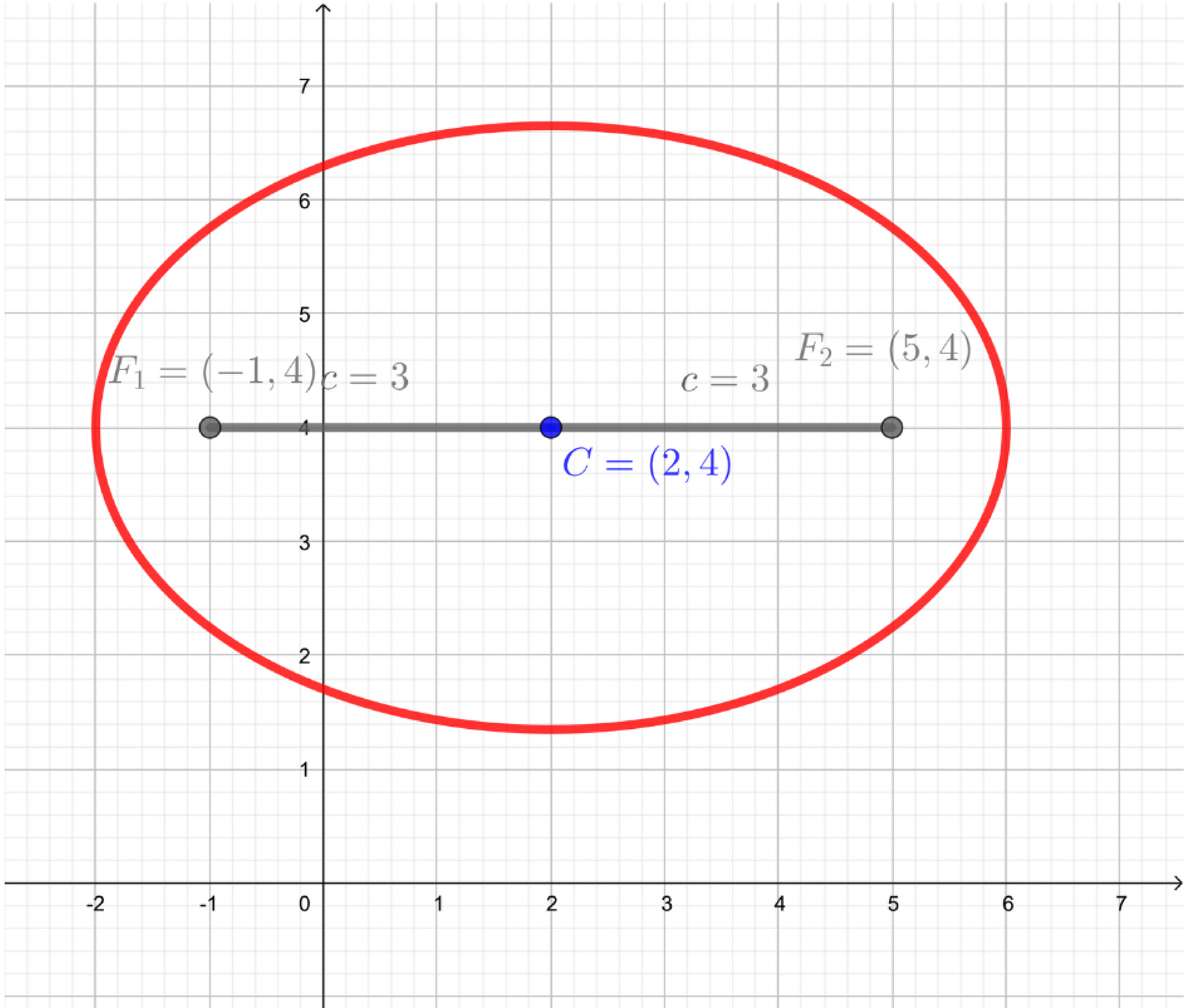
EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2,4)$, um foco em $(5,4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

Solução. 1.

$C = (2,4)$.

Como um foco está em $(5,4)$ e $C = (2,4)$, então $c = 3$ e o eixo maior é horizontal.



EXERCÍCIOS

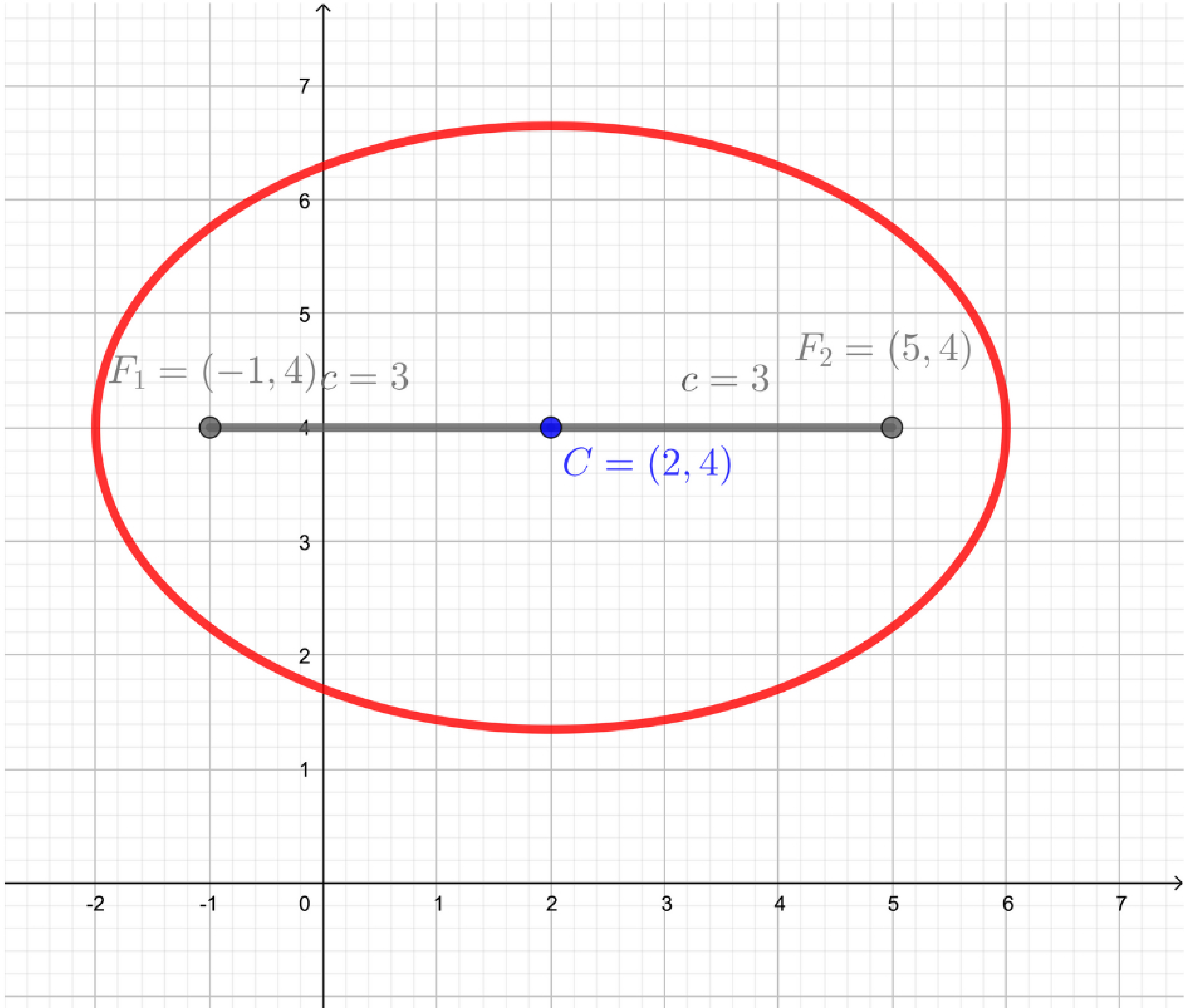
1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2,4)$, um foco em $(5,4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

Solução. 1.

$C = (2,4)$.

Como um foco está em $(5,4)$ e $C = (2,4)$, então $c = 3$ e o eixo maior é horizontal.

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{4}$ e $c = 3$, então $a = 4$.



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2,4)$, um foco em $(5,4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

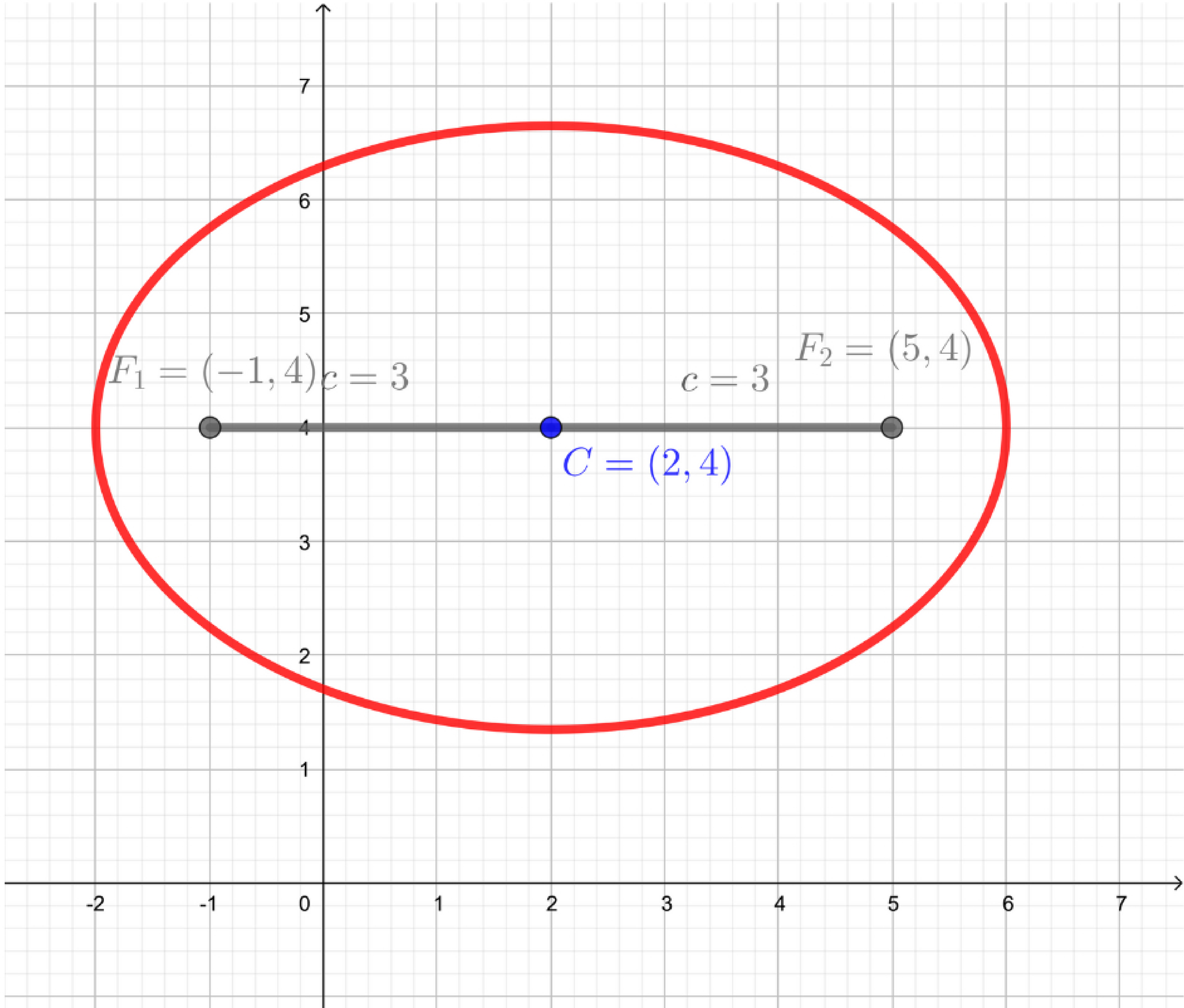
Solução. 1.

$C = (2,4)$.

Como um foco está em $(5,4)$ e $C = (2,4)$, então $c = 3$ e o eixo maior é horizontal.

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{4}$ e $c = 3$, então $a = 4$.

$4^2 = b^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{7}$.



EXERCÍCIOS

1. Determine uma equação para a elipse com centro em $(2,4)$, um foco em $(5,4)$ e excentricidade $e = 3/4$.

Solução. 1.

$C = (2,4)$.

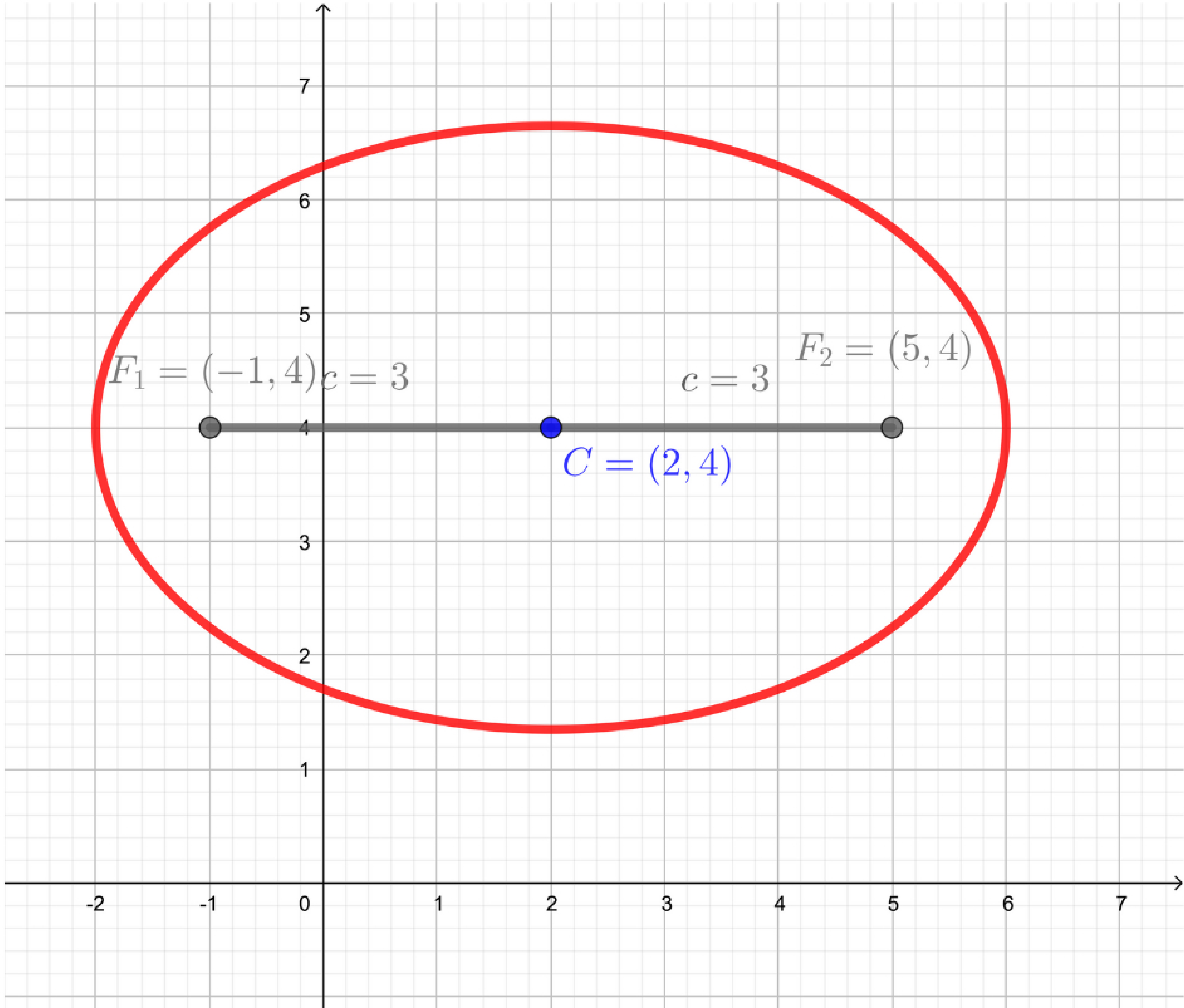
Como um foco está em $(5,4)$ e $C = (2,4)$, então $c = 3$ e o eixo maior é horizontal.

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{4}$ e $c = 3$, então $a = 4$.

$4^2 = b^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{7}$.

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{(\sqrt{7})^2} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1.$$

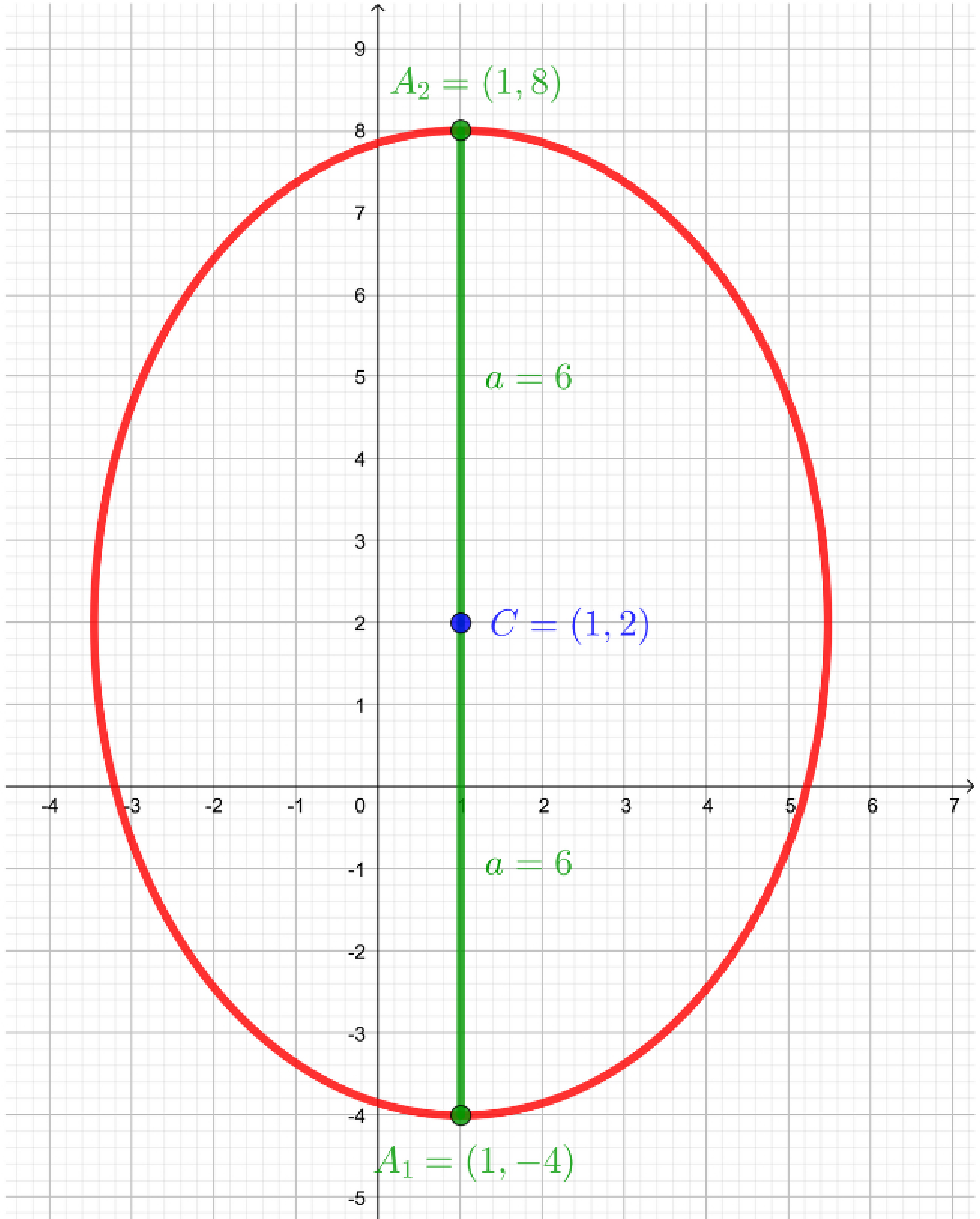


EXERCÍCIOS

2. Determine uma equação para a elipse com vértices $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$ e excentricidade $e = 2/3$.

Solução. 2.

Como $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$,
então $C = (1, 2)$ e o eixo maior é vertical.



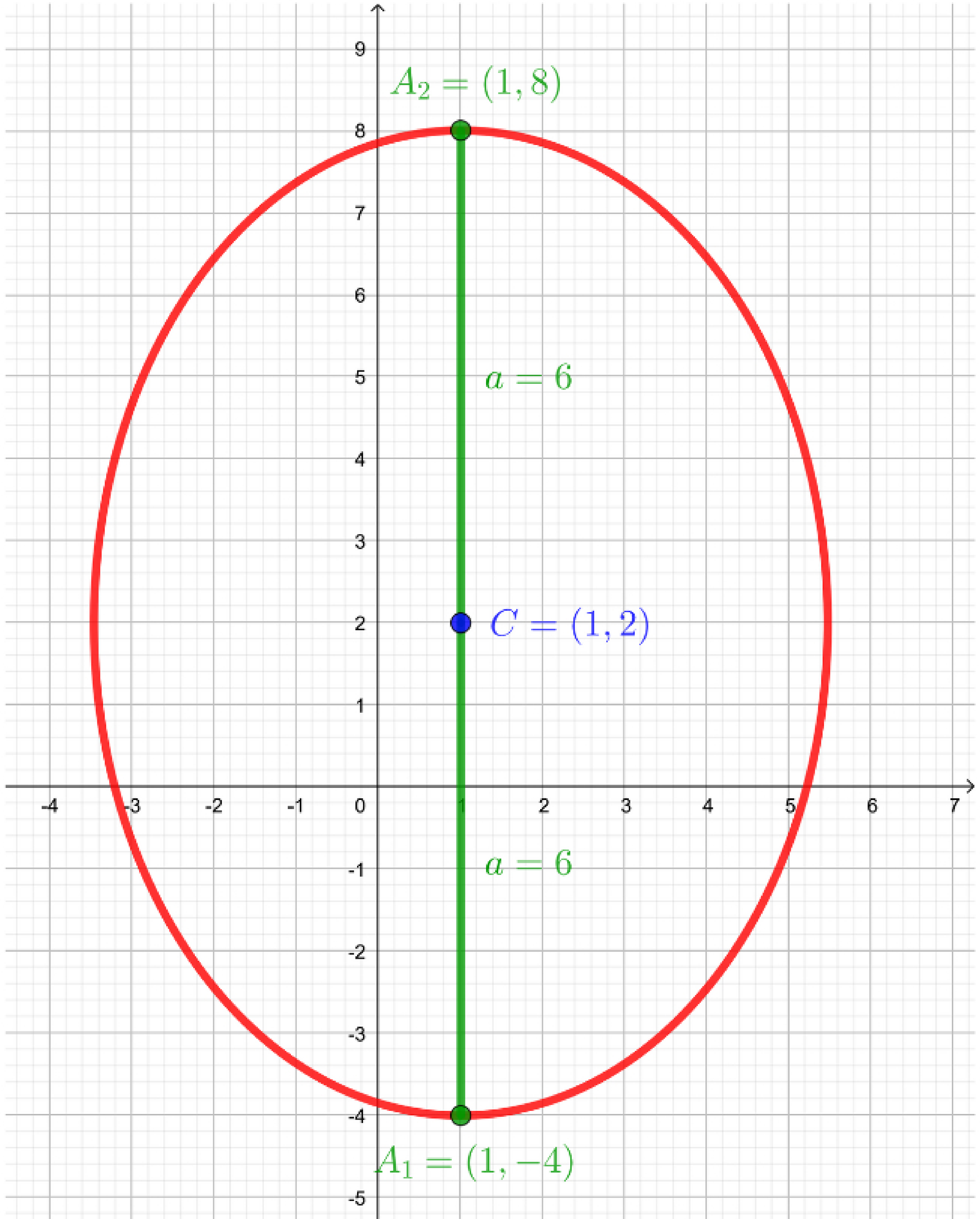
EXERCÍCIOS

2. Determine uma equação para a elipse com vértices $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$ e excentricidade $e = 2/3$.

Solução. 2.

Como $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$, então $C = (1, 2)$ e o eixo maior é vertical.

$a = 6$ e como $e = 2/3$, então $c = 4$.



EXERCÍCIOS

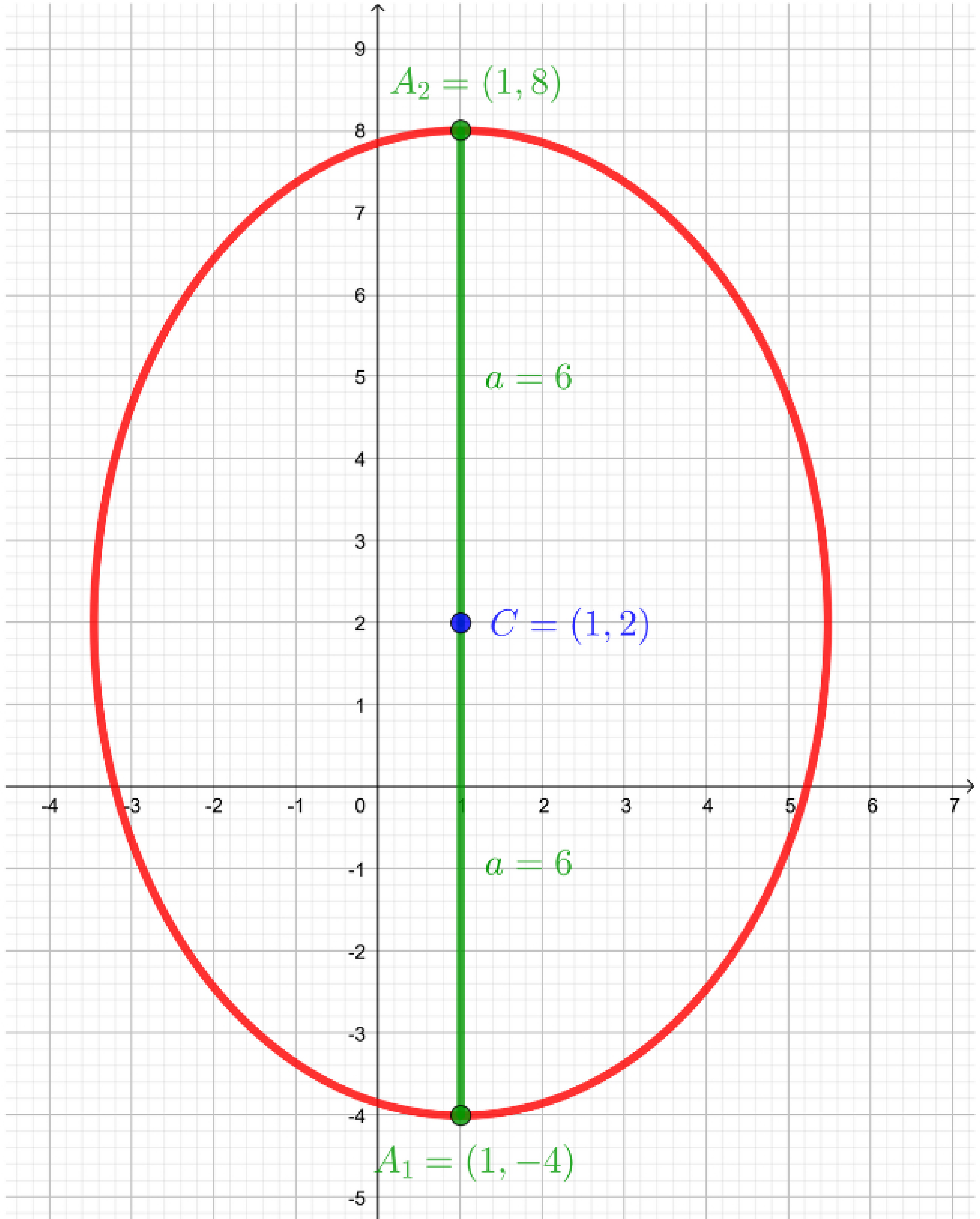
2. Determine uma equação para a elipse com vértices $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$ e excentricidade $e = 2/3$.

Solução. 2.

Como $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$, então $C = (1, 2)$ e o eixo maior é vertical.

$a = 6$ e como $e = 2/3$, então $c = 4$.

$6^2 = b^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = 2\sqrt{5}.$



EXERCÍCIOS

2. Determine uma equação para a elipse com vértices $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$ e excentricidade $e = 2/3$.

Solução. 2.

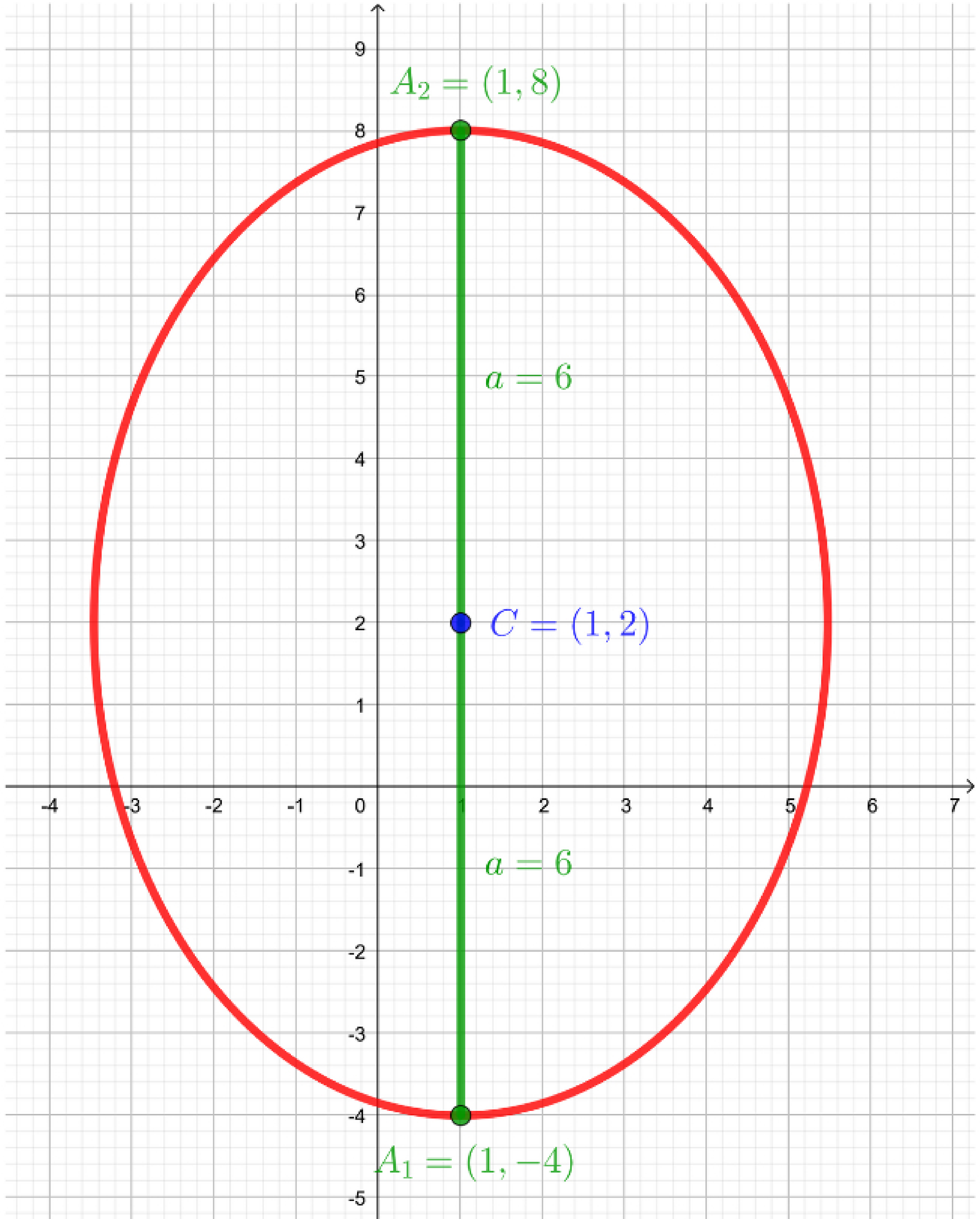
Como $A_1 = (1, -4)$ e $A_2 = (1, 8)$, então $C = (1, 2)$ e o eixo maior é vertical.

$a = 6$ e como $e = 2/3$, então $c = 4$.

$6^2 = b^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = 2\sqrt{5}.$

$$\frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1.$$



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dependendo da definição, uma circunferência pode ser vista como um caso particular de uma elipse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dependendo da definição, uma circunferência pode ser vista como um caso particular de uma elipse.

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que "a" sempre é maior do que "b".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dependendo da definição, uma circunferência pode ser vista como um caso particular de uma elipse.

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que "a" sempre é maior do que "b".

Com o centro, a orientação, "a" e "b", você pode encontrar todos os elementos e fazer o gráfico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dependendo da definição, uma circunferência pode ser vista como um caso particular de uma elipse.

Se você possui a equação, coloque-a na forma padrão, extraia o centro, "a" e "b" e cuide da orientação. Lembre que "a" sempre é maior do que "b".

Com o centro, a orientação, "a" e "b", você pode encontrar todos os elementos e fazer o gráfico.

Se você possui informações sobre o gráfico ou elementos, use-as para descobrir o centro, a orientação, "a" e "b". Com essas informações, você pode encontrar a equação.

Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.