21. $\int_0^1 t \cosh t\, dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3 \cos x\, dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\, dy$

26. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x) dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\, dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\, dx$

29. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\, dr$

31. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\, dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\, ds$

33–38 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

33. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

37. $\int x \ln(1 + x)\, dx$

38. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

39–42 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável usando o gráfico da função e de sua primitiva ($C = 0$).

39. $\int (2x + 3)e^x\, dx$

40. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

41. $\int x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

43. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

44. (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x\, dx$.

(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x\, dx$.

45. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

46. Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

47–50 Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

47. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

48. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

49. $\operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

51. Use o Exercício 47 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

52. Use o Exercício 48 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

53–54 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

53. $y = xe^{-0,4x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

54. $y = 5 \ln x, \quad y = x \ln x$

55–56 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

55. $y = x \operatorname{sen} x, \quad y = (x - 2)^2$

56. $y = \operatorname{arctg} 3x, \quad y = \frac{1}{2} x$

57–60 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

57. $y = \cos(\pi x/2), \; y = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant 1$; em torno do eixo y

58. $y = e^x, \; y = e^{-x}, \; x = 1$; em torno do eixo y

59. $y = e^{-x}, \; y = 0, \; x = -1, \; x = 0$; em torno de $x = 1$

60. $y = e^x, \; x = 0, \; y = \pi$; em torno do eixo x

61. Encontre o valor médio de $f(x) = x^2 \ln x$ no intervalo $[1, 3]$.

62. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo o combustível) seja m, que o combustível seja consumido a uma taxa r, e que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante t é dado pela seguinte equação:

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

em que g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3\,000$ m/s, ache a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

63. Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?