Equivalência entre ER e AF

Profa. Jerusa Marchi[1]

[1]Departamento de Informática e Estatística
Universidade Federal de Santa Catarina

Linguagens Regulares

- Sabemos que Linguagens Regulares são reconhecidas por AF (Determinísticos e Não Determinísticos)
- Expressões Regulares descrevem linguagens.
- Para demonstrar que ER $\leftrightarrow$ AF, devemos mostrar que:
  - Cada linguagem definida por uma ER é também definida por um AF
  - Cada linguagem definida por um AF é também definida por uma ER

De ER para AF

- **Teorema:** Cada linguagem definida por uma ER é também definida por um autômato finito.
- **Prova:** Suponha L=L(R) para alguma ER R.
Mostra-se que L = L(E) para algum AFND-ε E com:
  1. Exatamente um estado de aceitação
  2. Nenhuma transição voltando para o estado inicial
  3. Nenhuma transição saindo do estado de aceitação
- A prova é construída por indução baseada na estrutura de R, seguindo as definições recursivas das Expressões Regulares vistas anteriormente:

De ER para AF

- **Prova (continuação).**
  BASE: Considera-se os três casos base.
  1. Se R = ε então L(R) = $\{\varepsilon\}$.
  2. Se R = $\emptyset$ então L(R) = $\emptyset$.
  3. Se R = a para algum $a \in \Sigma$ então L(R) = $\{a\}$.

De ER para AF

- **Prova (continuação).**
  INDUÇÃO: Considera-se as três operações regulares sobre ER ($*$, $+$, .). Sejam R e S ER menores
  1. R + S. O autômato para reconhecer a união (R + S) é obtido a partir da união dos autômatos que reconhecem R e S. Para tal cria-se um estado inicial novo que alcança por ε os estados iniciais de R e S respectivamente. Quando uma palavra de L(R) ou de L(S) é aceita, uma transição ε leva a um estado de aceitação novo e único.

De ER para AF

- **Prova (continuação).**
  INDUÇÃO: Considera-se as três operações regulares sobre ER ($*$, $+$, .). Sejam R e S ER menores

  2. R.S. O autômato para reconhecer a concatenação RS é obtido criando-se transições ε que levam dos estados de aceitação do autômato que reconhece R ao estado inicial do autômato que reconhece S. Os estados de aceitação do autômato que reconhece R deixam de existir.

De ER para AF

- **Prova (continuação).**
  INDUÇÃO: Considera-se as três operações regulares sobre ER ($*$, $+$, .). Sejam R e S ER menores

  3. R*. O autômato para reconhecer o fecho de R é obtido da seguinte forma:
     1. Cria-se um novo estado inicial, com uma transição ε para o estado inicial do autômato que reconhece R.
     2. Cria-se um novo estado final, com uma transição ε dos estados de aceitação do autômato que reconhece R para este novo estado.
     3. Os estados de aceitação deixam de sê-lo.
     4. Cria-se uma transição ε que leva do estado inicial ao estado de aceitação, permitindo o reconhecimento de ε.

De ER para AF

- **Prova (continuação).**
  INDUÇÃO: Considera-se as três operações regulares sobre ER ($*$, $+$, .). Sejam R e S ER menores
  4. (R). O autômato para R também é um autômato para (R), pois os parênteses não alteram a linguagem definida para a expressão.

Exemplos

- $(a.b \mid a)^*$
- $(a \mid b)^* aba$
- $(0 \mid 1)^* 1 (0 \mid 1)$

De AF para ER

- **Teorema:** Cada linguagem definida por um autômato finito é também definida por uma ER.
- **Prova:** Seja A uma linguagem Regular, então A é aceita por um AFD. Mostra-se como converter o AFD em uma expressão regular.
  - Para tanto faz-se uso de um novo tipo de AF, chamado de *autômato finito não determinístico generalizado*.
  - Mostra-se como converter um AFD em um AFND generalizado e depois o AFND generalizado em uma ER

AFND Generalizado

- Um Autômato Finito Não Determinístico Generalizado é um AFND no qual as transições podem ter quaisquer expressões regulares como rótulos
- O AFNDG deve atender as seguintes condições:
  - O estado inicial tem setas de transição para todos os outros estados, mas nenhuma seta chegando
  - Existe apenas um estado de aceitação e ele tem setas chegando de todos os outros estados, mas nenhuma seta saindo (os estados inicial e de aceitação são diferentes)
  - Os demais estados devem ter setas saindo para cada estado, menos para o estado inicial, e chegando de cada estado, menos do estado final

AFND Generalizado

- Um AFD pode facilmente ser convertido em um AFNDG.
  - adiciona-se um novo estado incial com uma transição ε dele para o estado inicial do AFD original
  - adiciona-se um novo estado de aceitação, alcançado por transições ε a partir dos estados de aceitação do AFD original
  - se quaisquer transições têm múltiplos rótulos, substitui-se cada uma por uma única transição cujo rótulo é a união dos rótulos anteriores
  - adiciona-se transições com rótulos $\emptyset$ entre os estados que não tenham transições
    - ★ a linguagem não é alterada, pois transições $\emptyset$ nunca serão usadas

AFND Generalizado

- Um Autômato Finito Não Determinístico Generalizado é uma 5-tupla

$$M = (K, \Sigma, \delta, q_{inicio}, q_{aceita})$$

onde:

  - K é o conjunto finito de estados
  - Σ é o alfabeto de entrada
  - $\delta : (K - q_{aceita}) \times (K - q_{inicio}) \rightarrow \mathcal{R}$ é a função de transição, onde $\mathcal{R}$ é o conjunto de todas as ER sobre Σ.
  - q_{inicio} é o estado inicial
  - q_{aceita} é o estado de aceitação

De AF para ER

- **Prova (continuação).**
  Seja M um AFNDG com k estados, construído conforme a definição. Como os estados de aceitação e inicial são diferentes, sabemos de $k \geq 2$. Se $k > 2$, constrói-se um AFNDG M' equivalente com $k - 1$ estados. Este passo é repetido até que o AFNDG seja reduzido a $k = 2$, com uma transição única do estado inicial ao final e cujo rótulo é a ER equivalente.

De AF para ER

- **Prova (continuação).**
  A conversão de M em uma ER segue os seguintes passos:
  1. Seja k o número de estados de M
  2. Se $k = 2$, então M deve consistir de um estado incial e um estado de aceitação e uma única transição rotulada com uma ER R. Retorne R.
  3. Se $k > 2$, selecione qualquer $q_{rem} \in K$ diferente de q_{inicio} e de q_{aceita} e seja M' o AFNDG $(K', \Sigma, \delta', q_{inicio}, q_{aceita})$, onde:

$$Q' = Q - q_{rem}$$

De AF para ER

- **Prova (continuação).**
  3 (cont.) e para qualquer $q_i \in K - q_{aceita}$ e qualquer $q_j \in K' - q_{inicio}$ seja

$$\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$$

  para $R_1 = \delta(q_i, q_{rem}), R_2 = \delta(q_{rem}, q_{rem}), R_3 = \delta(q_{rem}, q_j)$ e $R_4 = \delta(q_i, q_j)$

  3 Com o novo AFNDG M' como novo M, execute novamente a conversão

Exemplos

- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}$ e w tenha pelo menos um $b\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}$ e w começa e termina com $a\}$