4.3. Condições de paralelismo, perpendicularidade e coplanaridade entre retas

Professores:

Alda Dayana Mattos Mortari

Christian Wagner

Giuliano Boava (autor e voz)

Leandro Batista Morgado

María Rosario Astudillo Rojas

Mykola Khrypchenko

PRÉ-REQUISITOS

Saber o significado dos produtos escalar, vetorial e misto.

Saber que uma reta r é unicamente determinada por um ponto A que pertence a r e um vetor não nulo $\vec{v}$ que dá a direção de r.

Saber usar ponto e vetor para montar equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas.

Saber encontrar um ponto e um vetor diretor da reta a partir de qualquer tipo de equação.

Saber que uma equação de reta serve para dizer quais pontos pertencem ou não à reta.

Saber verificar se um determinado ponto pertence ou não à reta usando qualquer tipo de equação.

Saber quando duas equações representam ou não a mesma reta.

PRÉ-REQUISITOS

Saber o significado dos produtos escalar, vetorial e misto.

Saber que uma reta r é unicamente determinada por um ponto A que pertence a r e um vetor não nulo $\vec{v}$ que dá a direção de r.

Saber usar ponto e vetor para montar equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas.

Saber encontrar um ponto e um vetor diretor da reta a partir de qualquer tipo de equação.

Saber que uma equação de reta serve para dizer quais pontos pertencem ou não à reta.

Saber verificar se um determinado ponto pertence ou não à reta usando qualquer tipo de equação.

Saber quando duas equações representam ou não a mesma reta.

PRÉ-REQUISITOS

Saber o significado dos produtos escalar, vetorial e misto.

Saber que uma reta r é unicamente determinada por um ponto A que pertence a r e um vetor não nulo $\vec{v}$ que dá a direção de r.

Saber usar ponto e vetor para montar equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas.

Saber encontrar um ponto e um vetor diretor da reta a partir de qualquer tipo de equação.

Saber que uma equação de reta serve para dizer quais pontos pertencem ou não à reta.

Saber verificar se um determinado ponto pertence ou não à reta usando qualquer tipo de equação.

Saber quando duas equações representam ou não a mesma reta.

PRÉ-REQUISITOS

Saber o significado dos produtos escalar, vetorial e misto.

Saber que uma reta r é unicamente determinada por um ponto A que pertence a r e um vetor não nulo $\vec{v}$ que dá a direção de r.

Saber usar ponto e vetor para montar equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas.

Saber encontrar um ponto e um vetor diretor da reta a partir de qualquer tipo de equação.

Saber que uma equação de reta serve para dizer quais pontos pertencem ou não à reta.

Saber verificar se um determinado ponto pertence ou não à reta usando qualquer tipo de equação.

Saber quando duas equações representam ou não a mesma reta.

PRÉ-REQUISITOS

Saber o significado dos produtos escalar, vetorial e misto.

Saber que uma reta r é unicamente determinada por um ponto A que pertence a r e um vetor não nulo $\vec{v}$ que dá a direção de r.

Saber usar ponto e vetor para montar equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas.

Saber encontrar um ponto e um vetor diretor da reta a partir de qualquer tipo de equação.

Saber que uma equação de reta serve para dizer quais pontos pertencem ou não à reta.

Saber verificar se um determinado ponto pertence ou não à reta usando qualquer tipo de equação.

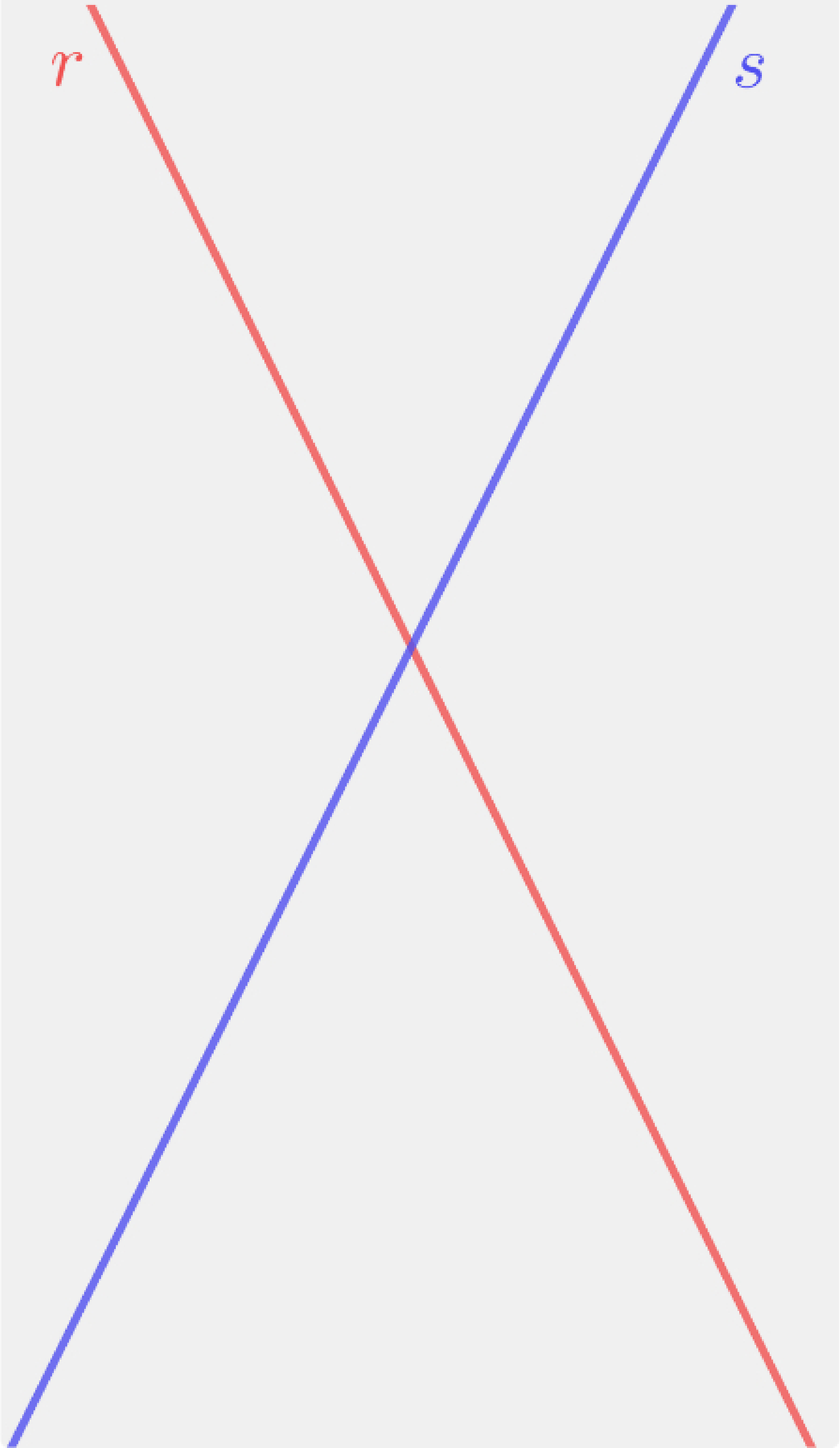
Saber quando duas equações representam ou não a mesma reta.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

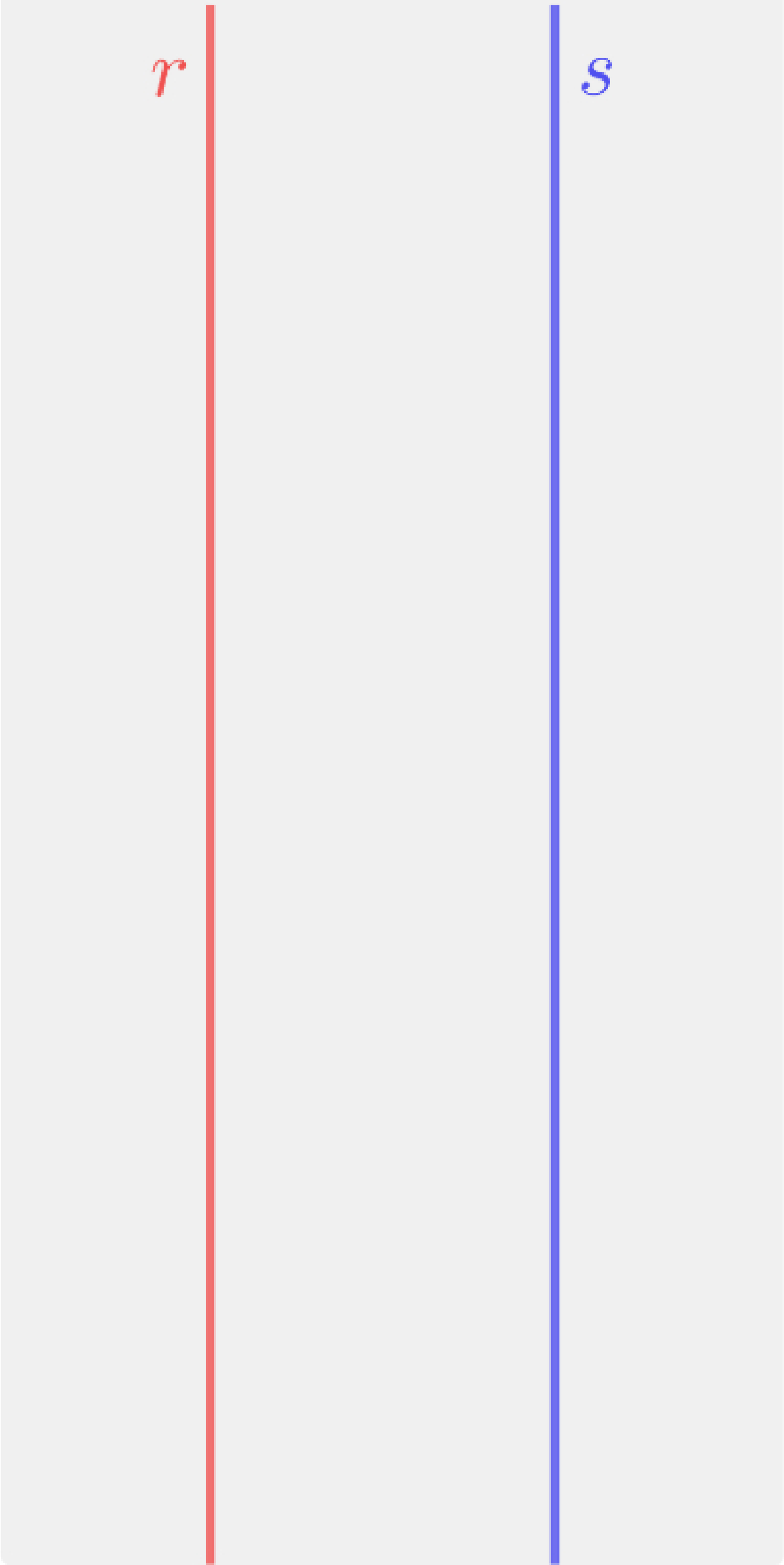
Posições relativas em $\mathbb{R}^2$.

Coincidentes

Concorrentes

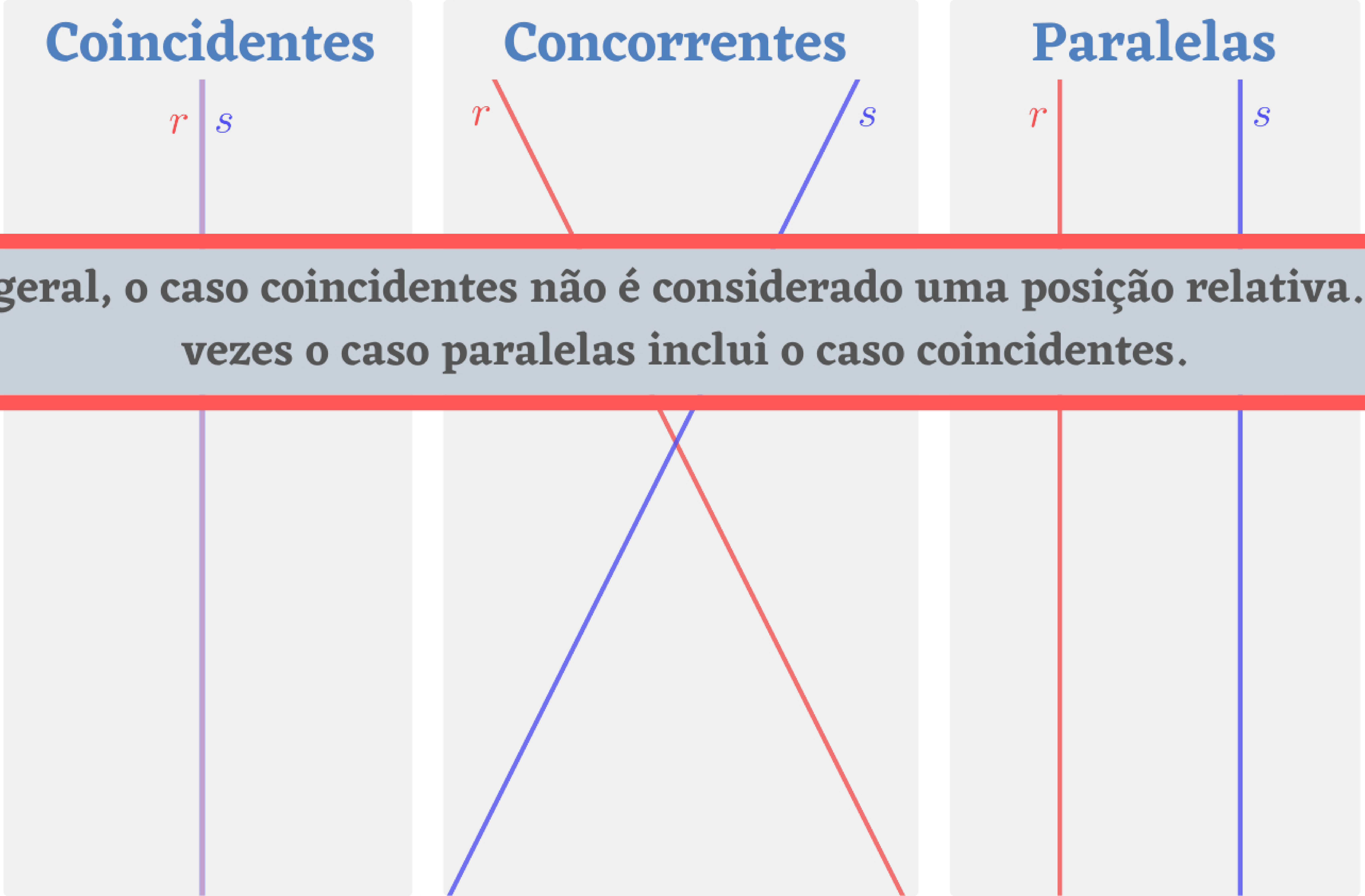


Paralelas



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Posições relativas em $\mathbb{R}^2$.



Em geral, o caso coincidentes não é considerado uma posição relativa. E às vezes o caso paralelas inclui o caso coincidentes.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Situação adicional em $\mathbb{R}^3$.

Reversas

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Coincidentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *A própria reta.*

Paralelas.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

O que faremos nessa aula é descrever essas situações de forma algébrica.

Concorrentes.

- São coplanares? *Sim.*
- Como é a interseção? *Um único ponto.*

Reversas.

- São coplanares? *Não.*
- Como é a interseção? *Conjunto vazio.*

RETAS COINCIDENTES E PARALELAS

Reta r: ponto A_1 e vetor $\vec{v}_1$.

Reta s: ponto A_2 e vetor $\vec{v}_2$.

Já vimos na aula passada que r e s são coincidentes se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são paralelos.

Observe que o caso em que as retas são paralelas e não coincidentes temos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

RETAS COINCIDENTES E PARALELAS

Reta r: ponto A_1 e vetor $\vec{v}_1$.

Reta s: ponto A_2 e vetor $\vec{v}_2$.

Já vimos na aula passada que r e s são coincidentes se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são paralelos.

Observe que o caso em que as retas são paralelas e não coincidentes temos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

RETAS COINCIDENTES E PARALELAS

Reta r: ponto A_1 e vetor $\vec{v}_1$.

Reta s: ponto A_2 e vetor $\vec{v}_2$.

Já vimos na aula passada que r e s são coincidentes se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são paralelos.

Observe que o caso em que as retas são paralelas e não coincidentes temos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$

$$r_2 : \begin{cases} x &= & 1 &+ & 2t \\ y &= & -1 &- & 2t \\ z &= & & & t \end{cases}$$

$r_3 : \dfrac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$

$$r_4 : \begin{cases} x &= & 1 & & \\ y &= & -8 &- & 2z \end{cases}$$

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$$

$$r_2 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 - 2t \\ z &= t \end{cases}$$

$$r_3 : \frac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$$

$$r_4 : \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -8 - 2z \end{cases}$$

$$r_1 :\ A_1 = (1, -2, -3); \vec{v}_1 = (0, -2, 1).$$

$$r_2 :\ A_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (2, -2, 1).$$

$$r_3 :\ A_3 = (2, 0, 3); \vec{v}_3 = (0, 2, -1).$$

$$r_4 :\ A_4 = (1, -8, 0); \vec{v}_4 = (0, -2, 1).$$

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$r_3 : \dfrac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$

$$r_4 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -8 - 2z \end{cases}$$

$r_1 :\ A_1 = (1, -2, -3); \vec{v}_1 = (0, -2, 1).$

$r_2 :\ A_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (2, -2, 1).$

$r_3 :\ A_3 = (2, 0, 3); \vec{v}_3 = (0, 2, -1).$

$r_4 :\ A_4 = (1, -8, 0); \vec{v}_4 = (0, -2, 1).$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ são paralelos e $\vec{v}_2$ não é paralelo a nenhum outro.

Logo, r_2 não é nem coincidente nem paralela às outras.

$\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 2, 6)$; $\overrightarrow{A_1A_4} = (0, -6, 3)$ e $\overrightarrow{A_3A_4} = (-1, -8, -3)$.

Como apenas $\overrightarrow{A_1A_4}$ é paralelo aos vetores diretores, então r_1 e r_4 são coincidentes e r_3 é paralela a r_1 e r_4.

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$r_3 : \dfrac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$

$$r_4 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -8 - 2z \end{cases}$$

$r_1 :\ A_1 = (1, -2, -3); \vec{v}_1 = (0, -2, 1).$

$r_2 :\ A_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (2, -2, 1).$

$r_3 :\ A_3 = (2, 0, 3); \vec{v}_3 = (0, 2, -1).$

$r_4 :\ A_4 = (1, -8, 0); \vec{v}_4 = (0, -2, 1).$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ são paralelos e $\vec{v}_2$ não é paralelo a nenhum outro.

Logo, r_2 não é nem coincidente nem paralela às outras.

$\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 2, 6)$; $\overrightarrow{A_1A_4} = (0, -6, 3)$ e $\overrightarrow{A_3A_4} = (-1, -8, -3)$.

Como apenas $\overrightarrow{A_1A_4}$ é paralelo aos vetores diretores, então r_1 e r_4 são coincidentes e r_3 é paralela a r_1 e r_4.

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$r_3 : \dfrac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$

$$r_4 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -8 - 2z \end{cases}$$

$r_1 :\ A_1 = (1, -2, -3); \vec{v}_1 = (0, -2, 1).$

$r_2 :\ A_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (2, -2, 1).$

$r_3 :\ A_3 = (2, 0, 3); \vec{v}_3 = (0, 2, -1).$

$r_4 :\ A_4 = (1, -8, 0); \vec{v}_4 = (0, -2, 1).$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ são paralelos e $\vec{v}_2$ não é paralelo a nenhum outro.

Logo, r_2 não é nem coincidente nem paralela às outras.

$\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 2, 6)$; $\overrightarrow{A_1A_4} = (0, -6, 3)$ e $\overrightarrow{A_3A_4} = (-1, -8, -3)$.

Como apenas $\overrightarrow{A_1A_4}$ é paralelo aos vetores diretores, então r_1 e r_4 são coincidentes e r_3 é paralela a r_1 e r_4.

EXERCÍCIO

Verifique se as retas abaixo são coincidentes, paralelas ou nenhuma dessas duas opções.

$r_1 : (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(0, -2, 1).$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$r_3 : \dfrac{y}{2} = 3 - z;\ x = 2.$

$$r_4 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -8 - 2z \end{cases}$$

$r_1 :\ A_1 = (1, -2, -3); \vec{v}_1 = (0, -2, 1).$

$r_2 :\ A_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (2, -2, 1).$

$r_3 :\ A_3 = (2, 0, 3); \vec{v}_3 = (0, 2, -1).$

$r_4 :\ A_4 = (1, -8, 0); \vec{v}_4 = (0, -2, 1).$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ são paralelos e $\vec{v}_2$ não é paralelo a nenhum outro.

Logo, r_2 não é nem coincidente nem paralela às outras.

$\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 2, 6)$; $\overrightarrow{A_1A_4} = (0, -6, 3)$ e $\overrightarrow{A_3A_4} = (-1, -8, -3)$.

Como apenas $\overrightarrow{A_1A_4}$ é paralelo aos vetores diretores, então r_1 e r_4 são coincidentes e r_3 é paralela a r_1 e r_4.

COPLANARIDADE ENTRE RETAS

Retas não coplanares

COPLANARIDADE ENTRE RETAS

Retas coplanares

COPLANARIDADE ENTRE RETAS

Conclusões:

r e s são coplanares se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são coplanares.

r e s não são coplanares se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares.

r e s são coplanares se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$.

r e s não são coplanares se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$.

COPLANARIDADE ENTRE RETAS

Conclusões:

r e s são coplanares se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são coplanares.

r e s não são coplanares se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares.

r e s são coplanares se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$.

r e s não são coplanares se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$.

EXEMPLO

Determine m para que r e s sejam coplanares:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases} .$$

EXEMPLO

Determine m para que r e s sejam coplanares:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases} .$$

$r :\ A_1 = (m, 4, 6); \vec{v}_1 = (m, -3, 0).$

$s :\ A_2 = (0, 4, 0); \vec{v}_2 = (1, -3, -2).$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-m, 0, -6).$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} m & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -m & 0 & -6 \end{vmatrix} = 12m - 18.$$

$$r \text{ e } s \text{ coplanares } \Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \Rightarrow 12m - 18 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$$

EXEMPLO

Determine m para que r e s sejam coplanares:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases} .$$

$r: \ A_1 = (m, 4, 6); \vec{v}_1 = (m, -3, 0).$

$s: \ A_2 = (0, 4, 0); \vec{v}_2 = (1, -3, -2).$

$\overrightarrow{A_1 A_2} = (-m, 0, -6).$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1 A_2}) = \begin{vmatrix} m & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -m & 0 & -6 \end{vmatrix} = 12m - 18.$$

$$r \text{ e } s \text{ coplanares } \Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1 A_2}) = 0 \Rightarrow 12m - 18 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$$

EXEMPLO

Determine m para que r e s sejam coplanares:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases} \quad .$$

$r: \; A_1 = (m, 4, 6); \vec{v}_1 = (m, -3, 0).$

$s: \; A_2 = (0, 4, 0); \vec{v}_2 = (1, -3, -2).$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-m, 0, -6).$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} m & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -m & 0 & -6 \end{vmatrix} = 12m - 18.$$

$$r \text{ e } s \text{ coplanares } \Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \Rightarrow 12m - 18 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$$

EXEMPLO

Determine m para que r e s sejam coplanares:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases} .$$

$r : \ A_1 = (m, 4, 6); \vec{v}_1 = (m, -3, 0).$

$s : \ A_2 = (0, 4, 0); \vec{v}_2 = (1, -3, -2).$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-m, 0, -6).$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} m & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -m & 0 & -6 \end{vmatrix} = 12m - 18.$$

r e s coplanares $\Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \Rightarrow 12m - 18 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}.$

CONCLUSÕES GERAIS

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

CONCLUSÕES GERAIS

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

- **Coincidentes.** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ paralelos.
- **Paralelas.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- **Concorrentes.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos.

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

CONCLUSÕES GERAIS

Coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0.$

- **Coincidentes.** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ paralelos.
- **Paralelas.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- **Concorrentes.** $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos.

Não coplanares. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0.$

- **Reversas.**

SEQUÊNCIA DE PASSOS PARA POSIÇÃO RELATIVA

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

SEQUÊNCIA DE PASSOS PARA POSIÇÃO RELATIVA

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

SEQUÊNCIA DE PASSOS PARA POSIÇÃO RELATIVA

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

SEQUÊNCIA DE PASSOS PARA POSIÇÃO RELATIVA

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

1. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

1.1. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ também é paralelo, r e s são **coincidentes**.

1.2. Se $\overrightarrow{A_1A_2}$ não é paralelo, r e s são **paralelas**.

2. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos.

2.1. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, r e s são **concorrentes**.

2.2. Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$, r e s são **reversas**.

PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

r e s são perpendiculares (ou ortogonais) se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

r e s são perpendiculares (ou ortogonais) se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

r e s são perpendiculares (ou ortogonais) se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

$$r_1 : \ A_1 = (1, -2, -3); \ \vec{v}_1 = (3, -1, 0).$$

$$r_2 : \ A_2 = (1, -1, 0); \ \vec{v}_2 = (1, 0, -2).$$

$$r_3 : \ A_3 = (2, 0, 3); \ \vec{v}_3 = (2, 1, 1).$$

PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS

r e s com pontos A_1 e A_2 e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

r e s são perpendiculares (ou ortogonais) se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

$r_1 : \;\; A_1 = (1, -2, -3); \; \vec{v}_1 = (3, -1, 0).$

$r_2 : \;\; A_2 = (1, -1, 0); \; \vec{v}_2 = (1, 0, -2).$

$r_3 : \;\; A_3 = (2, 0, 3); \; \vec{v}_3 = (2, 1, 1).$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \;\Rightarrow\;$ r_1 e r_2 não são perpendiculares.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 5 \;\Rightarrow\;$ r_1 e r_3 não são perpendiculares.

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0 \;\Rightarrow\;$ r_2 e r_3 são perpendiculares.

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases} .$$

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases} \quad .$$

Achar reta é o mesmo que achar ponto e vetor.

Ponto já temos: $A = (3, 2, 1)$.

O vetor $\vec{v}$ procurado é ortogonal aos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r e s.

Logo, podemos escolher $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Como $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$, então $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 0, -1)$.

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 0, -1)$ ou $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$.

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases} .$$

Achar reta é o mesmo que achar ponto e vetor.

Ponto já temos: $A = (3, 2, 1)$.

O vetor $\vec{v}$ procurado é ortogonal aos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r e s.

Logo, podemos escolher $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Como $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$, então $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 0, -1)$.

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 0, -1)$ ou $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$.

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}.$$

Achar reta é o mesmo que achar ponto e vetor.

Ponto já temos: $A = (3, 2, 1)$.

O vetor $\vec{v}$ procurado é ortogonal aos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r e s.

Logo, podemos escolher $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Como $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$, então $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 0, -1)$.

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 0, -1)$ ou $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$.

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}.$$

Achar reta é o mesmo que achar ponto e vetor.

Ponto já temos: $A = (3, 2, 1)$.

O vetor $\vec{v}$ procurado é ortogonal aos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r e s.

Logo, podemos escolher $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Como $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$, então $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 0, -1)$.

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 0, -1)$ ou $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$.

EXERCÍCIO

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases} \quad .$$

Achar reta é o mesmo que achar ponto e vetor.

Ponto já temos: $A = (3, 2, 1)$.

O vetor $\vec{v}$ procurado é ortogonal aos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r e s.

Logo, podemos escolher $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Como $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$, então $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1, 0, -1)$.

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(-1, 0, -1)$ ou $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$.

Fim!

A lista de exercícios está esperando sua visita.