Cálculo de Programas
Trabalho Prático
LCC+LEI — Ano Lectivo de 2014/15

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Maio de 2015

Conteúdo

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usa-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, compondo programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método ao desenvolvimento de programas funcionais na linguagem Haskell.

O presente trabalho tem por objectivo concretizar na prática os objectivos da disciplina, colocando os alunos perante problemas de programação que deverão ser abordados composicionalmente e implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada e simples os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita literária [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a sua documentação deverão constar do mesmo documento (ficheiro).

O ficheiro `cp1415t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1415t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1415t.zip` e executando

```
lhs2TeX cp1415t.lhs > cp1415t.tex
pdflatex cp1415t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar a partir do endereço

> https://hackage.haskell.org/package/lhs2tex.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1415t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
ghci cp1415t.lhs
```

para ver que assim é:

```
GHCi, version 7.8.3: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
Loading package ghc-prim ... linking ... done.
Loading package integer-gmp ... linking ... done.
Loading package base ... linking ... done.
[ 1 of 11] Compiling ListUtils        ( ListUtils.hs, interpreted )
[ 2 of 11] Compiling Cp               ( Cp.hs, interpreted )
[ 3 of 11] Compiling BTree            ( BTree.hs, interpreted )
[ 4 of 11] Compiling LTree            ( LTree.hs, interpreted )
[ 5 of 11] Compiling Exp              ( Exp.hs, interpreted )
[ 6 of 11] Compiling Nat              ( Nat.hs, interpreted )
[ 7 of 11] Compiling Show             ( Show.hs, interpreted )
[ 8 of 11] Compiling Probability      ( Probability.hs, interpreted )
[ 9 of 11] Compiling List             ( List.hs, interpreted )
[10 of 11] Compiling X3d              ( X3d.hs, interpreted )
[11 of 11] Compiling Main             ( cp1415t.lhs, interpreted )
Ok, modules loaded: List, Show, Nat, Exp, Cp, BTree, LTree, X3d,
Probability, Main, ListUtils.
```

O facto de o interpretador carregar as bibliotecas do material pedagógico da disciplina, entre outras, deve-se ao facto de, neste mesmo sítio do texto fonte, se ter inserido o seguinte código Haskell:

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
import Data.List
import System.Process
import Cp
import List
import Nat
import Exp
import BTree
import LTree
import X3d
import Control.Parallel.Strategies
import Probability hiding (· → ·, ·)
import System.Environment (getArgs)
```

Abra o ficheiro `cp1415t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem equilibrada e participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na defesa oral do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, na folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`)

```
bibtex cp1415t.aux
makeindex cp1415t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou.

4 Parte A

Nesta primeira parte do trabalho pretende-se averiguar a capacidade de utilização por parte dos alunos das bibliotecas fornecidas no material pedagógico da disciplina. Algumas respostas são validadas por testes unitários. Sempre que o resultado de um teste unitário for *False*, a solução proposta falha a validação e deve ser revista.

4.1 Biblioteca LTree

1. A seguinte função

$$balanced\ (Leaf\ \_) = True$$
$$balanced\ (Fork\ (t, t')) = balanced\ t \wedge balanced\ t' \wedge abs\ (depth\ t - depth\ t') \leqslant 1$$

testa se uma árvore binária está equilibrada ou não. Defina como catamorfismo em LTree a função auxiliar *depth*.

2. Seja dada:

$$t = Fork\ (Fork\ (Leaf\ 10, Fork\ (Leaf\ 2, Fork\ (Leaf\ 5, Leaf\ 3))), Leaf\ 23)$$

Testes unitários 1 *Verifique que árvore t está desequilibrada:*

$$test01 = balanced\ t \equiv False$$

3. Recorrendo a funções da biblioteca LTree, escreva numa única linha de Haskell a função

$$balance :: LTree\ a \rightarrow LTree\ a$$

que equilibra uma qualquer árvore binária.

Testes unitários 2 *Verifique que* $balance\ t$ *é uma árvore equilibrada:*

$$test02 = balanced\ (balance\ t) \equiv True$$

4.2 Biblioteca BTree

Pretende-se construir um anamorfismo que produza uma árvore binária de procura *equilibrada* que contenha o intervalo definido por dois inteiros (n, m):

$$abpe\ (n, m) = anaBTree\ qsplit\ (n, m)$$

Comece por definir o gene $qsplit$ e depois construa a árvore

$$t1 = abpe\ (20, 30)$$

que será precisa na secção 6.4.

Testes unitários 3 *Faça os testes seguintes:*

$$\begin{array}{l}
test03a = qsplit\ (4, 30) \equiv i_2\ (17, ((4, 16), (18, 30)))\\
test03b = qsplit\ (4, 3) \equiv i_1\ ()\\
test03c = qsplit\ (0, 0) \equiv i_1\ ()\\
test03d = qsplit\ (1, 1) \equiv i_2\ (1, ((1, 0), (2, 1)))\\
test03e = balBTree\ t1 \equiv True\\
test03f = inordt\ t1 \equiv [20 \mathinner{..} 30]
\end{array}$$

4.3 Biblioteca para listas com sentinelas

Considere o tipo de dados que representa listas finitas com uma sentinela no fim:

$$\mathbf{data}\ SList\ a\ b = Sent\ b \mid Cons\ (a, SList\ a\ b)\ \mathbf{deriving}\ (Show, Eq)$$

1. Derive os isomorfismos $inSList$ e $outSList$, adicione-os a este ficheiro e passe aos testes que se seguem.

   Testes unitários 4 *Faça os testes seguintes:*

$$\begin{array}{l}
test04a = \mathbf{let}\ x = Cons\ (1, Sent\ \texttt{"end"})\ \mathbf{in}\ inSList\ (outSList\ x) \equiv x\\
test04b = \mathbf{let}\ x = i_2\ (\texttt{"ola"}, Sent\ \texttt{"2"})\ \mathbf{in}\ outSList\ (inSList\ x) \equiv x
\end{array}$$

2. Derive os combinadores $cataSList$, $anaSList$ e $hyloSList$, e mostre que a função $merge$ da biblioteca LTree se pode escrever da forma seguinte,

$$\begin{array}{l}
merge' :: Ord\ a \Rightarrow ([a], [a]) \rightarrow [a]\\
merge' = hyloSList\ [id, cons]\ mgen
\end{array}$$

   para um dado gene $mgen$ que deverá definir.

   Testes unitários 5 *Faça os seguintes testes:*

$$\begin{array}{l}
test05a = mgen\ ([0, 2, 5], [0, 6]) \equiv i_2\ (0, ([2, 5], [0, 6]))\\
test05b = mgen\ ([0, 2, 5], []) \equiv i_1\ [0, 2, 5]\\
test05c = merge'\ ([], [0, 6]) \equiv [0, 6]
\end{array}$$

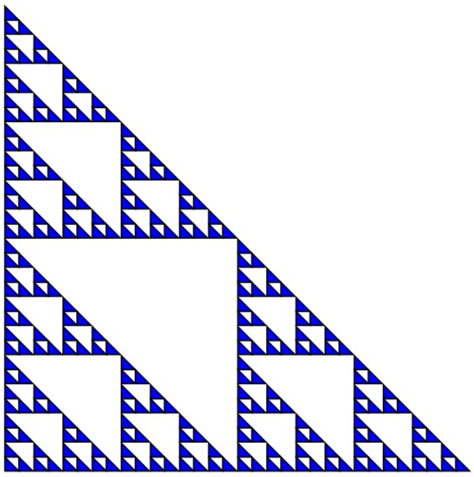


Figura 1: Um triângulo de Sierpinski

5 Parte B

O triângulo de Sierpinski é uma figura fractal que tem o aspecto da figura 1 e que se obtém da seguinte forma: considere-se um triângulo rectângulo e isósceles A cujos catetos têm comprimento s. A estrutura fractal é criada desenhando-se três triângulos no interior de A, todos eles rectângulos e isósceles e com catetos de comprimento $s/2$. Este passo é depois repetido para cada um dos triângulos desenhados, e assim sucessivamente. O resultado dos cinco primeiros passos é dado na Fig. 1.

Um triângulo de Sierpinski é gerado repetindo-se infinitamente o processo acima descrito. No entanto, para efeitos de visualização num monitor, cuja resolução é forçosamente finita, faz sentido escolher uma representação adequada do triângulo, parando o processo recursivo a um determinado nível. A figura a desenhar é constituída por um conjunto finito de triângulos todos da mesma dimensão (por exemplo, na figura 1 há 243 triângulos).

5.1 Criação de Triângulos de Sierpinski

Seja cada triângulo geometricamente descrito pelas coordenadas do seu vértice inferior esquerdo e o comprimento dos seus catetos:

$$\textbf{type}\ \mathit{Tri} = (\mathit{Point}, \mathit{Side})$$

onde

$$\textbf{type}\ \mathit{Side} = \mathit{Int}$$
$$\textbf{type}\ \mathit{Point} = (\mathit{Int}, \mathit{Int})$$

A estrutura recursiva de (uma representação finita de) um triângulo de Sierpinski é captada por uma árvore ternária, em que cada nó é um triângulo com os respectivos três sub-triângulos:

$$\textbf{data}\ \mathsf{TLTree} = \mathit{Tri}\ \mathit{Tri} \mid \mathit{Nodo}\ \mathsf{TLTree}\ \mathsf{TLTree}\ \mathsf{TLTree}$$

Nas folhas dessa árvore encontram-se os triângulos mais pequenos, todos da mesma dimensão, que deverão ser desenhados. Apenas estes conterão informação de carácter geométrico, tendo os nós da árvore um papel exclusivamente estrutural. Portanto, a informação geométrica guardada em cada folha consiste nas coordenadas do vértice inferior esquerdo e no lado dos catetos do respectivo triângulo. A função

$$\mathit{sierpinski} :: \mathit{Tri} \to \mathit{Int} \to [\,\mathit{Tri}\,]$$
$$\mathit{sierpinski}\ t = \mathit{apresentaSierp} \cdot (\mathit{geraSierp}\ t)$$

recebe a informação do triângulo exterior e o número de níveis pretendido, que funciona como critério de paragem do processo de construção do fractal. O seu resultado é a lista de triângulos a desenhar. Esta função é um hilomorfismo do tipo TLTree, i.e. a composição de duas funções: uma que gera TLTrees,

$$
\begin{array}{l}
\mathit{geraSierp} :: \mathit{Tri} \to \mathit{Int} \to \mathsf{TLTree} \\
\mathit{geraSierp}\ t\ 0 = \mathit{Tri}\ t \\
\mathit{geraSierp}\ ((x,y),s)\ n = \\
\quad \mathbf{let}\ s' = s \div 2 \\
\quad \mathbf{in}\ \mathit{Nodo} \\
\qquad\quad (\mathit{geraSierp}\ ((x,y),s')\ (n-1)) \\
\qquad\quad (\mathit{geraSierp}\ ((x+s',y),s')\ (n-1)) \\
\qquad\quad (\mathit{geraSierp}\ ((x,y+s'),s')\ (n-1))
\end{array}
$$

e outra que as consome:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{apresentaSierp} :: \mathsf{TLTree} \to [\,\mathit{Tri}\,] \\
\mathit{apresentaSierp}\ (\mathit{Tri}\ t) = [\,t\,] \\
\mathit{apresentaSierp}\ (\mathit{Nodo}\ a\ b\ c) = (\mathit{apresentaSierp}\ a) +\!\!+ (\mathit{apresentaSierp}\ b) +\!\!+ (\mathit{apresentaSierp}\ c)
\end{array}
$$

5.2 Trabalho a realizar

Preparação:

1. Desenvolva a biblioteca "pointfree"`TLTree.hs` de forma análoga a outras bibliotecas que conhece (*eg.* BTree, LTree, etc) e que estão disponíveis no material pedagógico.

2. Defina como catamorfismos de TLTree as funções

$$
\begin{array}{l}
\mathit{tipsTLTree} :: \mathsf{TLTree}\ b \to [\,b\,] \\
\mathit{countTLTree} :: \mathsf{TLTree}\ b \to \mathit{Int} \\
\mathit{depthTLTree} :: \mathsf{TLTree}\ b \to \mathit{Int} \\
\mathit{invTLTree} :: \mathsf{TLTree}\ b \to \mathsf{TLTree}\ b
\end{array}
$$

respectivamente semelhantes a tips, $\mathit{countLTree}$, depth e inv ("mirror") de LTree.

3. Exprima as funções $\mathit{geraSierp}$ e $\mathit{apresentaSierp}$ recorrendo a anamorfismos e catamorfismos, respectivamente, do tipo TLTree.

4. Defina a árvore

$$\mathit{ts} = \mathit{geraSierp}\ \mathit{tri}\ 5\ \mathbf{where}\ \mathit{tri} = ((0,0),256)$$

e faça os testes seguintes:

<u>Testes unitários</u> 6 *Verifique a profundidade da árvore gerada e o respectivo número de triângulos:*

$$
\begin{array}{l}
\mathit{test06a} = \mathit{depthTLTree}\ \mathit{ts} \equiv 6 \\
\mathit{test06b} = \mathit{countTLTree}\ \mathit{ts} \equiv 243 \\
\mathit{test06c} = \mathit{countTLTree}\ \mathit{ts} \equiv \mathit{length}\ (\mathit{tipsTLTree}\ \mathit{ts}) \\
\mathit{test06d} = \mathit{countTLTree}\ \mathit{ts} \equiv \mathit{countTLTree}\ (\mathit{invTLTree}\ \mathit{ts})
\end{array}
$$

Visualização: Para visualizarmos triângulos de Sierpinski vamos usar X3DOM, uma biblioteca "open-source" para construção e visualização de gráficos 3D no Web.[2] No pacote disponibilizado para a realização deste trabalho encontra a biblioteca $\mathit{X3d}$, que inclui a função $\mathit{drawTriangle}$ para geração de triângulos em 3D, usando X3DOM. Nesta abordagem, um ficheiro $\mathit{x3dom}$ é construído em dois passos:

- Desenham-se os triângulos, utilizando:

$$\mathit{drawTriangle} :: ((\mathit{Int},\mathit{Int}),\mathit{Int}) \to \mathit{String}$$

[2]Ver `http://examples.x3dom.org` para mais informação. Em `http://examples.x3dom.org/IG/buddha-anim/x3dom_imageGeometry.html`, por exemplo, pode ser visualizado um objecto gráfico com mais de um milhão de triângulos. Mais documentação em: `http://doc.x3dom.org/tutorials/index.html`.

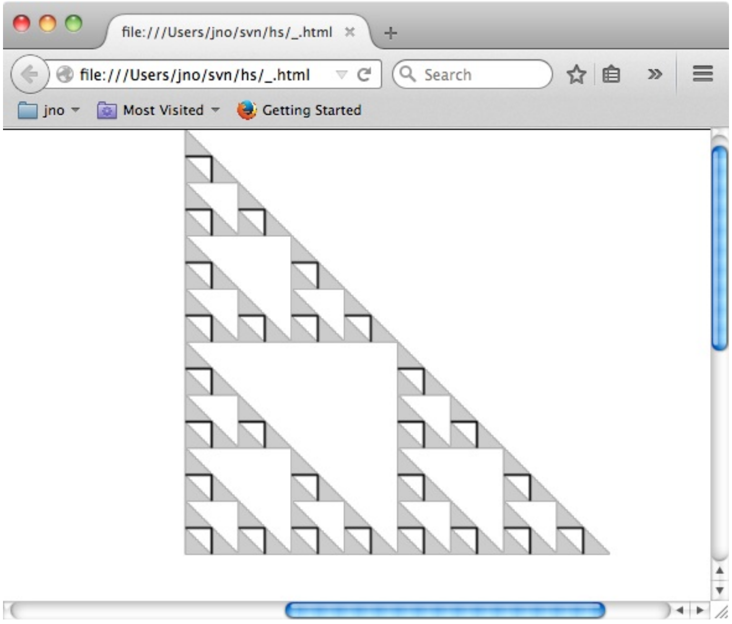


Figura 2: Um triângulo de Sierpinski em x3dom

- Finaliza-se o ficheiro com as tags de início e final:

$$finalize :: String \rightarrow String$$

1. Usando estas funções e as que definiu anteriormente, faça a geração do HTML que representa graficamente o triângulo de Sierpinski definido por

$$dados = (((0, 0), 32), 4)$$

isto é, centrado na origem, com lado 32 e 4 níveis de recursividade. No anexo C sugere-se o recurso à função,

$$render\ html = \mathbf{do}\ \{ writeFile\ \texttt{"triangle.html"}\ html; system\ \texttt{"open triangle.html"} \}$$

(adapte-a, se necessário) para visualizar o triângulo gerado num "browser". Espera-se que o resultado final seja como o que se mostra na Figura 2.

Valorização

Se tiver tempo, investigue como é que a sua resolução desta parte do trabalho evolui para o desenho, não de *triângulos* de Sierpinski, mas sim de *pirâmides* de Sierpinski — ver a imagem da figura 3. Pode recorrer, se desejar, às funções disponibilizadas no anexo B.1.

6 Parte C

6.1 Mónades

Os mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ Dist\ a = D\ \{ unD :: [(a, ProbRep)] \}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

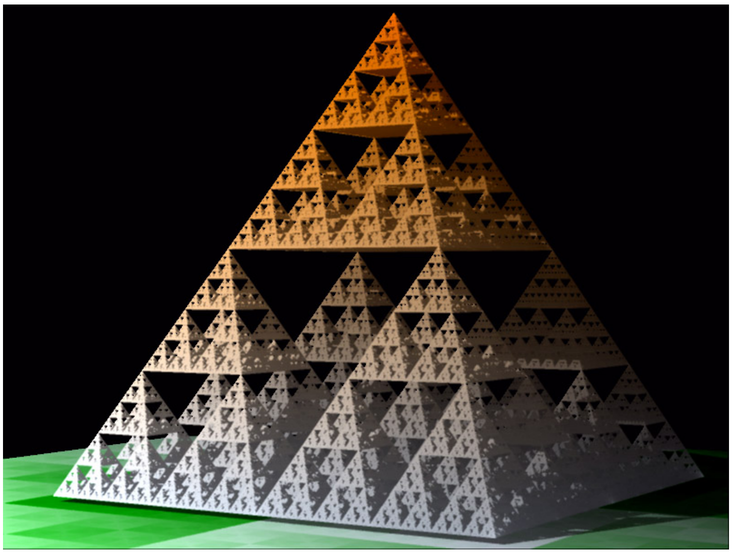
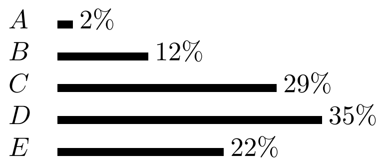


Figura 3: Uma pirâmide de Sierpinski

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: Dist\ \ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$d1 :: Dist\ Char$$
$$d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]$$

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'   35.0%
'C'   29.0%
'E'   22.0%
'B'   12.0%
'A'    2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"   20.0%
   "cinco"   20.0%
      "de"   20.0%
   "frase"   20.0%
"palavras"   20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[3]

[3] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). A quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja multiplicação é dada por (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow Dist\ B$ e $f : B \rightarrow Dist\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica. Vejamos um exemplo:

Problema: qual é a soma de faces mais provável quando lançamos dois dados num tabuleiro?

Assumindo que os dados não estão viciados, cada um oferece uma distribuição uniforme das suas faces (1 a 6). Basta correr a expressão monádica

$$\mathbf{do}\ \{x \leftarrow uniform\ [1 \mathinner{..} 6]; y \leftarrow uniform\ [1 \mathinner{..} 6]; return\ (x + y)\}$$

e obter-se-á:

```
*Main> do { x <- uniform [1..6] ;  y <- uniform [1..6] ; return(x+y) }
 7  16.7%
 6  13.9%
 8  13.9%
 5  11.1%
 9  11.1%
 4   8.3%
10   8.3%
 3   5.6%
11   5.6%
 2   2.8%
12   2.8%
```

A soma mais provável é 7, com 16.7%.

6.2 Trabalho a realizar

É possível pensarmos em catamorfismos, anamorfismos etc probabilísticos, quer dizer, programas recursivos que dão distribuições como resultados. Por exemplo, neste enunciado é dado o combinador

$$pcataList :: (Either\ ()\ (a, b) \rightarrow Dist\ b) \rightarrow [a] \rightarrow Dist\ b$$

que é muito parecido com

$$cataList :: (Either\ ()\ (a, b) \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow b$$

da biblioteca List. A única diferença é que o gene de $pcataList$ é uma função probabilística.

Exemplo de utilização: recorde-se que $cataList\ [zero, add]$ soma todos os elementos da lista argumento, por exemplo:

$$cataList\ [zero, add]\ [20, 10, 5] = 35.$$

Considere agora a função $padd$ (adição probabilística) que, com probabilidade 90% soma dois números e com probabilidade 10% os subtrai:

$$padd\ (a, b) = D\ [(a + b, 0.9), (a - b, 0.1)]$$

Se se correr

$$d4 = pcataList\ [pzero, padd]\ [20, 10, 5]\ \mathbf{where}\ pzero = return \cdot zero$$

obter-se-á:

```
35  81.0%
25   9.0%
 5   9.0%
15   1.0%
```

Com base nestes exemplos, resolva o seguinte

> ***Problema**: Uma unidade militar pretende enviar uma mensagem urgente a outra, mas tem o aparelho de telegrafia meio avariado. Por experiência, o telegrafista sabe que a probabilidade de uma palavra se perder (não ser transmitida) é 5%; no final de cada mensagem, o aparelho envia o código* `"stop"`*, mas (por estar meio avariado), falha 10% das vezes.*
>
> *Qual a probabilidade de a palavra* `"atacar"` *da mensagem words* `"Vamos atacar hoje"` *se perder, isto é, o resultado da transmissão ser* `["Vamos","hoje","stop"]`*? e a de seguirem todas as palavras, mas faltar o* `"stop"` *no fim? E a da transmissão ser perfeita?*

Responda a todas estas perguntas encontrando g tal que

$$transmitir = pcataList\ gene$$

descreve o comportamento do aparelho.

Testes unitários 7 *Faça o seguinte teste unitário da sua versão para gene:*

$$test07 = gene\ (i_2\ (\texttt{"a"}, [\texttt{"b"}])) \equiv D\ [([\texttt{"a"}, \texttt{"b"}], 0.95), ([\texttt{"b"}], 0.05)]$$

Responda então às perguntas do problema acima correndo a expressão:

$$transmitir\ (words\ \texttt{"Vamos atacar hoje"})$$

6.3 Programação funcional paralela

Uma outra aplicação do conceito de mónade é a programação funcional paralela. A biblioteca Control.Parallel.Strategies, já carregada no início deste texto, implementa esse tipo de programação, que hoje está na ordem do dia. O mónade respectivo chama-se $Eval$ e disponibiliza duas funções,

$$rpar :: a \rightarrow Eval\ a$$
$$rseq :: a \rightarrow Eval\ a$$

conforme se deseja que uma dada computação seja efectuada em paralelo ou sequencialmente.[4] Por exemplo,

$$\begin{array}{l} parmap :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow Eval\ [b] \\ parmap\ f\ [\,] = return\ [\,] \\ parmap\ f\ (a : lt) = \mathbf{do} \\ \quad a' \leftarrow rpar\ (f\ a) \\ \quad lt' \leftarrow parmap\ f\ lt \\ \quad return\ (a' : lt') \end{array}$$

é um map monádico que usa $rpar$ para aplicar f a todos os elementos de uma lista *em paralelo*.

Se corrermos o map habitual em

$$map\ fib\ [20\,..\,30] = [10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269]$$

(cálculo dos números de Fibonacci do vigésimo ao trigésimo), o tempo que o cálculo vai demorar numa máquina com 2 cores[5] será da ordem de 1.1s. Já no caso de usar $parmap$ em vez de map, fará o mesmo cálculo em cerca de 60% desse tempo.

Para verificar esta diferença siga as instruções seguintes:[6]

1. Compile o presente enunciado correndo:

   ```
   ghc -O2 cp1415t -rtsopts -threaded
   ```

2. De seguida execute numa "shell" o seguinte comando,

[4] Esta explicação é bastante simplista, mas serve de momento. Para uma abordagem completa e elucidativa ver a referência [**?**].

[5] Intel Core 2 Duo a 2.53 GHz.

[6] Ver detalhes em [**?**].

```
./cp1415t exemplo seq +RTS -s -N2
```

onde o 2 em $N2$ indica 2 *cores* (se a máquina em questão tiver mais *cores*, este número deverá ser actualizado). Como pode ver inspecionando o código da função $main$ na secção A, o que vai ser executado é

$$putStrLn \cdot show \cdot (map\ fib)\ \$\ [20\mathinner{.\,.}30]$$

Das estatísticas que lhe aparecem no écran retenha esta:

```
Total   time    1.41s  (  1.11s elapsed)
```

Em particular, o campo $elapsed$ apresenta o tempo decorrido desde o início da execução do programa até ao respectivo fim.

3. De seguida execute

```
./cp1415t exemplo par +RTS -s -N2
```

que irá chamar, desta vez

$$putStrLn \cdot show \cdot runEval \cdot (parmap\ fib)\ \$\ [20\mathinner{.\,.}30]$$

A estatística correspondente à de cima será, desta vez, da ordem seguinte:

```
Total   time    1.13s  (  0.69s elapsed)
```

Em suma, a versão paralela é cerca de 1.61x mais rápida $(\frac{1.11}{0.69})$ que a sequencial.

6.4 Trabalho a realizar

Com base na definição de $parmap$ acima, defina a função

que implemente o "map paralelo" sobre BTree's.

De seguida, corra testes semelhantes aos apresentados acima para apurar o ganho em *performance* da aplicação da função fib a todos os números da árvore $t1$ da secção 4.2, em duas versões:

1. $fmap\ fib$ (sem paralelismo, usando a função definida em BTree), ou
2. usando $parBTreeMap\ fib$.

Em máquinas mais rápidas e/ou com mais "cores" deve usar números maiores para obter uma melhor distinção entre as duas versões.

Referências

Anexos

A Programa principal

$$
\begin{array}{l}
\mathit{main} :: \mathit{IO}\ () \\
\mathit{main} = \mathit{getArgs} \ggg\!= (\neg \cdot \mathit{null}) \rightarrow \mathit{exemp\_or\_exer}, \mathit{errInvArgs} \\
\quad \textbf{where} \\
\qquad \mathit{exemp\_or\_exer} = (((\equiv)\ \texttt{"exemplo"}) \cdot \mathit{head}) \rightarrow \mathit{exemp}, \mathit{exer} \\
\qquad \mathit{exemp} = (((\equiv)\ 2) \cdot \mathit{length}) \rightarrow \mathit{execExemp}, \mathit{errInvArgs} \\
\qquad \mathit{execExemp} = \mathit{isPar} \rightarrow \mathit{execExempPar}, \mathit{execExempSeq} \\
\qquad \mathit{exer} = (((\equiv)\ 3) \cdot \mathit{length}) \rightarrow \mathit{execExer}, \mathit{errInvArgs} \\
\qquad \mathit{execExer} = \mathit{isPar} \rightarrow \mathit{execExerPar}, \mathit{execExerSeq} \\
\qquad \mathit{execExempSeq} = \underline{(\mathit{putStrLn} \cdot \mathit{show} \cdot (\mathit{fmap}\ \mathit{fib})\ \$\ \mathit{t1})} \\
\qquad \mathit{execExempPar} = \underline{(\mathit{putStrLn} \cdot \mathit{show} \cdot \mathit{runEval} \cdot (\mathit{parBTreeMap}\ \mathit{fib})\ \$\ \mathit{t1})}
\end{array}
$$

B Bibliotecas e código auxiliar

$$
\begin{array}{l}
\mathit{errInvArgs} :: a \rightarrow \mathit{IO}\ () \\
\mathit{errInvArgs} = \underline{\ }\ \$\ \mathit{putStrLn}\ \mathit{msgInvArgs} \\
\quad \textbf{where} \\
\quad \mathit{msgInvArgs} = \texttt{"Invalid arguments"} \\
\mathit{execExerPar} :: [\mathit{String}] \rightarrow \mathit{IO}\ () \\
\mathit{execExerPar} = \bot \\
\mathit{execExerSeq} :: [\mathit{String}] \rightarrow \mathit{IO}\ () \\
\mathit{execExerSeq} = \bot \\
\mathit{isPar} :: [\mathit{String}] \rightarrow \mathit{Bool} \\
\mathit{isPar} = (((\equiv)\ \texttt{"par"}) \cdot \mathit{head} \cdot \mathit{tail}) \rightarrow \underline{\mathit{True}}, \underline{\mathit{False}} \\
\mathit{pcataList}\ g = \mathit{mfoldr}\ (\mathit{curry}\ (g \cdot i_2))\ ((g \cdot i_1)\ ())\ \textbf{where} \\
\quad \mathit{mfoldr}\ f\ d\ [\,] = d \\
\quad \mathit{mfoldr}\ f\ d\ (a : x) = \textbf{do}\ \{ y \leftarrow \mathit{mfoldr}\ f\ d\ x; f\ a\ y \}
\end{array}
$$

B.1 "Easy X3DOM access"

Defina-se a seguinte composição de funções

$$
\mathit{x3dom} = \mathit{html} \cdot \mathit{preamble} \cdot \mathit{body} \cdot \mathit{x3d} \cdot \mathit{scene} \cdot \mathit{items}
$$

para gerar um texto HTML que represente um objecto gráfico em X3DOM. Esta função usa as seguintes funções auxiliares:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{html} = \mathit{tag}\ \texttt{"html"}\ [\,] \\
\mathit{preamble} = \mathit{headx}\ \text{`}\mathit{with}\text{`}\ [\mathit{title}\ \texttt{"CP/X3DOM generation"}, \mathit{links}, \mathit{script}] \\
\mathit{body} = \mathit{tag}\ \texttt{"body"}\ [\,] \\
\mathit{x3d} = \mathit{tag}\ \texttt{"x3d"}\ [(\texttt{"width"}, \texttt{"\textbackslash"500px\textbackslash""}), (\texttt{"height"}, \texttt{"\textbackslash"400px\textbackslash""})] \\
\mathit{scene} = \mathit{tag}\ \texttt{"scene"}\ [\,] \\
\mathit{items} = \mathit{concat} \\
\mathit{links} = \mathit{ctag}\ \texttt{"link"}\ [\\
\quad (\texttt{"rel"}, \mathit{quote}\ \texttt{"stylesheet"}), (\texttt{"type"}, \mathit{quote}\ \texttt{"text/css"}), \\
\quad (\texttt{"href"}, \mathit{quote}\ \texttt{"http://www.x3dom.org/x3dom/release/x3dom.css"})] \\
\mathit{script} = \mathit{ctag}\ \texttt{"script"}\ [\\
\quad (\texttt{"type"}, \mathit{quote}\ \texttt{"text/javascript"}),
\end{array}
$$

$(\texttt{"src"}, \mathit{quote}\ \texttt{"http://www.x3dom.org/x3dom/release/x3dom.js"})]$
$\mathit{ctag}\ t\ l = \mathit{tag}\ t\ l\ \texttt{""}$

onde

$$\mathit{tag}\ t\ l\ x = \texttt{"<"} + t + \texttt{" "} + \mathit{ps} + \texttt{">"} + x + \texttt{"</"} + t + \texttt{">"}$$
$$\quad \textbf{where}\ \mathit{ps} = \mathit{unwords}\ [\mathit{concat}\ [t, \texttt{"="}, v] \mid (t, v) \leftarrow l]$$
$$\mathit{headx} = \mathit{tag}\ \texttt{"head"}\ []$$

De seguida dão-se mais algumas funções auxiliares facilitadoras:

$$\mathit{transform}\ (x, y, z) = \mathit{tag}\ \texttt{"transform"}\ [(\texttt{"translation"}, \mathit{quote}\ (\mathit{show3D}\ (x, y, x)))]$$
$$\mathit{groupx}\ (x, y, z) = (\mathit{tag}\ \texttt{"group"}\ [(\texttt{"bboxSize"}, \mathit{quote}\ (\mathit{show3D}\ (x, y, z)))]) \cdot \mathit{items}$$
$$\mathit{shapex} = \mathit{tag}\ \texttt{"shape"}\ []$$
$$\mathit{title} = \mathit{tag}\ \texttt{"title"}\ []$$
$$\mathit{appearance} = \mathit{tag}\ \texttt{"appearance"}\ []$$
$$\mathit{show3D}\ (x, y, z) = \mathit{show}\ x + \texttt{" "} + \mathit{show}\ y + \texttt{" "} + \mathit{show}\ z$$
$$t\ \text{`}\mathit{with}\text{`}\ l = ((t\ \$\ \mathit{items}\ l) +\!\!+)$$
$$\mathit{quote}\ s = \texttt{"\textbackslash""} + s + \texttt{"\textbackslash""}$$
$$\mathit{prime}\ s = \texttt{"'"} + s + \texttt{"'"}$$
$$\mathit{box}\ p\ \mathit{col} = (\mathit{transform}\ p \cdot \mathit{shapex} \cdot \mathit{items})\ [\mathit{color}\ \mathit{col}, \mathit{ctag}\ \texttt{"box"}\ [(\texttt{"size"}, \mathit{prime}\ \texttt{"2,2,2"})]]$$
$$\mathit{cone}\ p\ \mathit{col}\ b\ h = (\mathit{transform}\ p \cdot \mathit{shapex} \cdot \mathit{items})$$
$$\quad [\mathit{color}\ \mathit{col},$$
$$\qquad \mathit{ctag}\ \texttt{"cone"}\ [(\texttt{"bottomRadius"}, \mathit{prime}\ (\mathit{show}\ b)), (\texttt{"height"}, \mathit{prime}\ (\mathit{show}\ h))]]$$
$$\mathit{color}\ c = \mathit{appearance}\ (\mathit{ctag}\ \texttt{"material"}\ [(\texttt{"diffuseColor"}, \mathit{prime}\ c)])$$

C Soluções propostas

Secção 4.1

A função *depth* calcula a profundidade de uma *LTree*. Esta função pode ter como parâmetro de entrada uma *Leaf* ou um *Fork*.

Quando recebe uma *Leaf*, a função devolve o valor 1. Caso contrário, é um *Fork* e é retornado o sucessor da sub-árvore (deste *Fork*) com maior profundidade:

$$\mathit{depth} :: \mathit{LTree}\ a \to \mathit{Integer}$$
$$\mathit{depth} = \mathit{cataLTree}\ [\mathit{one}, \mathit{succ} \cdot \widehat{\mathit{max}}]$$

A função *balance* recebe uma *LTree* e devolve essa *LTree* balanceada.

Começa por converter a *LTree* numa lista (*tips*). Depois disto, verifica se o comprimento dessa lista é igual a 1. Se isto for verdade, é retornado uma *Leaf* de valor igual à da cabeça da lista. Caso contrário, divide a lista a meio (*sep*) e retorna um *Fork*. As sub-árvores deste *Fork* são o resultado da chamada recursiva para cada metade da lista original.

Ao utilizar o anamorfismo de LTree (*anaLTree*), foi possível definir esta função numa única linha:

$$\mathit{balance} :: \mathit{LTree}\ a \to \mathit{LTree}\ a$$
$$\mathit{balance} = \mathit{anaLTree}\ (((\equiv 1) \cdot \mathit{length}) \to (i_1 \cdot \mathit{head}), (i_2 \cdot (\mathit{split}\ (\pi_1 \cdot \mathit{sep})\ (\pi_2 \cdot \mathit{sep})))) \cdot \mathit{tips}$$

Secção 4.2

abpe produz uma árvore binária de procura equilibrada definida pelo intervalo de dois inteiros *(n, m)*. É um anamorfismo de *BTree*, em que o seu gene é a função *qsplit*.

Começou-se por definir o *qsplit* na versão *pointwise*:

$$\mathit{qsplit} :: \mathit{Integral}\ a \Rightarrow (a, a) \to \mathit{Either}\ ()\ (a, ((a, a), (a, a)))$$
$$\mathit{qsplit}\ (n, m) = \textbf{if}\ ((n, m) \equiv (0, 0) \lor n > m)$$

$$\textbf{then } i_1 \; ()$$
$$\textbf{else let } inter = (n + m) \text{ `}div\text{` } 2$$
$$\textbf{in } i_2 \; (inter, ((n, inter - 1), (inter + 1, m)))$$

No início a função verifica se os dois parâmetros de entrada são iguais a 0 ou se o parâmetro n (menor dos dois) é maior que o parâmetro m (maior dos dois). Caso isso aconteça, a função devolve (). Senão, calcula o valor intermédio (*inter*) dos valores de entrada, devolvendo no final um par.

Depois, através do condicional de *McCarthy*, definiu-se a versão *pointfree*:

$$qsplit :: Integral \; a \Rightarrow (a, a) \rightarrow Either \; () \; (a, ((a, a), (a, a)))$$
$$qsplit \; (n, m) = (p) \rightarrow (f), (g) \; (n, m)$$
$$\textbf{where } inter = (\text{`}div\text{`}2) \cdot \widehat{(+)}$$
$$p = \widehat{(\vee)} \cdot (split \; \widehat{(>)} \; (\equiv (0, 0)))$$
$$f = i_1 \cdot (!)$$
$$g = i_2 \cdot (split \; (inter) \; (split \; (split \; (\pi_1) \; ((flip \; (-) \; 1) \cdot inter)) \; (split \; ((flip \; (+) \; 1) \cdot inter) \; (\pi_2))))$$

Secção 4.3

$$inSList :: Either \; a \; (a1, SList \; a1 \; a) \rightarrow SList \; a1 \; a$$
$$inSList = [Sent, Cons]$$
$$outSList :: (SList \; a \; b) \rightarrow Either \; b \; (a, SList \; a \; b)$$
$$outSList \; (Sent \; x) = i_1 \; x$$
$$outSList \; (Cons \; (x, l)) = i_2 \; (x, l)$$

O functor de uma *SList* é igual ao functor de uma lista, sendo definido do seguinte modo:

$$recSList \; f = id + id \times f$$

Assim sendo, o catamorfismo, o anamorfismo e o hilomorfismo, são idênticos aos de uma lista:

$$cataSList :: (Either \; b \; (a, d) \rightarrow d) \rightarrow SList \; a \; b \rightarrow d$$
$$cataSList \; g = g \cdot recSList \; (cataSList \; g) \cdot outSList$$
$$anaSList :: (c \rightarrow Either \; a \; (b, c)) \rightarrow c \rightarrow SList \; b \; a$$
$$anaSList \; g = inSList \cdot recSList \; (anaSList \; g) \cdot g$$
$$hyloSList :: (Either \; b \; (d, c) \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow Either \; b \; (d, a)) \rightarrow a \rightarrow c$$
$$hyloSList \; h \; g = cataSList \; h \cdot anaSList \; g$$

mgen recebe como parâmetro de entrada um par com duas listas. Se uma dessas listas seja vazia, devolve a lista não vazia. Caso contrário, devolve um par. O primeiro elemento é a maior das cabeças, extraída de uma das listas. O segundo elemento é um outro par com o resto das listas.

$$mgen :: Ord \; a \Rightarrow ([a], [a]) \rightarrow Either \; [a] \; (a, ([a], [a]))$$
$$mgen \; (l, []) = i_1 \; l$$
$$mgen \; ([], r) = i_1 \; r$$
$$mgen \; (x : xs, y : ys) \mid (x \leqslant y) = i_2 \; (x, (xs, y : ys))$$
$$\mid otherwise = i_2 \; (y, (x : xs, ys))$$

Secção 5.2

Começou-se por definir três funções auxiliares, para facilitar o cálculo e a leitura do código:

$$swapTLTree \; (a, (b, c)) = (c, (b, a))$$
$$maxTLTree :: (Integer, (Integer, Integer)) \rightarrow Integer$$
$$maxTLTree \; (a, (b, c)) = max \; a \; (max \; b \; c)$$
$$addTLTree :: (Integer, (Integer, Integer)) \rightarrow Integer$$
$$addTLTree \; (a, (b, c)) = a + b + c$$

Uma *TLTree* pode ser um ponto com as coordenadas de um vértice do triângulo e o lado do triângulo (isósceles) ou três triângulos definidos da mesma maneira.

Definiu-se o *inTLTree* e o *outTLTree* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&inTLTree = [L, N] \\
&outTLTree\ (L\ t) = i_1\ t \\
&outTLTree\ (N\ (a, (b, c))) = i_2\ (a, (b, c))
\end{aligned}$$

O functor base e o functor de *TLTree* são semelhantes aos de uma *LTree*, só que em vez de terem duas sub-árvores, numa *TLTree* tem-se três sub-árvores:

$$\begin{aligned}
&baseTLTree\ g\ f = g + ((f \times (f \times f))) \\
&recTLTree\ f = id + ((f \times (f \times f)))
\end{aligned}$$

O catamorfismo, anamofismo e hilomorfismo, são idênticos aos de uma *LTree*. Sendo aplicados aos functores de uma *TLTree*:

$$\begin{aligned}
&cataTLTree\ a = a \cdot (recTLTree\ (cataTLTree\ a)) \cdot outTLTree \\
&anaTLTree\ f = inTLTree \cdot (recTLTree\ (anaTLTree\ f)) \cdot f \\
&hyloTLTree\ a\ c = cataTLTree\ a \cdot anaTLTree\ c
\end{aligned}$$

A estrutura das funções que se seguem também são semelhantes às de uma *LTree*, mas usando as funções auxiliares definidas para uma *TLTree*:

$$\begin{aligned}
&tipsTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to [b] \\
&tipsTLTree = cataTLTree\ [singl, \mathsf{conc}] \\
&\quad \mathbf{where}\ \mathsf{conc}\ (l, (m, r)) = l +\!\!+\ m +\!\!+\ r \\
&invTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to \mathsf{TLTree}\ b \\
&invTLTree = cataTLTree\ (inTLTree \cdot (id + swapTLTree)) \\
&depthTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to Int \\
&depthTLTree = fromIntegral \cdot (cataTLTree\ [one, succ \cdot maxTLTree]) \\
&countTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to Int \\
&countTLTree = fromIntegral \cdot (cataTLTree\ [one, addTLTree])
\end{aligned}$$

Estas funções foram dadas pelo enunciado, sendo adaptadas para a estrutura de uma *TLTree*:

$$\begin{aligned}
&sierpinski :: Tri \to Int \to [Tri] \\
&sierpinski\ t = apresentaSierp \cdot (geraSierp\ t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&geraSierp :: Tri \to Int \to \mathsf{TLTree}\ Tri \\
&geraSierp\ t\ 0 = L\ t \\
&geraSierp\ ((x, y), s)\ n = \mathbf{let}\ s' = s \div 2 \\
&\quad \mathbf{in}\ N\ ((geraSierp\ ((x, y), s')\ (n - 1)), \\
&\qquad ((geraSierp\ ((x + s', y), s')\ (n - 1)), \\
&\qquad\quad (geraSierp\ ((x, y + s'), s')\ (n - 1))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&apresentaSierp\ (L\ t) = [t] \\
&apresentaSierp\ (N\ (a, (b, c))) = (apresentaSierp\ a) +\!\!+ (apresentaSierp\ b) +\!\!+ \\
&\quad (apresentaSierp\ c)
\end{aligned}$$

$$draw = render\ html\ \mathbf{where}\ html = rep\ dados$$

rep escreve o código *HTML* que permite visualizar o triângulo, a partir de uma lista. Cada elemento desta lista representa as coodenadas dos pontos do triângulo e o lado do triângulo, sendo calculada a partir de um catamorfismo.

$$rep\ x = finalize\ (cataList\ [nil, \mathsf{conc} \cdot (drawTriangle \times id)]\ (sierpinski\ (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x)))$$

```
["Vamos","atacar","hoje","stop"]  77.2%
        ["Vamos","atacar","hoje"]   8.6%
         ["atacar","hoje","stop"]   4.1%
        ["Vamos","atacar","stop"]   4.1%
          ["Vamos","hoje","stop"]   4.1%
               ["Vamos","atacar"]   0.5%
                 ["Vamos","hoje"]   0.5%
                ["atacar","hoje"]   0.5%
                 ["Vamos","stop"]   0.2%
                ["atacar","stop"]   0.2%
                  ["hoje","stop"]   0.2%
                       ["atacar"]   0.0%
                        ["Vamos"]   0.0%
                         ["hoje"]   0.0%
                         ["stop"]   0.0%
                               []   0.0%
```

Figura 4: Resultado da execução de *transmitir (words "Vamos atacar hoje")*

Secção 6.2

Como se pode verificar na imagem acima:

- a probabilidade de se perder a palavra "atacar"é igual a 4.1%
- a probabilidade de se receber a mensagem original, sem o "stop", é igual a 8.6%
- a probabilidade da mensagem ser perfeita é igual a 77.2%

O gene do *pcataList* da função *transmitir* é definido da seguinte forma:

$$gene = [ps, pm]$$

ps é uma distribuição onde há uma probabilidade de 90% devolver a string "stop"e uma probabilidade de 10% devolver uma lista vazia.

$$ps\ \_ = D\ [([\texttt{"stop"}], 0.9), ([\,], 0.1)]$$

pm é uma distribuição que, recebendo um par, existe uma probabilidade de 95% devolver uma lista com os parâmatros de entrada e uma probabilidade de 5% devolver apenas o segundo elemento do par de entrada.

$$pm\ (a, b) = D\ [(a : b, 0.95), (b, 0.05)]$$

Secção 6.4

parBTreeMap define-se da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} parBTreeMap :: (a \to b) \to (BTree\ a) \to Eval\ (BTree\ b) \\ parBTreeMap\ \_\ Empty = return\ Empty \\ parBTreeMap\ f\ (Node\ (n, (e, d))) = \mathbf{do}\ n' \leftarrow rpar\ (f\ n) \\ \quad e' \leftarrow parBTreeMap\ f\ e \\ \quad d' \leftarrow parBTreeMap\ f\ d \\ \quad return\ (Node\ (n', (e', d'))) \end{array}$$

Executando o comando para a função sequencial:

```
./cp1415t exemplo seq +RTS -s -N4
```

obtém-se o tempo de execução do programa:

```
Total   time    3.23s   (1.30s elapsed)
```

Executando o comando para a função em paralelo:

```
./cp1415t exemplo par +RTS -s -N4
```

obtém-se o tempo de execução do programa:

```
Total   time    2.52s   (0.80s elapsed)
```

Como se pode verificar, a versão paralela é 1.63 vezes mais rápida que a versão sequencial.

D Pirâmide de Sierpinski

O processo de construção de uma pirâmide de Sierpinski é semelhante ao de um triângulo de Sierpinski. Seja *P* uma pirâmide constituída por quatro triângulos iguais cujo comprimento dos seus catetos é *s*. A pirâmide é gerada desenhando cinco pirâmides iguais, cujo valor dos catetos das suas faces é *s/2*, no interior de *P*. Este processo é repetido infinitamente.

Cada face da pirâmide é definida do seguinte modo:

$$\mathbf{type}\ \mathit{PointPyr} = (\mathit{Float}, \mathit{Float}, \mathit{Float})$$
$$\mathbf{type}\ \mathit{Pyr} = (\mathit{PointPyr}, \mathit{Float})$$

Optou-se por valores do tipo *Float* em vez de valores do tipo *Int* para maior precisão no desenho das pirâmides.

A estrutura recursiva de uma pirâmide de Sierpinski é a seguinte, em que cada nó é uma pirâmide com as respetivas cinco sub-pirâmides:

$$\mathbf{data}\ \mathit{PLTree} = \mathit{Pyr}\ \mathit{Pyr} \mid \mathit{Nd}\ \mathit{PLTree}\ \mathit{PLTree}\ \mathit{PLTree}\ \mathit{PLTree}\ \mathit{PLTree}\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Show})$$

dadosPyr é um exemplo de uma pirâmide centrada na origem, com arestas de comprimento 32 e com 4 níveis de recursividade.

$$\mathit{dadosPyr} = (((0,0,0),32),4)$$

As funções seguintes são semelhantes às funções para um triângulo, só que adaptadas para a estrutura de uma pirâmide:

$$\mathit{drawPyr} = \mathit{renderPyr}\ \mathit{html}\ \mathbf{where}\ \mathit{html} = \mathit{repPyr}\ \mathit{dadosPyr}$$
$$\mathit{renderPyr}\ \mathit{html} = \mathbf{do}\ \{\mathit{writeFile}\ \texttt{"pyr.html"}\ \mathit{html}; \mathit{system}\ \texttt{"open pyr.html"}\}$$
$$\mathit{repPyr}\ x = \mathit{finalize}\ (\mathit{cataList}\ [\mathit{nil}, \mathsf{conc} \cdot (\mathit{drawPyramide} \times \mathit{id})]\ (\mathit{sierpinskiPyr}\ (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x)))$$
$$\mathit{sierpinskiPyr}\ p = \mathit{apresentaSierpPyr} \cdot (\mathit{geraSierpPyr}\ p)$$
$$\begin{array}{l} \mathit{apresentaSierpPyr}\ (\mathit{Pyr}\ p) = [p] \\ \mathit{apresentaSierpPyr}\ (\mathit{Nd}\ a\ b\ c\ d\ e) = (\mathit{apresentaSierpPyr}\ a) \mathbin{+\!\!+} \\ \quad (\mathit{apresentaSierpPyr}\ b) \mathbin{+\!\!+} \\ \quad (\mathit{apresentaSierpPyr}\ c) \mathbin{+\!\!+} \\ \quad (\mathit{apresentaSierpPyr}\ d) \mathbin{+\!\!+} \\ \quad (\mathit{apresentaSierpPyr}\ e) \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \mathit{geraSierpPyr}\ t\ 0 = \mathit{Pyr}\ t \\ \mathit{geraSierpPyr}\ ((x,y,z),s)\ n = \mathbf{let}\ s' = s\ /\ 2 \\ \quad \mathbf{in}\ \mathit{Nd}\ (\mathit{geraSierpPyr}\ ((x,y,z),s')\ (n-1)) \\ \qquad (\mathit{geraSierpPyr}\ ((x-(\mathit{s2}\ s'), y+(\mathit{sy}\ s'), z+(\mathit{s2}\ s')), s')\ (n-1)) \\ \qquad (\mathit{geraSierpPyr}\ ((x-(\mathit{s2}\ s'), y+(\mathit{sy}\ s'), z-(\mathit{s2}\ s')), s')\ (n-1)) \\ \qquad (\mathit{geraSierpPyr}\ ((x+(\mathit{s2}\ s'), y+(\mathit{sy}\ s'), z-(\mathit{s2}\ s')), s')\ (n-1)) \\ \qquad (\mathit{geraSierpPyr}\ ((x+(\mathit{s2}\ s'), y+(\mathit{sy}\ s'), z+(\mathit{s2}\ s')), s')\ (n-1)) \end{array}$$

drawPyramide constrói o código *HTML* para a representação da pirâmide. Recebe como parâmetros de entrada as coordenadas de um ponto e o comprimento de uma aresta. Tendo isto, a função constrói uma pirâmide. Para isso, calcula as coordenadas dos cinco pontos que a constitui: *coordinate point* = ... Os pontos são unidos (criam-se as quatro faces laterais): *indexedFaceSet coordIndex* = ... A base da pirâmide não é desenhada.

Finalmente, a propriedade *solid* = *'false'* serve para a pirâmide ser visível em qualquer orientação.

```haskell
drawPyramide :: ((Float, Float, Float), Float) -> String
drawPyramide ((x, y, z), side) = "\n <Transform translation='" ++
(show x) ++ " " ++ (show y) ++ " " ++ (show z) ++ "'> \n" ++
  "<shape> \n" ++
    "<appearance> \n " ++
      "<material diffuseColor = '0.8,0.8,0.8'> \n </material>\n" ++
    "</appearance>\n" ++
    "<indexedFaceSet coordIndex = " ++
      "'0 1 2 -1 0 2 3 -1 0 3 4 -1 0 1 4 -1' solid='false'>" ++
      "\n<coordinate point = '0 0 0," ++ (show ((-1) * (s2 side))) ++
      " " ++ (show (sy side)) ++ " " ++ (show (s2 side)) ++ "," ++
      (show ((-1) * (s2 side))) ++ " " ++ (show (sy side)) ++ " " ++
      (show ((-1) * (s2 side))) ++ "," ++ (show (s2 side)) ++ " " ++
      (show (sy side)) ++ " " ++ (show ((-1) * (s2 side))) ++ "," ++
      (show (s2 side)) ++ " " ++ (show (sy side)) ++ " " ++
      (show (s2 side)) ++ "'>\n </coordinate>\n" ++
    "</indexedFaceSet>\n " ++
  "</shape>\n" ++
"</Transform> \n"
```

Funções auxiliares para calcular o comprimento dos lados de uma sub-pirâmide (*s2*) e a altura de uma sub-pirâmide (*sy*).

```haskell
s2 side = side / 2
sy side = (-1) * (sqrt ((side ^ 2) - (s2 side) ^ 2))
```

Índice