

Projet Macs205

J. Toucheboeuf, R. Brutti, A. Gourrin, B. Cohen, H.
René-Bazin

Groupe 2

March 17, 2021

Equation différentielle étudiée

Equation de Fitzhugh-Nagumo :

$$\begin{aligned}v'(t) &= v(t) - \frac{v(t)^3}{3} - w(t) + I_{\text{ext}}(t) \\w'(t) &= \frac{v(t) + a - bw(t)}{\tau}\end{aligned}$$

Ecriture sous forme de problème de Cauchy :

$$\begin{aligned}y'(t) &= \begin{pmatrix} v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} v(t) - \frac{v(t)^3}{3} - w(t) + I_{\text{ext}}(t) \\ \frac{v(t) + a - bw(t)}{\tau} \end{pmatrix} \\&= f(t, y(t))\end{aligned}$$

- I_{ext} valeur envoyée par le nerf optique.
- Constantes du problème : $a = 0.95$, $b = 0.4$, $\tau = 11$.

Etude théorique autour d'un point d'équilibre 1/2

On se place en t_0 tel que : $v'(t_0) = w'(t_0) = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} w_0 &= \frac{v_0 + a}{b} \\ w_0 &= v_0 - \frac{v_0^3}{3} + l \end{cases} \quad (1)$$

Linéarisation avec un développement de Taylor au voisinage de (v_0, w_0) écrit sous forme matricielle :

$$x'(t) = \begin{pmatrix} v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v_0^2 & -1 \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{b}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) - v_0 \\ w(t) - w_0 \end{pmatrix} = Jx(t) \quad (2)$$

solution explicite après diagonalisation de J :

$$x(t) = \begin{pmatrix} v - v_0 \\ w - w_0 \end{pmatrix} = P \exp \left(\begin{pmatrix} \lambda_0(l_{\text{ext}}) & 0 \\ 0 & \lambda_1(l_{\text{ext}}) \end{pmatrix} \right) P^{-1} x_0 \quad (3)$$

Etude des valeurs propres autour d'un point d'équilibre

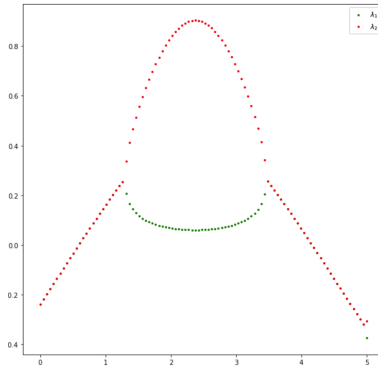


Figure: Partie réelle des valeurs propres de J en fonction l_{ext}

- f est C^1 (sa jacobienne est la matrice de l'équation (3)), on a une méthode d'ordre 2.
- f est localement lipschitzienne autour d'un point d'équilibre.
- Euler explicite : on a $\phi(t, y, h) = f(t, y)$.
 - méthode consistante (thm 4.3.7)
- Runge-Kutta pour $q = 2$ et $q = 4$.
 - $q = 1$: identique à Euler explicite
 - $q = 2$: méthode de Heun implémentée
 - $q = 4$: coefficients de Simpson, méthode d'ordre 4
 - toutes ces méthodes sont donc consistantes
- Conclusion :
 - la résolution numérique donne les constantes de stabilité S
 - Euler explicite converge
 - Runge-Kutta converge

résolution numérique Runge-Kutta $q = 4$ (1 seul neurone)

- Portrait de phase ($v(t), w(t)$)

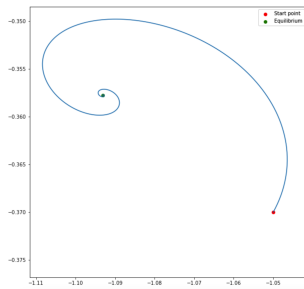


Figure: $I_{ext} = 0.3$

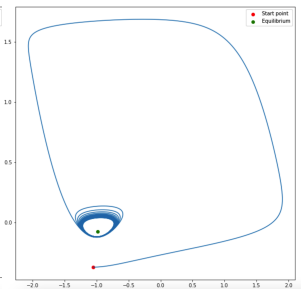


Figure: $I_{ext} = 0.59$

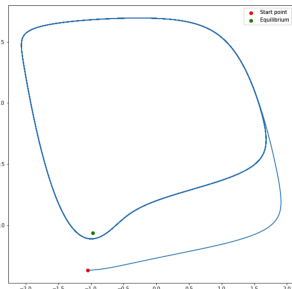


Figure: $I_{ext} = 0.6$

- Remarque : les courbes obtenues pour Euler, et Runge-Kutta $q = 2$ sont sensiblement identiques.

résolution numérique méthode d'Euler 2 neurones

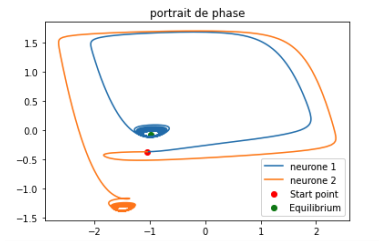


Figure: $I_{ext} = 0.59$

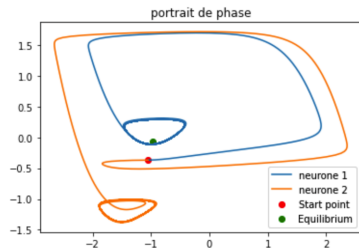


Figure: $I_{ext} = 0.6$

- NB : les tracés pour Runge-Kutta sont dans le notebook

Comparaison des performances méthodes numériques

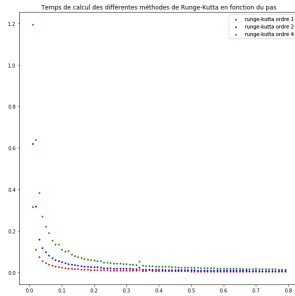


Figure: Temps de calcul

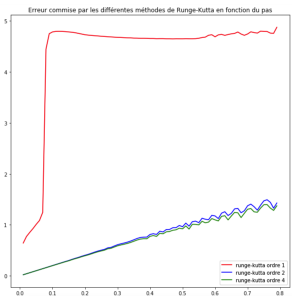


Figure: Erreur des méthodes

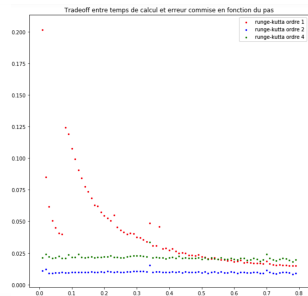


Figure: tradeoff des méthodes