LISTA 05: FIS670 - Métodos Computacionais da Física. (Prof. Leandro Rizzi)

Exercício 1. Considere uma população descrita pelo número de indivíduos P_n em um dado tempo n e que evolui segundo a relação de recorrência: $P_{n+1} = P_n(a - bP_n)$ com $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $P_n = (a/b)x_n$ e $a = 4r$ obtemos a seguinte aproximação para o modelo de Verhulst (vide Lista 04),

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n) \quad ,$$

com $0 \leq x_n \leq 1$. Dada a condição inicial x_0 e a taxa de crescimento $0 < r \leq 1$, os valores x_n para $n = 0, \ldots, N$ definem uma *trajetória* que descreve a evolução da população do sistema. Também nos referimos à relação acima como um *mapa unidimensional* ou *mapa logístico*, definido pela(o) transformação (mapeamento) $x_{n+1} = f_r^{(1)}(x_n)$.

Dependendo do valor de r e de x_0 é interessante analisar a convergência de x_n para um valor x^* no limite $n \gg 1$. Isso pode ser feito, por exemplo, considerando duas condições iniciais parecidas, $x_0' \approx x_0$, e observando o que ocorre com a diferença entre as trajetórias, $\Delta x_n = |x_n' - x_n|$. Assumindo a relação $\Delta x_n = \Delta x_0 \, e^{n\lambda_r}$, podemos definir uma estimativa para o *expoente de Lyapunov* [1] como:

$$\lambda_r = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\Delta x_N}{\Delta x_0} \right| = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| \quad , \tag{1}$$

que, a princípio, é válida nos limites $N \gg 1$ e $\Delta x_0 \ll 1$. Na prática, no entanto, consideramos a aproximação $|\Delta x_{n+1}/\Delta x_n| \approx |(df_r^{(1)}/dx)_{x=x_n}| = |f_r'^{(1)}(x_n)|$, assim

$$\lambda_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f_r'^{(1)}(x_n)| \quad . \tag{2}$$

A partir do sinal de λ_r é possível avaliar a *estabilidade* das trajetórias para um dado valor de r. Por exemplo, se $\lambda_r < 0$, então $\Delta x_n = \Delta x_0 \, e^{n\lambda_r} \to 0$ e x_n deve convergir para algum *ponto fixo* estável x^* quando $n \gg 1$, mas se $\lambda_r > 0$, então o valor de Δx_n pode divergir e x_n não converge para nenhum valor. Quando há um ponto fixo estável x_i^*, o conjunto de valores $\{x_0\}_i$ que levam a trajetória para x_i^* definem o que chamamos de *bacia de atração.*

a) Analiticamente, os pontos fixos x_i^*, *e.g.* estáveis ou instáveis, são determinados através da igualdade $f_r^{(1)}(x_i^*) = x_i^*$ e a estabilidade desses pontos pode ser avaliada observando os valores de $|f_r'^{(1)}(x_i^*)|$. Se $|f_r'^{(1)}(x_i^*)| < 1$ o ponto x_i^* é estável (atrator); se $|f_r'^{(1)}(x_i^*)| > 1$, o ponto x_i^* é instável (repulsor); se $|f_r'^{(1)}(x_i^*)| = 1$, então x_i^* é marginal (indiferente); e se $|f_r'^{(1)}(x_i^*)| = 0$, o ponto x_i^* é dito superestável. Considerando esses critérios, obtenha os pontos fixos x_1^* e x_2^* e os intervalos de valores de r nos quais cada um deles é estável ou instavél.

b) Considerando as seguintes condições iniciais: $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.3$, $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.7$ e $x_0 = 0.9$, grafique as trajetórias x_n para $r = 0.24$ e $r = 0.26$ com $N = 40$. Quais os valores de $x^* = x_N$ ($N = 500$) para esses valores de r? Esses valores são condizentes com a análise de estabilidade obtida no item (a)?

c) Utilizando os mesmos valores das condições iniciais do item (b), obtenha trajetórias para encontrar os valores de x^* para $r = 0.33$, $r = 0.43$, $r = 0.53$, $r = 0.63$ e $r = 0.73$. Faça um gráfico de x^* e $1/r$ e compare com a relação obtida através da análise de estabilidade do item (a).

d) Para certos valores de r é possível observar trajetórias com um comportamento periódico no limite $n \gg 1$ onde p valores, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^*$, são repetidos ciclicamente. Tais valores definem um ciclo-p e podem ser determinados pela relação $x_{n+p} = f_r^{(p)}(x_n) = x_n$. Considerando as condições iniciais $x_0 = 0.1$ e 0.9, grafique trajetórias com $N = 100$ para $r = 0.85$, $r = 0.87$, $r = 0.89$ e $r = 0.96$. A partir dos gráficos, encontre o período p do ciclo para cada um desses valores de r.

e) Considere $r = 0.91$ e duas trajetórias com $N = 120$ partindo de condições iniciais próximas, $x_0 = 0.5000$ e $x_0' = 0.5001$. Faça os gráficos das duas trajetórias e também da diferença Δx_n. Calcule o expoente de Lyapunov λ_r utilizando a expressão (2) com $N = 10^5$ e comente o que era esperado para a estabilidade das trajetórias para esse valor de r.

f) Variando r de 0.001 e fazendo $N = 10^5$, utilize a expressão (2) para encontrar os valores dos expoentes de Lyapunov λ_r no intervalo $r \in]0, 1[$. Grafique λ_r por r e compare com os resultados da ref. [1]. Confira se os resultados dos items anteriores estão condizentes com os valores de λ_r obtidos.

g) Liste os valores de λ_r mais próximos de zero para $r \geq 0.7$ calculados no item (f) e compare com os valores da ref. [1] (Tabela 6.1). Quando $\lambda_{r_k} = 0$ dizemos que r_k corresponde à um ponto de bifurcação onde, por exemplo, os períodos dobram. Discuta a relação desses pontos com a constante de Feigenbaum $\delta = 4.6692\ldots$.

Exercício 2. Considere a equação diferencial $dy/dt = -y/\tau = g(y)$. Nesse caso, uma estimativa numérica w_i para a solução exata $\bar{y}(t) = y_0 e^{-t/\tau}$ pode ser obtida, por exemplo, através do método de Euler (vide Lista 04), que é definido pela relação de recorrência $w_{i+1} = w_i + hg(w_i)$, ou seja, pela(o) transformação (mapeamento)

$$f_r^{(1)}(w_i) = w_{i+1} = (1 - r)w_i \quad ,$$

onde $r = h/\tau$ e $w_0 = y_0$. Com isso, fica evidente que a estabilidade do método de Euler com um passo de tamanho h pode ser avaliada utilizando a mesma análise descrita no Exercício 1.

a) Assumindo $y_0 = 1$ e $\tau = 1$, obtenha o ponto fixo $f_r^{(1)}(w^*) = w^*$ e indique o intervalo $]0, h_{\max}[$ para o qual h fornece $|f_r'^{(1)}(w^*)| < 1$. Faça gráficos de w_i considerando passos de tamanho $h \ll h_{\max}$ e $h = h_{\max} \pm \varepsilon$ com $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.5$ para $t_i = ih \leq 25$. Inclua também no gráfico a solução exata $\bar{y}(t)$. Verifique que o valor de $h_{\max}$ calculado no item (a) também pode ser obtido através da análise da *"matriz" de amplificação* $\mathbf{G}$ (veja as págs. 92 e 93 de [2]).

b) Considere agora o seguinte sistema de EDOs:

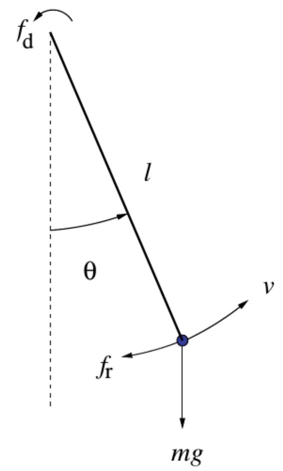
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ denotam as derivadas de x e y em relação ao tempo t, respectivamente. Considerando o método de Euler com passo h e identificando $\dot{x} = g_x(x,y) = ax + by$ e $\dot{y} = g_y(x,y) = cx + dy$, determine as funções de mapeamento através das estimativas $w_{i+1}^x = f_{\mathbf{M},h}^{(x)}(w_i^x, w_i^y)$ e $w_{i+1}^y = f_{\mathbf{M},h}^{(y)}(w_i^x, w_i^y)$. Com isso, a matriz $\mathbf{G}$ é definida como [2]:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \partial_x f_{\mathbf{M},h}^{(x)} & \partial_x f_{\mathbf{M},h}^{(y)} \\ \partial_y f_{\mathbf{M},h}^{(x)} & \partial_y f_{\mathbf{M},h}^{(y)} \end{pmatrix} \quad ,$$

onde $\mathbf{M}$ denota o conjunto de parâmetros (a, b, c, d). Como o sistema é definido por duas equações diferenciais, a análise de estabilidade deve ser feita considerando a seguinte condição (vide ref. [2]) para os dois autovalores da matriz $\mathbf{G}$: $|\lambda_{\mathbf{M},h}^{(1)}| < 1$ e $|\lambda_{\mathbf{M},h}^{(2)}| < 1$. A partir dessa análise, determine o intervalo de estabilidade para o tamanho do passo h considerando $w_0^x = x_0 = 2$, $w_0^y = y_0 = -3$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$ e $d = -2$. Faça gráficos de w_i^x e w_i^y no intervalo $t_i \in [0, 20]$ comparando com as soluções exatas $\bar{x}(t)$ e $\bar{y}(t)$ (vide pág. 131 de [3]). Considere dois valores distintos de h e discuta qual foi o seu critério de escolha.

Exercício 3. Considere um oscilador harmônico amortecido e forçado definido por uma massa m presa à uma haste leve de comprimento l tal como ilustrado na Figura ao lado. O movimento do pêndulo é determinado pela equação de Newton $ma_t = f_g + f_r + f_d$, onde $a_t = l\, d^2\theta/dt^2$ é a aceleração tangencial, $f_g = -mg\,\text{sen}\theta$ é a contribuição da gravidade ao longo da direção do movimento, $f_r = -\kappa v$ é uma força resistiva, sendo $v = l\, d\theta/dt$ a velocidade da massa, e $f_d(t) = f_0 \cos\omega_0 t$ é uma força devido a um torque externo no eixo de rotação. A equação de movimento pode ser reescrita na forma adimensional (*i.e.* com o tempo dado em unidades de $\sqrt{l/g}$) como



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \text{sen}\theta = b\cos\omega_0 t \quad ,$$

com $q = \kappa/m$ e $b = f_0/ml$. Como discutido na Lista 04 podemos transformar EDOs de segunda ordem em duas EDOs de primeira ordem acopladas. Escolhendo $y_1 = \theta$ e $y_2 = \omega = d\theta/dt$ temos

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy_2}{dt} = -qy_2 - \text{sen}y_1 + b\cos\omega_0 t \quad .$$

Dependendo dos parâmetros q, b e ω_0 podemos ter uma dinâmica bem diferente para as soluções $\theta(t)$ e $\omega(t)$.

a) Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver o sistema de EDOs acima (vide Lista 04). Grafique pontos no espaço de fase $\omega(t_i)$ por $\theta(t_i)$ com $t_i = ih$ com $i = 0, \ldots, 10000$ e $h = 0.1\pi$ considerando os parâmetros $q = 0.5$, $b = 0.9$ e $\omega_0 = 2/3$ e as condições iniciais $\theta(0){=}0$ e $\omega(0) = 2$ (plote menos pontos se o gráfico estiver "poluído", *e.g.* pule 9 pontos a cada 10). Note que, por causa da natureza do problema, devemos confinar $\theta(t)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, ou seja, se θ sair desse intervalo transladamos ele de volta, *i.e.* $\theta(t) \to \theta(t) \pm 2m\pi$, com m inteiro.

b) Repita o item (a) considerando os parâmetros $q = 0.5$, $b = 1.15$ e $\omega_0 = 2/3$.

c) Discuta o que ocorre para os dois conjuntos de parâmetros (q, b, ω_0) considerados nos items (a) e (b). Faça gráficos de $\theta(t)$ e $\omega(t)$ em função de t considerando (para cada conjunto de parâmetros) duas trajetórias com condições iniciais bem próximas entre si e semelhantes as do item (a).

Referências:

[1] H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian. An introduction to computer simulation methods: Applications to physical system (agosto de 2016).
[2] F. J. Vesely. Computational Physics: An introduction (2^{nd} ed., Livaria da Física, 2001).
[3] S. H. Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (Perseus Books, 1994).