

Exercício 1

a)

Na figura 1 temos o gráfico da solução exata e solução estimada. A análise do gráfico não mostra nenhuma diferença aparente entre as duas soluções, sendo então necessário plotar o gráfico do erro separadamente. Como os métodos mais precisos farão a diferença entre a solução numérica e a solução exata serem ainda menores este gráfico será omitido nas análises posteriores.

Ainda na figura 1 temos o erro do método de Euler para $N = 365$ e $N = 730$. Como o erro do método é da ordem de h , temos que ao dobrar N o erro cai pela metade, como esperado.

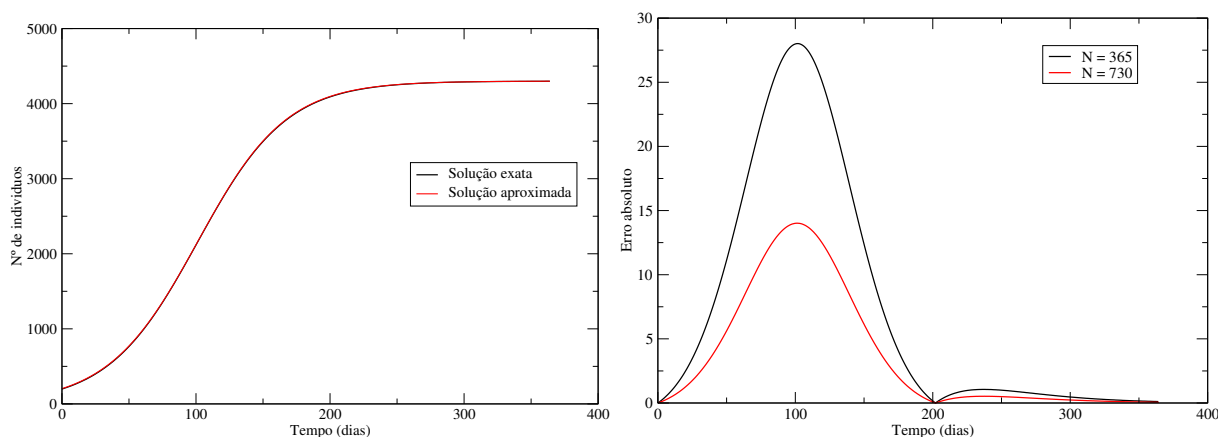


Figura 1: Solução exata e solução numérica em função do tempo (esquerda) e erro absoluto para o método de Euler (direita).

b)

Na figura 2 temos o erro do método predictor-corretor para dois valores de N . Como o erro é proporcional a h^2 temos que dobrar o N faz com o que o erro diminua por 4, como esperado.

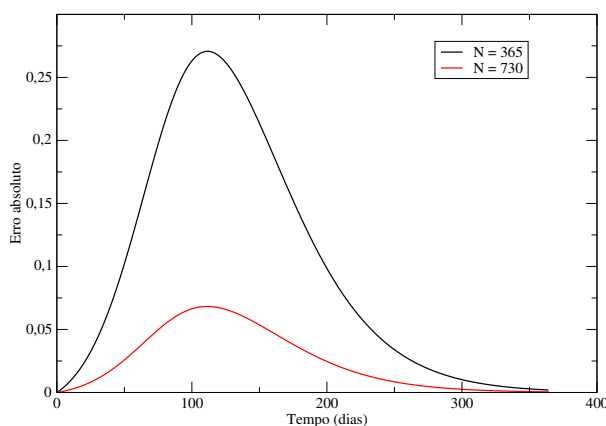


Figura 2: Erro absoluto para o método Predictor-Corretor.

Uma comparação direta entre o método de Euler e o método predictor corretor está na figura 3. Em uma escala linear não é possível diferenciar o erro do método predictor do eixo x , portanto também foi feito o gráfico em escala log-log, onde vemos que os erros do método predictor são por volta de 300 vezes menores. No gráfico log-log há apenas uma região onde o método de Euler é menor que o método predictor, o que se deve a um único ponto onde o erro absoluto do método de Euler é nulo.

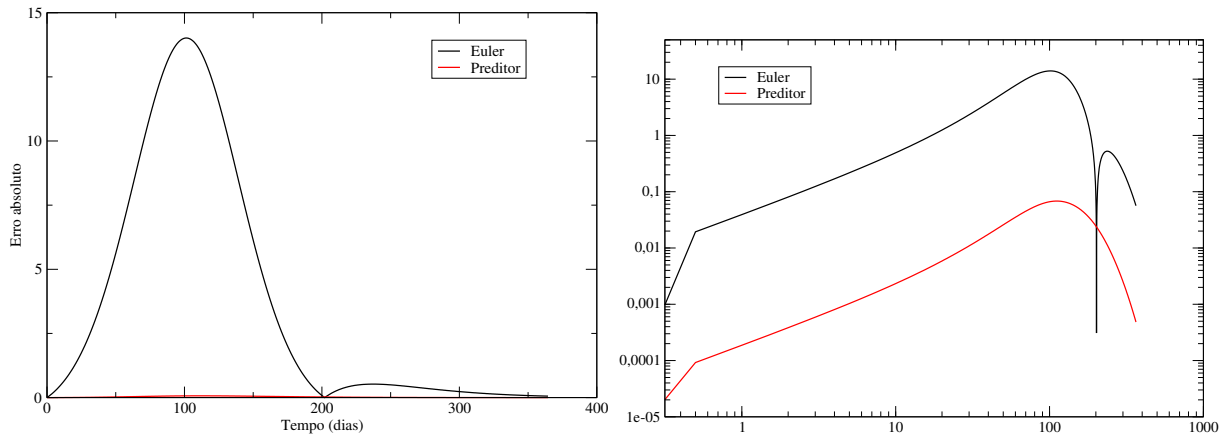


Figura 3: Erro absoluto para o método de Euler e predictor-corretor com $N = 730$.

c)

Na figura 4 temos o erro absoluto para o método Rouge-Kutta de quarta ordem. Como o erro é da ordem de h^4 temos que dobrar o N faz com que o erro diminua em 16 vezes, como esperado.

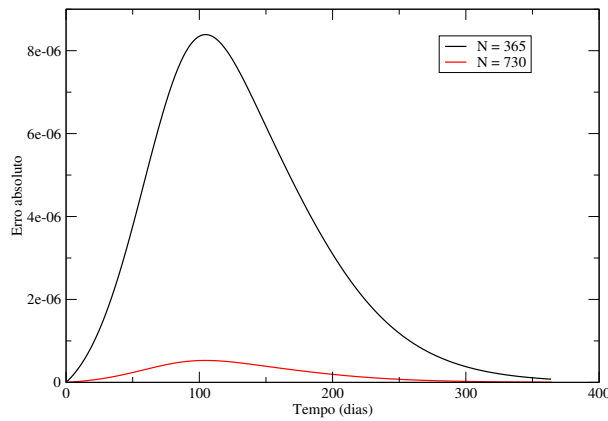


Figura 4: Erro absoluto para o método de Rouge-Kutta.

Na figura 5 temos uma comparação direta entre os métodos de Rouge-Kutta e o método Predictor-Corretor. Vemos que a diferença entre os erros é de 5 ordens de grandeza.

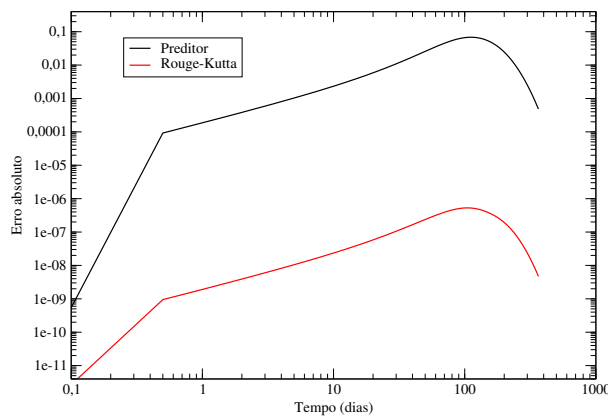


Figura 5: Erro absoluto para o método de Corretor-Predictor e Rouge-Kutta de quarta ordem para $N = 730$.

d)

Na figura 6 estão representadas as populações para os três parâmetros pedidos. A curva preta mostra uma população que satura perto dos 4000 indivíduos; a curva vermelha mostra uma população que, apesar de decrescente, satura em

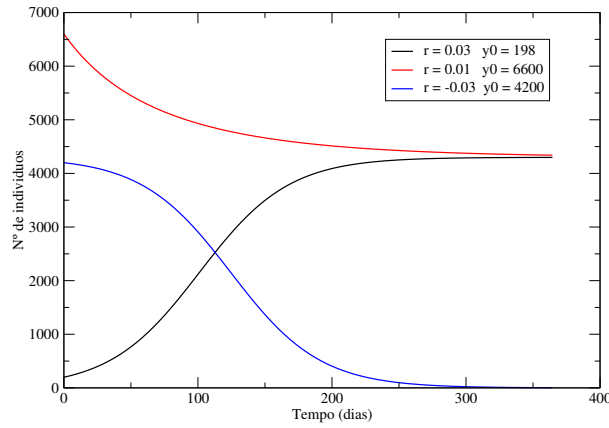


Figura 6: População em função do tempo para três conjuntos de parâmetros.

um valor também próximo de 4000 indivíduos. A saturação está relacionada ao parâmetro κ , como pode ser visto aplicando o limite de tempos longos na equação do número de indivíduos. A curva azul, no entanto, possui uma taxa de crescimento de população negativa e mostra uma população cujo número final de indivíduos vai para zero, mesmo tendo o mesmo valor de κ das outras curvas.

Exercício 2

a)

Os resultados estão na figura 7. No gráfico da esquerda temos a evolução temporal das três populações, onde vemos que após um tempo $t = 300$ há uma convergência no valor de cada uma delas. Na figura à direita os três valores teóricos para o estado estacionário foram plotados como linhas horizontais, de modo que a comparação com o valor teórico é imediata em qualquer ponto. Note que a solução estacionária não é válida para tempos curtos, passando a ser válida somente para tempos $t > 350$.

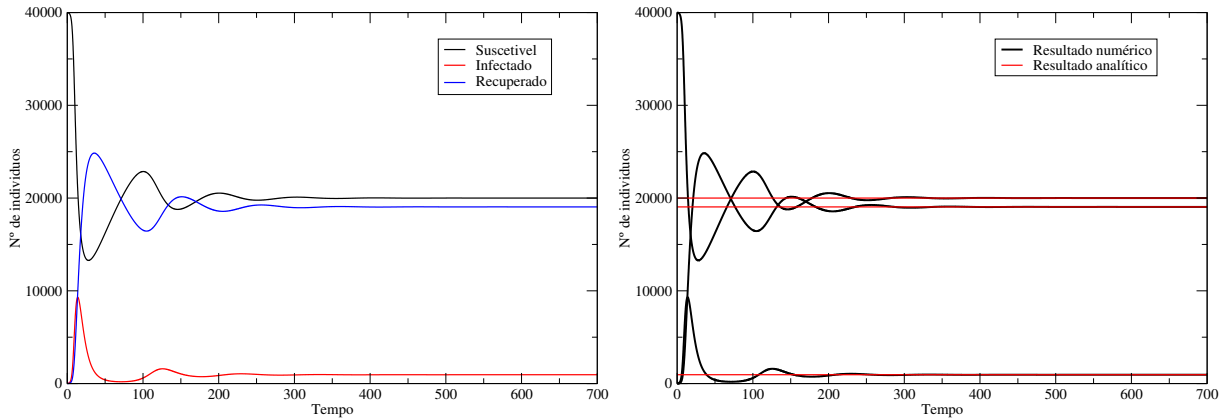


Figura 7: População de Suscetíveis, Infectados e Recuperados em função do tempo.

Exercício 3

a)

Temos que o potencial é dado por:

$$V(r) = -D \left[1 - \left(1 - e^{-a(r-r_e)} \right)^2 \right]$$

Derivando em função de r e multiplicando por -1 temos a expressão para a força:

$$F(r) = -aD \left[1 - 2 \left(1 - e^{-a(r-r_e)} \right) e^{-a(r-r_e)} \right]$$

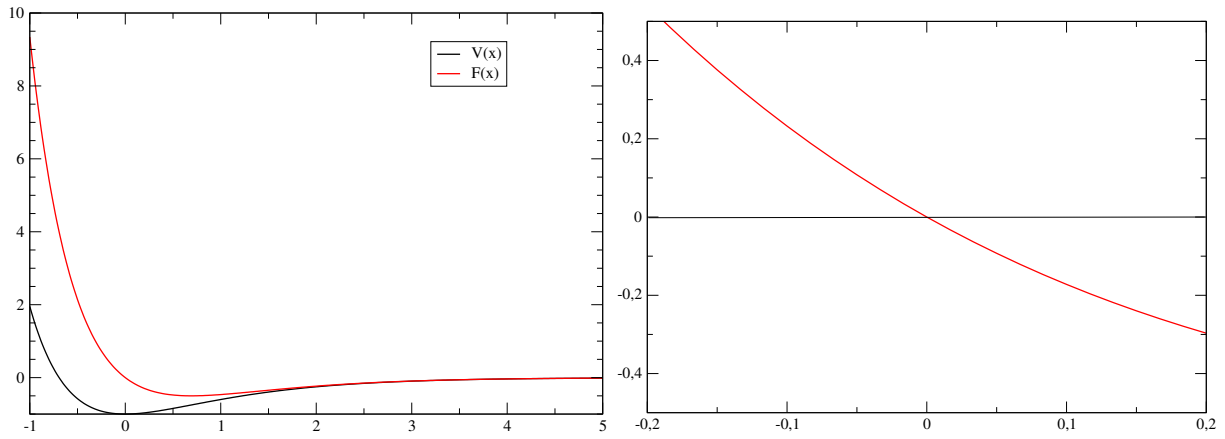


Figura 8: Potencial e Força em função da posição (esquerda) e força em pontos próximos do mínimo de potencial (direita).

Na figura 8 foi feito o gráfico do potencial e da força em função da posição. Além disso, foi feito também a força em uma região próxima do mínimo de potencial, de modo a evidenciar o comportamento linear da força próximo nesta região.

b)

Para calcular o valor teórico precisamos do valor de δ . Fazendo $s(t_0) = 1$ temos:

$$\delta = \arccos \left[\left(\frac{E + D}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Na figura 9 temos a posição em função do tempo calculada numericamente e exatamente à esquerda e o valor do erro absoluto à direita. Na figura 10 temos a posição e a velocidade em função do tempo obtidas numericamente.

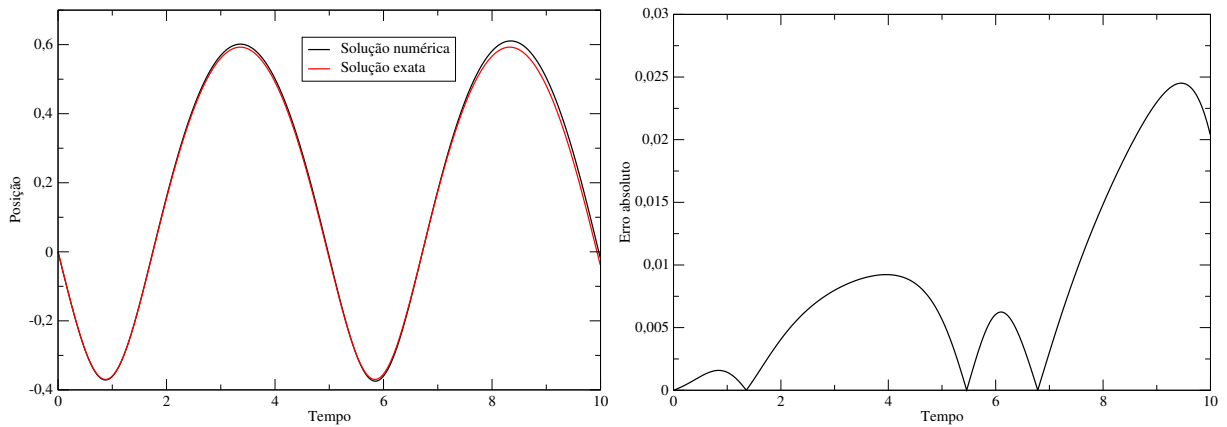


Figura 9: Posição e velocidade em função do tempo (esquerda) e erro absoluto da posição (direita).

Exercício 4

a)

A EDO $\nabla^2 u(x) = 0$ possui como solução exata $u(x) = C_1 x + C_2$. Aplicando as condições de contorno $u(0) = 305K$ e $u(30) = 390K$, temos $u(x) = 2.833x + 305$. Na figura 11 temos a temperatura em função da posição e o erro absoluto do resultado exato.

b)

As novas condições de contorno são dadas por:

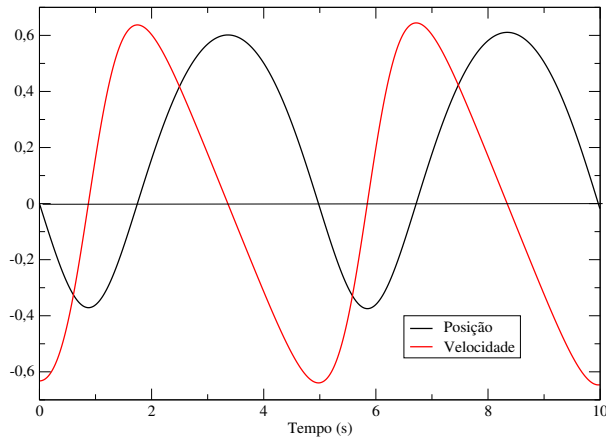


Figura 10: Comparação entre solução numérica e exata.

$$\begin{cases} u(0) = 305K \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=30} = -4K/cm \end{cases}$$

Comparando com as equações dadas:

$$\begin{cases} \alpha_L u(x) + \beta_L \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_L \\ \alpha_H u(x) + \beta_H \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_H \end{cases}$$

$$\text{Temos que } \begin{cases} \beta_L = 0 \\ \alpha_H = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se escolhermos, por conveniência, que } \begin{cases} \alpha_L = 1 \\ \beta_H = 1 \end{cases}$$

$$\text{Temos finalmente que } \begin{cases} \gamma_L = 305 \\ \gamma_H = -4 \end{cases}$$

Com isto, pelo algoritmo da referência [4] temos que a matriz M será modificada apenas na ultima linha, onde o elemento da diagonal passa de -2 para -1. A matriz w também será alterada apenas na ultima linha, onde $w(N) = f(x)(dx)^2 + 4dx$. No entanto houve algum erro na implementação, pois o resultado obtido está longe do resultado teórico esperado, como pode ser visto na figura 12

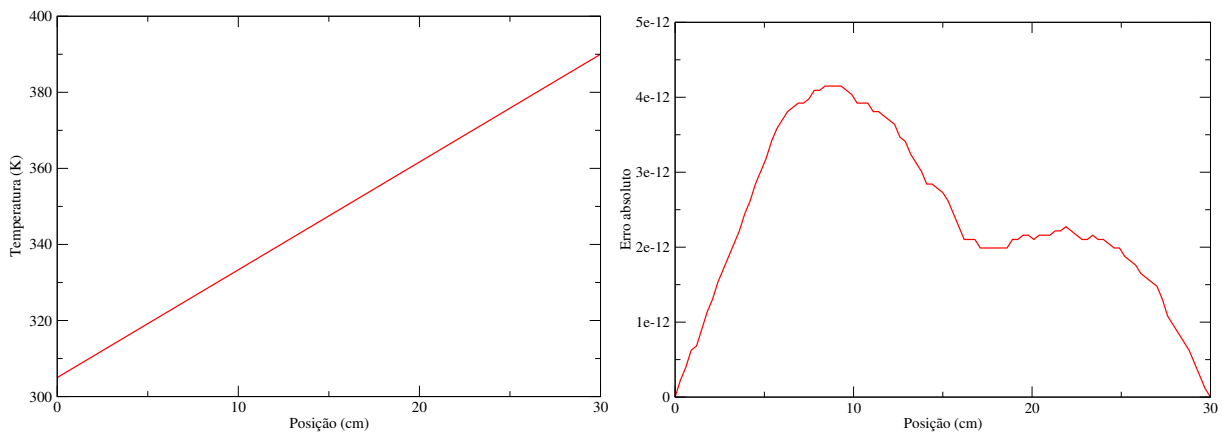


Figura 11: Temperatura em função da posição (esquerda) e erro absoluto em função da posição (direita).

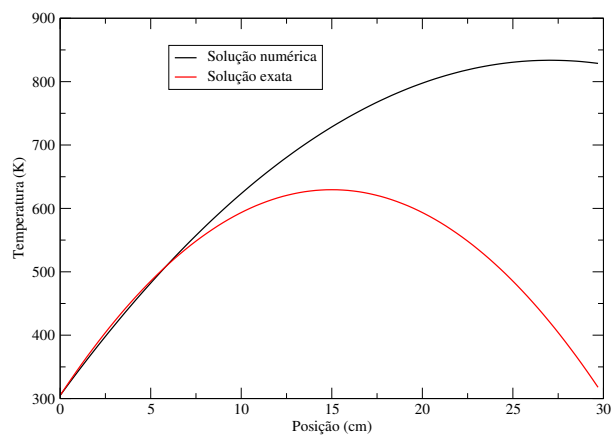


Figura 12: Comparação entre solução numérica e exata.