

Exercício 1. Considere o circuito elétrico representado pela Figura 1. De acordo com as leis de Kirchhoff é possível definir três laços independentes. Escolhendo o primeiro laço como passando pela fonte e pelas resistências r_1 e r_2 , e o segundo e terceiro laços como, respectivamente, à esquerda e à direita do amperímetro, as equações de tensão para cada laço são dadas pelo sistema linear:

$$\begin{aligned} r_s i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 &= \nu_0 \\ -r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a) i_2 - r_a i_3 &= 0 \\ -r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 + r_a) i_3 &= 0 \end{aligned}$$

as quais podem ser escritas na forma matricial como

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{V} \quad ,$$

onde

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

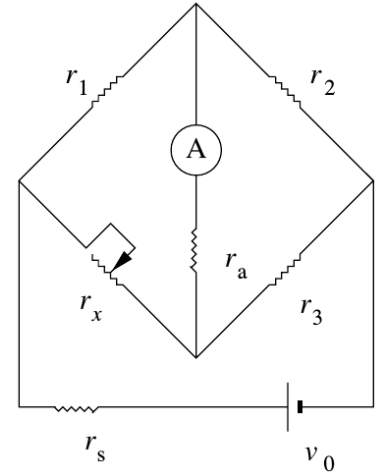


Figura 1: Circuito elétrico de uma ponte de Wheatstone. As resistências internas r_s e r_a indicam componentes não ideais.

- Escreva a expressão analítica para a matriz \mathbf{R} .
- Considere o método de decomposição LU (vide páginas 26 à 29 da Ref. [1]) para matrizes $n \times n$, onde a matriz \mathbf{R} é reescrita como a multiplicação das matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} . Escreva as expressões analíticas para matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} , isto é, explicitando como os seus elementos em função das resistências.
- Implemente o método de decomposição LU para resolver sistemas lineares definidos por matrizes $n \times n$ e use-o para encontrar numericamente o vetor solução \mathbf{i} assumindo $\nu_0 = 1.5 \text{ V}$, $r_1 = r_2 = 100 \Omega$, $r_3 = 150 \Omega$, $r_x = 120 \Omega$, $r_a = 1000 \Omega$ e $r_s = 10 \Omega$. Qual será a corrente i_a no amperímetro? Indique se a ponte está balanceada.

Exercício 2. A interpolação de um conjunto de $n + 1$ dados experimentais (x_k, y_k) , com $k = 0, \dots, n$, pode ser realizada utilizando um polinômio $p(x)$ de grau n ,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \quad (1)$$

impondo que $p(x_k) = y_k \forall k$. Tais condições podem ser escritas na forma de um sistema linear $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$, onde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

- Utilize o método de decomposição LU para encontrar os coeficientes a_k da função polinomial $p(x)$ que interpola os dados experimentais do arquivo `planck.dat`.
- Faça um gráfico com os dados experimentais e inclua também a curva da função polinomial $p(x)$ encontrada no item (a) dentro do intervalo $x \in [0.01, 1.0]$. Verifique (visualmente) se a curva passa pelos pontos experimentais.
- Faça um gráfico para comparar o polinômio $p(x)$ encontrado com a função exata para a distribuição de Planck

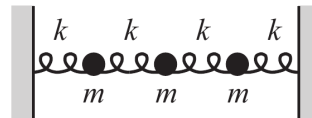
$$P(x) = \frac{1}{x^5 [e^{\frac{1}{x}} - 1]} \quad .$$

- Obtenha expressões analíticas para as derivadas $p'(x)$ e $P'(x)$ e faça o gráfico incluindo as duas funções obtidas. Comente sobre quão semelhante são essas duas curvas em termos dos pontos de máximo, mínimo e/ou de inflexão.

Exercício 3. Experimentos relacionados à ressonância (magnética ou mecânica) comumente requerem o ajuste de dados por uma *Lorentziana*, $P(\omega) = A/[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma]$, que é uma função não linear com 3 parâmetros.

- Utilize os dados do arquivo `lorentziana.dat` para reproduzir o Exemplo 1.3 das páginas 29 à 33 da Ref. [2]. Para isso você deve implementar uma subrotina com o método de Newton generalizado (pág. 16), o qual necessita da matriz jacobiana \mathbf{J} . Apresente os cálculos para obter os elementos de \mathbf{J} e os valores de A , ω_0 e Γ encontrados.
- Grafique os dados experimentais junto com a curva $P(\omega)$ e também mostre a derivada analítica da curva ajustada.
- Comente como você escolheu os valores iniciais para os parâmetros e se essa escolha influi no resultado.

Exercício 4. Um exemplo tradicional na Física para o entendimento de aplicação dos auto-valores e auto-vetores é a determinação dos **modos normais de vibração** de um conjunto de N osciladores de massa m acoplados por molas (com constante elástica k) e presos às extremidades, tal como mostra a Figura ao lado.



Por exemplo, para $N = 3$ osciladores localizados sobre o eixo x , existem 3 graus de liberdade: os deslocamentos $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ em relação à posição de equilíbrio de cada um dos osciladores; assim teremos 3 modos normais de vibração para esse sistema. Cada modo normal é caracterizado por um auto-valor λ_n (o qual está associado às frequências de oscilação $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$) e um auto-vetor \vec{u}_n , todos determinados pelo problema definido pela relação:

$$\mathbf{H}\vec{u}_n = \lambda_n \vec{u}_n$$

onde \mathbf{H} é denominada **matriz Hessiana**, que é uma matriz simétrica $N \times N$ cujos elementos são reais. A partir dos auto-valores λ_n e dos auto-vetores $\vec{u}_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3)$, a solução mais geral do sistema, isto é, o vetor de funções $\vec{x}(t)$ que descreve os deslocamentos das massas em função do tempo, pode ser escrito como:

$$\vec{x}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \vec{u}_n \cos(\omega_n t + \phi_n) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N c_n u_n^1 \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ \sum_{n=1}^N c_n u_n^2 \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ \sum_{n=1}^N c_n u_n^3 \cos(\omega_n t + \phi_n) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

onde as constantes $c_1, c_2, c_3, \phi_1, \phi_2$ e ϕ_3 são determinadas pelas condições iniciais, isto é, pelos deslocamentos $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $x_3(0)$ e velocidades $v_1(0)$, $v_2(0)$ e $v_3(0)$ iniciais. Para o caso de $N = 3$ osciladores é possível mostrar que as equações de movimento de Newton (veja págs. 9 e 10 da ref. [3]) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \quad , \\ m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \quad , \\ m \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} &= -k(x_3 - x_2) - kx_3 \quad . \end{aligned}$$

Considerando a solução dada pela Eq. 2, é possível mostrar que o auto-valor λ_n do n -ésimo modo de vibração e o seu auto-vetor correspondente \vec{u}_n podem ser determinados através da solução do seguinte problema:

$$(\mathbf{H} - \lambda_n \mathbb{1})\vec{u}_n = 0 \quad (3)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade e

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{sendo } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad .$$

a) Como o problema de encontrar auto-valores restringe-se à determinar os valores de λ_n ($n = 1, 2, 3$) que satisfazem a relação $\det(\mathbf{H} - \lambda_n \mathbb{1}) = 0$ (pág. 352 de [4]), mostre que as frequências de oscilação dos modos normais são [3]:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \omega_0 \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \omega_0 \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = \omega_0 \sqrt{(2 + \sqrt{2})} \quad .$$

b) Utilize o método de Newton-Raphson (vide Lista 02) para encontrar as 3 raízes positivas do polinômio característico $p(\lambda) = \det(\mathbf{H} - \lambda_n \mathbb{1})$ assumindo $\omega_0 = 0, 4 \text{ rad.s}^{-1}$. Compare seus resultados com os valores obtidos no item (a).

c) Os auto-vetores \vec{u}_n correspondentes aos auto-valores encontrados nos itens anteriores podem ser obtidos analiticamente através da Eq. 3 e, de acordo com [3], são:

$$\vec{u}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{u}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (4)$$

Implemente o **método da potência** (eq. 2.81/pág. 41 de [1]) para encontrar as componentes do auto-vetor relativo ao maior auto-valor considerando um vetor inicial \vec{u}_0 da sua escolha. Compare com os valores esperados acima.

Referências:

- [1] F. J. Vesely. Computational Physics: An Introduction (2nd ed., 2001)
- [2] C. Scherer. Métodos Computacionais da Física (2nd ed., 2010)
- [3] <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/waves/normalmodes.pdf>
- [4] J. D. Faires e R. L. Burden. Numerical Methods (3rd ed.)