Rafael V. Cacilhas - Relatório 04 (24 de Setembro de 2018)

Exercício 1

a)

Calcularemos todas as constantes no SI. Assim:

$$D = \frac{k_b T}{6\pi\eta a} \approx 2.923 \times 10^{-9}\frac{m^2}{s}$$

$$\Delta t = \frac{\lambda h^2}{D}$$

$$\Delta t = \frac{0.1\left(5\times 10^{-4}\right)^2}{2.923\times 10^{-9}} = 8.55s$$

No programa não foi utilizado o sistema de unidades SI. Nele, temos $D = 0.2923\mu m^2/ms$ e, por consequencia, $\Delta t = 8.55\times 10^{-4}s$, de modo a manter $\lambda = 0.1$. Na Figura 1 temos um gráfico da concentração em função da distância para diferentes tempos t (em segundos).

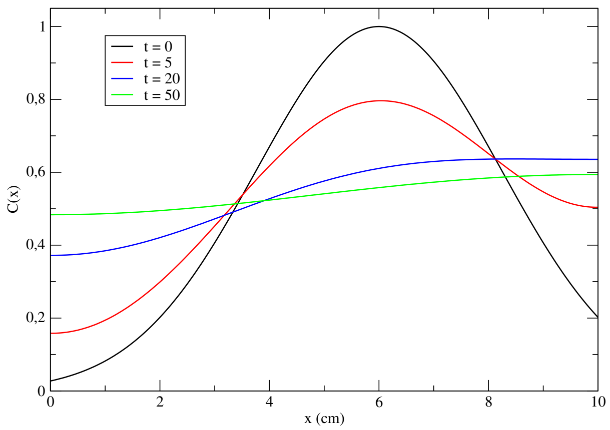

Figura 1: Concentração em função da distância para diferentes tempos.

É possivel notar que a medida que o tempo passa a distribuição (inicialmente) gaussiana passa a assumir uma forma cada vez mais constante, como era esperado. Para $t = 50s$ temos que a concentração varia apenas entre aproximadamente 0.47 e 0.6, apresentando uma solução quase homogênea.

Exercício 2

a)

Expandindo $V(x, y)$ em sua série de Taylor temos que:

$$V(x+h,y) = V(x,y) + h\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + O(h^3) \tag{1}$$

$$V(x-h,y) = V(x,y) - h\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + O(h^3) \tag{2}$$

$$V(x,y+h) = V(x,y) + h\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + O(h^3) \tag{3}$$

$$V(x,y-h) = V(x,y) - h\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + O(h^3) \tag{4}$$

Somando as quatro equações acima, temos:

$$V(x+h,y) + V(x-h,y) + V(x,y+h) + V(x,y-h) = 4V(x,y) + O(h^2)$$

E, portanto:

$$V(x,y) = \frac{V(x+h,y) + V(x-h,y) + V(x,y+h) + V(x,y-h)}{4} \tag{5}$$

b)

A subrotina está implementada no programa laplaceB.f90

c)

Na Figura 2 temos a solução para V(x,y) no fio quadrado. Utilizamos um mapa de cores para representar as voltagens em cada ponto (x,y) utilizando o *gnuplot*. Idealmente esta imagem não apresentaria este quadriculado (oriundo das discretizações), teria uma fonte maior na escala e teria uma proporção de 1:1, mas não soube fazer estas configurações no gnuplot. O gráfico, portanto, foi feito com as configurações padrões do *gnuplot*.

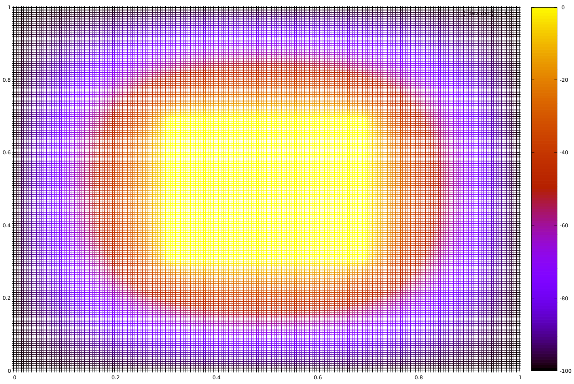

Figura 2: Solução da equação de Laplace para o fio quadrado.

Exercício 3

a)

Primeiramente é preciso notar que o exercício possui erros de lógica na sua formulação. É incoerente exigir que $\begin{cases} i(x,0) = 5.5\cos\left(\frac{\pi}{200}x\right) \\ i(0,t) = i(200,t) = 0 \end{cases}$ sejam satisfeitas simultaneamente. Para resolver isto temos duas soluções: podemos acrescentar uma fase a $i(x,0)$ ou exigir que $i(0,t) = -i(200,t) = 5.5$. Como a corrente e a voltagem estão fora de fase em todos os pontos $x \neq 0$ vamos escolher o último caso. Assim sendo, queremos resolver a EDP:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

sob as seguintes condições:

$$0 \leq x \leq 200$$

$$L = 0.3 henries/ft$$

$$C = 0.1 farads/ft$$

$$V(0,t) = V(200,t) = 0$$

$$V(x,0) = 110\sin\left(\frac{\pi}{200}x\right)$$

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$i(0,t) = -i(200,t) = 5.5$$

$$i(x,0) = 5.5\cos\left(\frac{\pi}{200}x\right)$$

$$\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = 0$$

Neste caso a situação inicial está representada na Figura 3.

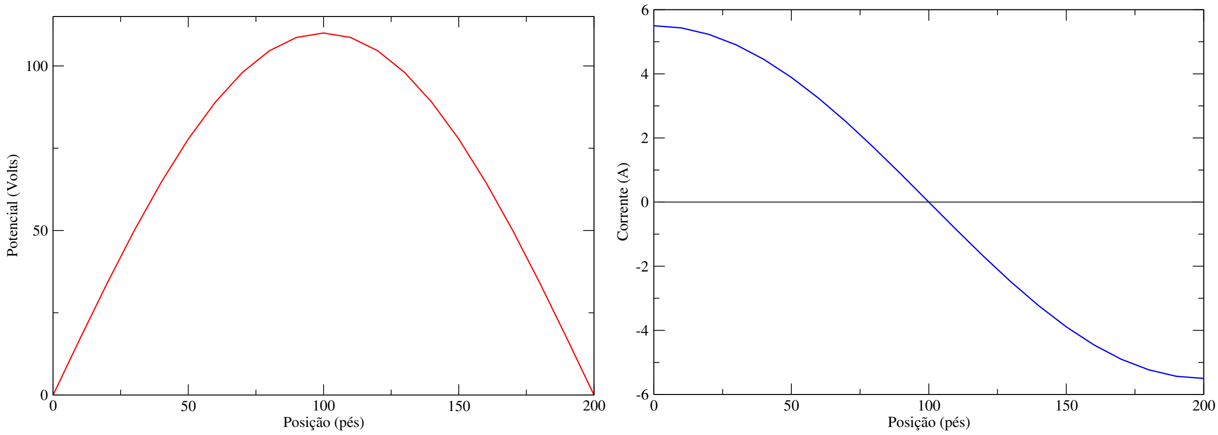

Figura 3: Voltagem (esquerda) e corrente (direita) inicial.

Para o tempo t = 0.2 a solução está na Figura 4.

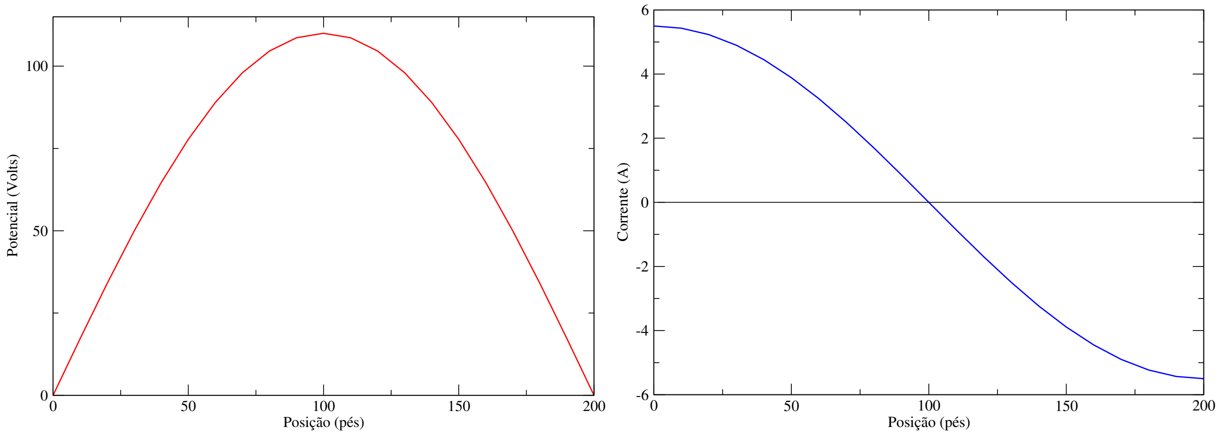

Figura 4: Voltagem (esquerda) e corrente (direita) para o tempo t = 0.2.

Para o tempo t = 0.5 a solução está na Figura 5.

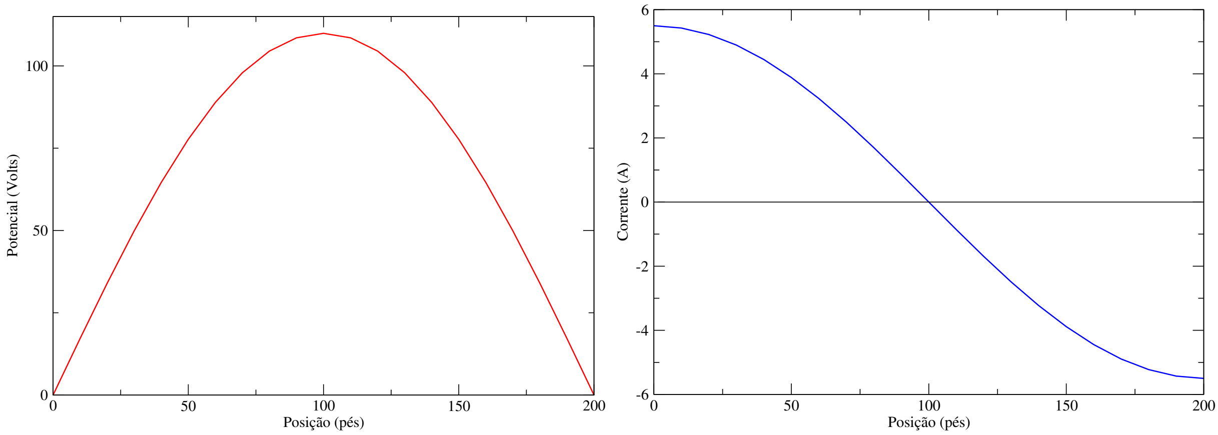

Figura 5: Voltagem (esquerda) e corrente (direita) para o tempo t = 0.5.

Não é possível observar nenhuma mudança entre os três tempos diferentes apresentados. Isto se deve ao fato de que esse sistema oscila com uma frequência angular dada por $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 1.76s$. Assim, a frequência de oscilação é $f \approx 0.28Hz$ e de fato uma mudança significativa demoraria alguns poucos segundos para acontecer.