

Exercício 1

1 a)

Temos que as equações do circuito podem ser escritas na forma:

$$R \cdot i = V \quad (1)$$

onde R é uma matriz 3x3 e i e V são matrizes 1x3. Assim, a equação pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta equação deve ser igual ao sistema de equações obtidos pela Lei de Kirchhoff:

$$\begin{cases} r_s i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 = V_0 \\ -r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a) i_2 - r_a i_3 = 0 \\ -r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 + r_a) i_3 = 0 \end{cases}$$

Efetuada a multiplicação das matrizes e igualando os índices que multiplicam a mesma corrente temos que:

$$\begin{cases} R_{1,1} = r_s \\ R_{1,2} = r_1 \\ R_{1,3} = r_2 \\ R_{2,1} = -r_x \\ R_{2,2} = r_1 + r_x + r_a \\ R_{2,3} = -r_a \\ R_{3,1} = -r_3 \\ R_{3,2} = -r_a \\ R_{3,3} = r_2 + r_3 + r_a \end{cases}$$

b)

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix}$$

Utilizando o algoritmo da Ref. [1] obtemos imediatamente os $u_{1,j}$:

$$\begin{cases} u_{1,1} = R_{1,1} \\ u_{1,2} = R_{1,2} \\ u_{1,3} = R_{1,3} \end{cases}$$

Deles, calculamos facilmente os $l_{i,1}$:

$$\begin{cases} l_{1,1} = \frac{R_{1,1}}{R_{1,1}} \\ l_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} \\ l_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} \end{cases}$$

Note que $l_{1,1} = 1$. De fato, veremos que todos os termos da diagonal de L $l_{j,j}$ são iguais a 1. Tendo os $u_{1,j}$ e $l_{i,1}$ agora podemos calcular os $u_{2,i}$:

$$\begin{cases} u_{2,2} = R_{2,2} - l_{2,1} u_{1,2} = R_{2,2} - \frac{R_{2,1} R_{1,2}}{R_{1,1}} \\ u_{2,3} = R_{2,3} - l_{2,1} u_{1,3} = R_{2,3} - \frac{R_{2,1} R_{1,3}}{R_{1,1}} \end{cases}$$

Com estes, calculamos os $l_{i,2}$:

$$\begin{cases} l_{2,2} = \frac{1}{u_{2,2}}(R_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}) = 1 \\ l_{3,2} = \frac{1}{u_{2,2}}(R_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}) = \frac{1}{u_{2,2}}(R_{3,2} - \frac{R_{3,1}R_{1,2}}{R_{1,1}}) \end{cases}$$

E por fim podemos calcular $u_{3,3}$ e $l_{3,3}$:

$$\begin{cases} u_{3,3} = R_{3,3} - (l_{3,1}u_{1,3} + l_{3,2}u_{2,3}) = R_{3,3} - \left(\frac{R_{3,1}R_{1,3}}{R_{1,1}} + \frac{1}{u_{2,2}} \left(R_{3,2} - \frac{R_{3,1}R_{1,2}}{R_{1,1}} \right) \left(R_{2,3} - \frac{R_{2,1}R_{1,3}}{R_{1,1}} \right) \right) \\ l_{3,3} = \frac{1}{u_{3,3}}(R_{3,3} - l_{3,1}u_{1,3} - l_{3,2}u_{2,3}) = 1 \end{cases}$$

Na ultima equação deixamos o termo $u_{2,2}$ para evitar complicar demais as equações e dificultar o entendimento.

c)

Na figura 1 está representado as correntes calculadas. O valor obtido, arredondado para a terceira casa decimal, foi:

$$\begin{cases} i_1 = 12.014mA \\ i_2 = 6.865mA \\ i_3 = 6.933mA \end{cases}$$

Os valores com uma maior precisão podem ser visto na saída de dados do programa na tela. Podemos calcular a corrente no amperímetro utilizando a Lei dos Nós no ponto A:

$$\Sigma i = 0$$

$$i_2 - i_3 + i_a = 0$$

Foi obtido o valor $i_a = 68.659\mu A$. Assim como no caso acima, caso seja necessario uma precisão maior basta conferir a saída de dados na tela. Como $i_a \neq 0$ temos que a ponte não está balanceada.

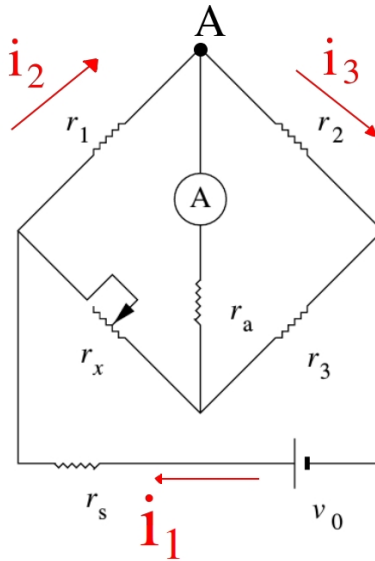


Figura 1: Ponte de Wheatstone com as correntes utilizadas.

Exercício 2

a)

O programa possui algum problema na decomposição LU, de modo que o produto LU não retorna exatamente x; há erros na terceira casa decimal, o que indica algum problema.

Não foi possível resolver o sistema nem encontrar o erro no algoritmo a tempo.

Exercício 3

a)

A lorentziana é dada pela fórmula:

$$P(\omega) = \frac{A}{[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma]} \quad (2)$$

Quando temos uma função $f(x) = [f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)]$ temos que pela definição da matriz **J**:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{1}{[(x - \omega_0)^2 + \Gamma]}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \omega_0} = \frac{2A(x - \omega_0)}{[(x - \omega_0)^2 + \Gamma]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \Gamma} = \frac{A}{[(x - \omega_0)^2 + \Gamma]^2}$$

Vamos definir duas variáveis auxiliares que simplificarão a escrita dessas variáveis:

$$\begin{cases} y_{sub} = \frac{1}{[(x - \omega_0)^2 + \Gamma]} \\ x_{sub} = (x - \omega_0) \end{cases}$$

As derivadas segundas ficam:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A \partial \omega_0} = 2y_{sub}^2 x_{sub}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A \partial \Gamma} = y_{sub}^2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \omega_0^2} = 2Ay_{sub}^2 [4x_{sub}y_{sub} + 1]$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \omega_0 \partial \Gamma} = -4Ax_{sub}y_{sub}^3$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \Gamma^2} = -2Ay_{sub}^3$$

As derivadas cruzadas são iguais independente da ordem.

Com isto, montamos **J**. No entanto não tive tempo de estudar e entender o resto do algoritmo, então paramos por aqui.

b)

Os valores iniciais podem ser escolhidos analisando a equação e observando algumas características do gráfico da função. Analisando a equação vemos que o seu valor máximo (que ocorre em $\omega = \omega_0$) é $P(\omega) = \frac{A}{\Gamma}$. Assim sendo, sabemos que ao analisar o gráfico o ponto no eixo x onde ocorre o maior valor corresponde a ω_0 . O ponto y do maior valor corresponde a $\frac{A}{\Gamma}$. O parâmetro Γ também determina a abertura da função. Um Γ grande significa que a função é mais "achatada" que a mesma função com um Γ menor. A análise, por exemplo, do ponto $\omega = 0$ nos dá que $P(\omega) = \frac{A}{\omega_0^2 + \Gamma}$.

Exercício 4

a)

Dado a matriz \mathbf{H} para calcularmos os autovalores temos que:

$$\det(\mathbf{H} - \lambda_n \mathbf{I}) = 0$$

Ou seja:

$$(2\omega_0^2 - \lambda)^3 - 2(2\omega_0^2 - \lambda)\omega_0^4 = 0 \quad (3)$$

Definindo a variável auxiliar $\alpha = (2\omega_0^2 - \lambda)$, temos:

$$\alpha^3 - 2\alpha\omega_0^4 = 0 \quad (4)$$

$$\alpha(\alpha^2 - 2\omega_0^4) = 0$$

Cujas raízes são:
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = +\sqrt{2}\omega^2 \\ \alpha_3 = -\sqrt{2}\omega^2 \end{cases}$$

E temos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \omega_0^2(2 - \sqrt{2}) \\ \lambda_2 = 2\omega_0^2 \\ \lambda_3 = \omega_0^2(2 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

b)

Utilizamos o método de Newton-Raphson para descobrir as raízes da equação. Buscamos raízes no intervalo $[0, 2\omega]$. Começamos com um "chute" inicial $x_0 = 0$ e utilizamos 200 x_0 igualmente espaçados no intervalo de interesse. Apenas duas raízes foram encontradas, o que era esperado visto que não é esperado que o computador ache as duas raízes da equação $\alpha^2 = 2\omega_0^4$. Fixamos que as duas primeiras raízes foram as encontradas pelo programa e que a terceira raiz foi a segunda raiz multiplicada por -1.

Tendo α basta aplicar $\lambda = 2\omega_0^2 - \alpha$. Os valores encontrados foram:
$$\begin{cases} \lambda_1 = 9.3725822567939820 \times 10^{-2} \\ \lambda_2 = 3.2000000000000006 \times 10^{-2} \\ \lambda_3 = 5.4627417743206030 \times 10^{-1} \end{cases}$$

E os valores esperados são:
$$\begin{cases} \lambda_{1esperado} = 9.3725830020304796 \times 10^{-2} \\ \lambda_{2esperado} = 3.2000000000000006 \times 10^{-2} \\ \lambda_{3esperado} = 5.4627416997969525 \times 10^{-1} \end{cases}$$

Apresentando um erro na sétima casa decimal para λ_1 e λ_3 e uma precisão de 17 casas decimais para λ_2 . A alta precisão para λ_2 se deve ao fato de que a raiz $\alpha = 0$ foi encontrada sem erro, com todas as casas decimais corretas.

c)

O método da potência consiste em multiplicar sucessivas vezes a matriz \mathbf{H} por um vetor inicial \vec{u}_0 arbitrário. Foi escolhido $\vec{u}_0 = (1, 1, 1)$ pela sua simplicidade.

Pelo método da potência temos que:

$$\vec{u}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \vec{u}_k \quad (5)$$

Onde \vec{u}_k é o vetor \vec{u}_k normalizado. Com isto, temos que :

$$\vec{u}_k = C \vec{u}_3 \quad (6)$$

Ou seja, após sucessivas multiplicações por \mathbf{H} o vetor escolhido passa a ser proporcional ao autovetor de maior autovalor associado. Em nosso programa, após 10 multiplicações sucessivas, obtemos que:

$$\vec{u}_k = (0.5, -0.71, 0.5) \quad (7)$$

O que se encontra de acordo com o resultado esperado, visto que $\vec{u}_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)$. A saída do programa na tela apresenta uma maior precisão e divide o vetor \vec{u}_3 por 2 para uma comparação mais direta.

Um detalhe é que durante o estudo a tentativa de aplicar este algoritmo ao exemplo resolvido do livro não foi capaz de reproduzir os resultados deste. O exemplo na página 41 afirma que se encontra $\lambda_m = 4.907$, ao passo de que a equação 2.83 gera como resultado:

$$\lambda_m = x'_4 \cdot x_3 = 5.018806 \quad (8)$$