Exercício 1

a)

Dada a relação de recorrência $x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n)$ buscamos os pontos fixos e a estabilidade destes pontos. Pela definição de ponto fixo temos que:

$$x^* = 4rx^*(1 - x^*)$$

Claramente $x^* = 0$ é uma solução. Além desta, temos que:

$$1 = 4r(1 - x^*)$$

$$x^* = 1 - \frac{1}{4r} \tag{1}$$

A estabilidade destes pontos fixos pode ser vista analisando o sinal de $f_r^{'}(r) = 4r - 8rx_n$. Para $x_n = 0$ temos que:

$$|f_r^{'}(r)| < 1$$

$$-1 < 4r < 1$$

$$0 < r < 1/4 \tag{2}$$

Onde substituimos a solução $r > -1/4$ por $r > 0$, pois r não pode ser negativo.
Para $x_n = 1 - \frac{1}{4r}$ temos:

$$|f_r^{'}(r)| < 1$$

$$-1 < -4r + 2 < 1$$

$$\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4} \tag{3}$$

Assim sendo, vemos que para $r < 0.25$ temos que $x^* = 0$ é um ponto fixo estável e que para $0.25 < r < 0.75$ temos um ponto estável dependente de r, dado por $x^* = 1 - \frac{1}{4r}$.

b)

Para r = 0.24, temos que $x^*_{esperado} = 0$ e $x_{500} \approx 3.8 \times 10^{-11}$. As trajetórias, mostradas na Figura 1, convergem para um mesmo valor próximo de zero, independente de x_0, como esperado pela análise feita anteriormente. O valor exato de x_{500} pode ser visto na saída de dados do programa na tela.

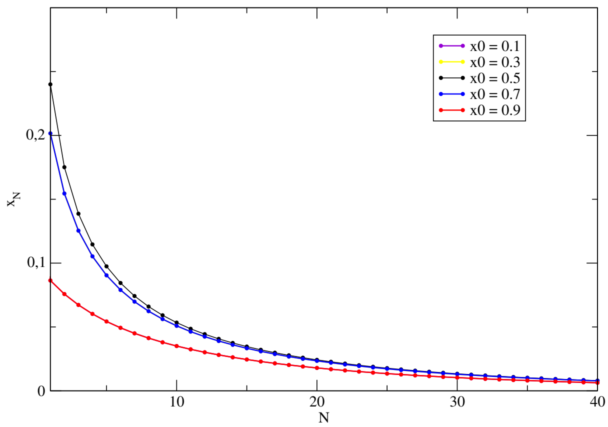

Figura 1: Trajetórias para r = 0.24 para diferentes valores iniciais de x.

Para r = 0.26, temos que $x^*_{esperado} \approx 3.8 \times 10^{-2}$ e $x_{500} \approx 3.8 \times 10^{-2}$, havendo divergência apenas na nona casa decimal. As trajetórias, mostradas na Figura 2, convergem para um mesmo valor pouco abaixo de 5×10^{-2},

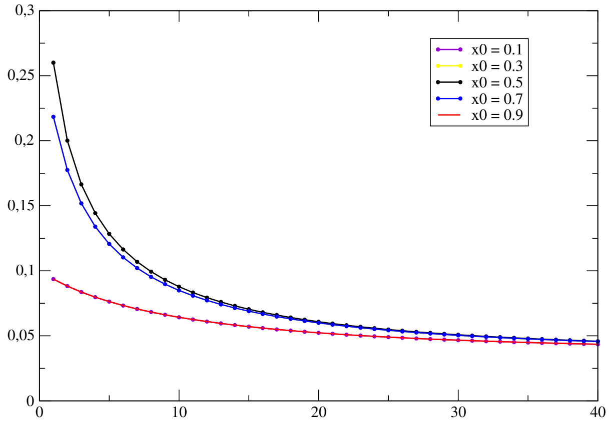

Figura 2: Trajetórias para r = 0.26 para diferentes valores iniciais de x.

independente de x_0, como esperado pela análise feita anteriormente. Os valores exatos de $x^*_{esperado}$ e x_{500} podem ser vistos na saída de dados do programa na tela.

Assim, verificamos que os resultados obtidos estão de acordo com a análise de estabilidade feita anteriormente. Para $r < 0.25$ a trajetória se encaminha para perto de zero (que é o ponto fixo) independente do valor inicial (já que o ponto fixo é estável). Para $r > 0.25$ a trajetória converge para um valor próximo de 3.8×10^{-2} (que é o ponto fixo) independente do valor inicial de x (já que é um ponto fixo estável).

c)

Foi mostrado anteriormente que para r entre 0.25 e 0.75 temos um ponto fixo estável dado por $x^* = 1 - \frac{1}{4r}$. Utilizando a variável auxiliar $r' = 1/r$ temos que $x^* = 1 - \frac{1}{4}r'$ para $1.33 < r' < 4$, ou seja, uma relação linear em r'. Os pontos fixos encontrados para diferentes r' estão no gráfico da Figura 3. Como esperado, há uma relação linear entre x* e $\frac{1}{r}$ neste intervalo de r.

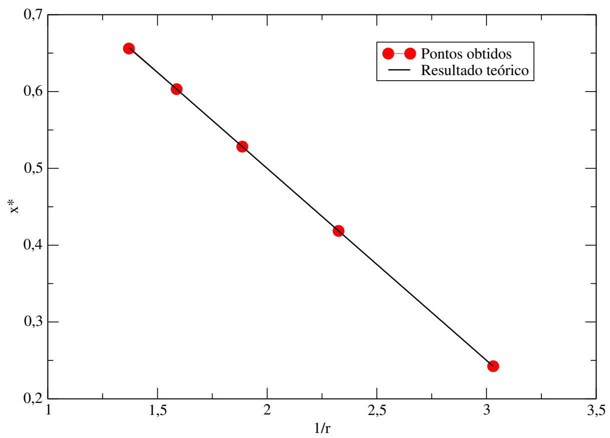

Figura 3: x* em função de 1/r.

d)

Para cada valor de (x_0, r) foi feito um gráfico da trajetória x_n. Com o gráfico original não é possível ver o valor exato do período, então foi feito um zoom em uma região arbitrária de modo a se verificar qual é este valor. Um exemplo disso está na Figura 4, onde vemos que o perído é $p = 2$. Para os outros valores de (x_0, r) foi omitido o gráfico com zoom, visto que basta utilizar a ferramenta de zoom do programa usado pra fazer o gráfico.

O perído obtido para $x_0 = 0.1$ para todos os valores de r foram: $\begin{cases} p(0.85) = 2 \\ p(0.87) = 4 \\ p(0.89) = 8 \\ p(0.96) = 3 \end{cases}$

Para $x_0 = 0.9$ temos que os valores do período devem ser os mesmos, pois os valores de x_n são os mesmos para $x_0 = 0.1$ e $x_0 = 0.9$ para $n > 0$. O programa apresentou os mesmos resultados, como esperado; eles serão omitidos aqui visto que são idênticos aos apresentados, mas podem ser conferidos na pasta correspondente.

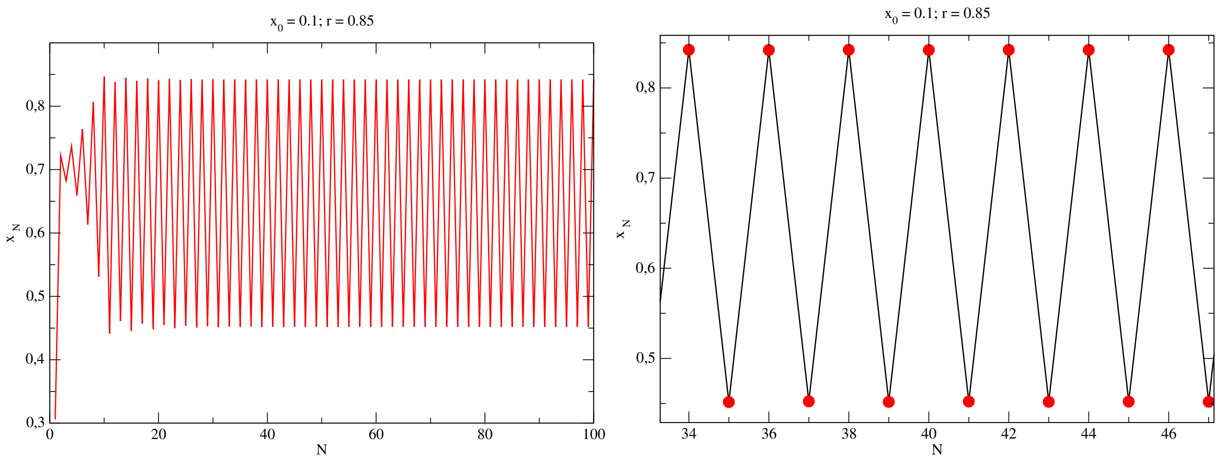

Figura 4: Resultado para $x_0 = 0.1$ e $r = 0.85$ (esquerda) e um zoom em uma região arbitrária para evidenciar o período (direita).

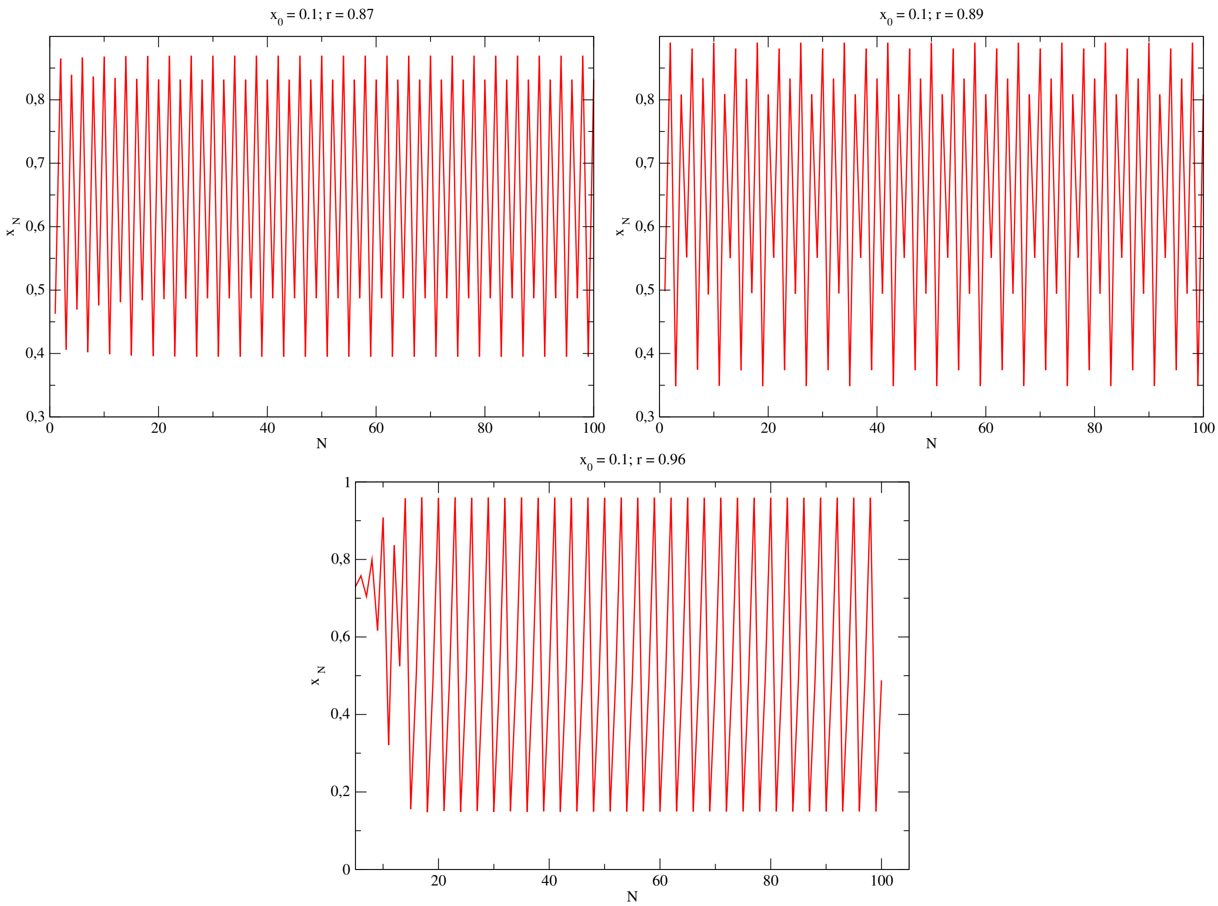

Figura 5: Trajetórias para $x_0 = 0.1$ e r = 0.87(esquerda), r = 0.89 (direita) e r = 0.96 (embaixo). Note que todos apresentam uma solução oscilatória.

e)

O valor do expoente de Lyapunov obtido, arrendondado para a segunda casa decimal, foi de $\lambda_r = 0.20$. Como $\lambda_r > 0$ é esperado que as trajetórias sejam caóticas e portanto Δx deve crescer expoenencialmente para N pequeno. O resultado pode ser visto na Figura 6. É possível perceber que para valores de N até 50 temos que Δx, em escala logaritmica, cresce (de maneira aproximada) linear com N, como esperado. Porém, para N acima de 75 temos o que parece ser um comportamento oscilatório em torno de $\Delta x = 0.5$.

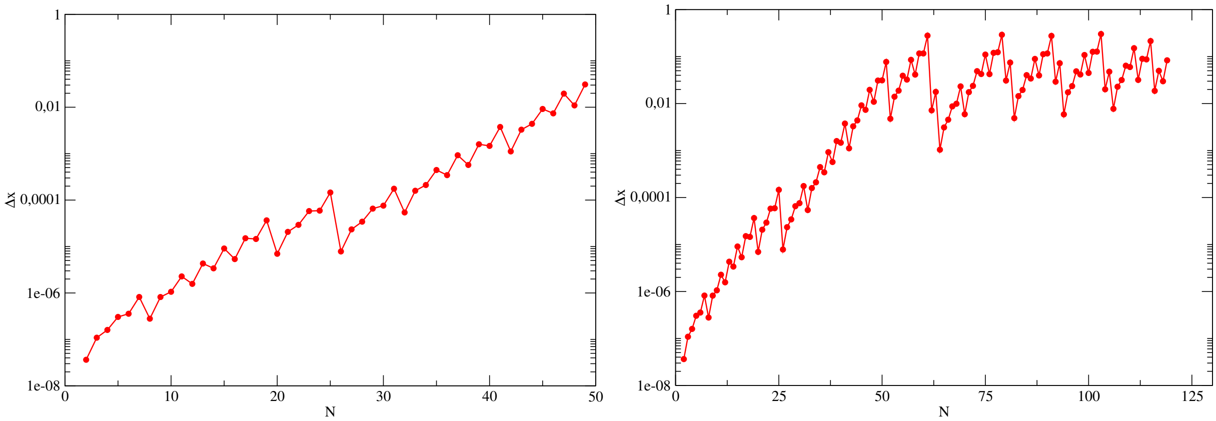

Figura 6: Δx para N até 50 (esquerda) e para N até 125.

f)

Os gráficos podem ser vistos na Figura 7. Foi feito um zoom na região $0.7 < r < 1.0$ de modo a ficar claro a comparação com a referência [1].

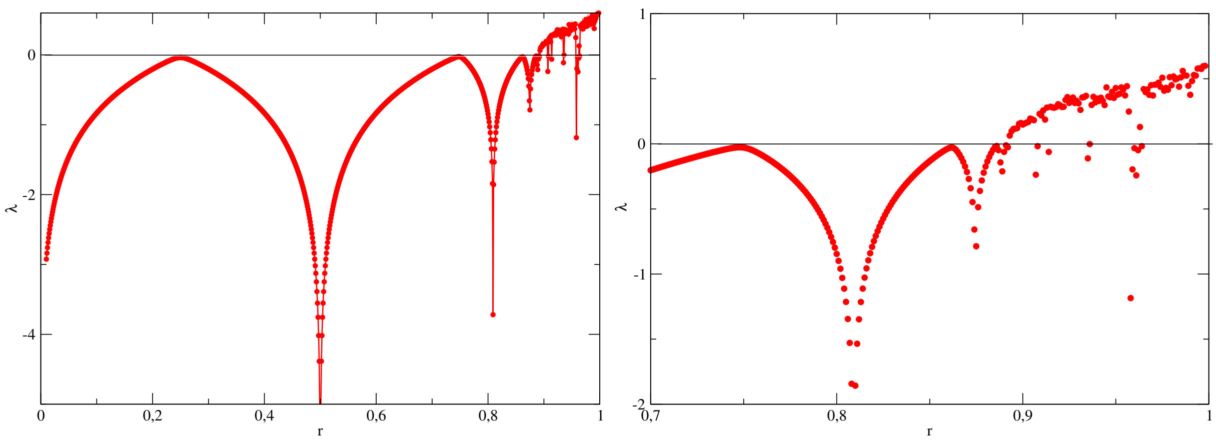

Figura 7: λ em função de r com r entre 0 e 1 (esquerda) e o mesmo gráfico com um zoom na região com r entre 0.7 e 1.0 (direita).

A análise do gráfico mostra que para qualquer valor de $r < 0.85$ temos um coeficiente λ menor do que zero, fato coerente com os itens anteriores onde obtivemos trajetórias estáveis para todo $r < 0.73$ e trajetórias instáveis para $r > 0.85$. O único ponto onde poderíamos ter problema é em r = 0.25, que possui um coeficiente $\lambda = 0$. Mas já sabíamos disto da análise de estabilidade feita no item a), pois r = 0.25 faz com que os dois valores de x^* sejam marginais.

g)

Baseado na figura 7 foi feito um programa pra calcular qual valor de r faz com que λ seja o mais próximo de zero em quatro regiões distintas: em torno de 0.75, em torno de 0.85 e pra dois valores entre 0.85 e 0.90. Os valores encontrados estão apresentados na tabela 1. Os valores de r foram aproximados para a terceira casa decimal e o valor de lambda associado foi arredondado para a primeira casa decimal. Caso um valor mais preciso seja necessario basta verificar a saída de dados do programa na tela.

r	λ
0.743	2×10^{-3}
0.864	9×10^{-5}
0.886	1×10^{-5}
0.897	4×10^{-5}

Tabela 1: Valores de r e λ encontrados

A comparação com a referência [1] mostra desvios a partir da terceira casa decimal, o que pode ser explicado ao se considerar que usamos um dr = 0.001. Além disso, a referência traz 5 outros valores de r entre 0.891 e 0.893, que nosso programa é incapaz de calcular com um dr tão grande. Foi feito um outro programa (tentativa2.f90) para corrigir este problema, mas não foram obtidos resultados satisfatórios devido a dificuldade de juntar a precisão necessária com a habilidade de excluir soluções inadequadas (como soluções próximas da solução correta exata, que ainda estão na margem de erro).

Exercício 2

a)

Dada a relação $f_r^1(\omega_i) = \omega_{i+1} = (1-r)\omega_i$ temos que o ponto fixo é dado por:

$$\omega^* = (1-r)\omega^* = 0 \tag{4}$$

Este ponto fixo é estável desde que:

$$\begin{gathered} |f_r'^1(\omega_i)| < 1 \\ -1 < (r-1) < 1 \\ 0 < h < 2\tau \end{gathered} \tag{5}$$

Na Figura 8 temos o resultado do cálculo da derivada com $h \ll \tau$. Foi escolhido $h = \tau \times 10^{-5}$. A solução exata e a solução numérica estão tão próximas que é impossível distingui-las uma da outra. Portanto foi escolhido plotar alguns pontos particulares da solução numérica, de modo a ficar claro o quão bem a curva exata se ajusta aos pontos.

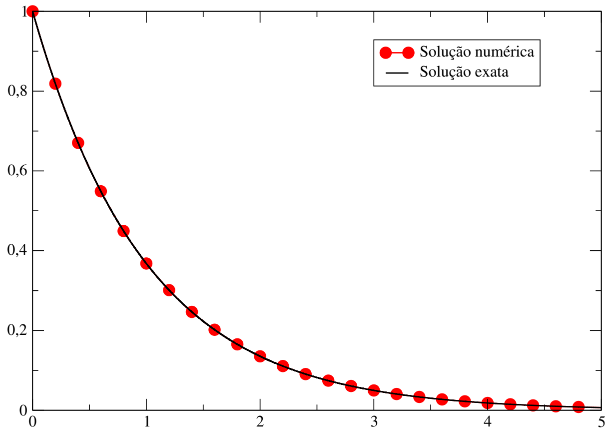

Figura 8: Derivada com $h = 0.00001\tau$.

Na Figura 9 temos os gráficos da derivada para vários valores de $h = h_{max} \pm \epsilon$, com $\epsilon = 0.1$. Podemos ver no gráfico da esquerda que para $h = h_{max} + \epsilon$ a curva obtida diverge da curva exata com cada termo que é adicionado, ao passo que a curva da direita, apesar de não ser uma boa aproximação, tende a convergir para a curva exata com cada N.

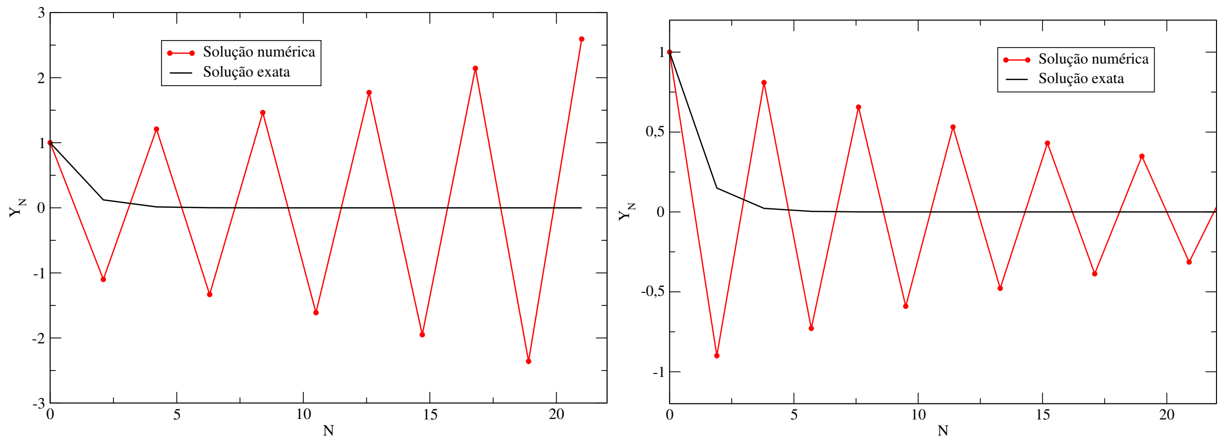

Figura 9: Derivada, com $\epsilon = 0.1$, para valores $h = h_{max} + \epsilon$ (esquerda) e para valores $h = h_{max} - \epsilon$ (direita)

Na Figura 10 foi feito o mesmo cálculo para um $\epsilon = 0.5$, o que torna a diferença entre as duas curvas mais evidente. No gráfico da esquerda é possivel observar pelos valores do eixo y como a curva numérica se afasta da curva exata. Já no gráfico da direita vemos que a partir de N = 10 temos que a curva numérica já se apresenta como aproximação razoável para a curva exata.

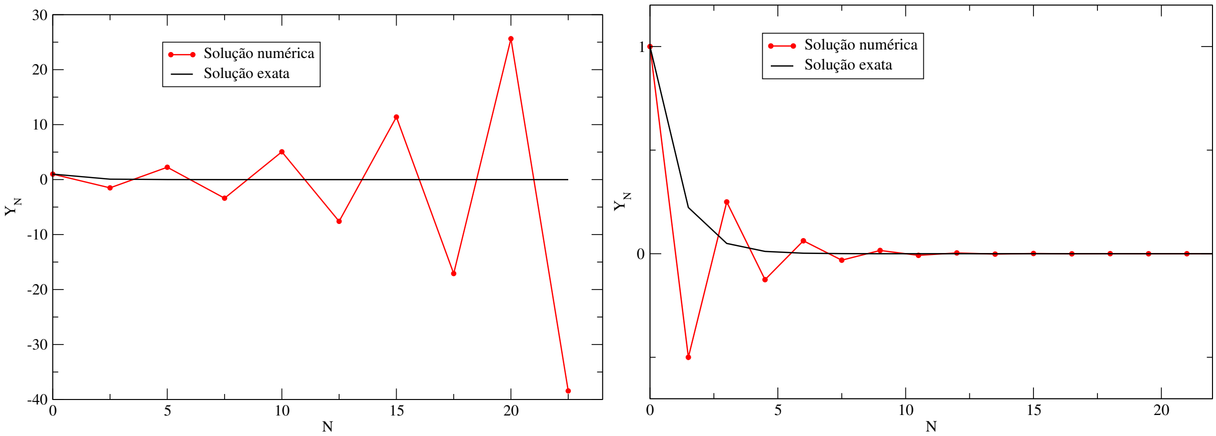

Figura 10: Derivada, com $\epsilon = 0.5$, para valores $h = h_{max} + \epsilon$ (esquerda) e para valores $h = h_{max} - \epsilon$ (direita)

Neste caso a matriz de amplificação **G** é uma matriz 1x1 dada por:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} = (1 - r) \tag{6}$$

Cujo autovalor λ é dado pela equação:

$$(1 - r) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = (1 - r) \tag{7}$$

A exigência de que $|\lambda| < 1$ imediatamente reproduz a Eq. (5).

b)

Temos que

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Utilizando o método de Euler podemos escrever esta equação da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_{i+1}^x = f^x(w_i^x, w_i^y) = (ah + 1)w_i^x + (hb)w_i^y \\ w_{i+1}^y = f^y(w_i^x, w_i^y) = (dh + 1)w_i^y + (hc)w_i^x \end{cases} \tag{8}$$

O que nos dá uma matriz **G** da forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ah + 1 & hc \\ hb & dh + 1 \end{bmatrix}$$

Cujos autovalores são dados pela equação:

$$(1 + ah - \lambda)(hd + 1 - \lambda) - h^2 bc = 0 \tag{9}$$

Fazendo a = 1; b = 1; c = 4 e d = -2 ficamos com:

$$\lambda^2 + (h - 2)\lambda + (-6h^2 - h + 1) = 0 \tag{10}$$

cujo discriminante é:

$$\Delta = (h^2 - 4h + 4 + 24h^2 + 4h - 4) = 25h^2$$

E portanto as soluções são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (1 + 2h) \\ \lambda_2 = (1 - 3h) \end{cases} \tag{11}$$

A estabilidade é dada por:

$$\begin{cases} -1 < (1+2h) < 1 \\ -1 < (1-3h) < 1 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} -1 < h < 0 \\ 0 < h < 2/3 \end{cases} \tag{13}$$

Ou seja, não existe valor de h que satisfaça as duas equações ao mesmo tempo. Para resolver numericamente foi escolhido h = 0.2, na faixa que permite solução estável para uma das equações, e h = -0.2, que permite solução estável para a outra equação. A solução para h = 0.2 está na Figura 11.

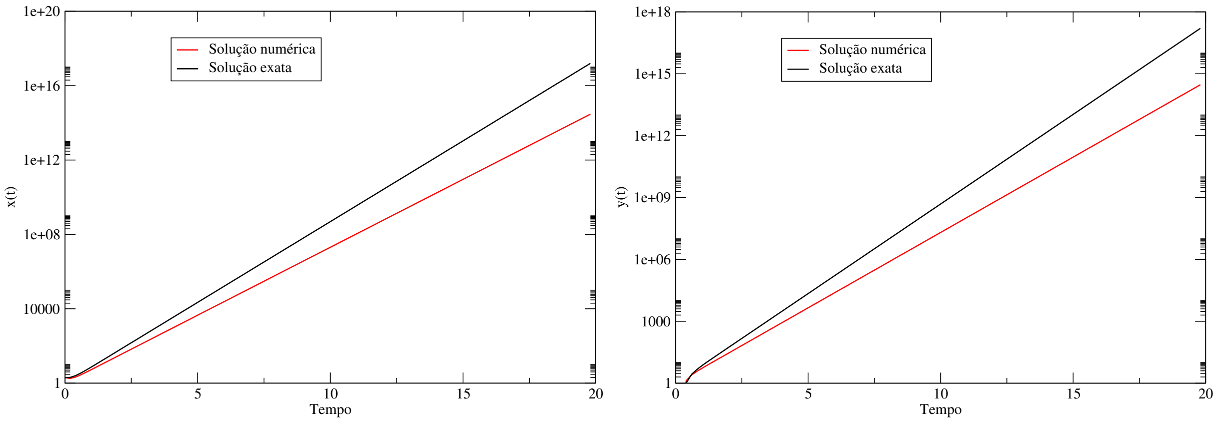

Figura 11: Solução da EDO acoplada para x (esquerda) e y (direita) com h = 0.2.

Como pode ser visto tanto a solução para x(t) quanto para y(t) divergem da solução exata com o passar do tempo. Alguém poderia argumentar que uma das soluções deveria convergir, visto que o parâmetro h é estável para ela, mas o fato das equações serem acopladas faz com que caso uma divirja a outra também deve divergir.

Na Figura 12 temos a mesma solução para o caso h = -0.2. Inverter o sinal de h fez com que a solução para y(t) invertesse o sinal e ficasse negativa, o que impossibilitou o gráfico ser feito em escala logaritmica.

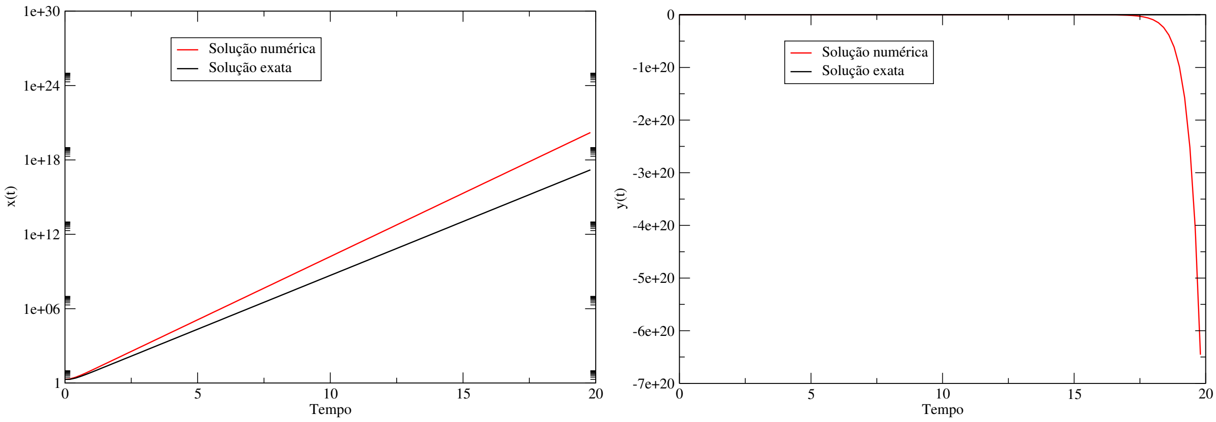

Figura 12: Solução da EDO acoplada para x (esquerda) e y (direita) com h = -0.2. A solução exata para y(t) é indistinguivel da reta y = 0 nesta escala.

Exercício 3

a)

Na Figura 13 podemos ver o espaço de fase do oscilador harmônico para o conjunto de parâmetros pedidos.

b)

Na Figura 14 temos o espaço de fase para o outro conjunto de parâmetros. Trata-se de uma órbita que não é fechada, típica de sistemas caoticos. Ainda é possível ver a curva da Figura 13 quase como uma envoltória. Note que este

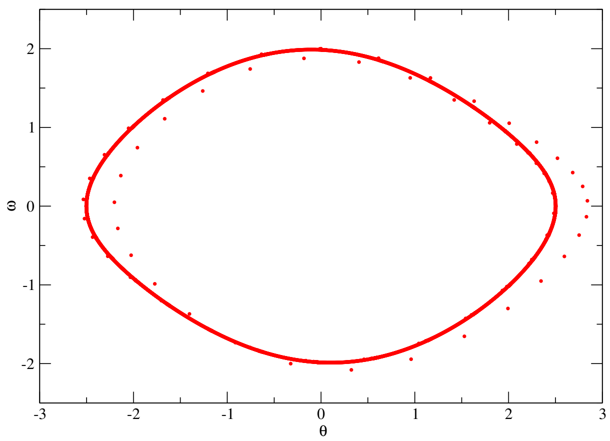

Figura 13: Espaço de fase para o oscilador harmônico com b = 0.9.

gráfico aparenta ter sido cortado em $x = \pm 3$, mas isto se deve ao fato de que pela dinâmica do problema temos que θ está confinado no intervalo $[-\pi, \pi]$. No caso anterior a partícula não era capaz de ter uma amplitude maior que π, mas neste caso temos uma força externa maior e isto já é possível.

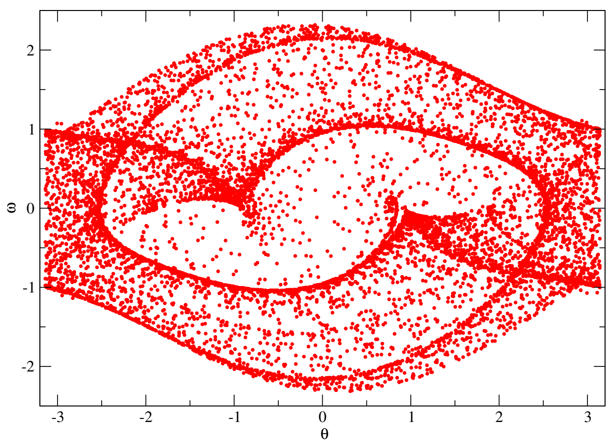

Figura 14: Espaço de fase para o oscilador com b = 1.15.

c)

Na Figura 15 temos o espaço de fase das duas situações anteriores plotados em conjunto com uma situação que possui configuração inicial próxima. Foi escolhido mudar a velocidade inicial de $\omega = 2.00$ para $\omega = 1.98$ e a posição inicial de $x_0 = 0$ para $x_0 = 0.01$. Os gráficos, em especial do sistema não-caótico, são extremamente parecidos entre si, de modo que foi necessário omitir alguns pontos vermelhos para que os pontos pretos pudessem ser vistos; por isto que o gráfico da esquerda não apresenta uma linha vermelha contínua. Estes gráficos mostram que um deslocamento infinitesimal geram pequenas mudanças no espaço de fase.

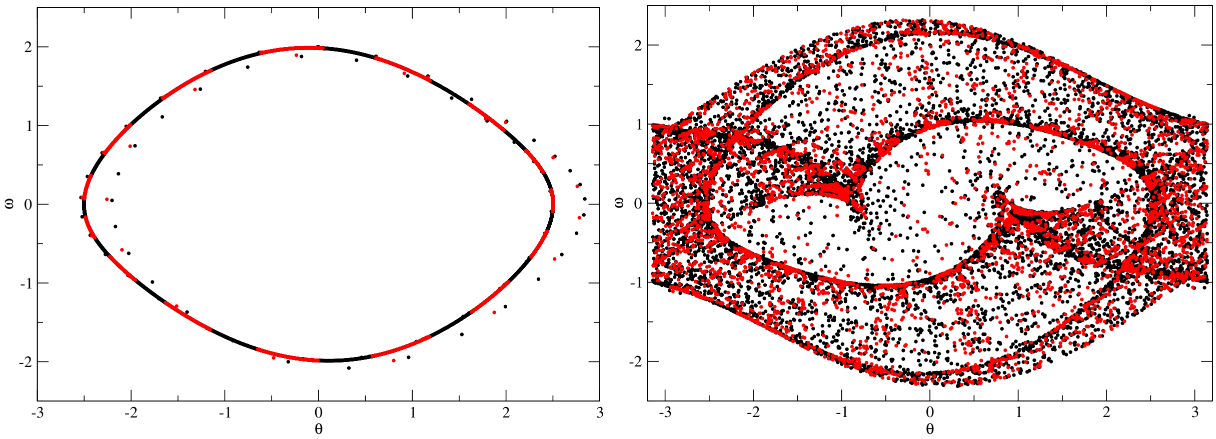

Figura 15: Espaço de fase para duas configurações iniciais próximas para b = 0.9 (esquerda) e b = 1.15 (direita). Alguns pontos vermelhos foram omitidos de modo a melhorar a visualização dos pontos pretos.