

Uma Certificação em Coq do Algoritmo W Monádico

Rafael Castro

rafaelcgs10@gmail.com

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências e Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

22 de Agosto de 2019

Introdução - Sistemas de Tipos

- Sistemas de tipos são regras que ditam quais expressões podem ser associadas a quais tipos.
- Nas linguagens de programação, classificavam os dados para serem tratados corretamente pelo processador;
- passaram a ser utilizados como regras para identificar falhas na consistência de programas
- Tipagem estática e dinâmica:
 - Estática: atribuições de tipo não mudam em *run time*; uma forma de verificação automática.
 - Dinâmica: atribuições de tipo **mudam** em *run time*; mais permissível; mais permissível a erros.

[1, 'a', objeto, [2]]

Introdução - Inferência de Tipos e Polimorfismo

- A inferência de tipos é o processo de encontrar a assinatura de tipo mais geral de um programa.
- Liberdade ao programador de escolher anotar ou não os tipos das funções.
- Polimorfismo é quando uma função pode assumir vários usos com diferentes tipos de dados. Em especial, o polimorfismo paramétrico é feito pela quantificação de variáveis de tipos.

`len :: [a] -> Int`

- Existem situações onde a inferência de tipos é mais difícil que a verificação. Nesses casos, algoritmos podem rejeitar programas bem tipados.

Introdução - Recursão Polimórfica

- A recursão polimórfica acontece quando o tipo da chamada recursiva de uma função pode mudar ao longo das recursões.

```
data Seq a = Nil | Cons a (Seq (a,a)).
```

```
len :: Seq a -> Int
```

```
len Nil = 0
```

```
len (Cons x s) = 1 + 2 * (len s)
```

- Haskell rejeita programas com recursão polimórfica se a assinatura de tipo não for explicitamente anotada.
- Diversos exemplos de exemplos precisando de recursão polimórfica foram apresentados na literatura.

Introdução - Motivação e Objetivo

- O semi-algoritmo MMo proposto por (VASCONCELLOS; CAMARÃO, 2003) consegue tipar diversos casos de recursão polimórfica e recursão mútua.
- MMo não tem as suas propriedades fundamentais provadas: terminação (totalidade) e consistência (correto).
- **Objetivo:** investigar se o semi-algoritmo MMo tem as propriedades de totalidade e correção em relação ao seu sistema de tipos (especificação).
- A especificação em si também é um elemento de investigação.
- O método utilizado é a formalização do MMo e a sua especificação no assistente de provas Coq.

Fundamentos - Formalismos de Sistemas de Tipos

- Sistemas de tipos quando definidos formalmente podem garantir importantes propriedades da semântica de programas, como o famoso lema de Robin Milner “Well-typed programs cannot go wrong”.
- Damas-Milner: polimorfismo via *let*. Base para diversas linguagens de programação funcional. Não permite recursão polimórfica pela regra *fix*.
- O primeiro sistema de tipos a permitir recursão polimórfica é o Sistema-F.
- Milner-Mycroft altera a regra de definições recursivas *fix* para permitir recursões polimórficas.

$$\frac{\Gamma, \mathbf{x} : \tau \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \text{fix } x.e : \tau} (\text{fix}) \quad \frac{\Gamma, \mathbf{x} : \sigma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash \text{fix } x.e : \sigma} (\text{fix+})$$

Fundamentos - Inferência no Milner-Mycroft

- A inferência no sistema Milner-Mycroft é equivalente ao problema da semi-unificação.
- A semi-unificação é uma generalização da unificação.
- A semi-unificação é indecidível.
 - Casos decidíveis: apenas uma igualdade, qualquer aridade e no máximo uma variável livre, duas variáveis e semi-unificação acíclica.
- No caso geral não há como decidir a tipabilidade (*typability*) de um termo no sistema Milner-Mycroft.
- *Big type vs small type*.
- *Small types* no sistema Milner-Mycroft é decidível em tempo polinomial.
- Buscou-se alternativas para contornar a dificuldade deste problema.

Fundamentos - Propostas de Recursão Polimórfica

- Somente existem semi-algoritmos e algoritmos totais, mas incompletos pois rejeitam alguns programas bem tipados.
- O semi-algoritmo para resolver a semi-unificação apresentado em (HENGLEIN, 1993) foi utilizado na construção do semi-algoritmo W+ em (EMMS; LEIL, 1999).
 - Damas-Milner tem pior caso exponencial. Não acontece em situações práticas. Prática vs teoria no Milner-Mycroft.
- Diversas propostas para recursão polimórfica foram apresentadas na literatura com o uso de *intersection types*.

Fundamentos - Assistentes de provas

- São programas para o desenvolvimento de provas formais.
- O núcleo é um verificador, que verifica a consistência lógica da prova.
- Os principais apelos são:
 - a verificação mecânica é rápida e evita as falhas humanas;
 - interatividade, permite visualizar informações sobre os estados da prova;
 - comandos para busca de teoremas e lemas para o progresso da prova;
 - automatização de provas com métodos não-deterministas;
 - potencialização da capacidade humana de realizar provas;
 - extração de programas verificados.

Assistentes de provas permitem provar coisas que não seriam realizáveis somente com papel e caneta!

Fundamentos - Por que Coq?

- Existem dezenas: Automath, Agda, Twelf, ACL2, PVS, Minlog, Isabelle e Coq...
- O núcleo do Coq é o *Calculus of Inductive Constructions* (CIC). Extensão do *Calculus of Constructions* (CoC).
- CoC é um Cálculo Lambda polimórfico de ordem superior e com tipos dependentes.
- **Justificativa:**
 - ① Frequent use of Coq for formalizing aspects of programming languages. CoqPL.
 - ② Relevant projects in Coq: CompCert is a compiler for C; Simplicity is a programming language for blockchains; Vellvm is a formalization of LLVM in Coq.
 - ③ Didactic materials available!

Fundamentos - Terminação em Coq

- Coq é uma linguagem de programação funcional total.
- A garantia de terminação do Coq é uma conservadora verificação sintática: recursão primitiva.
- Coq conta com algumas maneiras de estender o conjunto de programas que podem ser implementados:
 - ① Recursão bem-fundada (*Well-Founded Recursion*) por meio de uma relação bem-fundada (*Well-Founded Relation*). Uma relação bem-fundada.
 - ② Recursão limitada (*Bounded Recursion*) através de um argumento, que representa o número de chamadas recursivas. Suficiente para que a computação finalize com o resultado correto.
 - ③ Recursão por iteração (*Recursion by Iteration*). Similar a recursão limitada. Definição de um funcional, que tem como um dos argumentos a função f que deseja-se implementar.

Fundamentos - Terminação em Coq

- ④ Recursão sobre um predicado (*Recursion on an Ad Hoc Predicate Section*). Representa o domínio da função.
Recursão estrutural sobre provas do princípio indutivo deste predicado.
- ⑤ Recursão por mònada inspirada em Teoria de Domínios.
Combinadores de ordem superior representam funções que não terminam. Uma obrigação de prova é a continuidade da computação na mònada.
- ⑥ Recursão geral baseada numa mònada de um tipo co-indutivo.
É similar ao anterior, mas utiliza os tipos co-indutivos para representar a noção de não terminação, com a vantagem de não ter obrigações de provas.
- ⑦ Linguagem embutida: formalizar completamente uma linguagem de programação.

Fundamentos - Vantagens Terminação em Coq

- Somente as quatro primeiras técnicas permitem utilizar o mecanismo de avaliação interno do Coq.
- As técnicas 2 e 3 necessitam conhecer uma função capaz de computar o número de chamadas recursivas suficientes para uma dada entrada.
- A principal vantagem das últimas três técnicas é a possibilidade de implementar qualquer função recursiva e evitam provas.
- No aspecto da extração, a técnica mais eficiente é a primeira, pois as demais podem carregar (na extração) alguns lixos como os argumentos adicionais.

MMo - Diferenças básicas

O MMo funciona de maneira *bottom-up* assim como o algoritmo *W*, ou seja, primeiro inferem-se os termos mais internos da expressão para seguir inferindo os mais externos.

- ① As variáveis com sequência de índices. Detecção de dependências circulares em substituições.
- ② Um contexto Γ é um conjunto de triplas (*variável*, *Kind_def*, *scheme*). Não há condição de consistência. *Typing context*.
- ③ o MMo retorna uma dupla com o tipo simples inferido τ e um contexto Γ .
- ④ Para cada definição num *BindGroup* infere-se o respectivo conjunto com os pares de identificadores e os seus respectivos tipos inferidos e requeridos (dado pelo símbolo Σ).

MMo - Inferência de grupo de definições

- ① Computar o conjunto Σ com todos os tipos inferidos e requeridos do grupo.
- ② Gera-se a partir de Σ um conjunto Ω de pares tipos inferidos (instâncias) e requeridos (τ', τ) que precisam ser unificados.
 - o tipo de cada suposição $x:\tau$ em cada um dos Γ em Σ precisa ser unificado com uma instância do seu respectivo tipo inferido τ' para x .
 - A função `supInst` troca cada variável de tipo α^s de τ' por uma nova instância $\alpha^{i::s}$.
- ③ Verificar a existência de dependências circulares na substituição \mathbb{S} gerada pela unificação de Ω .
- ④ Caso exista dependência circular em \mathbb{S} , então o MMo termina com erro. Caso contrário, então aplica-se a \mathbb{S} em Σ . Se \mathbb{S} for efetiva, então volta-se para segunda etapa. Se não, para.

MMo - Dependências circulares

- Uma dependência circular ocorre quando uma substituição troca uma variável de tipo α^s por um tipo τ , o qual ocorre uma variável de tipo $\alpha^{s'}$ tal que s seja uma subsequência de s' . Ex: $[a^{1,0} \rightarrow b/a^0]$.
- A relação de ser subsequência pode ser indireta, portanto é necessário fazer uma verificação transitiva na substituição.

MMo - Exemplo inferência de grupo

```

data Seq a = Nil | Cons a (Seq (a,a)).

len :: Seq a -> Int
len Nil = 0
len (Cons x s) = 1 + 2 * (len s)
  
```

Σ :

```

{ (Nil, (Seq a, ∅)),
(Cons, (b → Seq (b, b) → Seq b, ∅)),
(len, (Seq c → Int,
      { (+): Int → Int → Int, len: Seq(c, c) → Int }))}  
```

Ω :

```
{ (Seq c0 → Int, Seq(c, c) → Int) }  
```

\mathbb{S} : $[(c, c)/c^0]$

Não tem dependência circular e não modifica os tipos de Σ
 (ignorando renomeações de variáveis)

Formalização em Coq - Detalhes da formalização

- Formalização parcial e simplificada (sem grupos).
- Trabalho similar para o algoritmo W por (DUBOIS; MÉNISSIER-MORAIN, 1999).
- Uso da formalização da unificação feita por (RIBEIRO; CAMARÃO, 2016).
- Termos, tipos, *schemes* formalizados como tipos indutivos.
- Para garantir que dois tipos generalizados sejam sintaticamente iguais, a respeito da equivalência α , utiliza-se a notação *De Bruijn* nos *schemes*.
- Uso de mônadas de estados e falhas.

Formalização em Coq - Aspectos da terminação

- Coq é uma linguagem de programação funcional total.
- De todas as funções do MMo, a que computa o conjunto Σ é a única que não é de recursão primitiva.
- Até o momento não se conhece alguma relação bem fundada a respeito da efetividade da substituição.
- Utilizar alguma forma de limite de iteração.
- Trabalho similar para o algoritmo W por (DUBOIS; MÉNISSIER-MORAIN, 1999).
- Uso da formalização da unificação feita por (RIBEIRO; CAMARÃO, 2016).
 - Seria necessário descobrir como computar esse número ou, então, associar esse valor às regras de inferência.

Formalização em Coq - Aspectos da consistência

- Uso das regras de Damas-Milner em *syntax-directed* em DUBOIS; MÉNISSIER-MORAIN, 1999).
 - Regras da forma $\Gamma \vdash e : \tau$.
 - Regras de especialização (*spec*) e generalização (*gen*) são fundidas, respectivamente, com as regras (*var*) e (*let*).
- Regra (*fix+*) na forma *syntax-directed*.
- As regras de inferência são representadas em Coq como um tipo (proposição) indutivo.
- O tipo indutivo é uma certificação que pode ser diretamente utilizada num tipo dependente no MMo:

```
Definition infer_dep : forall (e : term) (G : ctx),  
  Infer ({tau : ty &  
    {g : ctx | has_type (apply_subst_ctx s G) e tau}})
```

Formalização em Coq - Estabilidade da substituição

- O lema da estabilidade da substituição é uma propriedade clássica em sistemas de tipos e é fundamental na prova da consistência.
- Se é verdade que $\Gamma \vdash e : \tau$, então para qualquer substituição \mathbb{S} tem-se $\mathbb{S}\Gamma \vdash e : \mathbb{S}\tau$.
- Casos monomórficos são fáceis. Além do caso polimórfico do `let_ht` há também o caso do `fix_ht`.

Conclusão

- Fundamentos teóricos para formalização do MMo.
- Assistentes de provas Coq.
- Como o MMo funciona.
- Formalização do MMo parcial.
- Principais dificuldades encontradas.
- Alternativas para a prova de terminação.