Aula 5 - Prova por Indução

Rafael Castro - rafaelcgs10.github.io/coq

07/05/2018

Elemento neutro da soma pela direita - Tentativa 1

- Já provamos que zero é o elemento neutro da soma apenas utilizando simplificação.
- Que tal prova que zero também é um elemento neutro se for o segundo argumento da função $+$?
- n é um número arbitrário, não podemos realizar a computação.

```
Theorem plus_n_O_firsttry : forall n:nat,
  n = n + 0.
Proof.
  intros n.
  simpl.
Abort.
```

Elemento neutro da soma pela direita - Tentativa 2

- A tática *destruct* nos leva para um pouco mais longe, mas no segundo caso não há informação suficiente no contexto para avançar.

```
Theorem plus_n_O_secondtry : forall n:nat,
  n = n + 0.
Proof.
  intros n. destruct n as [| n'].
  - (* n = 0 *)
    reflexivity.
  - (* n = S n' *)
    simpl.
Abort.
```

Prova por Indução Informalmente

- Se *P(n)* é uma proposição sobre números naturais e queremos provar que *P* é verdade para todos os naturais, então fazemos o seguinte:
  1. Mostra-se que *P(0)* é verdade;
  2. Mostra-se que para qualquer *n'* arbitrário, se *P(n')* é verdade então *P(S n')* é veradade;
  3. Conclui-se que *P(n)* é verdade para todos os *n*.

Prova por Indução em Coq

- Os passos são exatamente os mesmos da ideia informal.
- Aplicar a tática *induction* gera dois sub-objetivos:
  1. Provar P(0);
  2. Provar *(P(n') -> P(S n'))*.
- A tática *induction* é utilizada exatamente da mesma maneira que a tática *destruct*.

Elemento neutro da soma pela direita - Tentativa 3

```
Theorem plus_n_O : forall n:nat, n = n + 0.
Proof.
  intros n. induction n as [| n' IHn'].
  - (* n = 0 *)    reflexivity.
  - (* n = S n' *) simpl. rewrite <- IHn'. reflexivity.
Qed.
```

Substração *n* por *n*

```
Theorem minus_diag : forall n,
  minus n n = 0.
Proof.
  (* WORKED IN CLASS *)
  intros n. induction n as [| n' IHn'].
  - (* n = 0 *)
    simpl. reflexivity.
  - (* n = S n' *)
    simpl. rewrite -> IHn'. reflexivity.  Qed.
```

Multiplicação por zero na direita

Exercício realizado em sala

```
Theorem mult_0_r : forall n:nat,
  n * 0 = 0.
Proof.
Admitted.
```