



— Este Título está Mentindo! — (Ou o Jogo da Contradição)

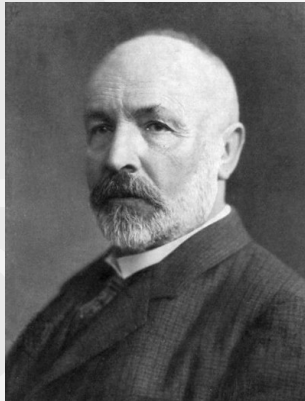
Rafael Castro

14/05/2018



O Pai da Teoria dos Conjuntos

- Georg Cantor





Cardinalidade de Conjuntos

- Conjunto de todos os números pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10...
- Conjunto de todos os números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5...

Há mais números naturais do que pares?



Naturais vs Reais

- Todos os números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5...
- Todos os números reais entre 0.0 e 1.0. Segmento de reta contínuo de tamanho 1.
- Ambos tem infinitos números.
- Se ambos tem o mesmo número de elementos, então há uma correspondência de 1 para 1.



Argumento da Diagonalização de Cantor

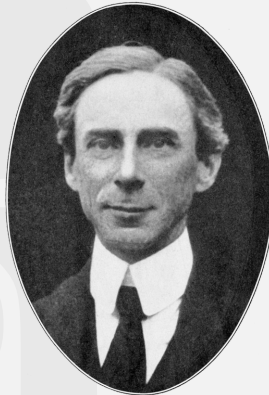
- Por facilidade, vamos representar os números do segmento de reta em **base binária**.

$$\begin{array}{l} s_1 = 0000000000... \\ s_2 = 1111111111... \\ s_3 = 0101010101... \\ s_4 = 1010101010... \\ s_5 = 11010110101... \\ s_6 = 00110110110... \\ s_7 = 10001000100... \\ s_8 = 00110011001... \\ s_9 = 11001100110... \\ s_{10} = 11011100101... \\ s_{11} = 11010100100... \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$
$$s = 10111010011...$$



O Pai da Teoria dos Tipos

- Bertrand Russell





O Paradoxo de Russel

$$M = \{A | A \notin A\}$$

- M contém a si mesmo?
- Se sim, então pela deveria ser pela sua própria definição.
- Se não, então deveria pela sua própria definição.



O Último Matemático Universal

- David Hilbert





O Programa de Hilbert

- Todos esses paradoxos levaram a matemática para uma crise de fundamentos.
- O Programa de Hilbert tinha como objetivo criar uma fundação sólida (consistente) a qual toda a matemática iria se apoiar:
 - ① A matemática deve ser toda escrita de uma linguagem formal, sem ambiguidade.
 - ② Completa: toda as verdades matemáticas podem ser provadas nesse formalismo.
 - ③ Consistente: não deve ser possível provar uma contradição nesse formalismo, por exemplo $0 = 1$.
 - ④ Decidível: há um algoritmo que decide se uma proposição é verdadeira ou falsa.



O Melhor amigo de Albert Einstein

- Kurt Gödel





O Teorema da Incompletude de Gödel

- Qualquer formalização da matemática com poder suficiente realizar aritmética básica é incompleta.
- Codificação numérica (enumeração) para todas as fórmulas da matemática (em seu sistema).
- Uma proposição somente é demonstrável se a sua codificação for divisível pelas codificações das regras do sistema.
- A prova consiste em mostrar a existência de uma proposição G que é verdade se, e somente se, não for possível prova-la.
- G é uma proposição que fala sobre si mesma, algo similar ao paradoxo do mentiroso:



A Proposição G

A proposição G é como o paradoxo de mentiroso:

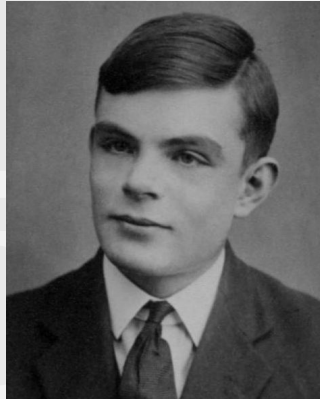
Esta afirmação é falsa.

- ① Se a frase é verdadeira, então é falsa.
 - ② Se a frase é falsa, então deveria ser verdadeira.
- Há uma lacuna entre verdades e provas.
 - Isso é um resultado muito preocupante, pois diz que há coisas verdadeiras que talvez jamais podemos provar.
 - Não seria ao menos possível um procedimento que decida todas as proposições que podem ser provadas?



O Pai da Ciência da Computação

- Alan Turing





Indecidibilidade do Problema da Decisão (Parada)

- Programas, assim como fórmulas matemáticas, podem ser representadas como números. São enumeráveis.
- O problema da decisão pede um procedimento (programa) que decida se um dada proposição é verdadeira ou falsa.
- Turing criou o conceito de uma máquina abstrata: um humano com papel e caneta fazendo computações/contas/provas.
- A ideia é mostrar que **não existe** máquina abstrata que decida se uma outra máquina para com uma dada entrada.



Conceitos para a prova

- Máquinas de Turing são programas que podem receber entradas.
- A máquina decisora se chama H .
- O objetivo é mostrar que não há máquina H .
- Programas e entradas são apenas números naturais!



Prova da Indecidibilidade do Problema da Parada por Diagonalização

$H(i, j) = 1$ se i para com a entrada j

$H(i, j) = 0$ caso contrário

$H(i, j)$	M1	M2	M3	M4	...
M1	1	0	1	0	...
M2	0	0	1	1	...
M3	1	1	1	0	...
M4	0	1	1	1	...
...

$D(p) = 1$ se $H(p, p) = 0$

$D(p) = 0$ se $H(p, p) = 1$

	M1	M2	M3	M4	...
D	0	1	0	0	...



Alimentando o Demônio com o Demônio

		H(i, i)						
		1	0	1	1	...		
		M1	M2	M3	M4	...	D	...
D		0	1	0	0	...	1	...
H(i, j)		M1	M2	M3	M4	...	D	...
M1		1	0	1	0	...	1	...
M2		0	0	1	1	...	0	...
M3		1	1	1	0	...	1	...
M4		0	1	1	1	...	1	...
...		0	...
D		0	1	0	0	...	0	...

H permitiu criar uma contradição, então H não existe.



Conclusão

- Paradoxos e contradições motivaram a criação de diversas novas teorias: novas Teoria do Conjuntos, Teoria dos Tipos, Teoria da Prova. . .
- O programa de Hilbert motivou a criação de modelos de computação: Máquinas de Turing, Cálculo Lambda, Funções Recursivas. . .
- A incompletude enterrou o determinismo para a matemática.
- A existência de proposições indecidíveis motivou a criação de uma matemática sem o axioma do terceiro excluído.