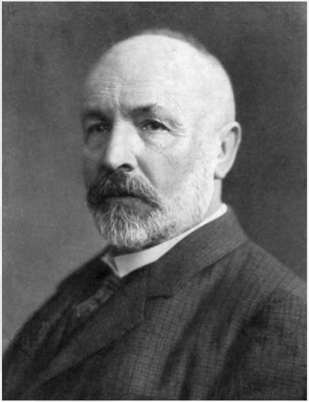
Este Título está Mentindo!

Rafael Castro

14/05/2018

O Pai da Teoria dos Conjuntos

- Georg Cantor



Cardinalidade de Conjutos

- Conjunto de todos os números pares: $0, 2, 4, 6, 8, 10...$
- Conjunto de todos os números naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5...$
  Há mais números naturais do que pares?

Naturais vs Reais

- Todos os números naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5...$
- Todos os números reais entre 0.0 e 1.0. Segmento de reta continuo de tamanho 1.
- Ambos tem infitos números.
- Se ambos tem o mesmo número de elementos, então há uma correspodência de 1 para 1.

Argumento da Diagonalização de Cantor

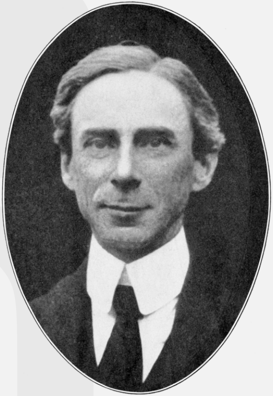
- Por facilidade, vamos representar os números do segmento de reta em base binária.

$$
\begin{array}{|lcl|}
\hline
s_1 & = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
s_2 & = & 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \\
s_3 & = & 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots \\
s_4 & = & 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_5 & = & 1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_6 & = & 0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_7 & = & 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
s_8 & = & 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\ldots \\
s_9 & = & 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_{10} & = & 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_{11} & = & 1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
\vdots & & \vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\;\ddots \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\boxed{s = 1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\ldots}
$$

O Pai da Teoria dos Tipos

- Bertrand Russell



O Paradoxo de Russel

$$M = \{A | A \notin A\}$$

- M contém a si mesmo?
- Se sim, então pela deveria ser pela sua própria definição.
- Se não, então deveria pela sua própria definição.

O Último Matemático Universal

- David Hilbert

O Programa de Hilbert

- Todos esses paradoxos levaram a matemática para uma crise de fundamentos.
- O Programa de Hilbert tinha como objetivo criar uma fundação sólida (consistente) a qual todo a matemática iria se apoaiar:
  1. A matemática deve ser toda escrita de uma linguagem formal, sem ambiguidade.
  2. Completa: toda as verdades matemáticas podem ser provadas nesse formalismo.
  3. Consistente: não deve ser posssível provar uma contradição nesse formalismo, por exemplo $0 = 1$.
  4. Decidível: há um algoritmo que decide se uma proposição é verdadeira ou falsa.

O Melhor amigo de Albert Einstein

- Kurt Gödel

O Teorema da Incompletude de Gödel

- Qualquer formalização da matemática com poder suficiente realizar aritmética básica é incompleta.
- Codificação numérica (enumeração) para todas as fórmulas da matemática (em seu sistema).
- Uma proposição somente é demonstrável se a sua codificação for divisível pelas codificações das regras do sistema.
- A prova consiste em mostrar a existência de uma proposição G que é verdade se, e somente se, não for possível prova-la.
- G é uma proposição que fala sobre si mesma, algo similar ao paradoxo do mentiroso:

A Proposição G

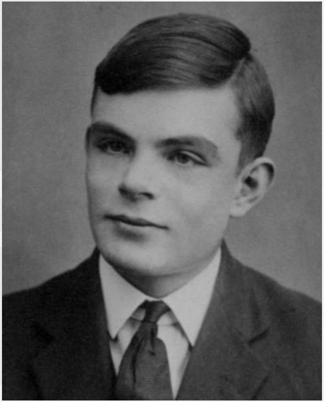
A proposição G é como o paradoxo de mentiroso:
Esta afirmação é falsa.

1. Se a frase é verdadeira, então é falsa.
2. Se a frase é falsa, então deveria ser verdadeira.

- Há uma lacuna entre verdades e provas.
- Isso é um resultado muito preocupante, pois diz que há coisas verdadeiras que talvez jamais podemos provar.
- Não seria ao menos possível um procedimento que decida todas as proposições que podem ser provadas?

O Pai da Ciência da Computação

- Alan Turing



Indecibilidade do Problema da Decisão (Parada)

- Programas, assim como fórmulas matemáticas, podem ser representadas como números. São enumeráveis.
- O problema da decisão pede um procedimento (programa) que decida se um dada proposição é verdadeira ou falsa.
- Turing criou o conceito de uma máquina abstrata: um humano com papel e caneta fazendo computações/contas/provas.
- A ideia é mostrar que não existe máquina abstrata que decida se uma outra máquina para com uma dada entrada.

Conceitos para a prova

- Máquinas de Turing são programas que podem receber entradas.
- A máquina decisora se chama H.
- O objetivo é mostrar que não há máquina H.
- Programas e entradas são apenas números naturais!

Prova da Indecibilidade do Problema da Parada por Diagonalização

H(i, j) = 1 se i para com a entrada j
H(i, j) = 0 caso contrário

H(i, j)	M1	M2	M3	M4	...
M1	1	0	1	0	...
M2	0	0	1	1	...
M3	1	1	1	0	...
M4	0	1	1	1	...
...	...	...	...	...	...

D(p) = 1 se H(p, p) = 0
D(p) = 0 se H(p, p) = 1

	M1	M2	M3	M4	...
D	0	1	0	0	...

Alimentando o Demônio com o Demônio

H(i, i)	1	0	1	1	...

	M1	M2	M3	M4	...	D	...
D	0	1	0	0	...	1	...

H(i, j)	M1	M2	M3	M4	...	D	...
M1	1	0	1	0	...	1	...
M2	0	0	1	1	...	0	...
M3	1	1	1	0	...	1	...
M4	0	1	1	1	...	1	...
...	...	...	...	...	...	0	...
D	0	1	0	0	...	0	...

H permitiu criar uma contradição, então H não existe.

Conclusão

- Paradoxos e contradições motivaram a criação de diversas novas teorias: novas Teoria do Conjuntos, Teoria dos Tipos, Teoria da Prova...
- O programa de Hilbert motivou a criação de modelos de computação: Máquinas de Turing, Cálculo Lambda, Funções Recursivas...
- A incompletude enterrou o determinismo para a matemática.
- A existência de proposições indecidíveis motivou a criação de uma matemática sem o axioma do terceiro excluído.