Universidade de Fortaleza - Unifor

Curso:ADS
Disciplina: T146
Conteúdo: Funções
Prof. Rubens Rodrigues

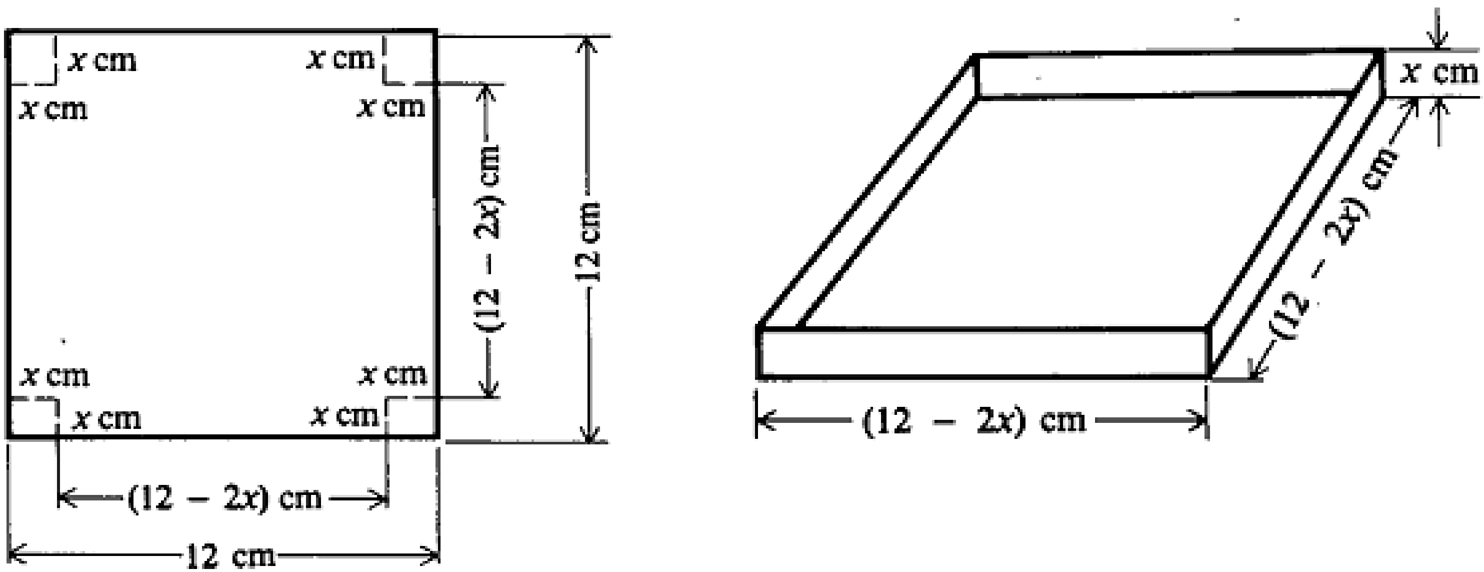
Fortaleza
2020

Aula 01 - Funções

Definição de função, representação de funções, função crescente e decrescente, função linear , polinomial, racionais e algébricas

Situação-problema

Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão com 12 cm de lado. Para isso, ele pretende retirar quadrados iguais dos quatro cantos, dobrando a seguir os lados. (a) Se x cm for o comprimento dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como função de x. (b) Qual é o domínio da função?



Situação-problema

Um estacionamento para estudantes em uma universidade cobra $2,00 para a primeira meia hora (ou para qualquer fração) e $1,00 para cada meia hora subseqüente (ou para qualquer fração) até uma diária máxima de $10,00.

(a) Esboce o gráfico do custo como função do tempo de estacionamento.

Definição de Funções

Dados A e B dois conjuntos de $\mathbb{R}$:

uma **função** $f : A \to B$ é uma ***relação ou correspondência*** que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

As funções ***servem para descrever*** o mundo real em termos matemáticos.

Domínio e Imagem

Seja f uma função.

O conjunto de todos os $x \in \mathrm{R}$ que satisfazem a definição da f é chamado ***domínio*** da f e denotado por $D(f)$.

O conjunto de todos os $y \in \mathrm{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in D(f)$, é chamado ***imagem*** da f e denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

Idéia de função

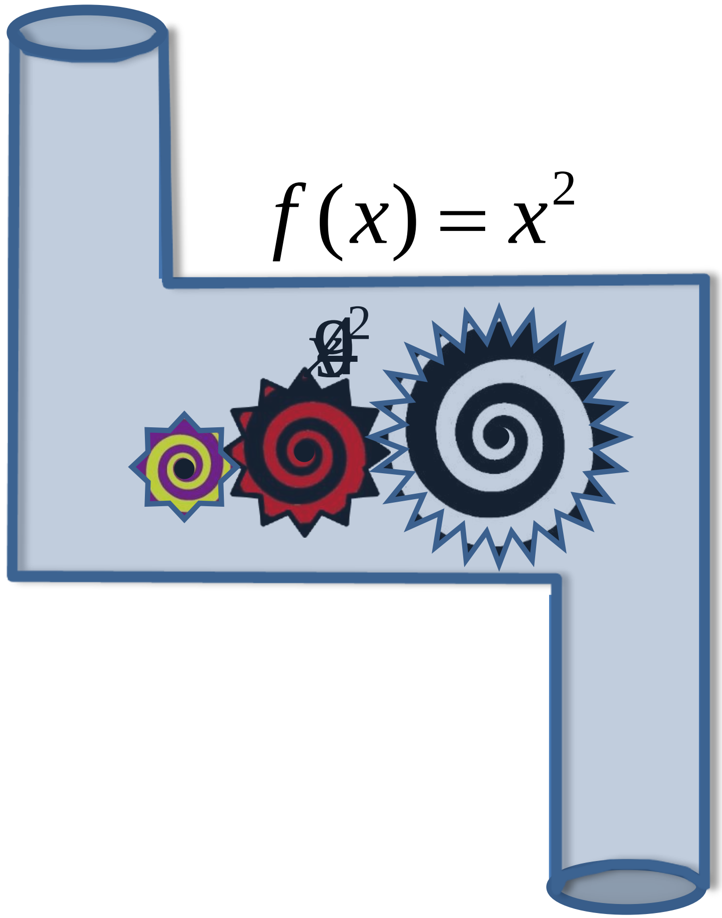
1

2

3

x

$$f(x) = x^2$$



Idéia de função

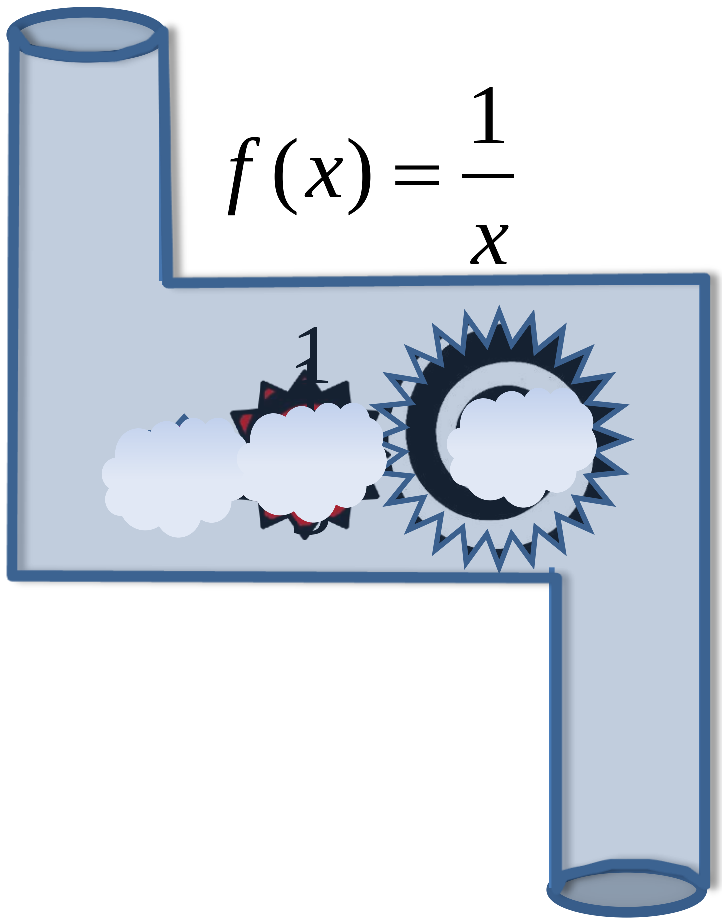
1

2

3

$\frac{1}{5}$

0



Exemplos

1) $f(x) = 2x \Rightarrow D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^2 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

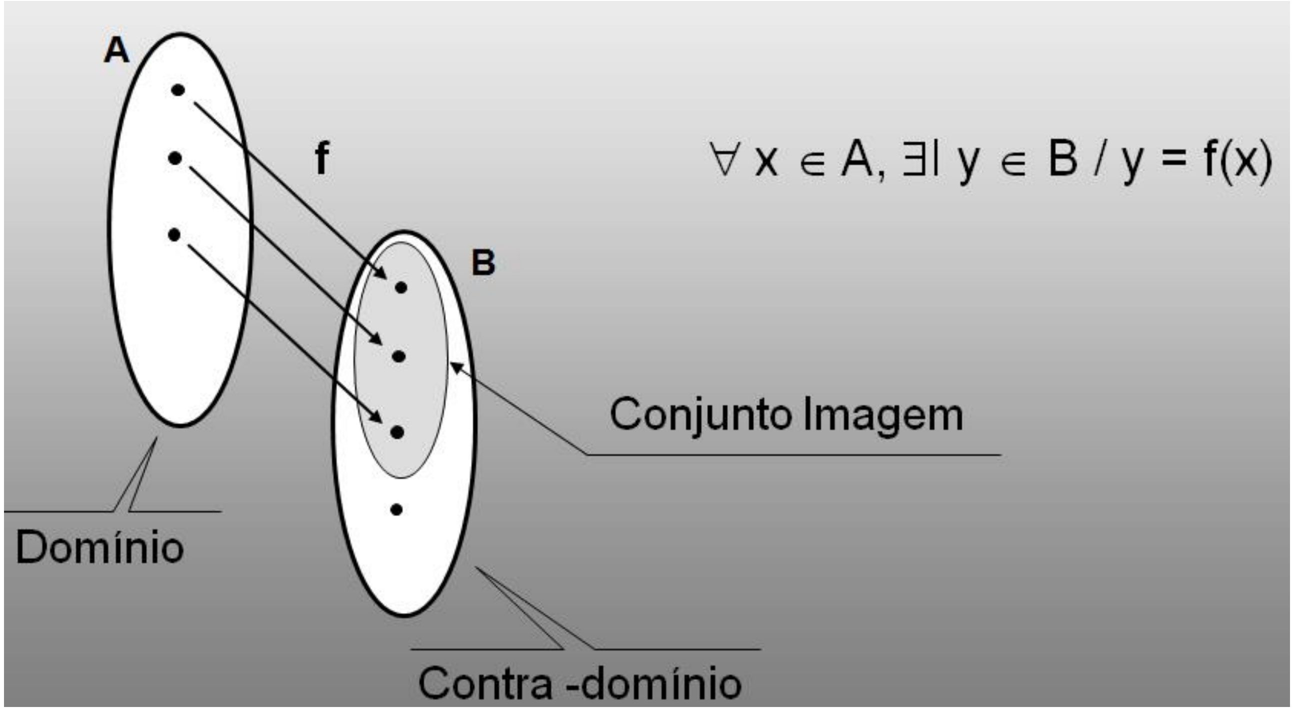
3) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

4) $f(x) = \sqrt{4 - x} \Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\}$

e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}, \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

Funções



$$\boxed{I(f) = \{y \in B;\ y = f(x)\ \text{e}\ x \in A\}.}$$

Funções

Exercícios

Quais os valores que *x* deve assumir para que y seja função?

$a)\ y=\sqrt{2-x}$ e

$b) y=\sqrt{x^2-9}$

Operações com Funções

Sejam f e g funções que tenham parte de seus domínios (ou os seus domínios) em comum, então:

(a) A ***soma*** de f e g é a função indicada por $f + g$ e definida por

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x);}$$

(b) A diferença de f por g é a função indicada por $f - g$ e definida por

$$\boxed{(f-g)(x) = f(x) - g(x);}$$

(c) O produto de f por g é a função indicada por fg e é definida por

$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x);}$$

(d) O quociente de f por g é a função indicada por f/g e é definida por

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{se} \quad g(x) \neq 0.}$$

Resolver exercício do exercitando

Exemplo Proposto 1

Se $f(x)= x - 2$ e $g(x) = x^2 - 3x +2$ mostrar que:

(a) $(f+g)(x) = x(x-2)$;

(b) $(f-g)(x) = -(x-2)^2$;

(c) $(fg)(x) = x^2(x-5) + 4(2x-1)$;

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x-1}$ se $x \neq 2$.

Função Composta

Suponhamos duas funções:
$f(x) = x + 1$, essa função soma 1
$g(x) = x^2$, essa função eleva ao quadrado

$x \xrightarrow{f} x + 1$

$x \xrightarrow{g} x^2$

Suponha uma função que faça essas duas operações ao mesmo tempo, soma 1 e eleva ao quadrado, podemos representar assim:

$x \xrightarrow{f} x + 1 \xrightarrow{g} (x + 1)^2$

$1 \rightarrow f(1) = 1 + 1 = 2 \rightarrow g(f(x)) = g(2) = 2^2 = 4$
$2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow g(f(x)) = g(3) = 3^2 = 9$

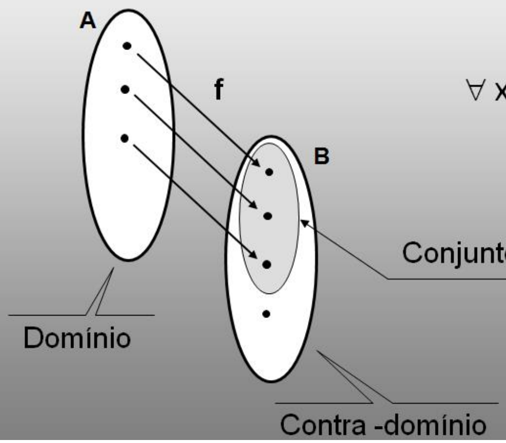
É a composta de g com f ou $g(f(x))$ ou $(g \circ f)(x)$

Função Composta

A ideia é construir uma função a partir de outras duas.

Seja $f: A \to B$ uma função qualquer

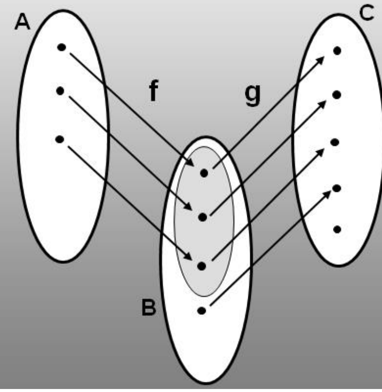
Então, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $y = f(x)$.



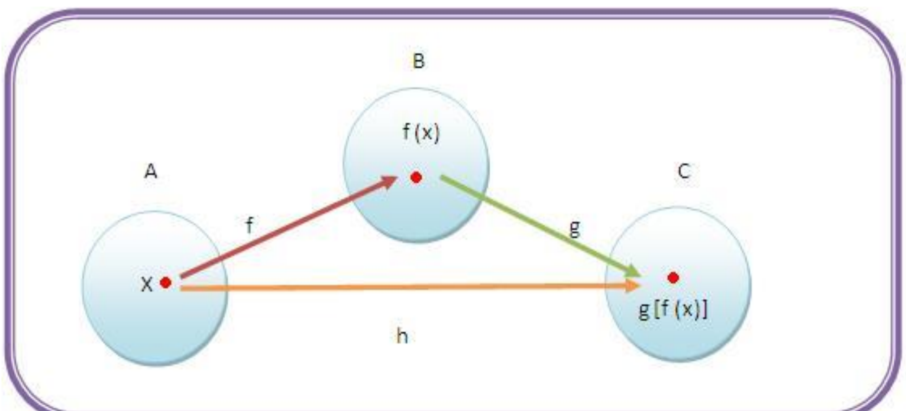
$\forall\, x \in A, \exists|\, y \in B \,/\, y = f(x)$

Seja $g: B \to C$ uma outra função

Isso significa que todo elemento de B, pela função g, produz uma única imagem em C.



$\forall\, y \in B, \exists|\, z \in C \,/\, z = g(y)$

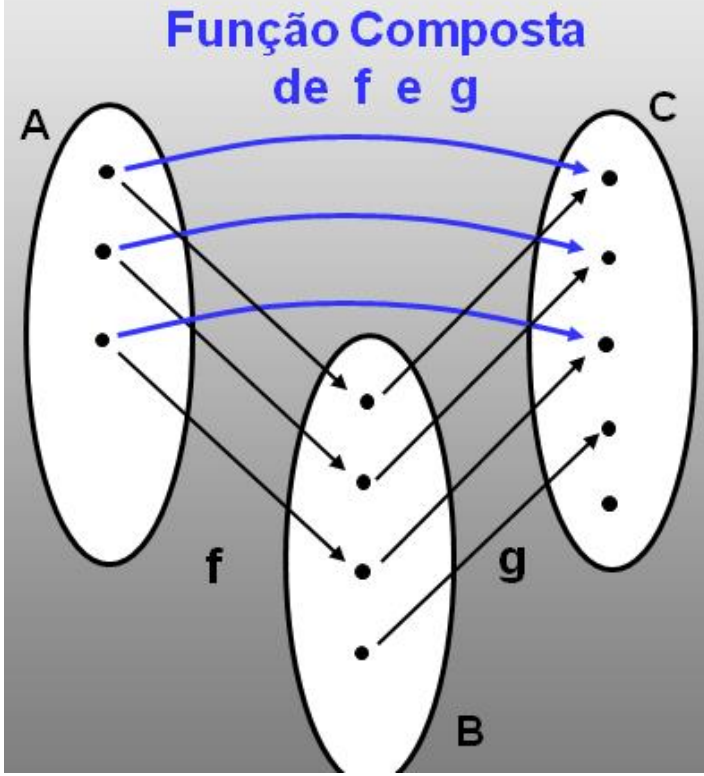


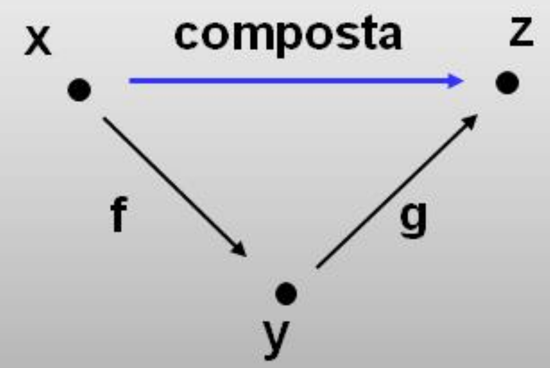
Contra-domínio de f é igual ao domínio de g

$$h(x)=g(f(x))$$

Função Composta

Chamamos de função composta de f e g a função de A em C, que associa a cada elemento $x \in A$ o elemento $z \in C$, imagem de $y \in B$ pela função g e, este último, imagem de x pela função f.





Dadas as funções $f:A \to B$ e $g:B \to C$,

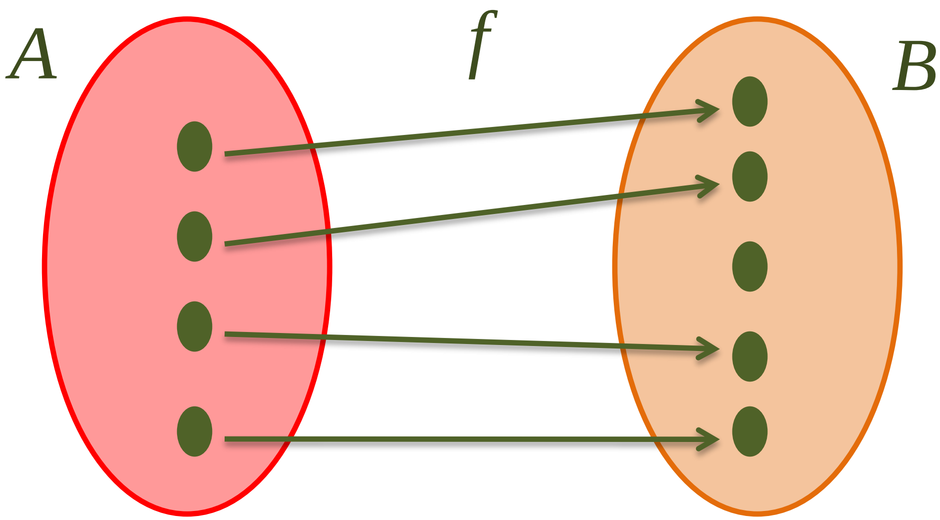
a função composta de f e g é a função

$h:A \to C$

$h(x)=g(f(x))$

Resolver exercício do exercitando

Função Injetora



Exemplos gráficos e outro diagrama

$$f : A \rightarrow B$$

f é injetora $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Esta definição é mais prática para os cálculos.

Exemplo

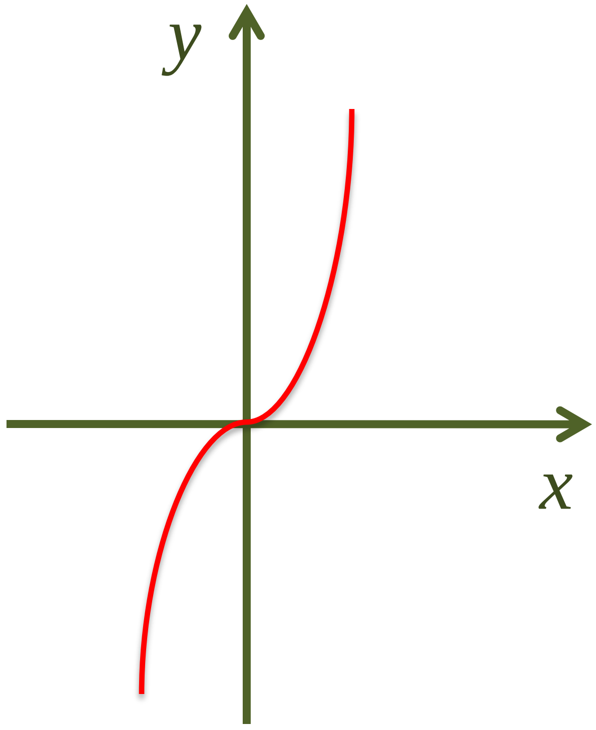
$1)\ f: IR \to IR_+;\ f(x) = x^3$

$$f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

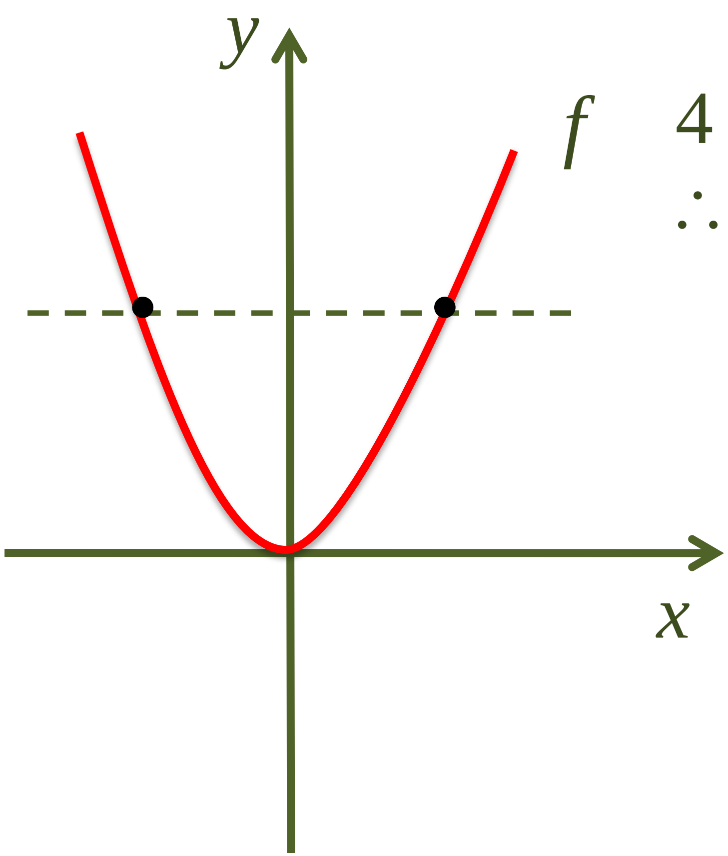
$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$ é injetora



Exemplo

$2)\ f : IR \to IR;\ f(x) = x^2$



Sendo $-2 = x_1 \neq x_2 = 2,$ temos

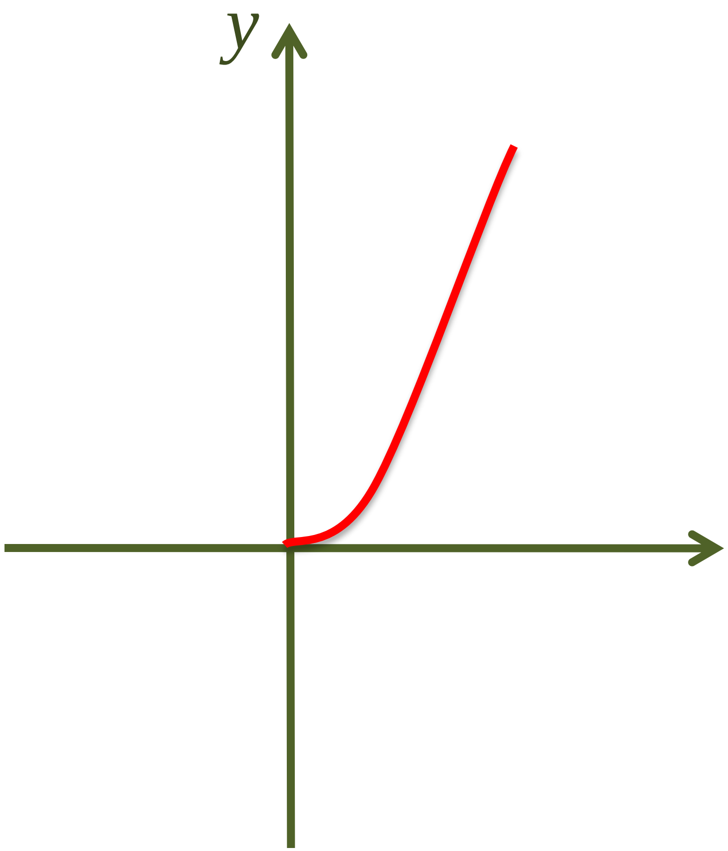
$4 = (-2)^2 = f(x_1) = f(x_2) = 2^2 = 4$

$\therefore f$ não é injetora.

Pode-se mostrar a injetividade de uma função graficamente . Basta traçar retas horizontais no plano cartesiano se uma reta tocar o gráfico em dois pontos, então f não é injetiva

Exemplo

$3)\, f: IR_+ \to IR_+;\, f(x) = x^2$



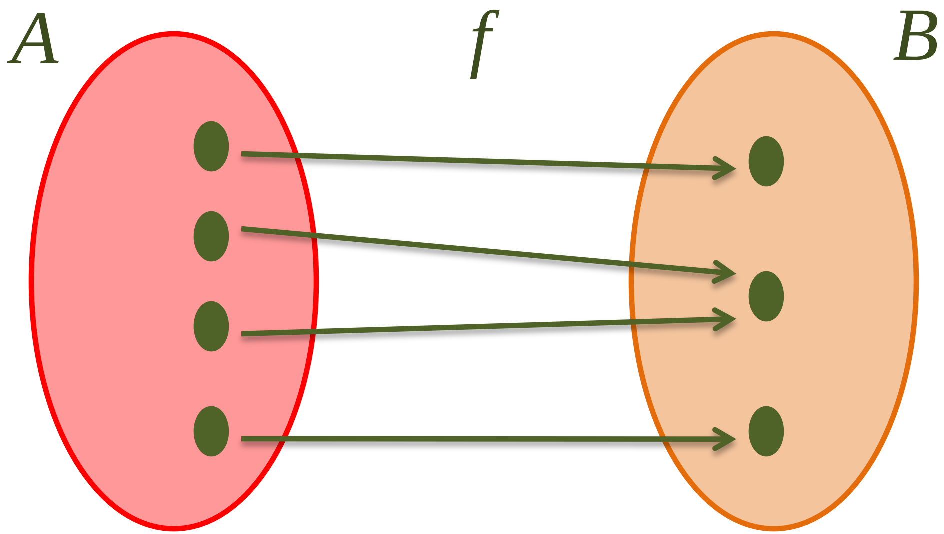
Sejam $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$ e

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{\,2} = x_2^{\,2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ já que $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$

$\therefore f$ é injetora

Função Sobrejetora

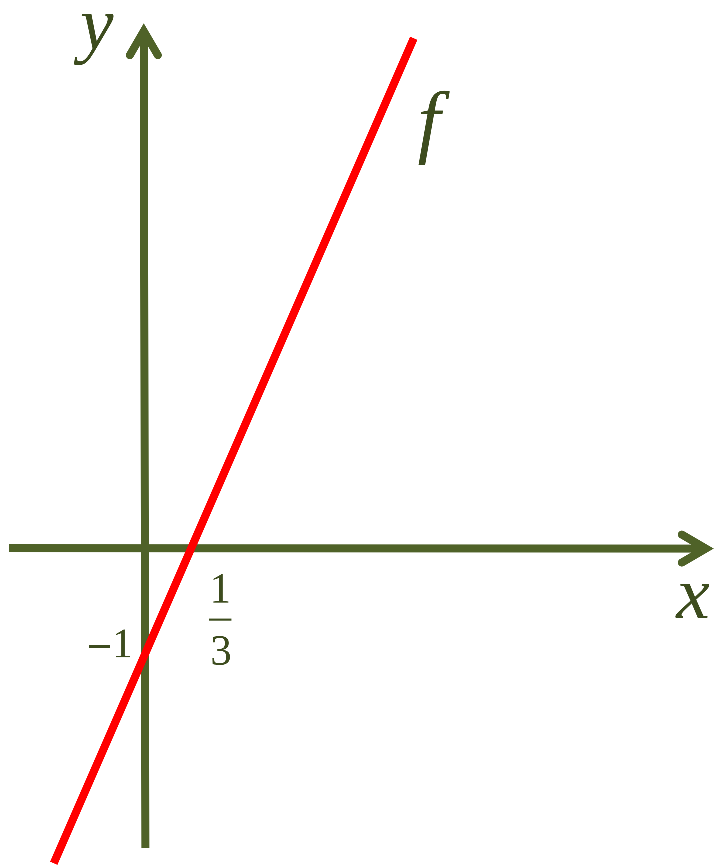


$$f : A \to B$$

$$f \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

Exemplo

1) $f : IR \to IR;\ f(x) = 3x - 1$



Note que o gráfico nos fornece

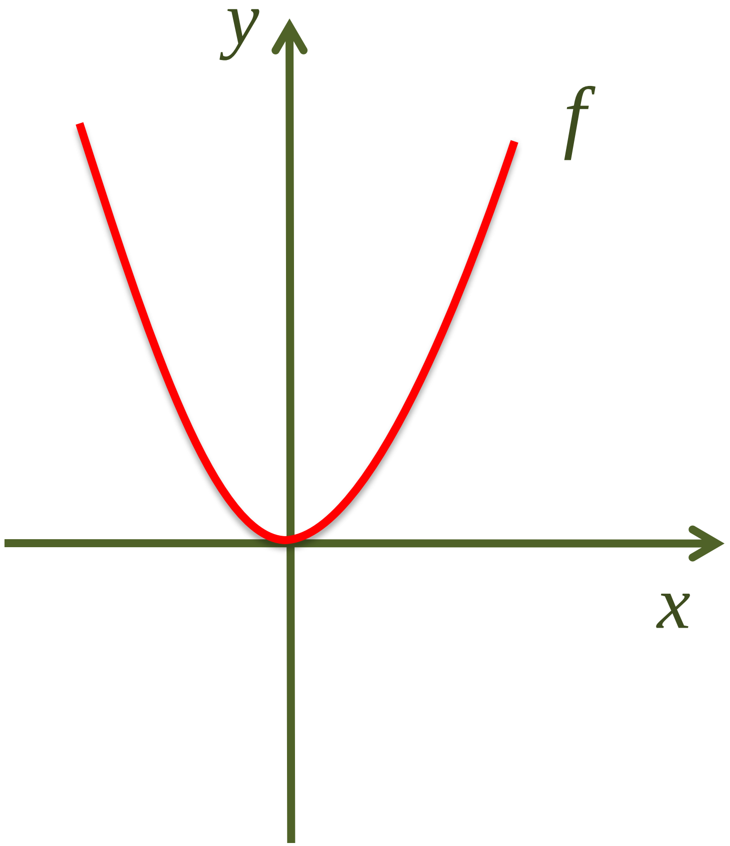
$\mathrm{Im}(f) = IR$ e $CD(f) = IR$

Logo, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f)$

$\therefore f$ é sobrejetora

Exemplo

$2)\ f : IR \to IR;\ f(x) = x^2$



Note que o gráfico nos fornece

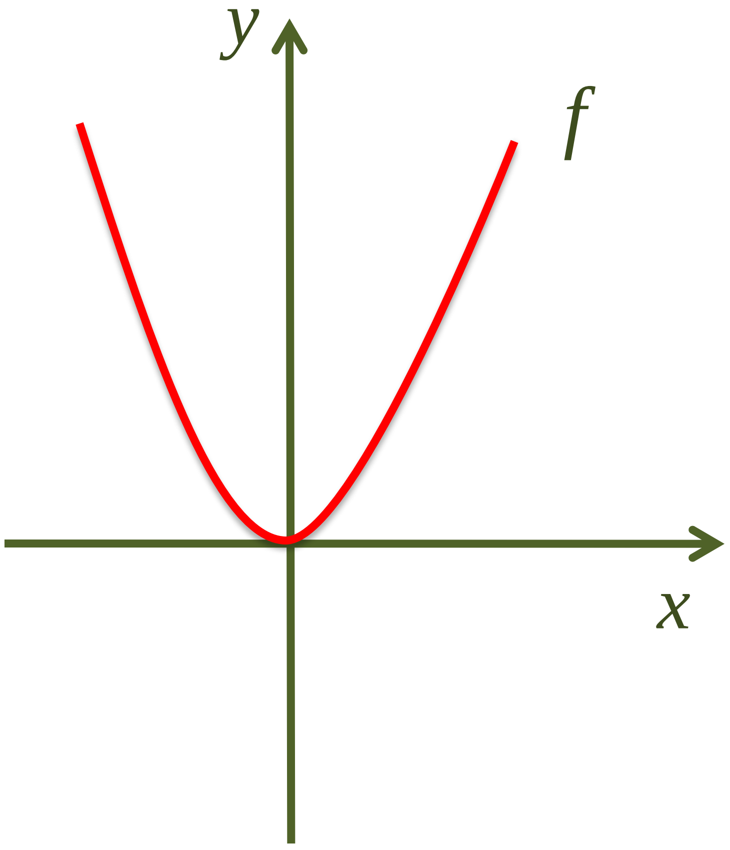
$\mathrm{Im}(f) = IR_+$ e $CD(f) = IR$

Logo, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{CD}(f)$

$\therefore f$ não é sobrejetora

Exemplo

$3)\ f : IR \to IR_+ ;\ f(x) = x^2$



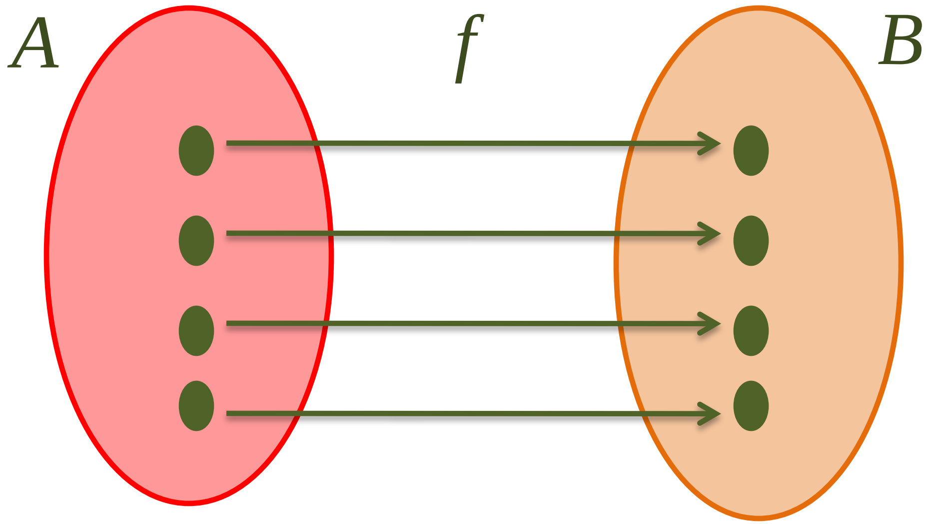
Note que o gráfico nos fornece

$\text{Im}(f) = IR_+$ e $CD(f) = IR_+$

Logo, $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$

$\therefore f$ é sobrejetora

Função Bijetora



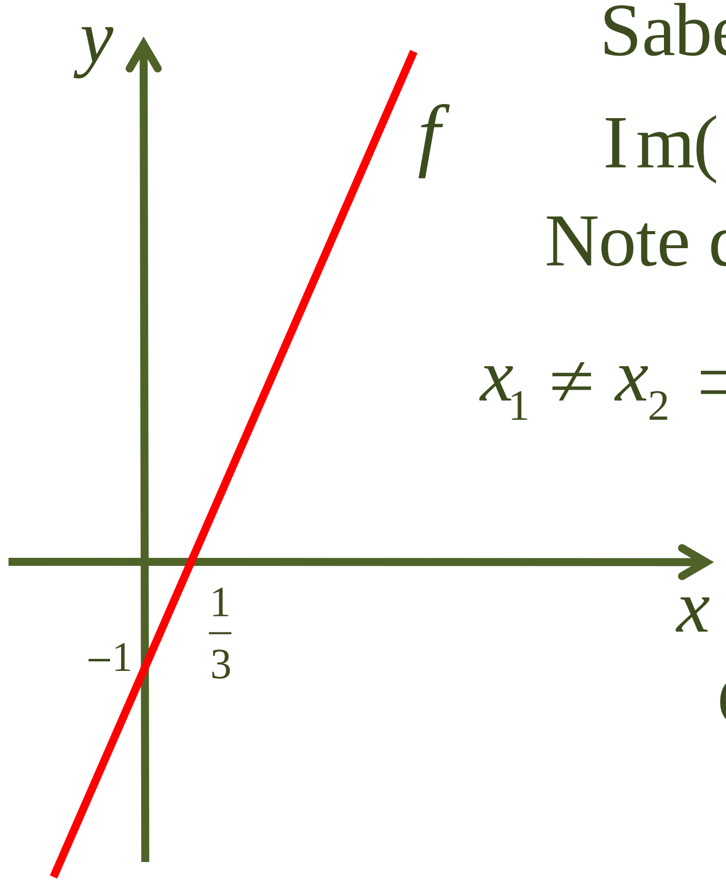
$f : A \to B$ é bijetora $\Leftrightarrow$ f é sobrejetora e injetora

Ou ainda:

f é bijetora: $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{Im} f(x) = \text{ contradomínio } B \\ \forall x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$

Exemplo

$1)\ f : IR \to IR;\ f(x) = 3x - 1$



Sabemos que f é sobrejetora pois

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f) = IR$$

Note que $\forall x_1, x_2 \in IR$ temos:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

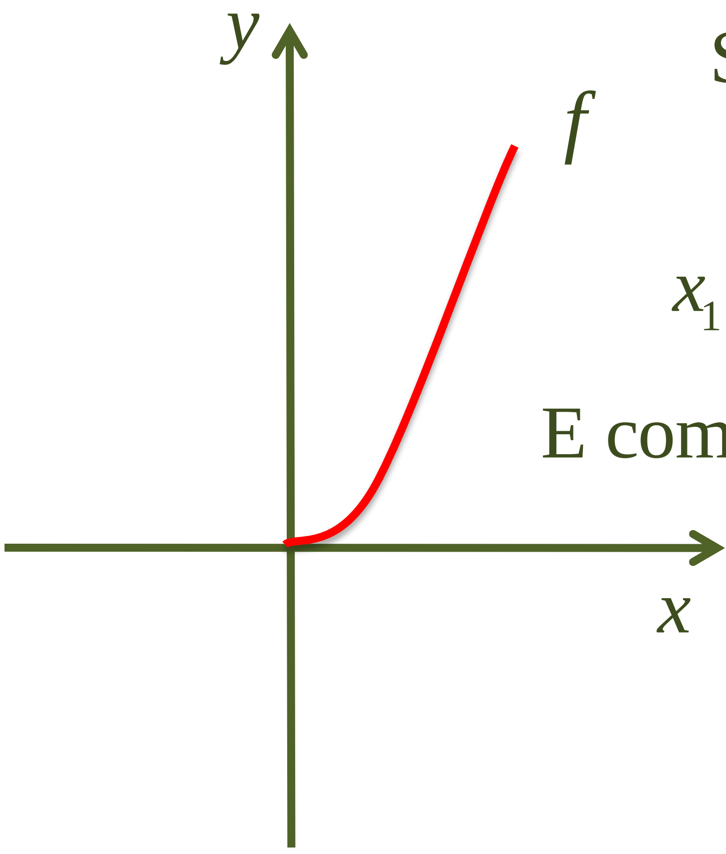
Logo f é injetora

Como f é sobrejetora e injetora

$\therefore f$ é Bijetora

Exemplo

$2)\, f : IR \rightarrow IR_+ ;\, f(x) = x^2$



Sabemos que f é injetora

Pois $\forall x_1, x_2 \in IR$ temos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2^2$$

E como $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f) = IR_+$ temos que

f é sobrejetora

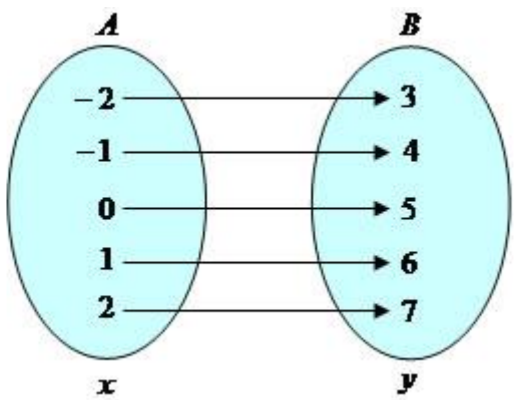
Como f é sobrejetora e injetora

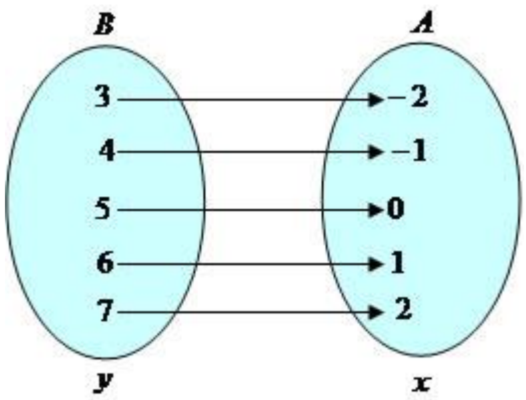
$\therefore f$ é Bijetora

Função Inversa

Se uma função f é injetiva, então f possui inversa com domínio igual a imagem de f; e mais, a equação que define a inversa de f é obtida resolvendo a equação y = f (x) para a variável x. Nessa nova função, **D(g) = Im(f) e Im(g) = D(f).**

A função inversa de f:A→B será indicada por f^{-1}:B→A.





$a) D(f^{-1}) = B = \text{Im}(f)$

Exercitando

$b) \text{Im}(f^{-1}) = A = D(f)$

$c) (y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$

d) O gráfico de f^{-1} é simétrico de f em relação a reta $y = x$

Exemplo

Exemplo Proposto 2

Se f(x)= $\sqrt{x-1}$ e g(x)= x^2 -1 provar que:

(a) $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2-2}$; (b) $(g\circ f)(x) = x-2$; (c) $(g\circ g)(x) = x^2\left(x^2-2\right)$.

Exemplo Proposto 3.

Se $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ demonstrar que $g^{-1}(x) = g(x)$ e verificar que $\left(g^{-1} \circ g\right)(x) = x$ para todo $x \neq 1$.

ATÉ À PROXIMA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC
Instituto UFC Virtual

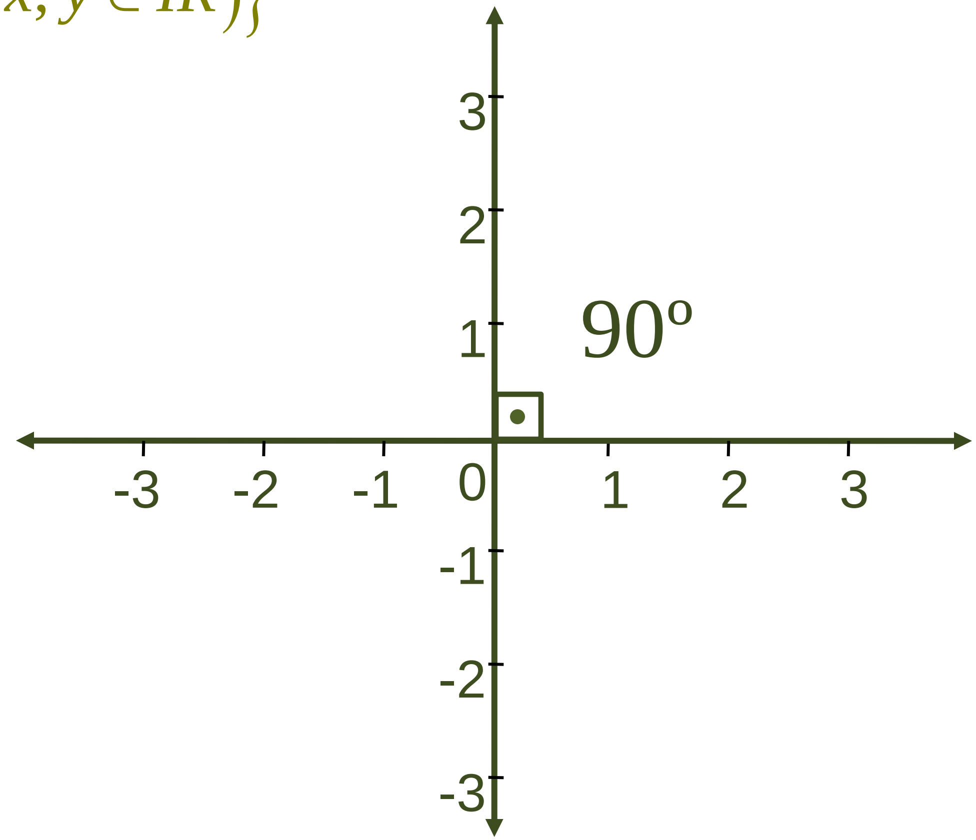
Aula 02 - Funções

Gráficos e exemplos de Funções, Conceitos e operações com funções

Plano Cartesiano

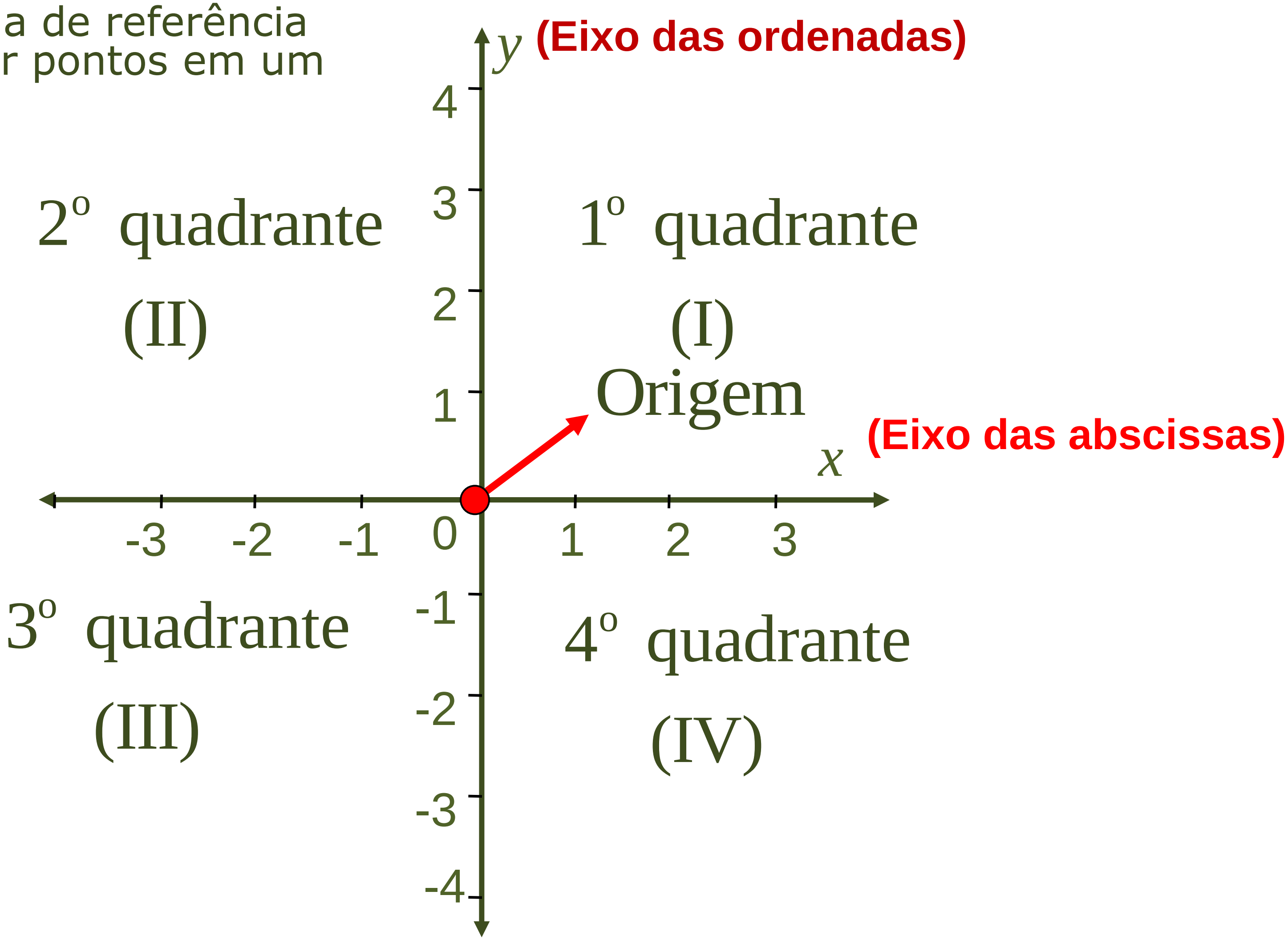
O **plano cartesiano** é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais tal que: $IR \times IR = \{(x, y / x, y \in IR)\}$

O plano cartesiano é representado por duas retas numéricas reais que se interceptam a um ângulo de 90^0.



Plano Cartesiano

O **plano cartesiano** é utilizado como sistema de referência para localizar pontos em um plano.



Plano Cartesiano

A forma geral de um par ordenado é: *(abscissa,ordenada)*.

A (2, 3)

B (-2, 4)

C (-3, -2)

D (1, -3)

E (2, 0)

F (0, -1)

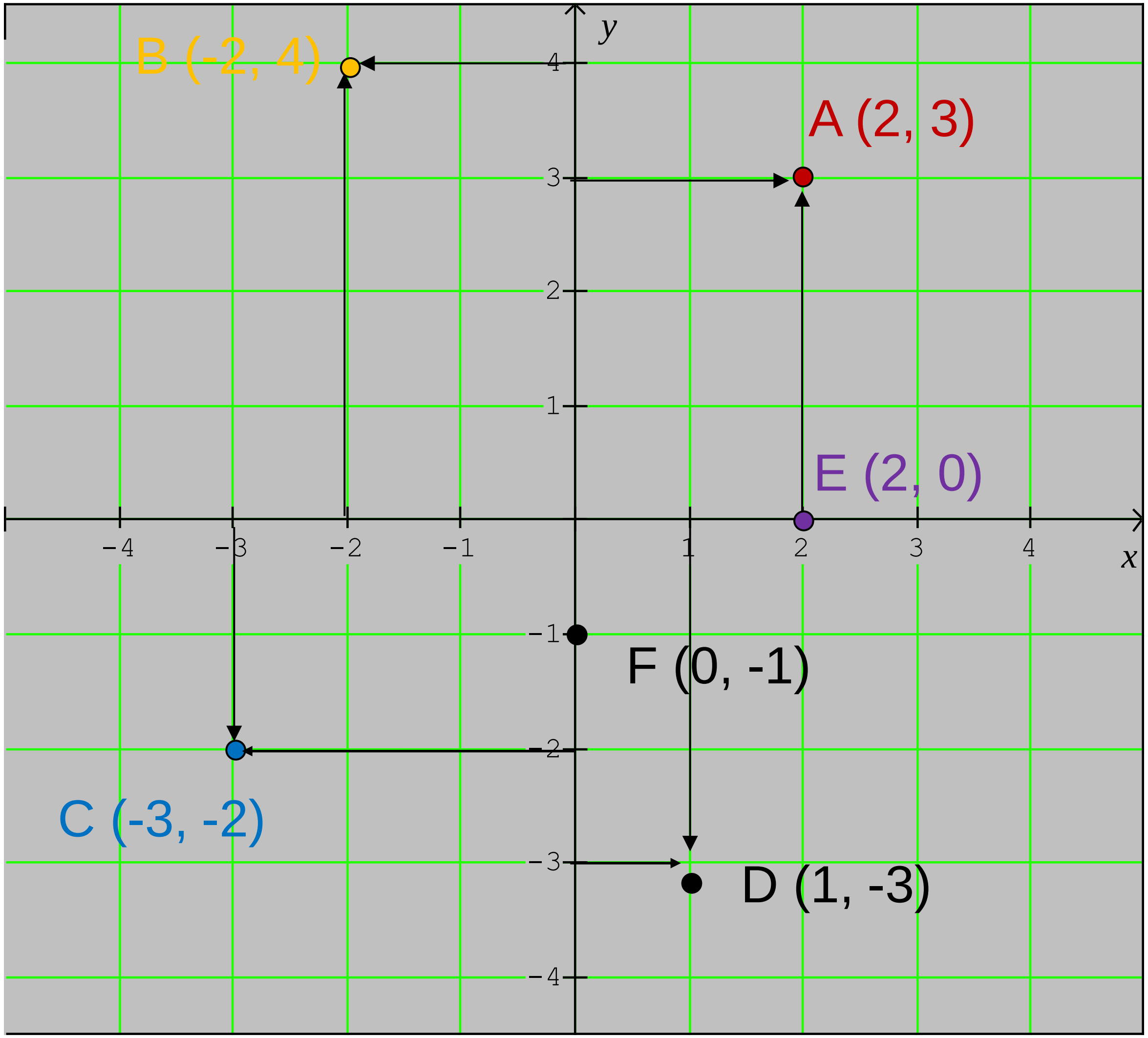


Gráfico de uma função

O **gráfico** de uma função $y = f(x)$ é o seguinte subconjunto do plano $x0y$

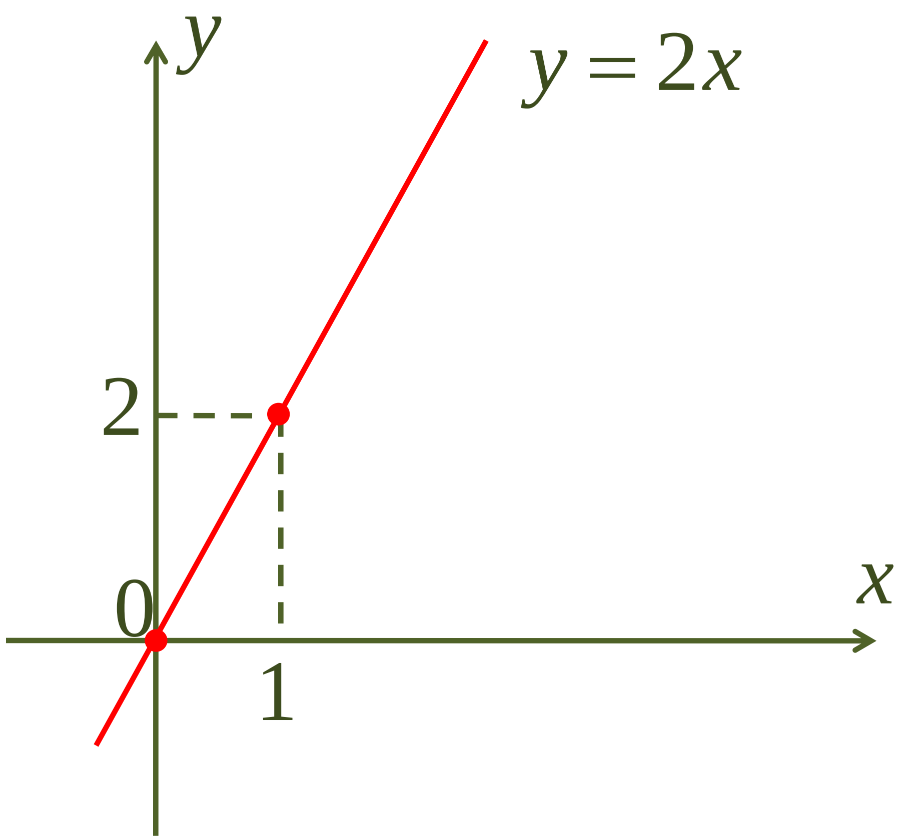
$$G(f) = \left\{ \left(x, f(x) \right); x \in D(f) \right\}$$

variável independente

variável dependente

Gráficos de funções

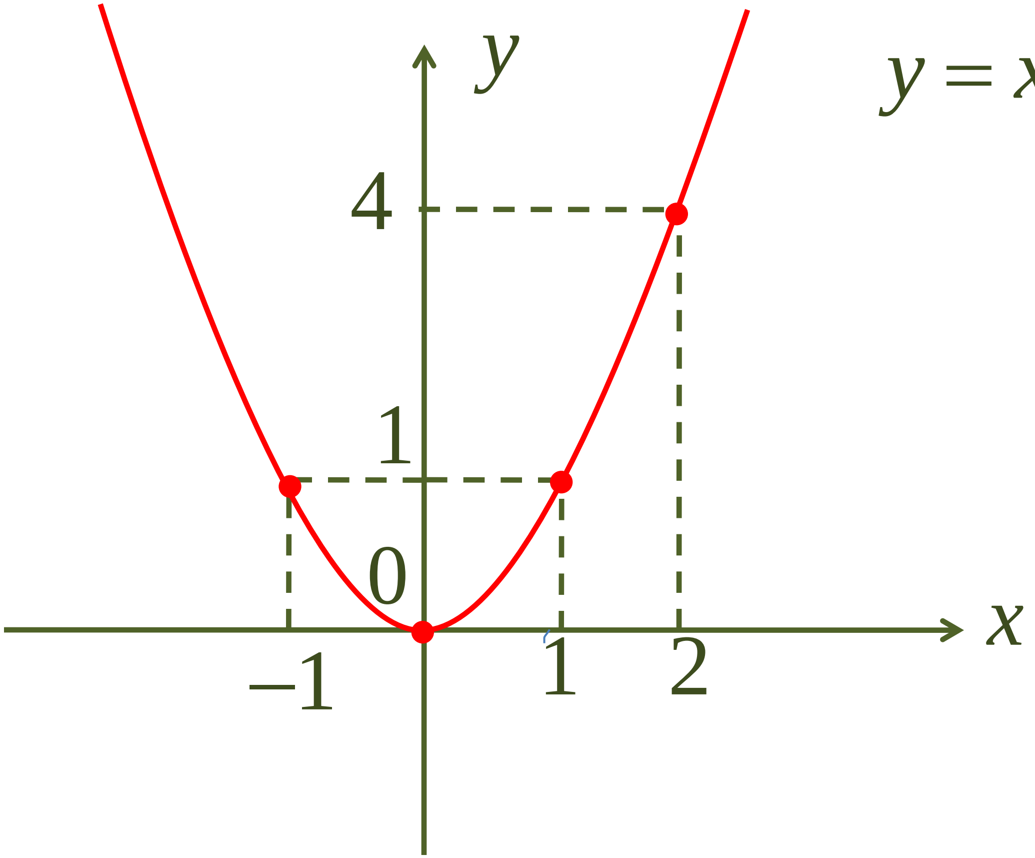
1)



x	$f(x)$
0	0
1	2

Os exemplos

2)



$y = x^2$

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1
2	4

Função do 1º grau ou Afim

Esta função é definida por:

$$f(x) = a.x + b$$

onde $a, b \in \mathrm{R}$. Notemos que:

1) $D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{R}$
2) a é chamado coeficiente angular
3) b é o coeficiente linear

Gráfico da função afim

4) Uma função afim $f(x)=a.x+b$ pode ser determinada se dois de seus valores são conhecidos.

Exemplo: Dados $f(1)=12$ e $f(2)=14$ temos

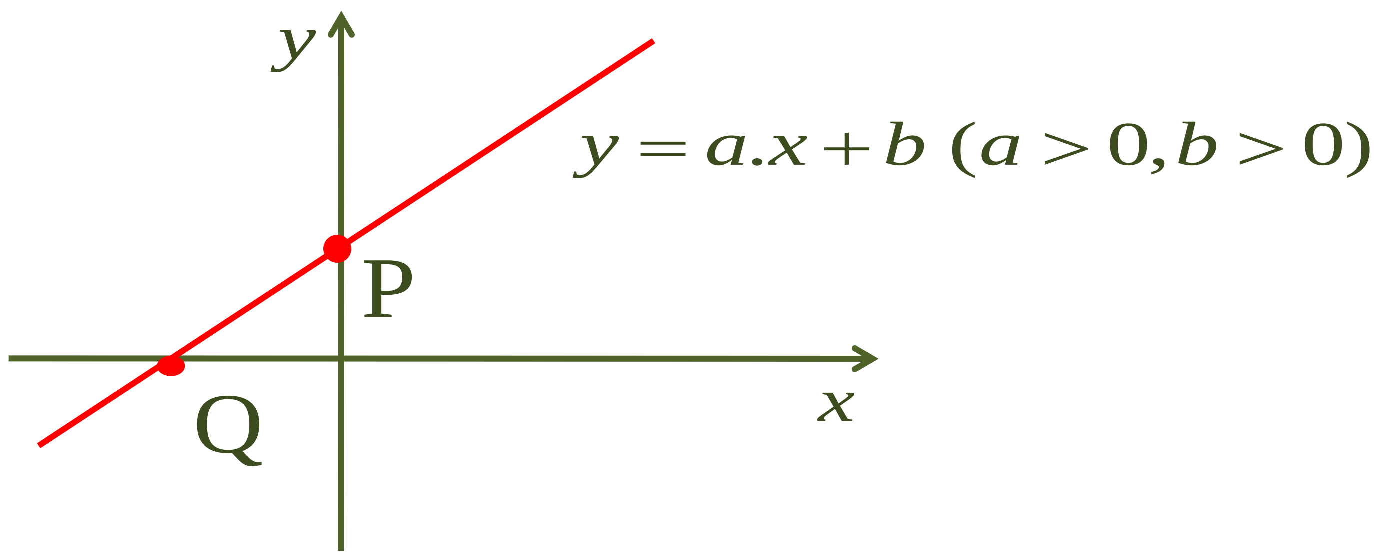
$$\begin{cases} a+b=f(1)=12 \\ 2.a+b=f(2)=14 \end{cases} \Rightarrow a=2 \text{ e } b=10$$

Logo $f(x)=2.x+10$.

Gráfico de uma função afim

5) O gráfico é uma reta que passa pelos pontos $\mathrm{P} = (0, b)$ e $\mathrm{Q} = (-b/a)$

ou seja, $f(0) = b$, $f(-b/a) = 0$. Logo, se temos $a > 0$ e $b > 0$



Função do 1° grau ou Afim

6) Além disso como $f(1) = a.1 + b = a + b$ vale

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = a + b - b = a$$

De um modo geral para $x_1, x_2 \in R$ com $x_1 \neq x_2$

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}_{\text{taxa de variação}} = \frac{a.x_1 + b - (a.x_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a.(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

Casos especiais

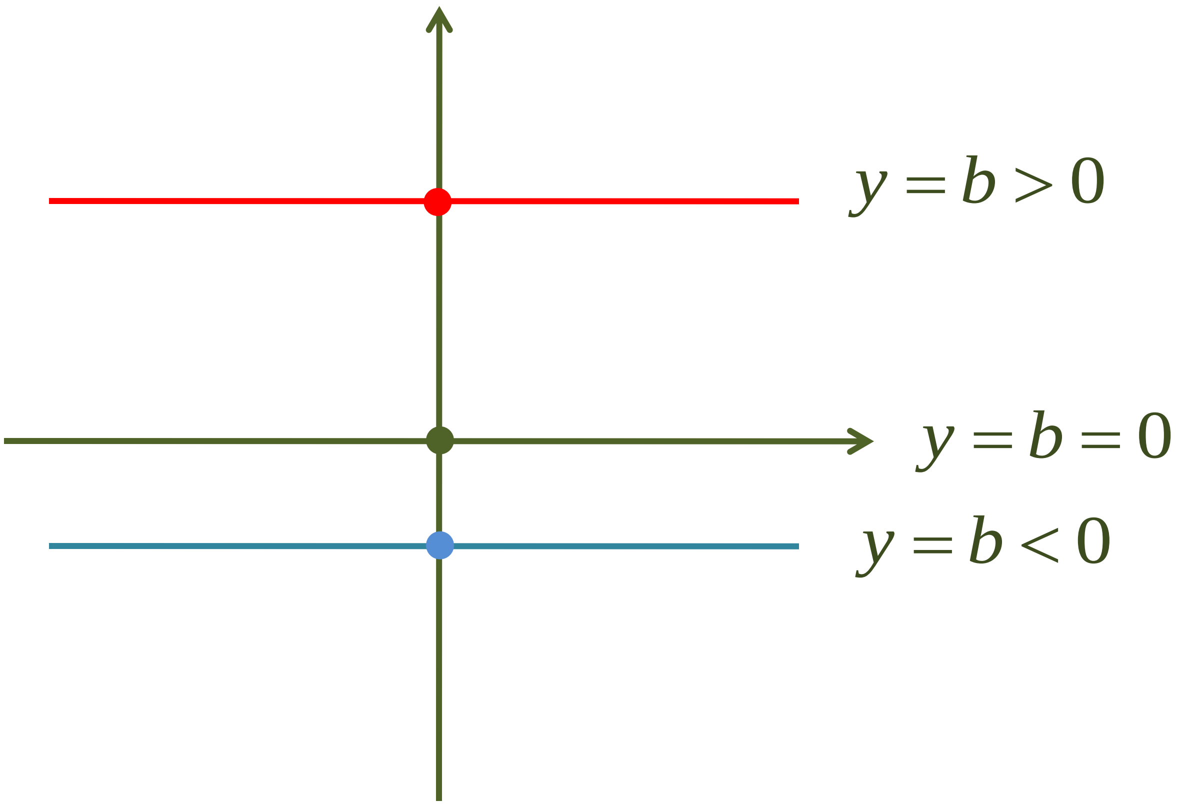
Seja $f(x) = a.x + b$

1. Se $a = 0$ então $f(x) = b$ (constante)

2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$ então $f(x) = a.x$ (linear)
   Para $a = 1$ temos a função identidade.

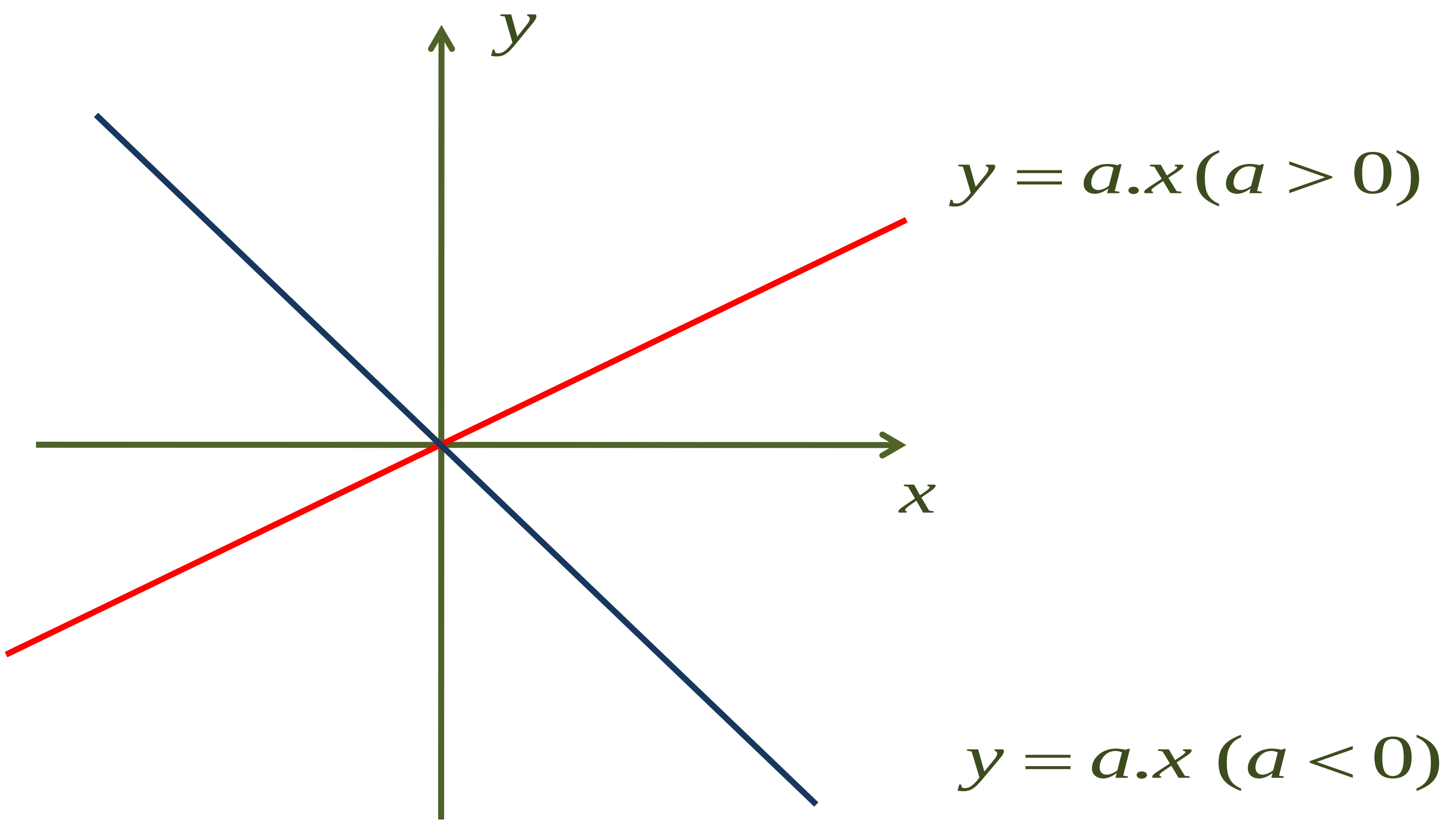
Gráficos dos casos especiais

1. Função afim Constante: $y = f(x) = b$



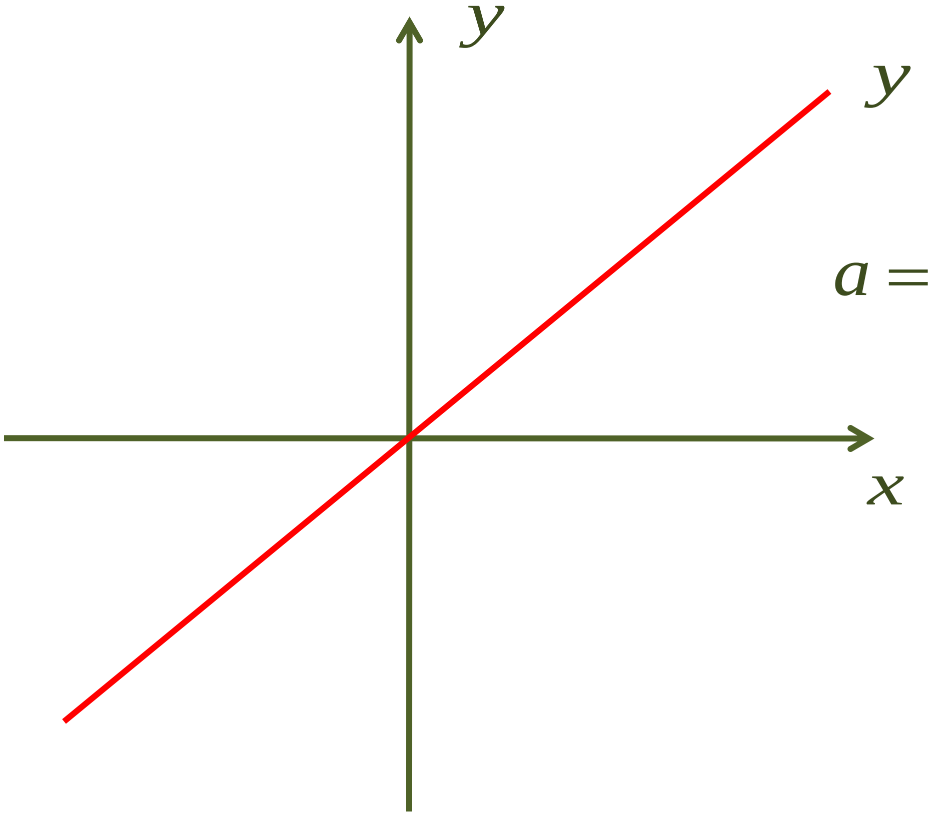
Gráficos dos casos especiais

2. Função linear: $y = f(x) = a.x$



Gráficos dos casos especiais

Função Identidade: $y = f(x) = x$



$a = 1 \text{ e } b = 0$

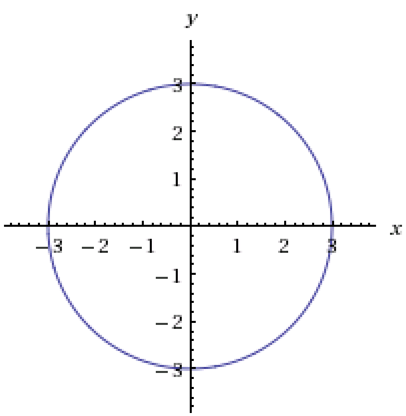
Gráficos

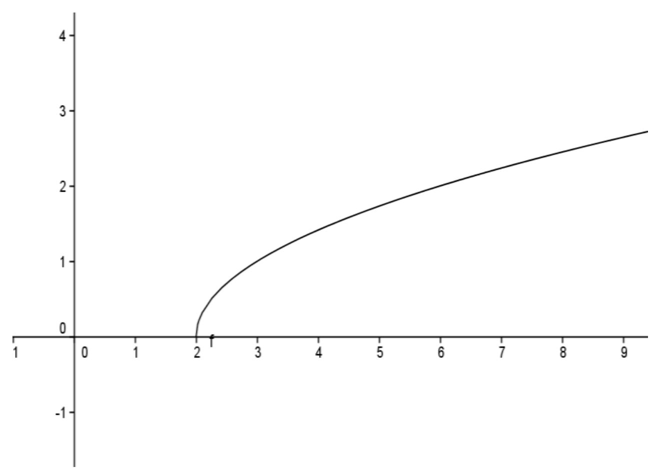
Se *f* for uma função, então o gráfico de *f* será o conjunto dos pontos (x, y) em IR² para os quais (x,y) é um par ordenado de *f*., para isso, construímos um quadro (x, f(x)), atribuindo a x valores convinientes.

Ex.: Esboce o gráfico das equações:

$$y=\sqrt{2-x} \text{ e } y=\sqrt{x^2-9}$$

Obs.: O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto, pois cada elemento x no domínio de *f* deve estar associado a um único y no contra-domínio. Ex.:

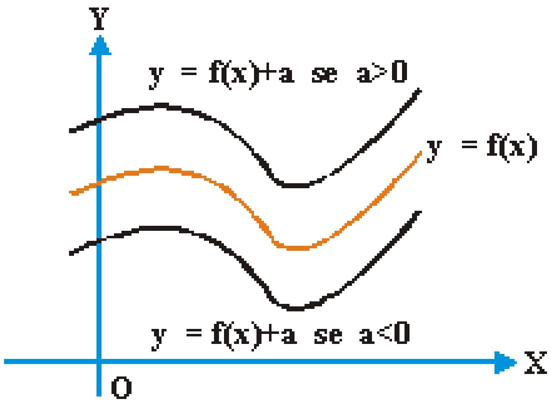




Gráficos

a.Translação Vertical

$$g(x) = f(x) + a$$



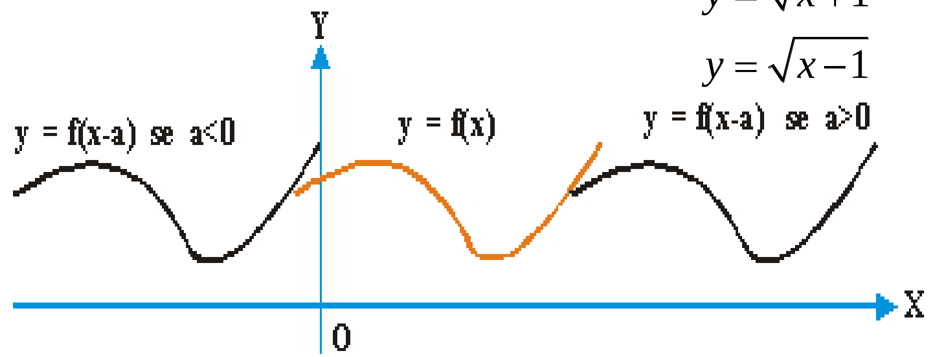
b. Translação Horizontal

$$g(x) = f(x-a)$$

$$y = \sqrt{x}$$

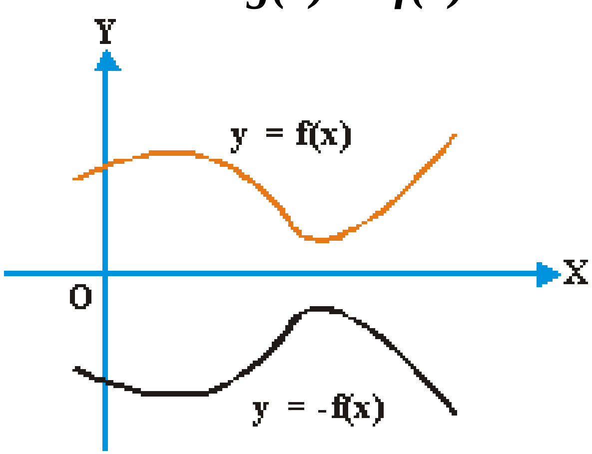
$$y = \sqrt{x+1}$$

$$y = \sqrt{x-1}$$



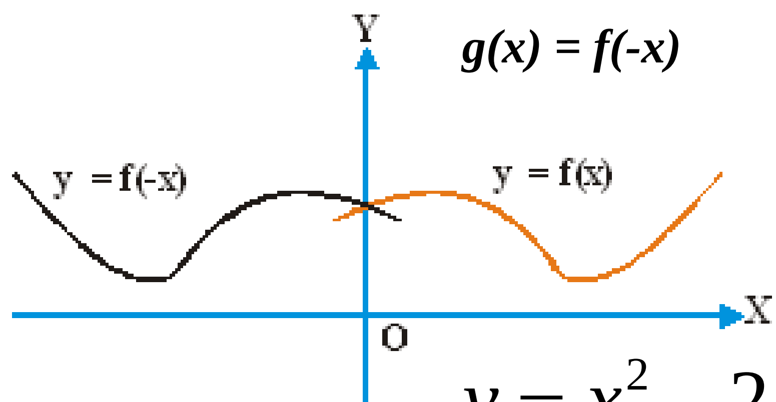
c. reflexão em relação ao eixo X

$$g(x) = -f(x)$$



d. reflexão em relação ao eixo Y

$$g(x) = f(-x)$$

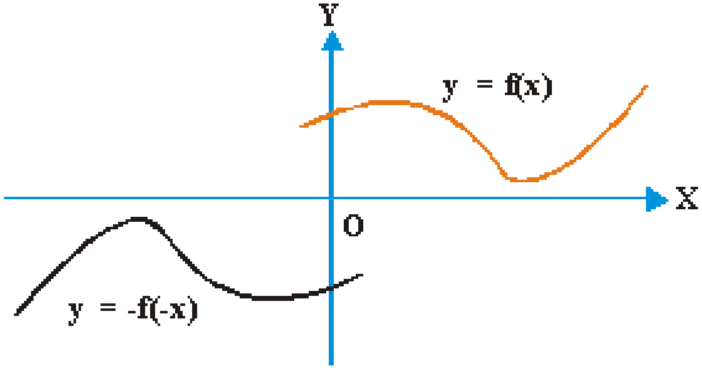


$$y = x^2 - 2$$

Gráficos

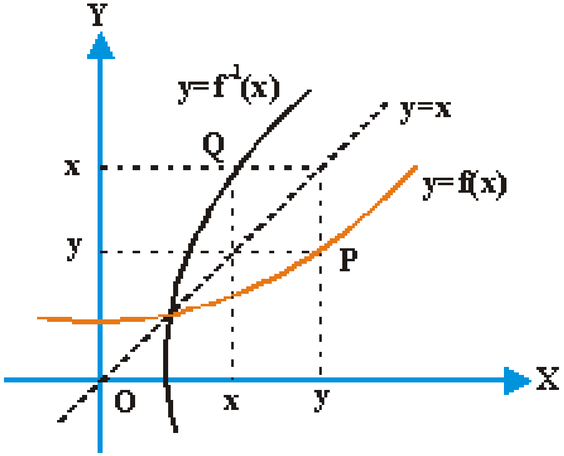
e. reflexão em relação a origem

g(x) = -f(-x)



$$y = x^3$$

f. reflexão* do gráfico de f em relação à reta *y = x



$$y = x^2, x \leq 0$$

$$y = -\sqrt{x}$$

Gráficos

EXEMPLO RESOLVIDO 1

1. Fazer o gráfico da função $f(x)=x^2$ com $x \leq 0$.

EXEMPLO RESOLVIDO 2.

Fazer o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$.

EXEMPLO RESOLVIDO 3.

Fazer o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}-1$.

Gráficos

Exemplo Proposto 1

1. Fazer o gráfico da função $f(x)=-x^2$ com $x \leq 0$.

vai ser o ramo esquerdo da reflexão de x^2 em relação ao eixo x de

2. Fazer o gráfico da função $f(x)=-\sqrt{x}$.

vai ser o ramo inferior do gráfico de $y^2=x$

3. Fazer o gráfico da função $f(x)=1-\sqrt{x}$

vai ser o gráfico anterior deslocada uma unidade para cima!

Exemplo Proposto 2.

Fazer o gráfico da função $f(x)=-\sqrt{x}$.

Exemplo Proposto 3.

Fazer o gráfico da função $f(x)=1-\sqrt{x}$

Fazer os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x)=2x-1$ com $0 \leq x < 2$;

(b) $g(x)=-2x^2+4x+1$ com $-1 < x \leq 1$;

(c) $h(x)=-x^3$.

Função Quadrática

Sejam $a,b,c \in IR$, com $a \neq 0$. A função $f: IR \rightarrow IR$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in IR$, é chamada função quadrática ou função polinomial do segundo grau.

Atividade 1

Em cada uma das funções quadráticas definidas abaixo, determine seus coeficientes.

a) $f\left(x\right)=2x^2-4x+\sqrt{5}$

b) $f\left(x\right)=-2x^2-5x+4$

c) $f\left(x\right)=\pi-4x+3x^2$

d) $f\left(x\right)=-4x+2x^2$

e) $f\left(x\right)=-2x^2-5$

f) $f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}x^2$

Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f: IR \to IR$ uma função quadrática

definida por $f(x) = x^2$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

Para resolver este problema, vamos, inicialmente, construir uma tabela, escolhendo alguns valores para x e encontrando os correspondentes para y. Desta forma, determinaremos pares ordenados (x, y).

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2$	(x, y)
-4	16	$(-4, 16)$
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$
4	16	$(4, 16)$

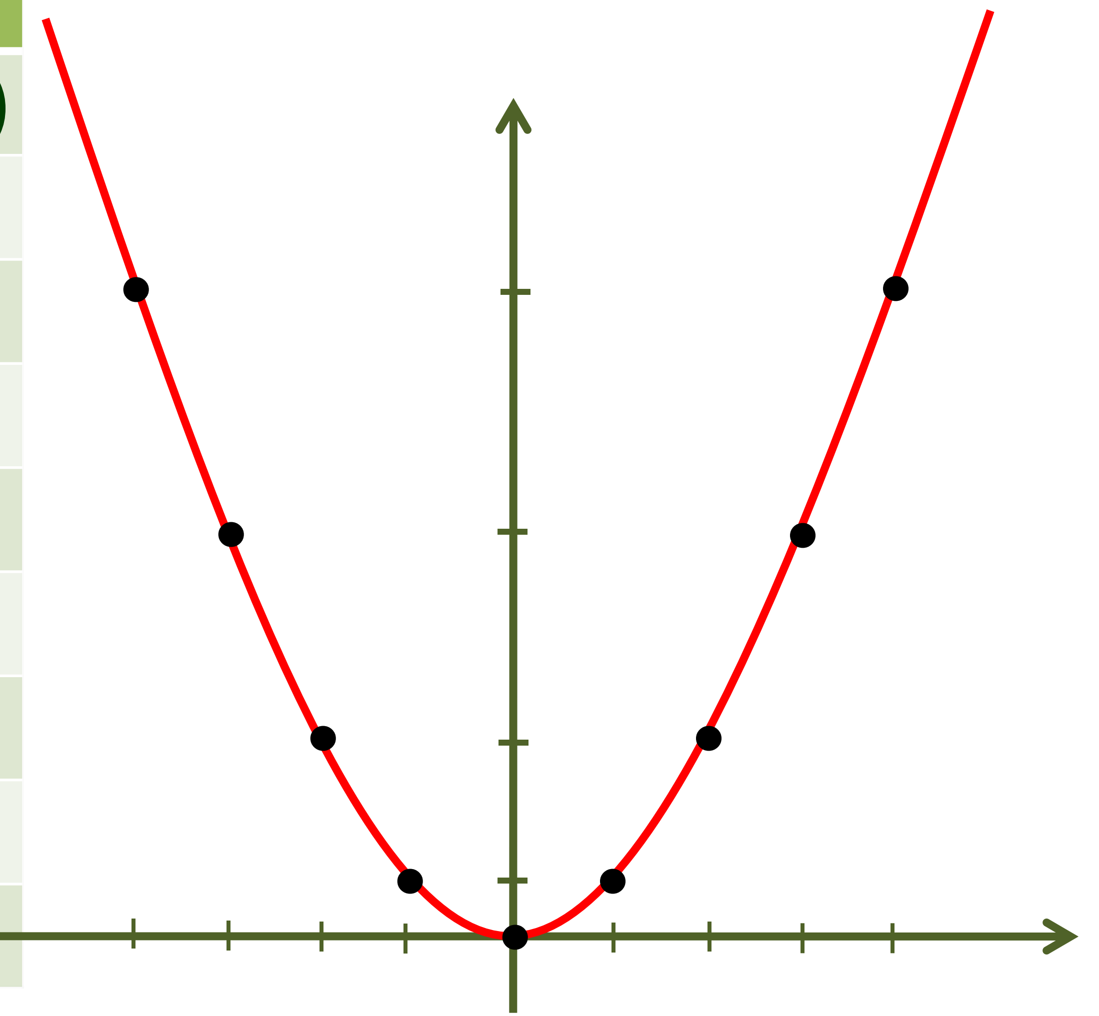


Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f : IR \rightarrow IR$ uma função quadrática

definida por $f\left(x\right) = x^2 + 1$, esboce o seu

gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
-4	17	$(-4, 17)$
-3	10	$(-3, 10)$
-2	5	$(-2, 5)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	$(0, 1)$
1	2	$(1, 2)$
2	5	$(2, 5)$
3	10	$(3, 10)$
4	17	$(4, 17)$

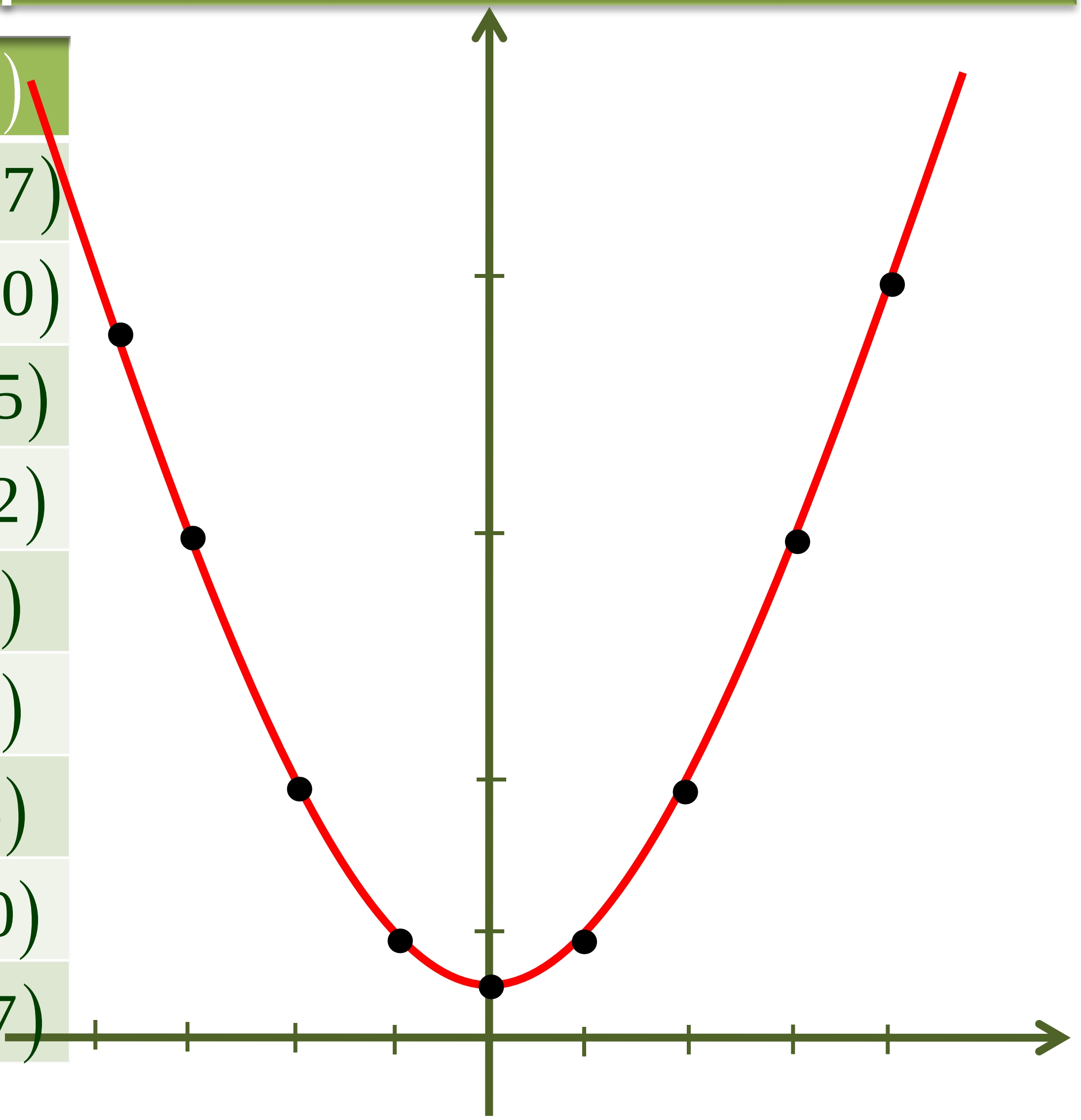


Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f : IR \rightarrow IR$ uma função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 1$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
-4	15	$(-4, 15)$
-3	8	$(-3, 8)$
-2	3	$(-2, 3)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-1	$(0, -1)$
1	0	$(1, 0)$
2	3	$(2, 3)$
3	8	$(3, 8)$
4	15	$(4, 15)$

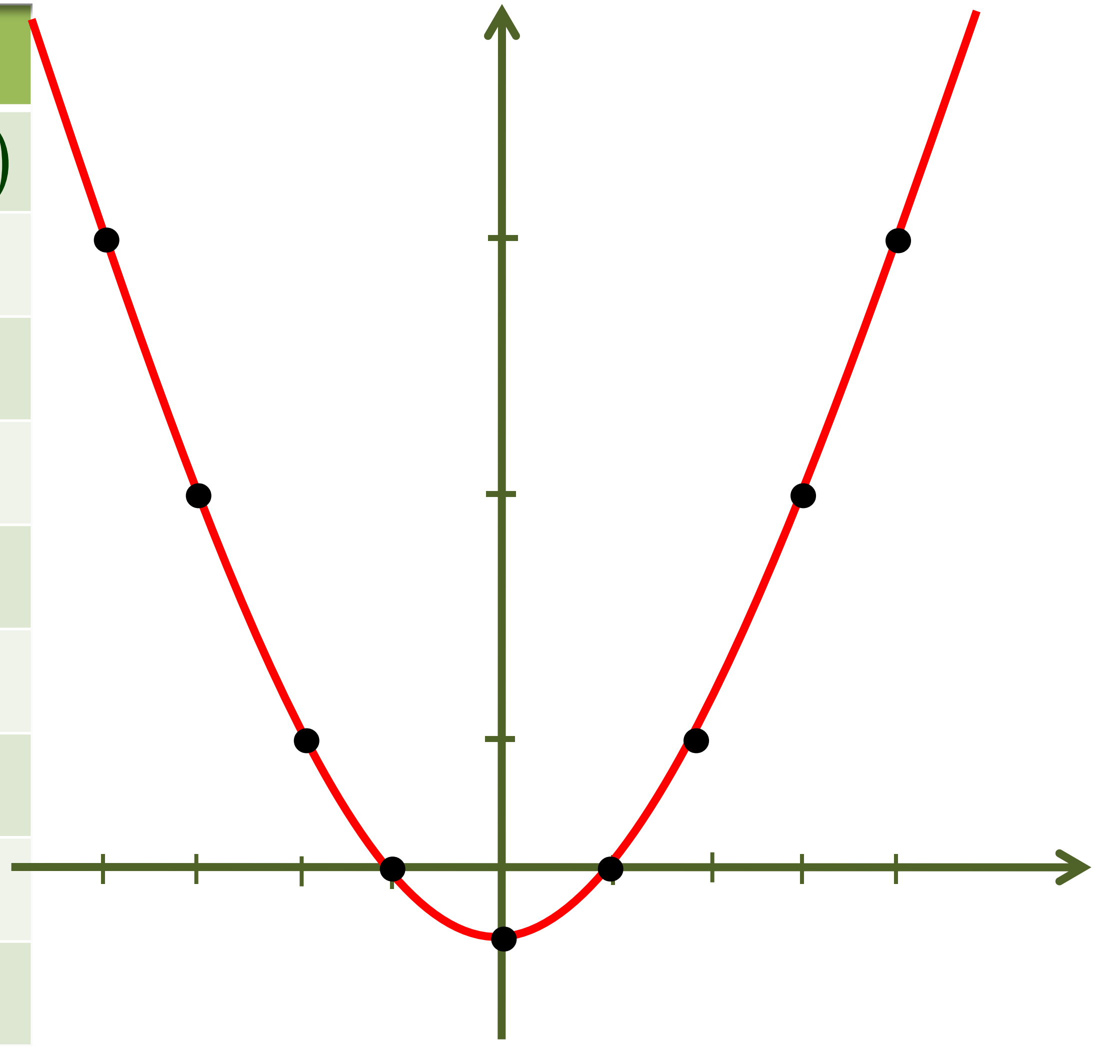


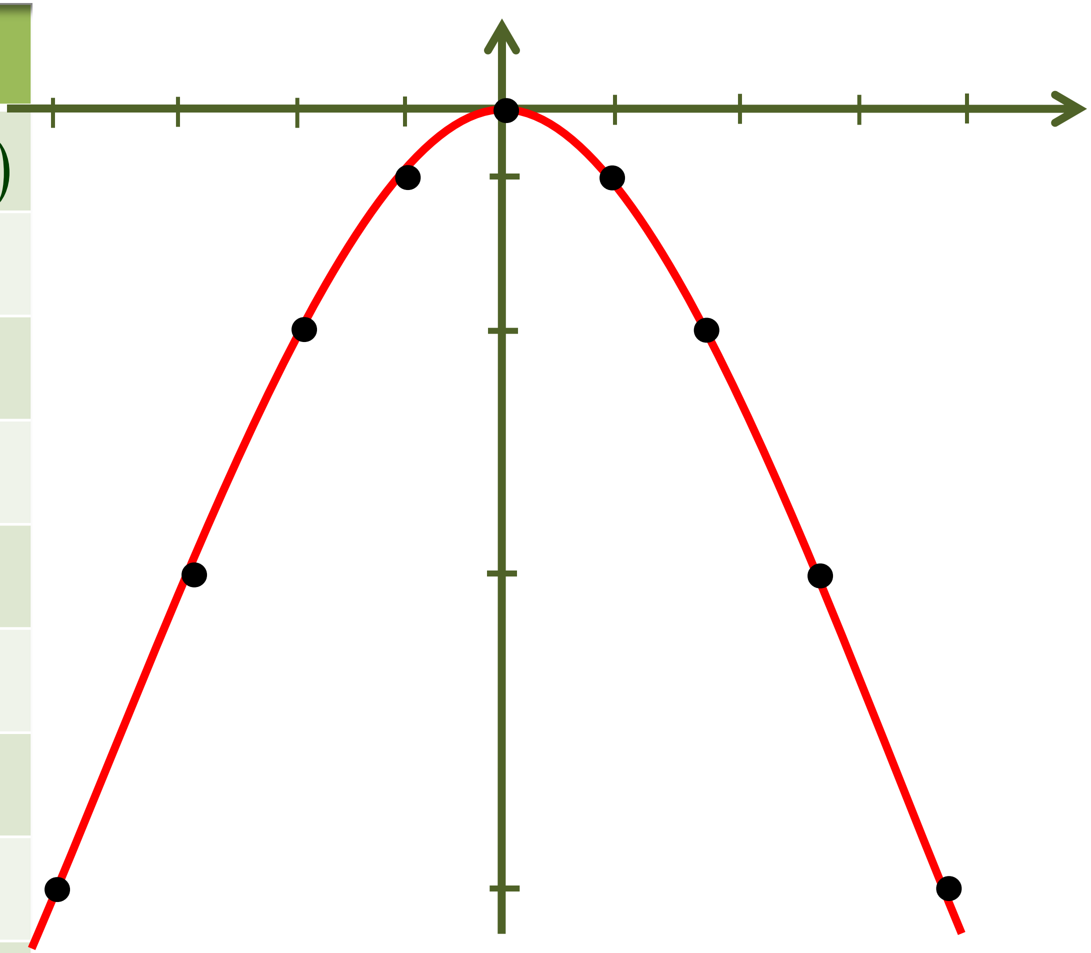
Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f: IR \to IR$ uma função quadrática

definida por $f(x) = -x^2$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

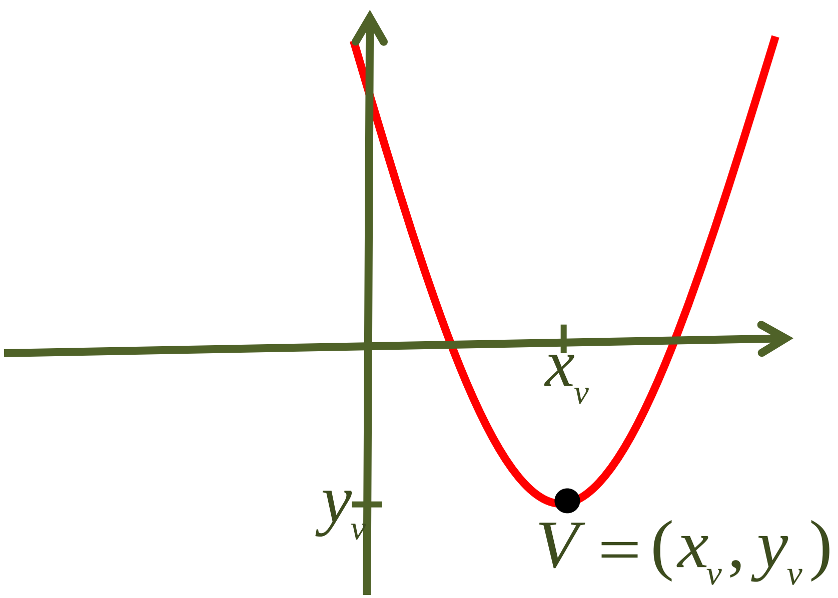
x	$y=-x^2$	(x,y)
-4	-16	$(-4,-16)$
-3	-9	$(-3,-9)$
-2	-4	$(-2,-4)$
-1	-1	$(-1,-1)$
0	0	$(0,0)$
1	-1	$(1,-1)$
2	-4	$(2,-4)$
3	-9	$(3,-9)$
4	-16	$(4,-16)$



Ponto Importante do Gráfico

- O vértice $V = (x_v, y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ é dita crescente, se

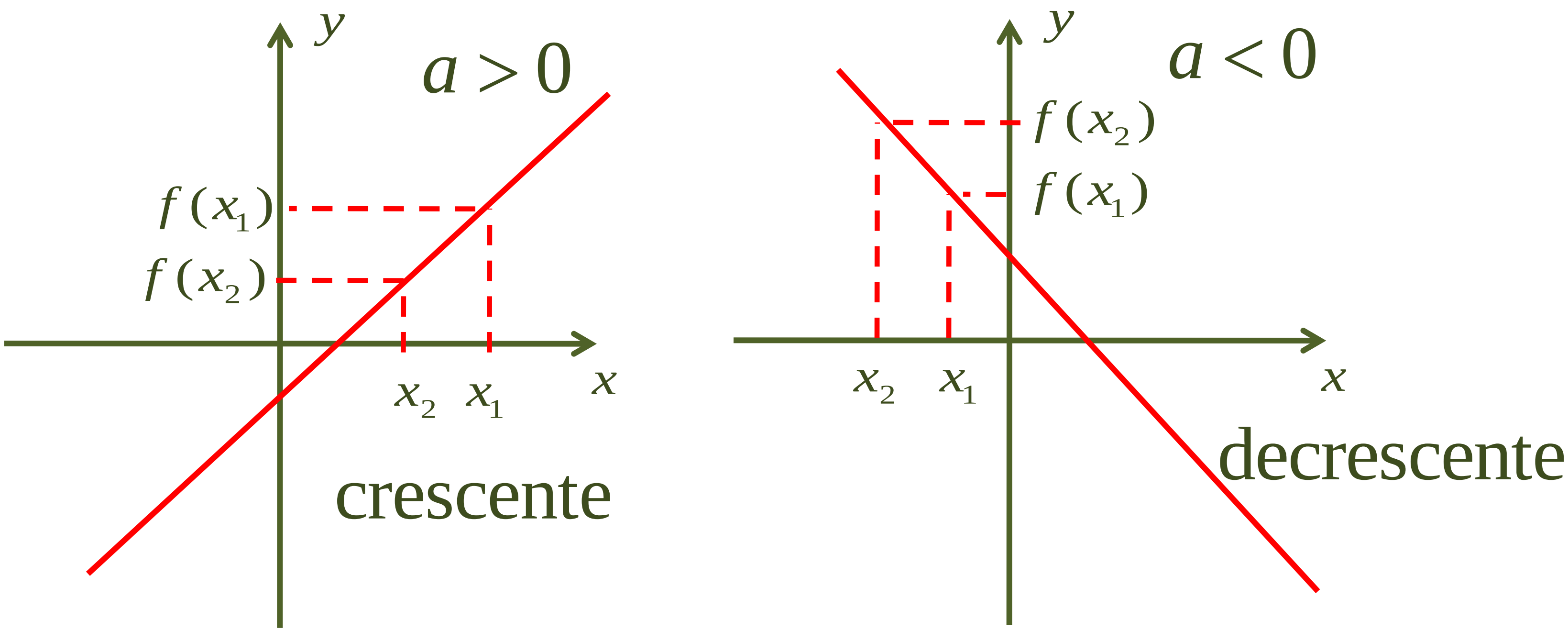
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Uma função $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ é dita decrescente, se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Exemplo

Função afim: $f(x) = ax + b$



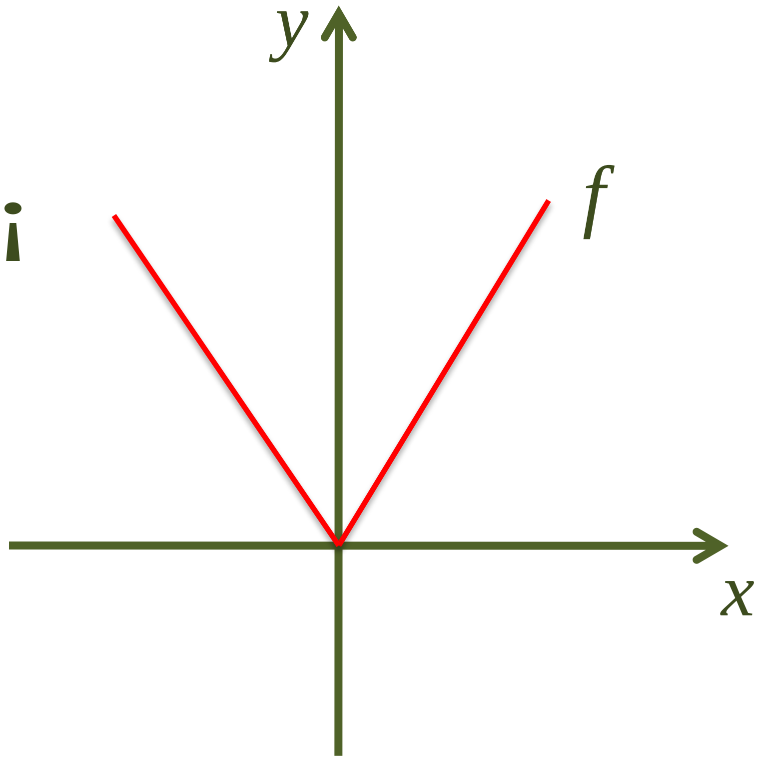
Função Par

$$f : A \to B \text{ tal que } f(x) = f(-x)\ \forall x \in A$$

Exemplos

1) f : ¡ ® ¡ ; $f(x) = |x|$ é par pois

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ " x Î ¡

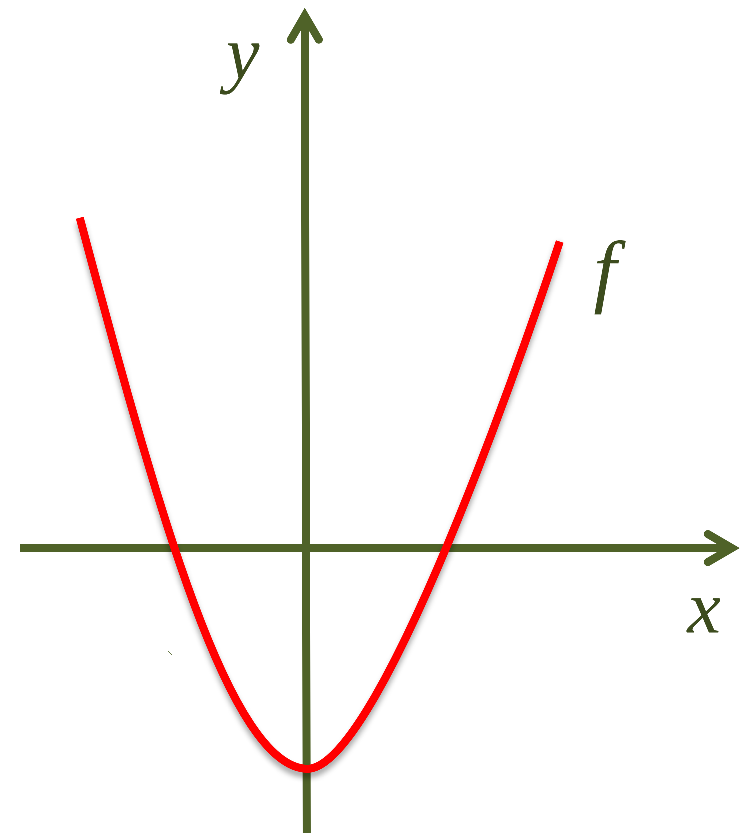


Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

2) $f : IR \to IR;\ f(x) = x^2 - 1$ é par pois,

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)\ \forall x \in$$ ¡

Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.



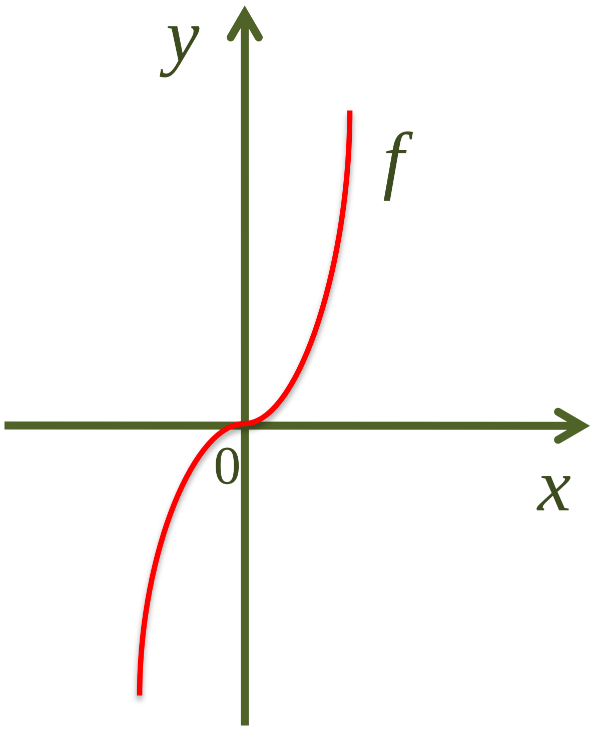
Função Ímpar

$$f : A \to B \text{ tal que } f(-x) = -f(x)\,\forall x \in A$$

Exemplos

1) $f : IR \to IR;\ f(x) = x^3$ é ímpar pois,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)\,\forall x \in$$ ¡



Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação à origem.

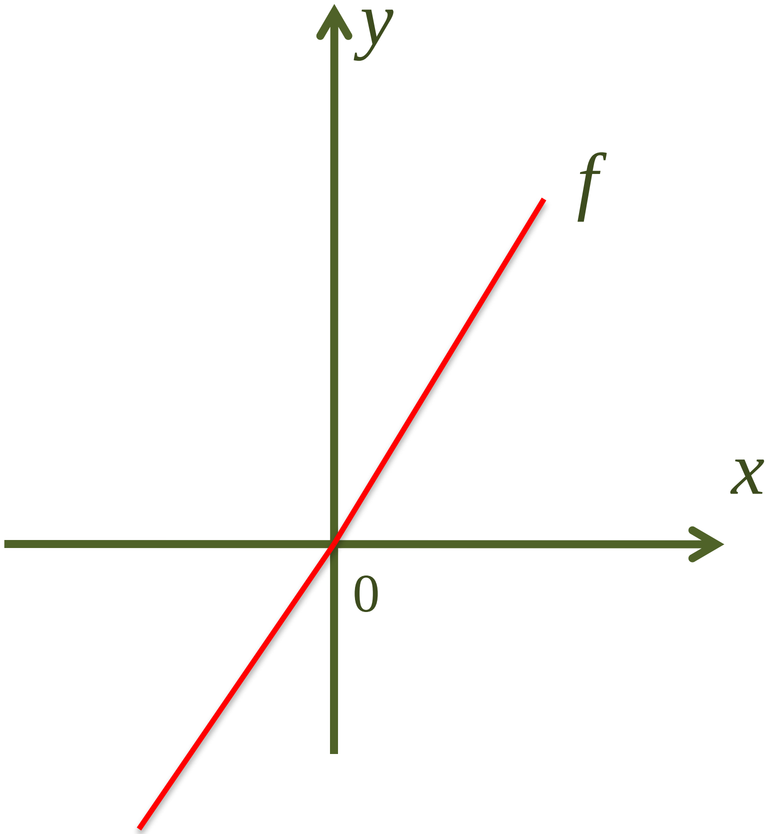
$2)\ f : IR \to IR;\ f(x) = x$ *é* ímpar, pois

$$f(-x) = -x$$

$$-f(x) = -x$$

Logo,

$$f(-x) = -f(x)\ \forall x \in ¡$$



Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação à origem.

Função que não é nem par e nem Ímpar

$$f : IR \rightarrow IR;\ f(x) = x^2 + x$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x\ \forall x \in \text{¡}$$

$$-f(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x\ \forall x \in \text{¡}$$

$$\therefore\ f(x) \neq f(-x) \text{ e}$$

$$f(-x) \neq -f(x)\ \forall x \in \text{¡}$$

Obs.: O gráfico de f não é simétrico
nem em relação à origem,
nem em relação ao eixo y.