Nota sobre a resolução de Sistema de Equações Lineares com R

Theo Antunes* Rafael de Acypreste†

02/01/2021

Contents

1 Equações a diferenças

Para essa nota, precisaremos dos seguintes pacotes instalados e carregados:

```
library(tidyverse)

options(scipen = 99)
```

1.1 Equações lineares a diferenças de 1ª ordem

1.1.1 Equação homogênea

A equação homogênea é indicada pela forma a seguir, em que y_t é uma variável em função do tempo:

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \tag{1}$$

que pode ser resolvida conhecendo-se o valor inicial y_0. Assim, temos:

*Doutor em Economia pela Universidade de Brasília. Pode ser contatado em theosantunes@gmail.com.
†Doutorando em Economia pela Universidade de Brasília. Pode ser contatado em rafaeldeacyprestemr@gmail.com.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -ay_0 \\
y_2 &= -ay_1 = (-a)^2 y_0 \\
&\vdots \\
y_t &= (-a)^t y_0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

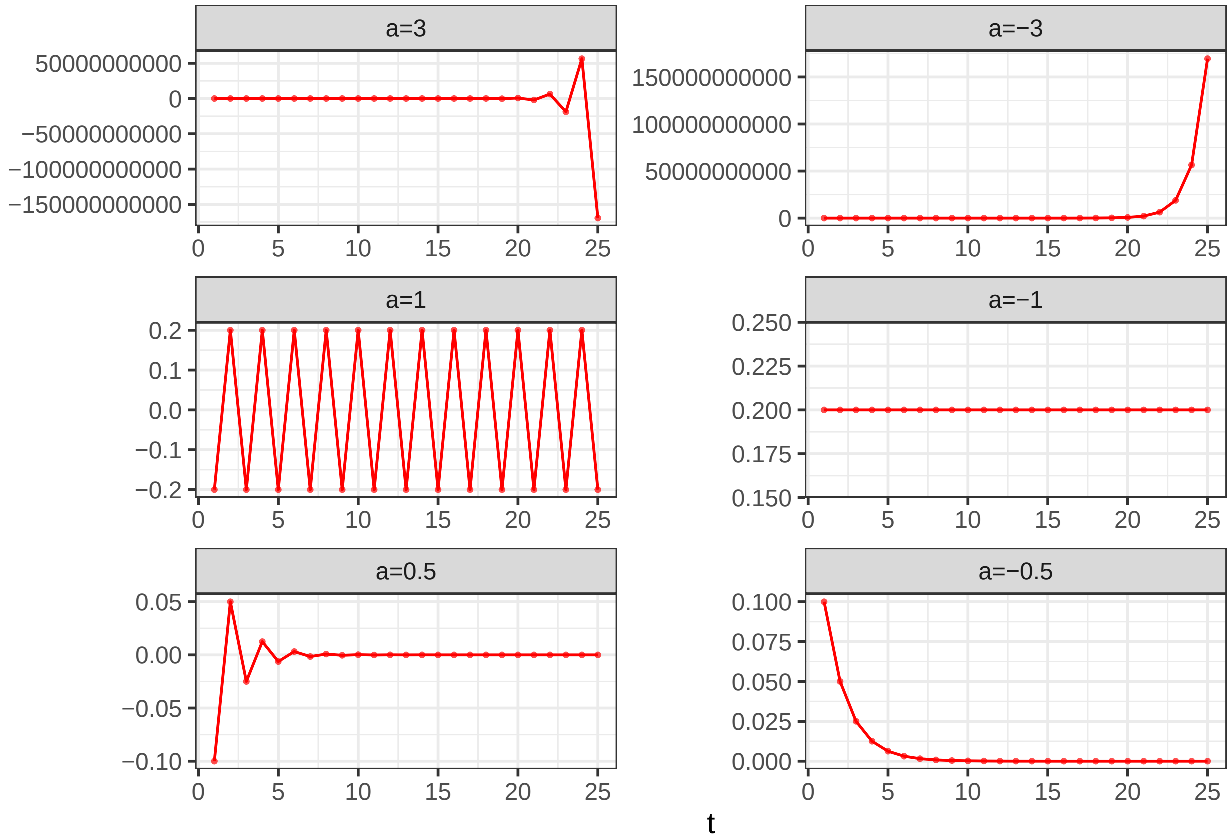
Diante disso, podemos visualizar o comportamento de alguns exemplos, variando os sinais e os módulos:

```
a <- c(3,-3,1,-1,0.5,-0.5) # constantes
y_0 <- 0.2                 # condição inicial
y <- tibble("a=3" = rep(0,25),"a=-3" = rep(0,25),"a=1" = rep(0,25),
            "a=-1" = rep(0,25),"a=0.5" = rep(0,25),"a=-0.5" = rep(0,25),
            t = 1:25)

for (i in 1:6){
  for(t in 1:25){
    y[t,i] <- (-a[i])^t*y_0
  }
}

head(y)
```

```
## # A tibble: 6 x 7
##   `a=3` `a=-3` `a=1` `a=-1`  `a=0.5` `a=-0.5`     t
##   <dbl>  <dbl> <dbl>  <dbl>    <dbl>    <dbl> <int>
## 1  -0.6    0.6  -0.2    0.2 -0.1       0.1          1
## 2   1.8    1.8   0.2    0.2  0.05      0.05         2
## 3  -5.4    5.4  -0.2    0.2 -0.025     0.025        3
## 4  16.2   16.2   0.2    0.2  0.0125    0.0125       4
## 5 -48.6   48.6  -0.2    0.2 -0.00625   0.00625      5
## 6 146.   146.    0.2    0.2  0.00312   0.00312      6
```

que podemos manipular para o formato adequado e demonstrar os gráficos.

```
y %>%
  pivot_longer(cols = 1:6,names_to="funcao",values_to = "values") %>%
  ggplot(aes(x = t, y = values))+
  facet_wrap(vars(factor(funcao,levels = unique(funcao))),scales = "free",ncol=2)+
  geom_line(color = "red")+
  geom_point(alpha = .7,size=.5,color = "red")+
  labs(y = NULL)+
  theme_bw()
```



Pode-se perceber que a dinâmica da função $y(t)$ depende da constante a, com ponto de partida indicado pela condição inicial. Constantes positivas indicam trajetórias oscilatórias. Quando $|a| < 1$, a função converge para um equilíbrio $y* = 0$ ao longo do tempo. Quando $a = -1$, a função é constante. Já com $a = 1$, a função oscila entre $\pm y_0$. Por fim, quando $|a| > 1$ a função não é convergente.

1.1.2 Equação não homogênea

Quando a equação a diferença está no formato $y_{t+1} + ay_t = g(t)$, em que $g(t)$ é uma função qualquer que depende do tempo, a solução geral é dada pela solução da equação homogênea y_t^h e de uma solução particular y_t^p:

$$y_t = y_t^h + y_t^p \tag{3}$$

em que podemos encontrar a solução homogênea como na seção 1.1.1. A solução particular pode ser encontrada supondo uma equação arbitrária no formato da $g(t)$ que satisfaz o equilíbrio do sistema, isto é, $y_{t+1} = y_t$.

Quando $g(t) = b$, uma alternativa é supor uma solução particular na forma de uma constante $y_t = \mu$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mu - a\mu &= b \\ (1-a)\mu &= b \\ \mu &= \frac{b}{1-a} \end{aligned} \tag{4}$$

para $a \neq -1$ — nesse caso, podemos tentar uma solução do tipo $y* = \mu t$, de modo que $y_t^p = bt$. Portanto, a solução geral do sistema é:

$$y_t = (-a)^t y_0 + \frac{b}{1-a} \tag{5}$$

Diante disso, a dinâmica pode ser representada por:

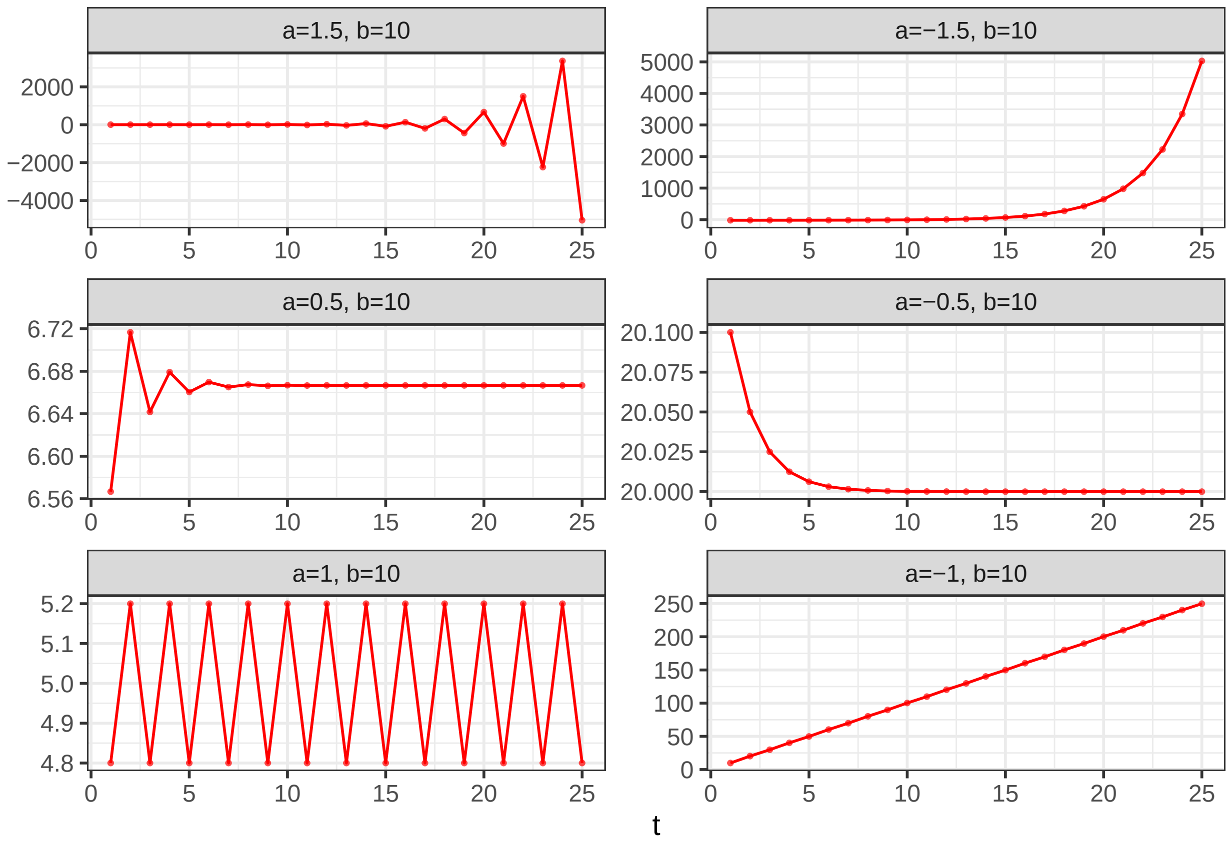


Figure 1: Elaboração própria.