Nota sobre a resolução de Sistema de Equações Lineares com R

Theo Antunes* Rafael de Acypreste†

17/01/2021

Contents

1 Equações a diferenças

Para essa nota, precisaremos dos seguintes pacotes instalados e carregados:

```
library(tidyverse)
library(limSolve)
library(MASS)

options(scipen = 99)
```

*Doutor em Economia pela Universidade de Brasília. Pode ser contatado em theosantunes@gmail.com.
†Doutorando em Economia pela Universidade de Brasília. Pode ser contatado em rafaeldeacyprestemr@gmail.com.

1.1 Equações lineares a diferenças de 1ª ordem

1.1.1 Equação homogênea

A equação homogênea é indicada pela forma a seguir, em que y_t é uma variável em função do tempo:

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \tag{1}$$

que pode ser resolvida conhecendo-se o valor inicial y_0. Assim, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= -ay_0 \\ y_2 &= -ay_1 = (-a)^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_t &= (-a)^t y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

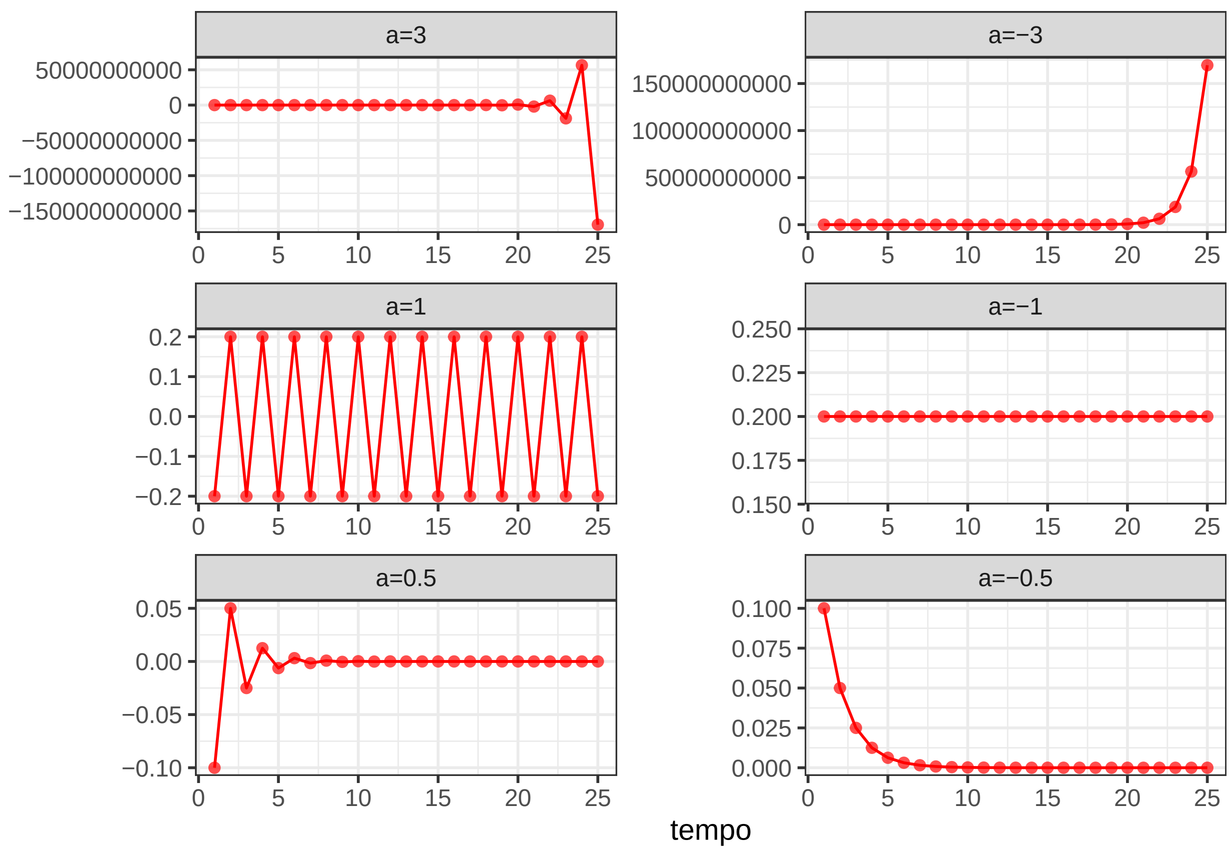
Diante disso, podemos visualizar o comportamento de alguns exemplos, variando os sinais e os módulos:

```
a <- c(3,-3,1,-1,0.5,-0.5) # constantes
y_0 <- 0.2                  # condição inicial
y <- tibble("a=3" = rep(0,25),"a=-3" = rep(0,25),
            "a=1" = rep(0,25),"a=-1" = rep(0,25),
            "a=0.5" = rep(0,25),"a=-0.5" = rep(0,25),
            t = 1:25)

for (i in 1:6){
  for(t in 1:25){
    y[t,i] <- (-a[i])^t*y_0
  }
}

head(y)
```

```
## # A tibble: 6 x 7
##   `a=3` `a=-3` `a=1` `a=-1`  `a=0.5` `a=-0.5`     t
##   <dbl>  <dbl> <dbl>  <dbl>    <dbl>    <dbl> <int>
## 1  -0.6    0.6  -0.2    0.2 -0.1      0.1         1
## 2   1.8    1.8   0.2    0.2  0.05     0.05        2
## 3  -5.4    5.4  -0.2    0.2 -0.025    0.025       3
## 4  16.2   16.2   0.2    0.2  0.0125   0.0125      4
## 5 -48.6   48.6  -0.2    0.2 -0.00625  0.00625     5
## 6 146.   146.    0.2    0.2  0.00312  0.00312     6
```

que podemos manipular para o formato adequado e demonstrar os gráficos na figura abaixo.

```
y %>%
      pivot_longer(cols = 1:6,names_to="funcao",values_to = "values") %>%
      ggplot(aes(x = t, y = values))+
      facet_wrap(vars(factor(funcao,levels = unique(funcao))),
                 scales = "free",
                 ncol=2)+
      geom_line(color = "red")+
      geom_point(alpha = .7,
                 size=1.5,
                 color = "red")+
      labs(y = NULL,
       x = "tempo")+
      theme_bw()
```



Pode-se perceber que a dinâmica da função $y(t)$ depende da constante a, com ponto de partida indicado pela condição inicial. Constantes positivas indicam trajetórias oscilatórias. Quando $|a| < 1$, a função converge para um equilíbrio $y* = 0$ ao longo do tempo. Quando $a = -1$, a função é constante. Já com $a = 1$, a função oscila entre $\pm y_0$. Por fim, quando $|a| > 1$ a função não é convergente.

1.1.2 Equação não homogênea

Quando a equação a diferença está no formato $y_{t+1} + ay_t = g(t)$, em que $g(t)$ é uma função qualquer que depende do tempo, a solução geral é dada pela solução da equação homogênea y_t^h e de uma solução particular y_t^p:

$$y_t = y_t^h + y_t^p \tag{3}$$

em que podemos encontrar a solução homogênea como na seção 1.1.1. A solução particular pode ser encontrada supondo uma equação arbitrária no formato da $g(t)$ que satisfaz o equilíbrio do sistema, isto é, $y_{t+1} = y_t$.

1.1.2.1 **$g(t)$ é uma função constante:** quando $g(t) = b$, uma alternativa é supor uma solução particular na forma de uma constante $y_t = \mu$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mu + a\mu &= b \\ (1+a)\mu &= b \\ \mu &= \frac{b}{1+a} \end{aligned} \tag{4}$$

para $a \neq -1$ — nesse caso, podemos tentar uma solução do tipo $y* = \mu t$, de modo que $y_t^p = bt$. Portanto, a solução geral do sistema é:

$$y_t = (-a)^t y_0 + \frac{b}{1+a} \tag{5}$$

Diante disso, a dinâmica pode ser representada na Figura 1:

1.1.2.2 **$g(t)$ é um polinômio de grau n:** quando $g(t) = b_0 + b_1 t$, uma alternativa é supor uma solução particular na forma de uma constante $y_t = \mu_0 + \mu_1 t$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mu_0 + \mu_1(t+1) + a[\mu_0 + \mu_1 t] &= b_0 + b_1 t \\ [(1+a)\mu_0 + \mu_1] + (1+a)\mu_1 t &= b_0 + b_1 t \\ &\Longleftrightarrow \\ (1+a)\mu_0 + \mu_1 &= b_0 \\ (1+a)\mu_1 &= b_1 \end{aligned} \tag{6}$$

para $a \neq -1$ — nesse caso, podemos tentar uma solução de um polinômio de grau superior. Portanto, a solução geral do sistema é:

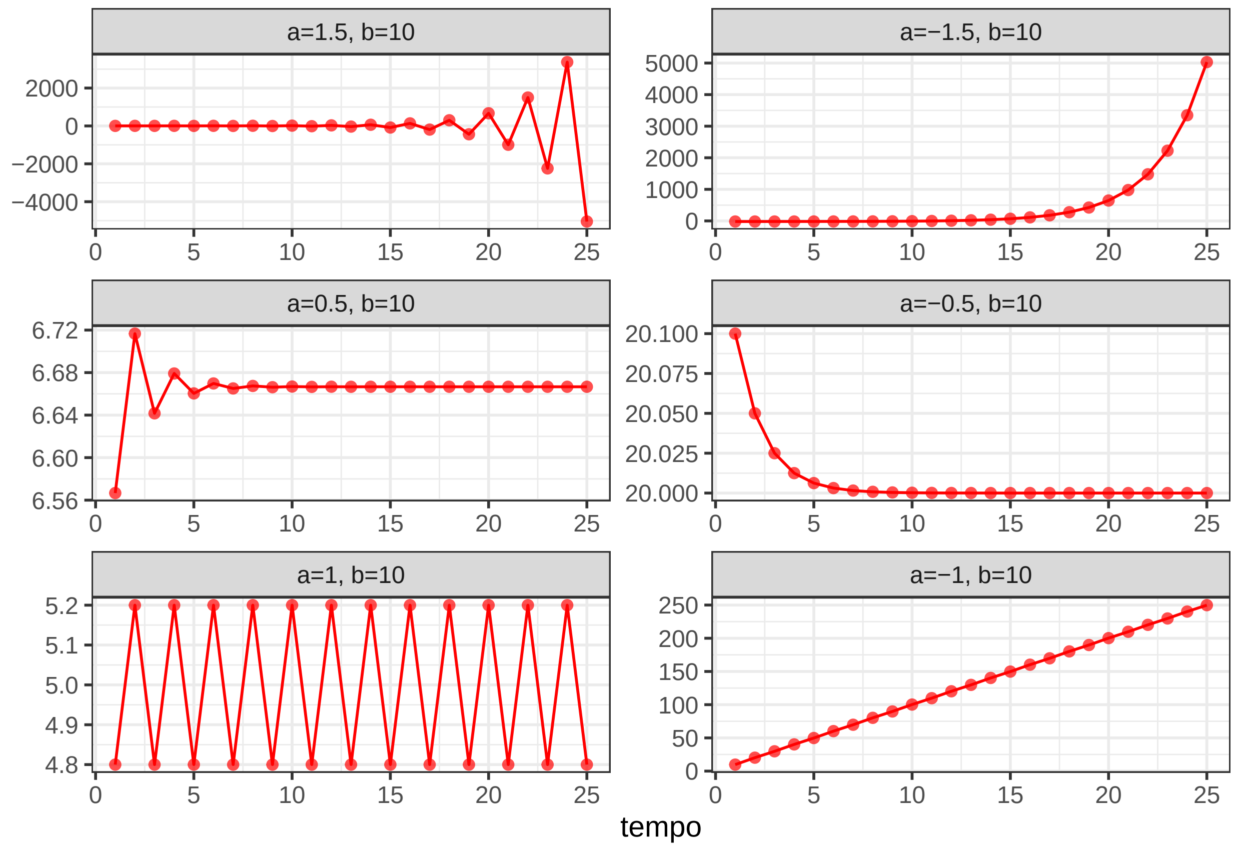


Figure 1: Elaboração própria.

$$y_t = (-a)^t y_0 + \mu_0 + \mu_1 t \tag{7}$$

Diante disso, a dinâmica pode ser representada na Figura 2.

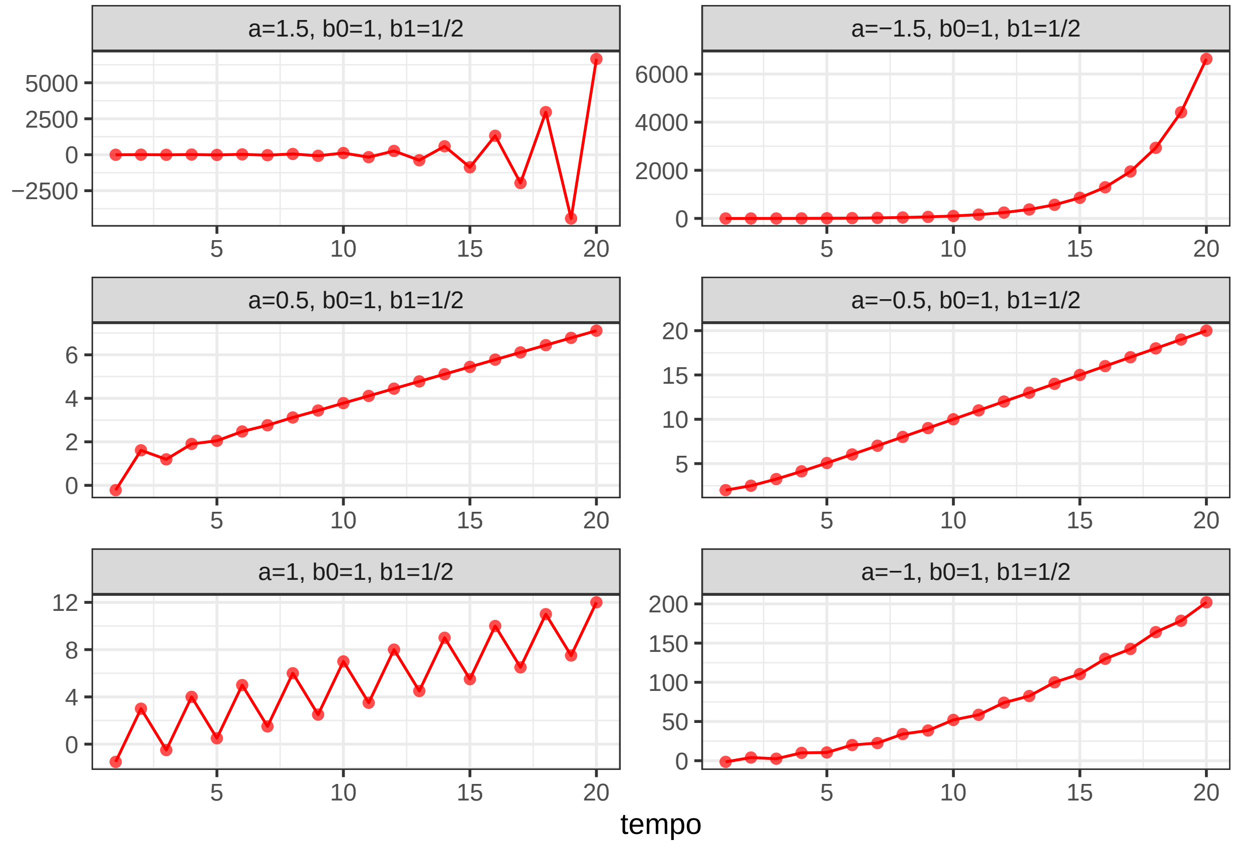


Figure 2: Elaboração própria.

1.2 Equações lineares a diferenças de 2ª ordem

A equação geral a diferenças em segunda ordem é indicada pela forma a seguir, em que y_t é uma variável em função do tempo. Nesse caso, o problema de valor inicial demandará conhecer **duas** condições iniciais. Desta vez, as variáveis serão tratadas de maneiras defasadas, apenas para fins didáticos. Todo tratamento matemático continua o mesmo:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = g(t) \tag{8}$$

cuja solução ainda envolve encontrar uma solução para a equação homogênea e outra particilar. De toda forma, uma equação a diferenças de 2ª ordem pode ser resolvida por uma função do tipo λ^t, em que λ é uma constante que depende dos parâmetros da equação, conforme Gandolfo (2005). A equação homogênea é tal que:

$$\begin{aligned} \lambda_t + a_1\lambda_{t-1} + a_2\lambda_{t-2} &= 0 \\ \lambda_{t-2}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Para além da solução trivial $\lambda = 0$, os valores possíveis de lambda demandam a resolução do polinômio característico da equação $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Pode-se ter, portanto, três situações:

1. Duas raízes reais distintas ($\Delta > 0$);
2. Duas raízes reais iguais ($\Delta = 0$); ou
3. Duas raízes complexas ($\Delta < 0$).

Em que $\Delta = \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$ se dá na na seguinte fórmula:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{10}$$

1.2.1 Polinômio com duas raízes reais distintas

No caso de duas raízes reais distintas, a solução geral é formada por:

$$y(t) = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + y_t^p \tag{11}$$

As condições de estabilidade dependem da análise dos dois valores de λ. Os casos podem ser:

1. Trajetória amortecida: $|\lambda_1| < 0$ **e** $|\lambda_2| < 0$;
2. Trajetória explosiva: $|\lambda_1| > 0$ **ou** $|\lambda_2| > 0$.

Por fim, a trajetória será oscilatória se $\lambda_1 < 0$ ou $\lambda_2 < 0$ (rever, porque se o termo negativo for convergente, pode ter problema). Alguns exemplos podem ser vistos na Figura 3.

1.2.1.1 Cálculo das raízes e das constantes O processo de cálculo das raízes do polinômio característico e das constantes podem ser calculados de maneira automatizada. Como exemplo, podemos resolver a equação $y_t - 3y_{t-1} + 2y_{t-2} = 0$, com as seguintes condições iniciais: $y_0 = 2\ e\ y_1 = 3$.

Em primeiro lugar, cria-se uma tabela com o vetor de resultados da equação diferencial (já com os valores dados) e de tempo:

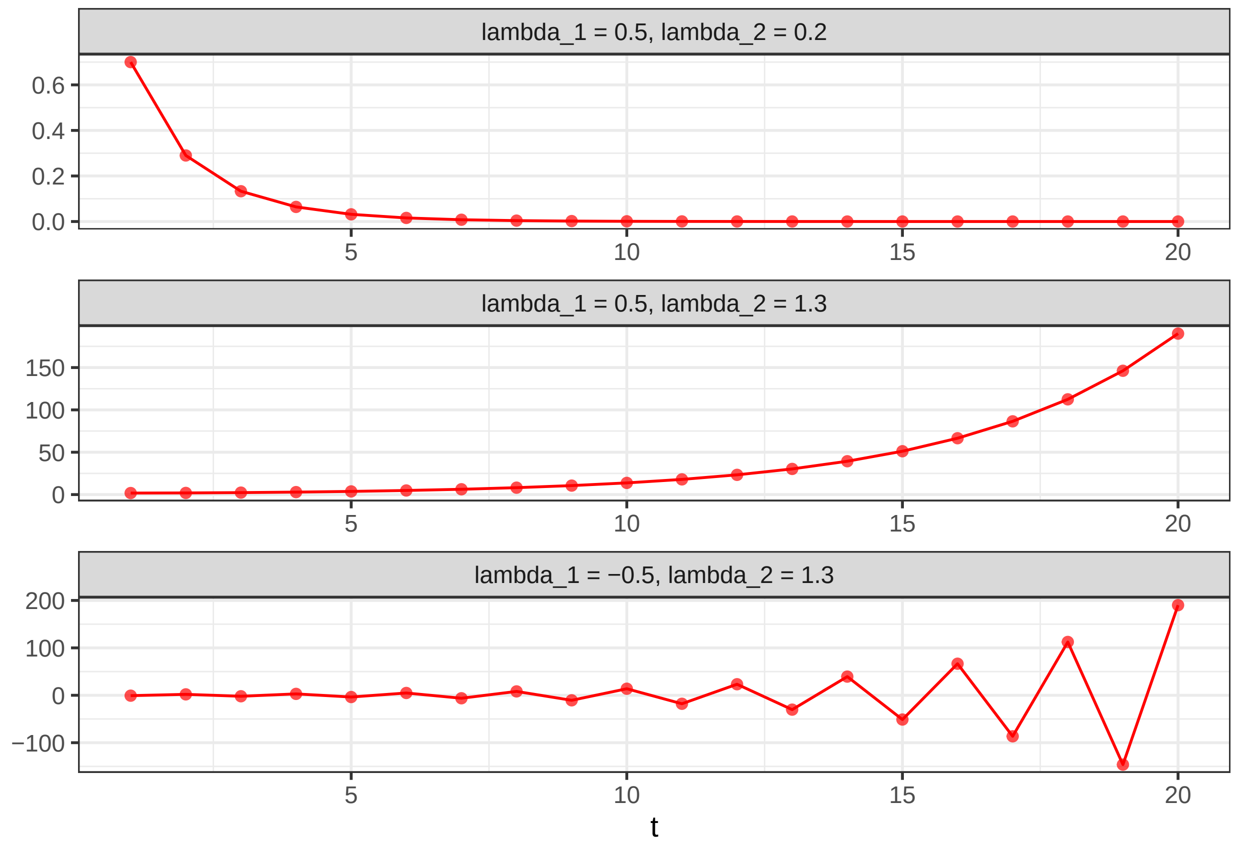


Figure 3: Elaboração própria.

```r
y <- tibble(y = rep(0,20),
            t = 1:20)
y[1,"y"] <- 2   # y_0
y[2,"y"] <- 3   # y_1
head(y,3)
```

```
## # A tibble: 3 x 2
##       y     t
##   <dbl> <int>
## 1     2     1
## 2     3     2
## 3     0     3
```

Em seguida, pode-se resolver o polinômio característico:

```r
a_0 <- 1
a_1 <- -3
a_2 <- 2
coeficientes <- c(a_2,a_1,a_0)

raizes <- polyroot(coeficientes)
raizes <- Re(raizes)
raizes# imprime a parte real (parte imaginária = 0)
```

```
## [1] 1 2
```

Já as constantes arbitrárias podem ser determinadas, considerando as condições iniciais dadas, pelo seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= y_0 \\
A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 &= y_1 \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}
$$

que pode ser resolvido no **R** por:

```r
matriz <-  matrix(c(1,raizes[1],1,raizes[2]),ncol = 2)
iniciais <- c(2,3)
```

```
cte <- solve(Re(matriz))%*%iniciais
cte
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    1
```

Por fim, pode-se representar graficamente por:

```
for(t in 1:20){
    y[t,"y"] <- cte[1]*raizes[1]^t + cte[2]*raizes[2]^t
  }



y %>%
  ggplot(aes(x = t, y = y))+
  geom_line(color = "red")+
  geom_point(alpha = .7,size=1.5,color = "red")+
  labs(y = NULL,
       x = "tempo")+
  theme_bw()
```

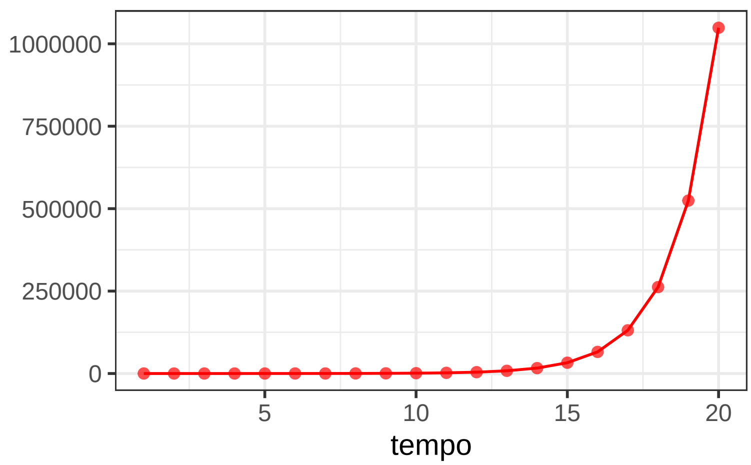


Figure 4: Elaboração própria.

1.2.2 Duas raízes iguais

Para o caso de $\Delta = 0$, têm-se duas raízes reais iguais tais que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{-a_1}{2}$. Nesse caso, pode-se tentar uma solução do tipo

$$y(t) = A_1\lambda^t + A_2 t\lambda^t + y_t^p \tag{13}$$

Nesse caso, a condição para a estabilidade é que $|\lambda| < 1$. Ademais, se $\lambda < 0$, a trajetória será oscilatória. Os gráficos podem ser feitos de maneira semelhante ao caso de duas raízes reais distintas.

1.2.3 Duas raízes complexas

Quando $\Delta < 0$, as raízes são dadas por um par de números complexos conjugados na forma $c + di$, em que $c, d \in \mathbb{R}$. A solução pode ser escrita por:

$$y(t) = A'(c + di)^t + A''(c + di)^t + y_t^p \tag{14}$$

Note também que um número complexo pode ser reescrito como $r(\cos\omega + i\text{sen }\omega)$, em que $r\cos\omega = c$,$r\text{sen }\omega = d$ e $r^2 = c^2 + d^2$. Tem-se, após manipulações explicadas em Gandolfo (2005), que o sistema pode ser resolvido na forma:

$$y(t) = r^t(A_1 \cos\omega t + A_2\text{sen }\omega t) + y_t^p \tag{15}$$

de onde o sistema será estável se $|r| < 1$. Como $r^2 = a_2$, a condição de estabilidade também pode ser tomada como $a_2 < 1$. Vale notar que sempre haverá ciclos. Como exemplo, pode-se resolver a equação $y_t - \sqrt{3}y_{t-1} + y_{t-2} = 0$ por:

```
y <- tibble(y = rep(0,100),
            t = 1:100)
y[1,"y"] <- 0      # y_0
y[2,"y"] <- 100    # y_1

a_0 <- 1
a_1 <- -sqrt(3)
a_2 <- 1
coeficientes <- c(a_2,a_1,a_0)

raizes <- polyroot(coeficientes)
r <- Mod(raizes[1])
omega <- Arg(raizes[1])

A_1 <- y[1,"y"]
A_2 <- (y[2,"y"]-r*y[1,"y"]*cos(omega))/(r*sin(omega))

for(t in 3:100){
  y[t,"y"] <- r^t*(A_1*cos(omega*t) + A_2*sin(omega*t))
}

#Gráfico
```

```r
y %>%
  ggplot(aes(x = t, y = y))+
  geom_line(color = "red")+
  geom_point(alpha = .7,size=1.5,color = "red")+
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed")+
  labs(y = NULL,
       x = "tempo")+
  theme_bw()
```

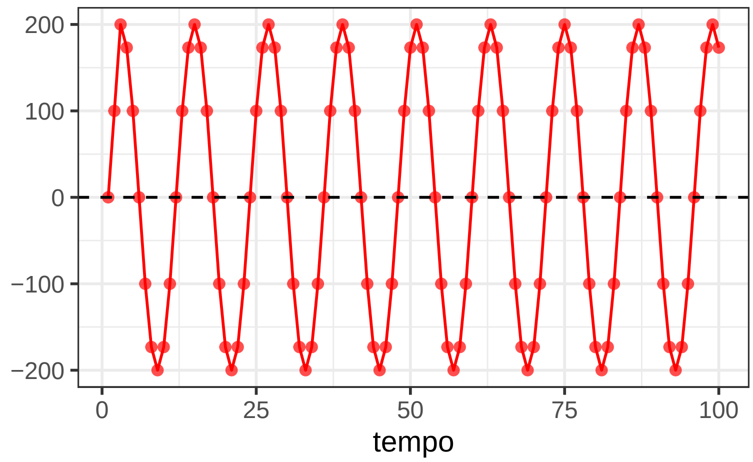


Figure 5: Elaboração própria.

References

Gandolfo, G. (2005). *Economic Dynamics*. Springer US, New York - USA, study edition.