Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 1

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Dibuje todos los posets sin etiquetas (clases de isomorfismo) que hay en un conjunto de uno, dos, tres o cuatro elementos. Cuantos posets diferentes hay en los conjuntos [1], [2], [3] y [4]?
2. Verifique que el conjunto Π_n de particiones del conjunto $[n]$ junto con la relación de refinamiento forman un conjunto parcialmente ordenado. Describa las relaciones de cobertura.
3. Sea G un grafo conexo con n vertices y sea Π_G el subposet inducido de Π_n formado por el conjunto de particiones $\pi \in \Pi_n$ con la propiedad de que para cada bloque $B \in \pi$, el subgrafo inducido $G|_B$ es conexo. Muestre que cuando $G = T$ es un árbol (un grafo conexo sin loops ni ciclos) $\Pi_T \cong \mathbb{B}_{n-1}$, o sea Π_T es un poset isomorfo al álgebra de Boole $\mathbb{B}_{n-1}$.
4. Verifique que si $f : P \to Q$ y $g : Q \to R$ son mapas monótonos entonces $g \circ f : P \to R$ también lo es.
5. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \to Q$ que no sea un isomorfismo de posets. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \to P$ que no sea un automorfismo de posets. Que condición tiene que cumplir P en este caso?
6. Dé un ejemplo de un poset finito que no sea graduado.
7. Demuestre la siguiente proposición:
   Proposición *Si P es un poset finito graduado entonces existe una función bien definida $\rho : P \to \mathbb{N}_0$ tal que $\rho(x) = 0$ siempre que $x \in \mathcal{M}in(P)$ y si $x \lessdot y$ entonces $\rho(y) = \rho(x) + 1$.*
8. Encuentre una fórmula en términos de productos de polinomios para la función generadora por grados del álgebra de Boole $F(\mathbb{B}_n, t)$.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 2

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Dé un ejemplo concreto (utilizando diagramas de Hasse) de cada una de las operaciones $P+Q$, $P \oplus Q$, $P \times Q$, $P \otimes Q$ y Q^P. Cuales de estas operaciones son simétricas, o sea, $P \circledast Q \cong Q \circledast P$?
2. Muestre que $\mathbb{B}_n \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \cdots \times \mathbf{2} = \mathbf{2}^n$. Calcule $F(\mathbb{B}_n, t)$ usando esta relación y la conclusión del ejercicio 8.
3. Cuales de los posets en uno, dos, tres, cuatro o cinco elementos son retículos?.
4. Determine la estructura de $J(P)$ cuando P es una cadena, una anticadena o la suma directa de cadenas.
5. Muestre que Π_n es un retículo. Describa para un par de particiones $\pi, \pi' \in \Pi_n$ su concurrencia $\pi \wedge \pi'$ y su juntura $\pi \vee \pi'$.
6. Muestre que un retículo, $\vee$ y $\wedge$ cumplen con las *leyes de absorción* $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$.
7. Utilice el ejercicio anterior para mostrar que un retículo satisface la ley distributiva (D1) si y sólo si satisface la ley distributiva (D2).

(D1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para todo $x, y, x \in L$.

(D2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para todo $x, y, x \in L$.

Ejercicios adicionales

8. Muestre que $F(P \times Q, t) = F(P, t)F(Q, t)$.
9. Sea n un entero positivo con decomposición en primos $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. Muestre que $D_n \cong \mathbf{n_1} + \mathbf{1} \times \mathbf{n_2} + \mathbf{1} \times \cdots \times \mathbf{n_k} + \mathbf{1}$. Encuentre $F(D_n, t)$ usando esta relación.
10. Muestre que las operaciones fundamentales entre posets satisfacen las siguientes relaciones:
    - $P \times (Q + R) \cong (P \times Q) + (P \times R)$.
    - $P^{Q+R} \cong P^Q \times P^R$.
    - $(P^Q)^R \cong P^{Q \times R}$.
11. Muestre que $J(P+Q) \cong J(P) \times J(Q)$.
12. Muestre que en un retículo L las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas (así expresiones como $x \wedge y \wedge z$ tienen sentido), conmutativas e idempotentes ($x \vee x = x$).
13. Verifique que si L y M son retículos entonces también lo son L^*, $L \times M$, $L \oplus M$ y $\widehat{L+M}$, en donde $\widehat{L+M} := \{\hat{0}\} \oplus (L+M) \oplus \{\hat{1}\}$.
14. Muestre que $\mathbf{2}^P \cong J(P)^* \cong J(P^*)$ en donde $\mathbf{2}$ es la cadena con dos elementos.
15. Sea P un poset. Muestre que existe una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos que si los ordenamos por inclusión, o sea $A \leq B$ siempre que $A \subseteq B$, tenemos que $P \cong \mathcal{S}$.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 3

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Utilice la caracterización alternativa de retículos finitos modulares para concluir que todos los retículo distributivos son modulares.
2. Muestre que Π_n es semimodular pero no es modular. (Sugerencia: Busque dos coátomos que no cubran su concurrencia). Es Π_n un retículo distributivo?
3. Usando la caracterización alternativa de los retículos semimodulares demuestre la siguiente Proposición:

   Proposition *Un retículo finito L es geometrico si y solo si satisface la siguiente condición:*

   $$x \lessdot y \iff \exists\, a \gtrdot \hat{0} \text{ tal que } y = x \vee a.$$
4. Calcule los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para $\mathbb{B}_3$ y Π_3.
5. Compute varios ejemplos de los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para D_n. Conjeture y pruebe una formula para $\mu(D_n)$.
6. Use la definición recursiva de la función de Möbius para demostrar la siguiente proposición:

   Proposición: *Sean P y Q posets localmente finitos y $(x, y) \leq (x', y')$ en $P \times Q$ entonces*

   $$\mu([(x, y), (x', y')]) = \mu([x, x'])\mu([y, y']).$$
7. Utilice la fórmula de Weisner par calcular los valores de la función de Möbius en $\mathbb{B}_n$.
8. Un desarreglo es una permutación de $[n]$ (una biyección $\sigma : [n] \to [n]$) que no contiene puntos fijos, es decir puntos tal que $\sigma(i) = i$. Teniendo en cuenta que hay $n!$ permutaciones de $[n]$, demuestre que el número $d(n)$ de desarreglos de $[n]$ puede ser calculado con la formula

   $$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

   (Sugerencia: Utilice el teorema de inversión binomial y la fórmula $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$)

Ejercicios adicionales

9. Demuetre directamente el Principio de Inclusión-Exclusión sin usar posets.