Introducción a la combinatoria enumerativa

Días de Combinatoria 2017

Carolina Benedetti Velásquez[1] y Natalia Saavedra[2]

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca

RESUMEN. En este artículo daremos una introducción a la combinatoria enumerativa. Introduciremos una variedad de objetos combinatorios y desarrollaremos herramientas para resolver conteos a su alrededor. Éstas herramientas incluyen funciones generadoras ordinarias, fórmulas recursivas y fórmulas cerradas. Al final de cada sección incluiremos ejercicios alusivos a lo recien aprendido. Finalizamos con una breve introducción a coloraciones en grafos.

Índice

1. Funciones generadoras

1.1. Combinatoria y series de potencia.

Sea $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ una sucesión infinita de números complejos y sea x una variable formal. La *función generadora ordinaria* de la serie $\mathbf{a}$ se define como

$$A(x) := \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

Esto es, $F(x)$ es la serie de potencias en la variable x tal que el coeficiente de x^i es a_i. Por ejemplo, la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$ tiene como función generadora a

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Denotemos por $\mathbb{C}[[x]]$ al conjunto de series de potencias $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots | a_i \in \mathbb{C}\}$. El conjunto $\mathbb{C}[[x]]$ tiene estructura de anillo conmutativo con las siguientes operaciones. Sean $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$:

(suma) $A(x) + B(x) := \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k$.

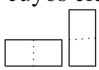
(producto) $A(x) \cdot B(x) := \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ donde $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$.

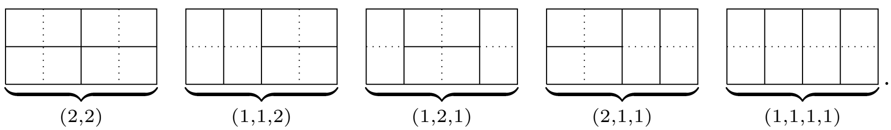
Nos referiremos al producto $A(x) \cdot B(x)$ como *la convolución de las series* $A(x)$ y $B(x)$. La unidad de la convolución es $1 = 1 + 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$. Diremos que la serie $A(x)$ es *invertible* si existe $B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que $A(x) \cdot B(x) = 1$. En este caso denotamos $B(x) = A(x)^{-1}$ y escribimos $A(x) = \frac{1}{B(x)}$. Por ejemplo, usando el producto definido se puede verificar que dado $a \in \mathbb{C}$ la serie $A(x) = \sum_{k\geq 0}(ax)^k$ tiene inversa $A(x)^{-1} = 1 - ax$. Así,

$$A(x) = \frac{1}{1-x}.$$

En este manuscrito, el término funciones generadoras hace referencia a funciones generadoras ordinarias[1]. En principio no es aparente, pero el uso de funciones generadoras resulta bastante útil en problemas combinatorios. Usualmente, en combinatoria enumerativa nos enfrentamos con preguntas respecto a la cardinalidad de una familia de objetos. Consideremos un ejemplo concreto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una *composición* de n como una sucesión finita de enteros positivos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$. La *longitud* de α es r y las *partes* de α son los α_i. Ahora, sea T_n el conjunto de composiciones de n cuyas partes son 1 o 2 y sea $t_n = |T_n|$.

n	T_n	t_n
0	$\{\emptyset\}$	1
1	$\{(1)\}$	1
2	$\{(2), (1,1)\}$	2
3	$\{(1,2), (2,1), (1,1,1)\}$	3
4	$\{(2,2), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$	5

Ciertamente, si fijamos un valor de n podemos armar el conjunto T_n (con algo de paciencia) y calcular su cardinalidad t_n. Pero esto no tendría ningún fin si al final del día no podemos dar una respuesta concreta acerca de la cardinalidad de T_n para n arbitrario. Pensemos en T_n gráficamente como el conjunto de *teselaciones* de un rectángulo $2 \times n$. Es decir, T_n se puede pensar como el conjunto cuyos elementos describen todas las formas de cubrir un rectángulo $2 \times n$ usando dominós  de manera que éstos no se sobrelapen. Por ejemplo, los elementos de T_4 mostrados en la tabla corresponden a las siguientes teselaciones de un rectángulo 2×4:



Notemos que, para $n \geq 2$, cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in T_n$ es tal $\alpha_r = 1$ ó $\alpha_r = 2$. Luego, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \in T_{n-1}$ si $\alpha_r = 1$, mientras que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \in T_{n-2}$ si $\alpha_r = 2$. Por tanto, t_n se puede calcular recursivamente para $n \geq 2$ así:

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}, \qquad t_0 = t_1 = 1. \tag{1}$$

La fórmula recursiva dada en (1) es una respuesta a nuestro problema de conteo inicial: es una forma de contar t_n para n arbitrario. Sin embargo, al ser de tipo recursiva, requiere

[1]Existen funciones generadoras exponenciales, pero no nos ocuparemos de ellas aquí.

que calculemos t_i para $i < n$. ¿Podemos obtener una fórmula para t_n sin necesidad de tener que calcular primero $t_1, \ldots, t_{n-1}$? La respuesta en este caso es sí, y esto comienza a ilustrar el poder de las funciones generadoras. Para tal fin, sea $T(x) = \sum_{k\geq 0} t_k x^k$ la función generadora de la sucesión $(t_0, t_1, t_2, \ldots)$. Usando (1) tenemos:

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + t_4x^4 + \cdots \\ & = & t_0 + t_1x + (t_0 + t_1)x^2 + (t_1 + t_2)x^3 + (t_2 + t_3)x^4 + \cdots \\ & = & t_0 + t_1x + (t_0x^2 + t_1x^3 + t_2x^4 + \cdots) + (t_1x^2 + t_2x^3 + t_3x^4 + \cdots) \\ & = & t_0 + t_1x + x^2 \cdot (t_0 + t_1x + t_2x^2 + \cdots) + x \cdot (t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \cdots) \\ & = & t_0 + x^2 \cdot (t_0 + t_1x + t_2x^2 + \cdots) + x \cdot (t_1 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \cdots) \\ & = & 1 + x^2 \cdot T(x) + x \cdot T(x) \end{array}.$$

Por tanto,

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1.$$

Luego, nuestra función generadora $T(x)$ se puede escribir en forma compacta o *cerrada* como

$$T(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}. \tag{2}$$

Conociendo cómo luce la función generadora de la sucesión que nos interesa, ¿cómo podemos usar esta fórmula para obtener una expresión para los t_n?. En este caso, podemos usar fracciones parciales y reescribir la fórmula obtenida en (2) en la forma

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - ax} + \frac{B}{1 - bx}$$

donde $A, B, a, b \in \mathbb{C}$. En este caso obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & \dfrac{1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{a} x} - \dfrac{1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{b} x} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{1 - ax} - \dfrac{1}{1 - bx} \right) \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\displaystyle\sum_{n \geq 0} (a^n - b^n)\, x^n \right). \end{array}$$

Luego,

$$T(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} t_n x^n$$

Esto implica que el número de teselaciones con dominós de un rectángulo $2 \times n$ es:

$$t_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

Esta tercera respuesta[2] a nuestro problema de conteo es bastante concreta. ¡Nos da una fórmula exacta a cualquier t_n!. Resumiendo, comenzamos con un problema de combinatoria enumerativa: contar la cardinalidad t_n de un conjunto finito T_n. Para ello, consideramos la sucesión $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ de los números que nos interesa hallar. Nuestra primera respuesta (1) nos ayuda a calcular los t_n en forma recursiva; la segunda (2) nos dió una fórmula cerrada para la función generadora de la sucesión $\mathbf{t}$; la tercera (3) provee una fórmula exacta para cada elemento de dicha sucesión.

Observación 1. *Los lectores que conozcan los números de Fibonacci F_n, se darán cuenta de la relación $t_n = F_{n+1}$.*

El objetivo de los siguientes ejercicios es acercar más a los lectores a la manipulación de funciones generadoras en el ámbito combinatorio.

1.2. EJERCICIOS

(1) Determine la correspondencia entre cada sucesión, su serie de potencias y la función generadora:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,-1,1,-1,1,-1,\dots) & \rightsquigarrow & 1-x+x^2-x^3+\dots & \rightsquigarrow & \dfrac{1}{1+x} \\
(1,0,1,0,1,0,1,0,\dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & \dfrac{1}{1-x^2} \\
(\underbrace{0,\dots,0}_{k-ceros},1,1,1,1,1,\dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & ? \\
(\underbrace{1,\dots,1}_{k-unos},0,0,0,0,0,\dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & ?
\end{array}$$

(2) Quiero llevar una canasta de frutas para mi abuela, pero ella tiene unas restricciones:

- Debe haber un número par de manzanas
- Debe tener al menos un coco
- A lo más puede haber un banano.

¿De cuántas formas puedo armarle una canasta con n frutas?.

(3) Sea $k \in \mathbb{N}$. Formule un problema combinatorio cuya función generadora sea.

$$(x + x^2 + \cdots + x^6)^k.$$

[2]¿Quién hubiera pensado que un número natural como t_n tuviera una expresión tan poco “natural"?.

2. Bases de conteo

En la sección anterior usamos intrínsecamente principios básicos en combinatoria, los cuales estableceremos formalmente ahora. Por ejemplo, al establecer la relación de recurrencia en (1), intrínsecamente dividimos el conjunto T_n en dos partes de tamaños t_{n-1} y t_{n-2}, respectivamente. Así, establecimos (1). El principio detrás de este hecho sencillo se conoce como *Principio de la suma* el cual establecemos a continuación, junto con otra herramienta muy poderosa conocida como *Principio del producto*.

2.1. Principios básicos de conteo

(PS) Principio de la suma:

Si hay p formas de realizar la tarea A y q formas de realizar la tarea B, entonces, hay $p + q$ formas de realizar A ó B.

(PP) Principio del Producto.

Si hay p formas de realizar A y q formas de realizar B (independiente del resultado de A), entonces hay $p \cdot q$ formas de realizar A, y luego B.

Ejemplo 1. *Sea S un conjunto con n elementos y sea a_n el número de formas de ordenar los elementos de S. Cada uno de estos órdenes se conoce como una* permutación *del conjunto S. Una permutación σ de S se obtiene realizando las siguientes escogencias en orden consecutivo:*

- *El primer elemento de σ en n formas.*
- *El segundo elemento de σ en $(n-1)$ formas, pues no se puede elegir el anterior.*
- *El tercer elemento de σ en $(n-2)$ formas, pues no se pueden elegir los dos anteriores.*
  $\vdots$
- *El penúltimo elemento de σ en 2 formas, pues no se pueden elegir los $n-2$ anteriores.*
- *El ultimo elemento de σ en 1 forma, pues es el único que queda.*

Usando (PP) obtenemos que el número de permutaciones de S es

$$a_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1.$$

El número a_n que acabamos de calcular se denota por $n!$ y se lee n factorial. *Nótese que a_n no depende de quién es S, sólo de su cardinalidad. Esto es, $n!$ es el número de permutaciones que se pueden hacer de un conjunto arbitrario de tamaño n.*

En lo que sigue, denotaremos por $[n]$ al conjunto $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. La notación que usaremos para permutaciones en este manuscrito será la que se conoce como *notación de una línea*. Por ejemplo, las permutaciones del conjunto [3] en notación de una línea son 123, 132, 213, 231, 312 y 321. Invitamos a los lectores a escribir las $4!$ permutaciones de $[4]$. Queremos recalcar la distinción que hay entre un conjunto y una permutación. Un conjunto es una colección *no ordenada* de elementos, esto es, el conjunto $\{2, 1, 3\}$ es igual que el conjunto $\{3, 1, 2\}$. Por el contrario, una lista o permutación es una colección *ordenada* de elementos. Por ejemplo, la permutación 213 es distinta de 312.

Realicemos un par de conteos más. Dado un conjunto S con n elementos, denotemos por 2^S y $\binom{S}{k}$ los siguientes conjuntos:

(a) $2^S = \{A : A \subseteq S\}$.

(b) $\binom{S}{k} = \{A : A \subseteq S,\ |A| = k\}$.

Por ejemplo, si $S = \{1, 2, 3\}$ tenemos que $\binom{S}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ y $2^S = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Como buenos combinatorios, la pregunta que nos hacemos ahora es ¿cuál es la cardinalidad del conjunto 2^S y aquella del conjunto $\binom{S}{k}$? Denotando $\binom{n}{k} := \left|\binom{S}{k}\right|$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea S un conjunto de tamaño n. Entonces*

(a) $|2^S| = 2^n$.

(b) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Prueba: Comencemos por probar (a). Supongamos que $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, entonces cada subconjunto A de S puede pensarse como una sucesión $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de forma que $\epsilon_i = 0$ si $a_i \notin A$, ó, $\epsilon_i = 1$ si $a_i \in A$. Esto es, cada sucesión de 0's y 1's de tamaño n nos da lugar a un único subconjunto de S y viceversa. En particular, el subconjunto vacío de S corresponde a la sucesión $(0, 0, \dots, 0)$. Luego, calcular $|2^S|$ es lo mismo que calcular el número de sucesiones de 0's y 1's de tamaño n. Usando (PP) obtenemos que el número de dichas sucesiones es $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ pues hay dos opciones para escoger cada ϵ_i de forma independiente. Esto concluye la parte (a).

Para la parte (b), probaremos que $k!\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. El lado izquierdo de esta igualdad se puede pensar de la siguiente forma: $\binom{n}{k}$ cuenta el número de formas de escoger un subconjunto A de tamaño k de un conjunto de n elementos, y el término $k!$ es el número de formas de ordenar A. Esto es, $k!\binom{n}{k}$ cuenta el número de formas de escoger k elementos de un conjunto de tamaño n, de forma ordenada. Es decir, el número de listas de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Este mismo conteo lo podemos realizar de otra manera eligiendo:

- el primero de los k elementos en n formas,
- el segundo de los k elementos en $n-1$ formas,

  $\vdots$

- el k-ésimo elemento en $n-(k-1)$ formas.

Usando (PP) vemos así que el número de formas de armar una lista de tamaño k usando elementos de un conjunto de cardinalidad n es $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Hemos realizado el mismo conteo de dos formas, y así $k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$. $\square$

El número $\binom{n}{k}$ es muy importante en combinatoria. Se lee n *combinado* k o simplemente n *escoja* k. Este número se conoce como *coeficiente binomial*. Más explícitamente tenemos que para $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4}$$

Probablemente los lectores ya han visto el número $\binom{n}{k}$ antes. En gran parte de la literatura $\binom{n}{k}$ se da por definición como en (4). Nosotras, en cambio, definimos $\binom{n}{k}$ como la cardinalidad de un conjunto y dedujimos la expresión en (4).

Observación 2. *En la prueba de la Proposición 1 contamos la cardinalidad de 2^S de forma indirecta. Esto es, intrínsecamente definimos una biyección entre 2^S, y el conjunto de sucesiones $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Ya que dichas sucesiones se cuentan de forma fácil, esto nos lleva a un cálculo del conjunto inicial que queremos contar. Esto es algo muy usual en combinatoria: en lugar de contar el conjunto original, recurrimos a otro más fácil de contar y establecemos una biyección entre ambos.*

Ahora, para n fijo consideremos la función generadora $B(x)$ de la sucesión finita $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots\right)$. Esto es,

$$B(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$$

y deseamos una fórmula cerrada para $B(x)$. Usando el razonamiento en la prueba de (b) en la Proposición 1 nos podemos dar cuenta que cada sucesión $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ proveniente de los diferentes subconuntos de S, corresponde al monomio $x^{\epsilon_1} \cdots x^{\epsilon_n}$ en el producto $(1+x)(1+x)\cdots(1+x)$. Esto es, del i-ésimo factor $1+x$ extraemos sólo uno de los términos (x^0 ó x^1) dependiendo de si el elemento a_i no pertenece ó sí pertenece al subconjunto dado por la sucesión $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Por ejemplo, el subconjunto $\{1, 3\}$ del conjunto [3] contribuye al monomio $x^1x^0x^1$ proveniente del producto $(1+x)^3$. Así, $B(x) = (1+x)^n$ y obtenemos el siguiente resultado conocido como *el Teorema del Binomio*.

Teorema 1. *Sean n y k enteros positivos con $0 \leq k \leq n$. Entonces*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{5}$$

Hemos ofrecido una prueba combinatoria del Teorema 1 a través de la interpretación combinatoria de los coeficientes de dicha expansión. En el lado algebraico, tenemos una igualdad de series de potencias. Si comenzamos a manipular la expresión en (5) vemos que tomando $n = -1$ y sustituyendo x por $-x$ obtenemos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-1}{k} x^k$$

pero, ¿podemos interpretar combinatoriamente los coeficientes $(-1)^k \binom{-1}{k}$? Esta pregunta la abordamos a continuación desde un punto de vista más general.

Observación 3. *El Teorema 1 tiene una generalización conocida como* Teorema del Binomio de Newton *el cual establece que para* $r \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k \tag{6}$$

en donde $\binom{r}{k} := \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$*. Por tanto, el anterior parágrafo establece la pregunta de si existe o no un significado combinatorio para el coeficiente* $\binom{-1}{k}$*, de la mismo forma que* $\binom{3}{2}$*, por ejemplo, tiene significado combinatorio. Esto es,* $\binom{3}{2}$ *se puede pensar como el número de subconjuntos de cardinalidad 2 de un conjunto de tamaño 3.*

2.2. Multiconjuntos y composiciones débiles

Recordemos de la Sección 1.1 que dada una sucesión $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de enteros positivos, decimos que α es una composición de tamaño m (o una m-composición) de un entero positivo n si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$.

Definición 1. *Una* k-composición débil *de* n *es una sucesión* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *de tamaño* k *tal que* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$*, con* $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ *y* $\alpha_i \geq 0$ *para todo* $i \in [k]$*.*

Proposición 2. *El número de* k*-composiciones de* n *es* $\binom{n-1}{k-1}$*. Por otro lado, el número de* k*-composiciones débiles de* n *es* $\binom{n+k-1}{k-1}$*.*

Como un ejemplo, una 4-composición de 8 es la sucesión $(3, 1, 2, 2)$. Podemos pensar ésta composición como obtenida de la siguiente forma de escribir 8 tras borrar 3 de los 7 signos $+$:

$$8 = 1+1+1{\color{red}+}1{\color{red}+}1+1{\color{red}+}1+1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \overbrace{1+1+1}^{3} \quad \overbrace{1}^{1} \quad \overbrace{1+1}^{2} \quad \overbrace{1+1}^{2}.$$

Con esto en mente, pasemos a la prueba.

Prueba: Las k-composiciones de n se obtienen de forma biyectiva al borrar $k-1$ signos + de la igualdad $n = 1+1+1+1+\cdots+1+1$. Entonces contar k-composiciones se reduce al problema de contar el número de formas que podemos borrar $k-1$ signos + de dicha expresión. Para esto, de los $n-1$ posibles signos + que hay en $n = 1+1+1+1+\cdots+1+1$ debemos escoger los $k-1$ que queremos borrar. Así, hay $\binom{n-1}{k-1}$ formas de hacerlo, las cuales corresponden al total de k-composiciones de n. Ahora, si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ es una k-composición débil de n entonces $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ y por tanto $n + k = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1) + \cdots + (\alpha_k + 1)$. Haciendo $b_i := \alpha_1 + 1$ para cada i tenemos que la sucesión $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ es una k-composición de $n + k$. Es decir, transformamos una k-composición débil de n en una k-composición de $n + k$, y éstas últimas ya las sabemos contar. Lo importante es que esta correspondencia entre k-composiciones débiles de n y k-composiciones de $n + k$ sea biyectiva lo cual es cierto (y dejamos que los lectores lo comprueben). Así, el número de k-composiciones débiesl de n es el mismo que el número de k-composiciones débiles de $n + k$ y este es $\binom{n+k-1}{k-1}$. $\square$

En este punto, es normal sentirse saturados con tantas definiciones y conceptos nuevos. Por eso invitamos a los lectores a que realicen sus propios ejemplos de cada concepto nuevo que aprendan. En combinatoria, y en matemáticas en general, resulta bastante útil calcular los primeros valores de sucesiones que se aprenden, así, la asimilación se vuleve más sólida. Sigamos calentando motores contando ahora *multiconjuntos*.

Definición 2. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Un* k-multiconjunto de $[n]$ *es un conjunto de tamaño k cuyos elementos pertenecen a $[n]$ y en el cual se admiten repeticiones.*

Ejemplo 2. *El conjunto $S = \{1, 1, 1, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$ es un 10-multiconjunto de* $[7]$.

Codificaremos los multiconjuntos de una forma más conveniente para su conteo. Por ejemplo, $S = \{1, 1, 1, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$ lo codificaremos usando i^{j_i} si el elemento i de $[n]$ aparece j_i veces en S. Así, escribiremos $S = \{1^3, 2^0, 3^1, 4^0, 5^2, 6^4, 7^0\}$. De esta forma le hacemos corresponder al multiconjunto S la 10-composición débil $(3, 0, 1, 0, 2, 4, 0)$ de 7. Nótese que, felizmente, este proceso es reversible: toda 10-composición débil $(b_1, \ldots, b_{10})$ de 7 nos da lugar a un 10-multiconjunto de [7] en el que el elemento i aparece repetido b_i veces. Aunque suena un poco a trabalenguas, la buena noticia es que ya sabemos contar composiciones débiles de una longitud fija. Estas observaciones las resumimos en el siguiente resultado. Denotemos por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ al número de k-multiconjuntos de $[n]$. A este número lo llamaremos *n multiescoja k*.

Proposición 3. *Sea $n \in \mathbb{N}$. El número $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ de k-multiconjuntos de $[n]$ esta dado por*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Prueba: (esbozo) Los k-multiconjuntos de $[n]$ están en biyección con las n-composiciones débiles de k. De éstas hay $\binom{k+n-1}{n-1}$. La igualdad de la derecha se sigue ya que $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$. $\square$

Ahora, para n fijo veamos qué podemos decir de la función generadora de la sucesión $\left(\left(\!\binom{n}{0}\!\right), \left(\!\binom{n}{1}\!\right), \left(\!\binom{n}{2}\!\right), \ldots\right)$. Para formar un multiconjunto de $[n]$ decidimos cuántas veces incluímos el número i en el multiconjunto. El número de veces que i se puede incluir varía de 0 en adelante. Así, dicha elección viene codificada en la serie $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$, donde el término x^r indica que i se repite r-veces en el multiconjunto a formar. De esta forma, tenemos n factores (uno por cada elemento de $[n]$) cada uno de los cuales despliega la posible elección de dicho elemento para un multiconjunto. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k &= (x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)\cdots(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots) \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots +)^n \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k.
\end{aligned}$$

De esta forma llegamos a una igualdad maravillosa entre los coeficientes de esta igualdad de series de potencias:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = (-1)^k \binom{-n}{k} \Leftrightarrow (-1)^k \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{-n}{k}.$$

Esta igualdad nos dice, por un lado, que el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ tiene sentido combinatorio incluso cuando $n < 0$. ¡¿Quién lo hubiera esperado?!

Desenglosemos un poco más esta identidad:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} = (-1)^k \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= (-1)^k \binom{k+n-1}{k} \\
&= (-1)^k \frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(n+1)n}{k!} \\
&= \frac{(-k-n+1)(-k-n+2)\cdots(-n-1)(-n)}{k!}.
\end{aligned}$$

Esto justifica la forma en que generalizamos la definición de $\binom{n}{k}$, en este caso para $n \in \mathbb{Z}$.

Prosigamos nuestra travesía en combinatoria enumerativa introduciendo más conteos.

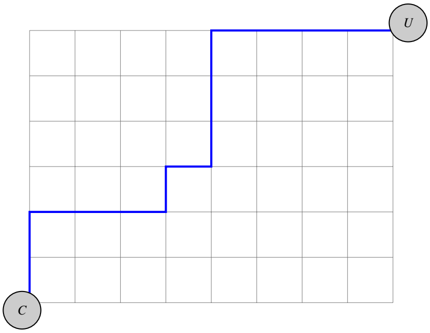
Definición 3. *Sea n un entero positivo y sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una composición débil de n. El* coeficiente multinomial

$$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_m}$$

es el número de formas de distribuir en orden, n elementos en m cajas $c_1, \ldots, c_m$, de forma que c_i tiene a_i elementos, para cada $i \in [m]$.

Ejemplo 3. *Caminos reticulares.*

El coeficiente $\binom{14}{8,6}$ *puede interpretarse como el número de formas de distribuir 14 pasos de forma que 6 de ellos son hacia el norte (N) y los 8 restantes hacia el este (E). Así,* $\binom{14}{8,6}$ *nos ayuda a contar el número de formas de caminar de la esquina C a la esquina U en la figura, de forma que cada paso tiene longitud 1 y los pasos posibles son N ó E. Tales caminos se denominan* caminos reticulares. *Un ejemplo particular se ilustra en la figura y corresponde a la secuencia de pasos NNEEENENNNEEEE.*



Para calcular $\binom{14}{8,6}$ *vemos que de los 14 pasos basta con escoger 8 que sean E en* $\binom{14}{8}$ *formas. Los pasos restantes serán N y se pueden escoger en* $\binom{14-8}{6} = 1$ *formas. Así,*

$$\binom{14}{8,6} = \binom{14}{8}\binom{14-8}{6} = \frac{14!}{8! \cdot 6!}.$$

Este razonamiento se puede generalizar y da lugar al siguiente resultado cuya prueba dejamos a los lectores. El coeficiente multinomial se puede calcular así:

$$\binom{n}{a_1, ..., a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_m!}. \tag{7}$$

Ejemplo 4. *¿Cuántas permutaciones hay de la palabra* ***AGUADEPANELA****? Podemos pensar en este problema como el número de formas de distribuir 12 letras en 8 cajas, una por cada letra diferente en la palabra AGUADEPANELA. Una de las cajas debe recibir 4 letras (dando lugar a las 4 A's), otra caja debe recibir 2 letras (dando lugar a las E's) y cada una de las 6 cajas restantes debe recibir una letra. Así el número de permutaciones de AGUADEPANELA es*

$$\binom{12}{4,2,1,1,1,1,1,1} = \frac{12!}{4!2!1!1!1!1!1!1!}.$$

Teniendo en mente nuestra definición del coeficiente multinomial analicemos la expansión de

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n.$$

Cada término en esta expansión es de la forma $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ donde $a_1 + \cdots + a_m = n$ y $a_i \geq 0$. El coeficiente de dicho monomio es el número de formas de distribuir n elementos en m “cajas" (representadas por las variables) de forma que la caja x_i contiene a_i elementos. Así obtenemos el *Teorema del Binomio generalizado*:

$$(x_1 + ... + x_m)^n = \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_m=n \\ a_i \geq 0}} \binom{n}{a_1, \ldots, a_m} x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}.$$

Nuestra lección de hoy terminará con un sumario de todo lo que hemos aprendido a contar. Nuestro sumario lo llamaremos *la travesía de las doce casas*, por razones que serán aparentes. Para tal fin nos adentramos ahora en el mundo de las *particiones*.

2.3. Particiones de conjunto

Definición 4. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Una* k-partición *de* $[n]$ *es una colección* $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ *de* k *subconjuntos de* $[n]$ *tales que:*

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = [n]$.

(ii) $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *para todo* $i, j \in [n]$ *tales que* $i \neq j$.

(iii) $A_i \neq \emptyset$ *para todo* $i \in [n]$.

Los A_i *se llaman* partes de la partición.

Por ejemplo, una partición de [8] es $\{\{1,4,6,7\},\{2\},\{3,8\},\{5\}\}$. Para simplificar notación escribiremos la misma partición como 1467|2|38|5. Denotemos por $S(n,k)$ al número de k-particiones de $[n]$. Los números $S(n,k)$ se conocen como *números de Stirling de tipo 2*.

Ejemplo 5. *Ilustremos* $S(n,k)$ *para el caso* $n = 3$.

- *Si* $k = 1$ *entonces* $S(3,1) = 1$ *pues la única 1-partición de* $[3]$ *es* $\{\{1,2,3\}\} = 123$.
- *Si* $k = 2$ *entonces* $S(3,2) = 3$ *pues las 2-particiones de* $[3]$ *son* $12|3$*,* $13|2$*,* $23|1$.
- *Si* $k = 3$ *entonces* $S(3,3) = 1$ *pues la única 3-partición de* $[3]$ *es* $1|2|3$.

Los números de Stirling $S(n,k)$ satisfacen la siguiente recursión

Proposición 4. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq k \leq n$. *Entonces*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \tag{8}$$

con condiciones iniciales $S(0,0) = 1$, y para $n > 0$ $S(n,0) = 1 = S(0,n)$.

Prueba: El lado izquierdo de (8) cuenta el número de k-particiones de $[n]$. Ahora, toda $(k-1)$-partición $A_1|\cdots|A_{k-1}$ de $[n-1]$ da lugar a la k-partición $A_1|\cdots|A_{k-1}|A_k$ de $[n]$ haciendo $A_k = \{n\}$. En total hay $S(n-1,k-1)$ dichas particiones. Por otro lado, cada k-partición $A_1|\cdots|A_k$ de $[n-1]$ da lugar a k diferentes k-particiones de $[n]$, una por cada forma de poner el número n en alguna de las k partes. Estas cuentan por $kS(n-1,k)$. Como una k-partición de $[n]$ es tal que el número n está o no está solo en su parte, estos dos casos cubren todas las posibles k-particiones de $[n]$. Así, la recurrencia se verifica.

□

El último ingrediente necesario para el final de la travesía son las *particiones de enteros*.

2.4. Partición de un entero

Definición 5. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una k-*partición de *n es una colección $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de longitud k de enteros positivos tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$ y $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$. Los λ_i son las partes de la partición. El número de k-particiones de n se denota $p(k, n)$.*

Ejemplo 6. *Las particiones de 4 son $(4), (3,1), (2,2), (2,1,1)$ y $(1,1,1,1)$.*

Ejemplo 7. *¿De cuantas formas puedo dar $\$1000$ de vueltas usado monedas de $\$1$, $\$2$ y $\$5$?. Esta pregunta se puede traducir como ¿cuántas particiones de 1000 hay cuyas partes sean 1, 2 o 5?. Para formar una partición de 1000 con la restricción dada, tenemos en cuenta que 1 puede aparecer en la partición cuantas veces quiera, o puede no aparecer. Esto lo codificamos en la serie $x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \cdots$. De forma análoga, las posibilidades para 2 se codifican en $x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \cdots$; y para 5 tenemos la serie $x^0 + x^5 + x^{5+5} + x^{5+5+5} + \cdots$. Así, el producto*

$$P(x) = (1 + x + x^{1+1} + \cdots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \cdots)(1 + x^5 + x^{5+5} + \cdots)$$

codifica particiones de cualquier entero usando únicamente 1, 2 o 5 como partes. Por ejemplo el monomio $x^{1+1}x^0x^5 = x^7$ codifica la partición de 7 dada por $(5,1,1)$. Reescribiendo $P(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-2}{k} x^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} \binom{-1}{k} x^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-1}{k} x^{5k} \right). \end{aligned}$$

Así, la respuesta a nuestra pregunta inicial se puede obtener extrayendo el coeficiente de x^{1000} en este producto de series de potencia.

Hemos visto el gran uso que tienen las funciones generadoras en combinatoria enumerativa. A la hora de querer extraer un coeficiente de una serie de potencias como la obtenida en el Ejemplo 7, viene muy útil el uso de software apropiado para tal fin, como Maple, Mathematica, etc. Por otro lado, una herramienta común a la hora de hacer investigación es la enciclopedia en línea de sucesiones enteras (OEIS por sus siglas en inglés). Dicho esto, invitamos a los lectores a entrar en `www.oeis.org` e ingresar su sucesión de enteros favorita. ¡Verán todo lo que se puede descubrir con cualquier conteo!

2.5. La travesía de las doce casas

Cerramos esta lección con la esperada *travesía de las doce casas* en donde damos respuesta a la siguiente pregunta usando las herramientas de conteo aprendidas hasta ahora ¿De cuántas formas se pueden distribuir n bolas en m cajas? . La respuesta a esta pregunta depende de si las bolas o las cajas están etiquetadas (E), o no están etiquetadas (NE). Tambien depende de las restricciones que se tengan para el llenado como muestra la Tabla 1. Invitamos a los lectores a convencerse de las respuestas en la Tabla. Advertimos que no hay una única forma de hacer estos conteos, como hemos visto en esta lectura.

Cuadro 1. Doce formas de distribuir bolas en cajas

Bolas	Cajas	Cualquier forma	A lo mas 1 por caja	Al menos 1 por caja
E	E	m^n	$m(m-1)\cdots(m-n+1)$	$m!S(n,m)$
N.E	E	$\left(\!\binom{m}{n}\!\right)$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
E	N.E	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n,m)$
N.E	N.E	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n,m)$

Finalizamos con unos ejercicios propuestos en los que probar identidades en combinatoria es la acción principal. Dar una prueba combinatoria de una igualdad se traduce a interpretar uno de los lados de la igualdad como la cardinalidad de un conjunto, y tratar de ver que el otro lado de la igualdad cuenta el mismo conjunto. ¡Disfruten!

2.6. EJERCICIOS

1. Pruebe que:

   (a) $S(n,2) = \dfrac{2^n - 2}{2}$.

   (b) $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$

2. Construya los primeros 6 pisos de la tabla de los números $S(n,k)$:

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
1	0	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
2								$\cdots$
3								$\cdots$
4								$\cdots$
5								$\cdots$
6								$\cdots$
$\vdots$								$\cdots$

3a. Pruebe que si $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ entonces

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k$$

donde $(m)_k = m(m-1)\cdots(m-k+1)$.[3]

[3]El número $(m)_k$ se denomina *factorial caído*.

3b. Use el ejercicio 2 para concluir que

$$m^4 = \binom{m}{1} + 14\binom{m}{2} + 36\binom{m}{3} + 24\binom{m}{4} + 0\binom{m}{5} + \cdots \tag{9}$$

4. La ecuación en (9) se puede extender a una identidad entre polinomios en $\mathbb{R}[x]$:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

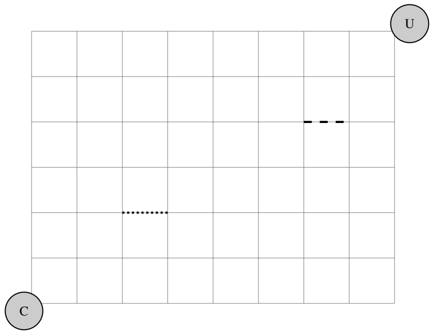
Exprese el *cambio de base* entre los polinomios $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ y x^n para $n = 1, 2, 3$. Es decir, escriba cada uno de los polinomios $x, x(x-1), x(x-1)(x-2)$ en términos de los polinomios x, x^2, x^3.

5. Formule un problema combinatorio cuya función generadora sea

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

¿Qué interpretación tiene el coeficiente de x^5?

6. Caminos reticulares.



(a) ¿Cuántos caminos reticulares hay de la casa C a la universidad U si debo pasar por la calle - - - ?

(b) ¿Cuántos caminos hay si debo evitar la calle $\cdots$?

7. Pruebas combinatorias

(a) Dé una prueba combinatoria de las siguientes identidades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

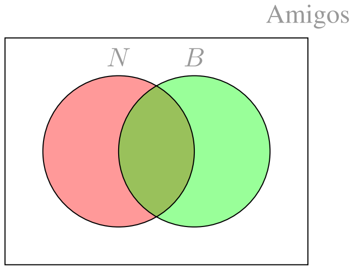
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j} \qquad \textit{Identidad de Vandermonde}$$

$$3^n = 2^0\binom{n}{0} + 2^1\binom{n}{1} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1} + 2^n\binom{n}{n}.$$

3. Contando de más

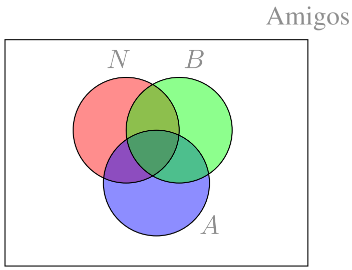
En esta lección aprenderemos un método de conteo clave en combinatoria, conocido como *Inclusión-Exclusión* (IE).



Supongamos que de un grupo de amigos queremos determinar el número X de ellos que no les gusta la natilla o los buñuelos. Este sencillo problema se puede resolver calculando el total S de amigos y sustrayendo los que no les gusta la natilla $|N|$ o los buñuelos $|B|$, teniendo en cuenta que podemos estar sustrayendo de más. Es decir, el conteo correcto en nuestra situación es

$$X = S - |N| - |B| + |N \cap B|.$$

¿Qué pasaría si hubieran más restricciones a nuestro conteo? Por ejemplo, si quisiéramos excluir de nuestro conteo a los que no les gusta el aguardiente?



3.1. Principio de Inclusión y Exclusión

Sea S un conjunto finito y sean $P_1, \ldots, P_m$ un conjunto de propiedades. Denotemos por A_i el conjunto $A_i = \{x \in S \ : \ x$ posee la propiedad $P_i\}$, para $i \in [m]$. El número X de elementos de S que no posee ninguna de las m propiedades $P_1, \ldots, P_m$ está dado por $|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_m^c|$, donde A_i^c denota el complemento en S del conjunto A_i. El principio de Inclusión-Exclusión nos dice que

$$X = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m \left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right| \quad (10)$$

donde los índices de sumación $i, j, k \in [m]$.

Prueba: Para probar esta identidad mostraremos que todo elemento x de S tiene la misma contribución al lado izquierdo y al lado derecho de (10). Hay dos casos por considerar:

1. Si x no satisface ninguna de las m propiedades entonces $x \in A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c$. Luego, la contribución de x en el lado izquierdo de (10) es 1. En el lado derecho su contribución es de

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^m 0 = 1.$$

2. Si x satisface k de las m propiedades para algún $k \geq 1$ entonces $x \notin A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c$ y por tanto su contribución al lado izquierdo de (10) es 0. Para calcular su contribución al lado derecho, tenemos en cuenta que x pertenece a k de los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$. Por tanto su contribución, por ejemplo, a la suma $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ es $\binom{k}{2}$ pues hay $\binom{k}{2}$ pares de subconjuntos de los k a los que x pertenece. Así, su contribución total es

$$\begin{aligned} & 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} \\ = & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0. \end{aligned}$$

De esta forma probamos la identidad en (10). □

Ilustraremos el principio IE con un conteo muy bonito y popular en combinatoria usando permutaciones.

3.2. Desarreglos

Recordemos que una permutación $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ de $[n]$ es un rearreglo de los elementos de $[n]$. Podemos pensar en σ como una bijection $\sigma : [n] \to [n]$ tal que $\sigma(i) = \sigma_i$. Por ejemplo, la permutación $\tau = 4132$ de $[4]$ es la biyección $\tau : [4] \to [4]$ tal que $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$ y $\tau(4) = 2$. Diremos que i es un *punto fijo* de una permutación σ si $\sigma(i) = i$. Por ejemplo, 3 es un punto fijo de la permutación τ.

Sea $D(n)$ el conjunto de *desarreglos* del conjunto $[n]$. Esto es,

$$D(n) := \{\sigma \in S_n \; : \; \sigma \text{ no tiene puntos fijos}\}.$$

Ahora nos formulamos nuestra pregunta favorita: ¿Cuál es la cardinalidad de $D(n)$? Denotando $d_n := |D(n)|$ vemos que $D(1) = \{\},\ D(2) = \{21\},\ D(3) = \{231, 312\}$ y por tanto $d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2$.

Realicemos nuestro conteo usando el principio IE. Una razón para querer usar IE es que el conjunto D_n cuya cardinalidad queremos calcular, es un subconjunto de S_n cuya cardinalidad $n!$ es muy fácil de calcular.

Para usar IE necesitamos un conjunto que contenga al que deseamos contar. En este caso $S_n \supset D_n$; por otro lado $|S_n| = n!$ es una cardinalidad fácil de obtener (clave #1 para IE). Ahora necesitamos un conjunto de propiedades que queremos evitar. Ya que lo que queremos evitar son permutaciones con puntos fijos, usemos esta información para construir los siguientes subconjuntos de S_n. Para $i \in [n]$ sea

$$A_i := \{\sigma \in S_n \; : \; \sigma(i) = i\}.$$

Esto es, A_i consiste de las permutaciones de S_n que tienen a i (por lo menos) como punto fijo. De esta forma vemos que

$$D(n) = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c.$$

Para calcular $d_n = |D(n)|$ usando (10) debemos calcular antes las cardinalidades de los A_i, al igual que la de sus intersecciones. Una permutación $\sigma \in A_i$ es tal que $\sigma(i) = i$ y los demás $\sigma(j)$ son una permutación del conjunto $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots n\}$ el cual tiene $n-1$ elementos. Por tanto $|A_i| = (n-1)!$. Un razonamiento análogo nos lleva a que toda intersección $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ tiene cardinalidad $(n-k)!$. Luego,

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \tbinom{n}{1}(n-1)! + \tbinom{n}{2}(n-2)! - \tbinom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \tbinom{n}{n} 0! \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

Esta bonita respuesta ya nos da solución a nuestro problema inicial. A pesar de que nuestro enfoque en estas notas no incluye combinatoria asintótica, no podemos dejar pasar por alto el siguiente resultado. Usando la expansión por series de Taylor de e^x tenemos que

$$e^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$$

lo que nos lleva a una forma asintótica de calcular los desarreglos:

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \frac{n!}{e}.$$

La siguiente proposición cuya prueba dejamos a los lectores, nos da un par de fórmulas recursivas para calcular d_n.

Proposición 5. *Para* $n \geq 1$,

(a) $d_n = n \cdot d_{n-1} + (-1)^n$

(b) $d_n = (n-1) \cdot d_{n-1} + (n-1) \cdot d_{n-2}$

Terminamos esta lección con un principio de conteo sencillo de establecer y de entender.

3.3. Principio del palomar

Principio del palomar: Si n palomas se distribuyen en un palomar consistente de $n-1$ casillas, entonces hay una casilla con (al menos) dos palomas.

Ejemplo 8. *Probar que si se seleccionan 51 enteros del conjunto* $[100]$ *entonces al menos dos de los enteros elegidos son consecutivos.*

Para probar esto usando el principio del palomar necesitamos "palomas" y "casillas". En este caso pensemos en cada uno de los 51 enteros seleccionado como una paloma y pensemos en 50 cajas etiquetadas $1-2,\ 3-4,\ 5-6,\ \ldots, 99-100$. *Insertamos cada uno de los enteros seleccionados en su casilla correspondiente. De esta forma el principio del palomar garantiza una casilla con al menos dos enteros. Así el resultado se sigue.*

Ejemplo 9. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enteros. Pruebe que existen índices k y l tales que $a_{k+1} + \cdots + a_l \equiv 0(\mathit{mod}\ m)$ donde $0 \leq k < l \leq m$.*

Para solucionar este problema consideremos las m sumas parciales $b_i := a_1 + \cdots + a_i$ para $i \in [m]$. Si alguno de los b_i es divisible por m el resultado se sigue. En caso contrario, los posibles residuos r en la congruencia $b_i \equiv r(\mathit{mod}\ m)$ son $1, 2, \ldots, m-1$. Por tanto, tenemos m enteros $b_1, \ldots, b_m$ y $m-1$ residuos posibles $1, 2, \ldots, m-1$. Así, existen k, l distintos tales que $b_k \equiv b_l(\mathit{mod}\ m)$. Asumiendo sin pérdida de generalidad que $l > k$ tenemos que $b_l - b_k = a_{k+1} + \cdots + a_l$ y ya que $b_l - b_k \equiv 0(\mathit{mod}\ m)$ el resultado se sigue.

3.4. EJERCICIOS

I *Inclusión-Exclusión*

(a) Pruebe que la siguiente identidad se satisface:

$$k! \cdot S(n,k) = \binom{k}{k} k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n$$

(b1) Seis parejas van a una fiesta y todas bailan cambiando de parejas. ¿De cuántas formas puedan bailar cambiando parejas de manera que a nadie le toca bailar con su pareja real?

(b2) ¿De cuántas formas si al menos una de las parejas originales quedan bailando?.

(c) Determine el número de enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 100$ y n no es divisible entre 2, 3 o 5.

II *Principio del palomar*

(a) Tengo 10 pares de medias en mi cajón. ¿Cuántas medias debo extraer como mínimo (si tengo la luz apagada) para garantizar que extraje un par?

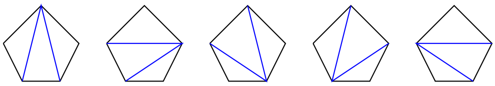
(b) Sea G un grafo simple con n vértices. Pruebe que existen dos vértices u y v de G tales que u tiene el mismo grado de v. [El grado de un vértice es el número de aristas que emanan de él].

(c) Se dibujan cinco puntos en un cuadrado 2×2. Pruebe que dos de los cinco puntos están a una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

4. Números de Catalan

Una de las razones por las cuales decidimos realizar el evento *Días de Combinatoria* se debe a la versatilidad de la combinatoria en diversas áreas de la matemática. Esta diversidad hace que un conteo realizado desde combinatoria enumerativa tenga relevancia en un problema topológico o algebraico, por ejemplo. Esto es, el objeto que nos interese contar puede tener gran significado en un problema específico en otra área. Luego, una sucesión como $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ puede significar una cosa para una topóloga, y otra cosa distinta para una algebrista. Existe una sucesión particular en combinatoria que tiene, hasta el sol de hoy, más de 200 diferentes interpretaciones. Esta sucesión es la sucesión de los *números de Catalan* y es nuestro foco en esta parte del manuscrito. Los números de Catalan son probablemente los que tienen la entrada más larga en la OEIS (ver [3]). De éstas más de 200 maneras de definir los números de Catalan, escogemos triangulaciones de polígonos para definirlos aquí. Una *triangulación* de un n-ágono es una subdivisión de éste en regiones triangulares insertando diagonales que no se intersecten.

Ejemplo 10. *Las 5 triangulaciones de un pentágono se muestran a continuación*



Definición 6. *El* número de Catalan C_n *es el número de triangulaciones de un* $(n+2)$-*ágono.*

El Ejemplo 10 nos dice que el número de Catalan $C_3 = 5$. Los lectores pueden verificar directamente que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Es un buen ejercicio calcular C_4. Haciendo $C_0 = 1$ tenemos la siguiente proposición.

Proposición 6. *La sucesión* $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ *satisface, para* $n \geq 1$*, la siguiente recurrencia*

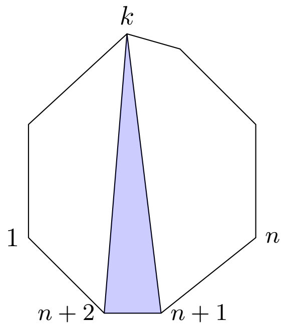
$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0. \tag{11}$$

Mas aun,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \tag{12}$$

Prueba: Comencemos por probar la recurrencia (11). Para tal fin, dado un $(n+2)$-gon P escogeremos uno de sus lados y lo llamaremos la *base* de P. Pensemos en los vértices de P etiquetados de 1 hasta $n+2$ en forma cíclica. Sin pérdida de generalidad asumamos que los vértices $n+1$ y $n+2$ forman la base.

Para formar una triangulación de P escogemos un vértice k para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y formamos un triángulo con la base. El triángulo así formado divide el $(n+2)$-ágono en dos: el lado izquierdo del triángulo azul es un $(k+1)$-ágono y el lado derecho es un $(n-k+2)$-ágono. El $(k+1)$-ágono puede ser triangulado en C_{k-1} formas y el $(n-k+2)$-ágono puede ser triangulado en C_{n-k} formas. Esto dice que con el vértice k dado, hay $C_{k-1}C_{n-k}$ triangulaciones de P



Usando el principio de la suma y ya que k puede ser 1, ó 2, ó, ..., ó n vemos que el total de triangulaciones de P es $C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$.

Ahora procedemos a probar (12) usando la recurrencia (11). Sea $C(x)$ la función generadora de los números de Catalan. Esto es, $C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots$. Usando operaciones en funciones generadoras tenemos que

$$\begin{aligned}[C(x)]^2 &= C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \cdots \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots\end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad se deriva de la recurrencia que acabamos de probar. Manipulando un poco más esta última expresión tenemos que

$$\begin{array}{cccc} & x[C(x)]^2 & = & C(x) - 1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2[C(x)]^2 & = & 4xC(x) - 4x \\ \Leftrightarrow & [1 - 2xC(x)]^2 & = & 1 - 4x \\ \Leftrightarrow & 1 - 2xC(x) & = & (1 - 4x)^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 - 2xC(x) & = & \sum_{k\geq 0} \binom{1/2}{k}(-4x)^k \end{array}$$

De esta última identidad extraemos el coeficiente de x^{n+1} en la serie de la izquierda y la serie de la derecha, obteniendo

$$\begin{aligned} -2C_n &= \binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1} \\ &= \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-n)}{(n+1)!}(-1)^{n+1}4^{n+1} \\ &= \frac{(-1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} 2^{n+1}2^{n+1} \\ &= (-1) \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)n!} \frac{2^{n+1}n!}{n!} \end{aligned}$$

En el último paso mezclaremos los n 2's en 2^n con los n factores de $n!$, obteniendo $2 \cdot 1 = 2, 2 \cdot 2 = 4, \ldots, 2 \cdot n = 2n$, de forma que quedamos con el producto de los números pares. Así, de esta última igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)n!} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}{n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□

Como lo mencionamos al comienzo de esta sección, existen más de 200 interpretaciones de los números de Catalan. Hasta ahora sólo hemos visto una de ellas. Ahora introduciremos otra de sus muy famosas interpretaciones.

4.1. Caminos de Dyck

El conjunto de caminos reticulares de $(0, 0)$ a (n, n) usando pasos unitarios Norte o Este, sin pasar por debajo de la diagonal $y = x$ se conoce como los *Caminos de Dyck* D_n. En el Ejercicio (1a) de esta sección ilustramos los caminos de Dyck D_3.

Proposición 7. *El número de caminos de Dyck $|D_n|$ coincide con el número de Catalan C_n.*

Daremos un bosquejo a la prueba de la Proposición 7. Recordemos que una forma de interpretar el coeficiente binomial $\binom{a}{b}$ es como el conjunto de caminos reticulares con pasos N o E de forma que b de los a pasos son N y los $a-b$ restantes son E (o viceversa). Así, $\binom{2n}{n}$ es el número de caminos reticulares de $(0,0)$ a (n,n) usando n pasos N y n pasos E. Para calcular D_n queremos extraer los caminos "malos" de todos los caminos contados por $\binom{2n}{n}$; esto es, queremos extraer aquellos que cruzan la diagonal. Mostraremos que el número de caminos malos es $\binom{2n}{n-1}$ y por tanto

$$|D_n| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Para ver esto, mostraremos una biyección entre el conjunto de caminos malos y los caminos reticulares de $(0,0)$ a $(n+1,n-1)$ usando N o E, de los cuales sabemos que hay $\binom{n+1+n-1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$. Ilustraremos esta biyección con un ejemplo específico y dejaremos a los lectores la prueba del caso general. Sea $P = NNNEENEEE.ENNNEEN$ un camino reticular de $(0,0)$ a $(8,8)$. En P hemos hemos puesto un punto para indicar la primera vez que el camino cruza la diagonal[4]. Nótese que en el momento que se cruza la diagonal, $\#E$'s = 1 + $\#N$'s. Sea Q el camino obtenido de P al intercambiar E's con N's después del punto, y dejando los pasos antes del punto igual. Esto es, $Q = NNNEENEEE.NEEENNE$. Vemos que de esta forma Q es un camino reticular de $(0,0)$ a $(n+1,n-1)$ pues ahora el número total de pasos E en Q supera en 1 los pasos N. Así cada camino malo se vuelve de forma única un camino reticular de $(0,0)$ a $(n+1,n-1)$. Este procedimiento es fácilmente reversible (lo cual dejamos como ejercicio) y nos dice que el número de caminos malos es igual al número de caminos reticulares de $(0,0)$ a $(n+1,n-1)$. Así,

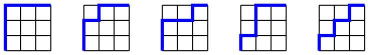
$$|D_n| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

Una de las ventajas de tener más de una forma de pensar en una sucesión en combinatoria es que dependiendo del problema que tengamos en frente, una interpretación de la sucesión puede ser más ventajosa que otra. En los ejercicios hemos incluído varias de las interpretaciones de los número de Catalan. Aquellos con ganas de más pueden chequear [5].

4.2. EJERCICIOS

(1a) *Caminos de Dyck D_n:* Caminos reticulares de $(0,0)$ a (n,n) usando pasos unitarios Norte (0,1) y Este (1,0), de forma que nunca se pasa debajo de la diagonal $y = x$. Construya una estructura de poset $\mathcal{D}_3$ en los caminos de Dyck D_3. ¿Es el poset graduado?

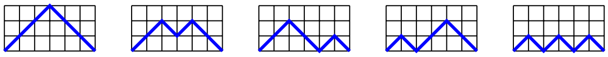
[4]Animamos a los lectores a pintar el camino dado en una cuadrícula 8×8.

Ejemplo: Caminos de Dyck D_3 

(1b) Sea P_n el retículo de raices de tipo A_n. Pruebe que $J(P_2)$ tiene C_3 elementos. ¿Es $J(P_3) \cong \mathcal{D}_3$?.

Muestre que cada una de las familias de objetos dadas de (2a) hasta (2e) son contadas por los números de Catalan. [Ayuda: si la colección dada satisface la misma recurrencia que los C_n, el problema está resuelto.]

(2a) *Caminos de Dyck D_n -versión 2-* Caminos de $(0,0)$ a $(2n,2n)$ usando pasos $(1,1)$ y $(1,-1)$, de forma que nunca se pasa debajo del eje x.

Ejemplo: Caminos de Dyck D_3 

(2b) *Paréntesis binarios A_n:* ¿De cuántas formas podemos poner n pares de paréntesis de forma "válida"? (algo no válido es ())()(ya que el tercer paréntesis) no se puede emparejar con nadie)

Ejemplo: Cuando $n = 3$ las posibilidades válidas son

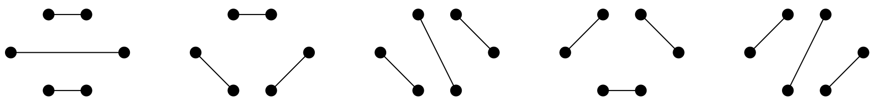
$$()()() \qquad (())() \qquad ()(()) \qquad (()()) \qquad ((()))$$

(2c) *Árboles planos binarios T_n:* Un árbol plano binario con $2n+1$ vértices es un grafo de forma que hay un vértice especial llamado *raíz* y a medida que se desciende de la raíz "crecen" dos subvértices o ninguno.

Ejemplo: árboles binarios planos con $n = 2$ 

(2d) *Emparejamientos no cruzados M_n:* Un grupo de $2n$ personas están sentadas en una mesa redonda. ¿ De cuántas formas pueden saludarse sin que sus manos se crucen?

Ejemplo con $n = 3$:



(2e) Sucesiones de n 1's y n -1's tales que las sumas parciales son no negativas:

Ejemplo: Representando cada -1 con $-$ tenemos que, cuando $n = 3$ las posibles sucesiones son

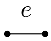
$$111 - - - \qquad 11 - 1 - - \qquad 11 - -1 - \qquad 1 - 11 - - \qquad 1 - 1 - 1-$$

5. El polinomio cromático

Terminaremos nuestra breve introducción a la combinatoria enumerativa con una mirada rápida a coloraciones de grafos.

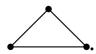
5.1. Grafos y Coloraciones

Definición 7. *Un* grafo simple *$G = (V, E)$ es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y $E \subseteq \binom{V}{2}$ es una colección cuyos elementos son pares de vértices. El conjunto V son los* vértices *de G y la colección E son las* aristas *de G.*

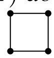
En lo que sigue, la palabra grafo se referirá a grafo simple. Dado un grafo $G = (V, E)$ y dada una arista $e = \{u, v\} \in E$, representaremos e gráficamente como  omitiendo la etiqueta de los vértices, pues será claro en el contexto y, en realidad, el etiquetado de los vértices nos es irrelevante en lo que queremos alcanzar.

Ejemplo 11. *Veamos algunas de las familias de grafos más comunes.*

(1) El grafo nulo *o* grafo discreto *D_n es el grafo $D_n = ([n], \emptyset)$, esto es, D_n consiste de n vértices y no aristas. Por ejemplo, $D_3 =$* .

(2) El grafo completo *K_n es el grafo $K_n = \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$. Por ejemplo, $K_3 =$* .

(3) El grafo camino *P_n es el grafo $P_n = ([n], E)$ donde $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\}$. Por ejemplo, $P_3 =$* .

(4) El grafo cíclico *C_n es el grafo $C_n = ([n], E)$ donde $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\} \cup \{n, 1\}$. Por ejemplo, $C_3 = K_3$ y $C_4 =$* .

Si $\{u, v\} \in E$ decimos que u y v son adyacentes (o vecinos).

Los conteos que realizaremos en grafos están asociados a *coloraciones* de sus vértices.

Definición 8. *Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos una k-*coloración propia *de G como una función $c : V \to [k]$ tal que si $\{u, v\} \in E$ entonces $c(u) \neq c(v)$.*

El estudio de coloraciones de grafos tiene vastas aplicaciones en el mundo real. Un ejemplo sencillo es el de agendar eventos. Si se quiere organizar el horario de un semestre se quiere hacer de forma que no haya conflicto entre las horas de las clases a tomar. Podemos pensar en las clases a tomar como vértices de un grafo. Las aristas son, entonces, pares de clases cuyo horario conflictúa. Así que una k-coloración propia de este grafo será una forma de agendar todas las clases en una franja de k-horas (una clase por hora) de modo que no haya conflicto de horario (ver Ejercicio III(c)).

Ahora nos preguntamos, ¿cuántas k-coloraciones propias de un grafo G hay?. Claramente, esta cantidad depende del grafo G y del número k de colores a nuestra disposición. Así pues denotemos a este número por $f_G(k)$.

Ejemplo 12. *(1). Si $G = D_n$ entonces $f_G(k) = k \cdot k \cdots k = k^n$ pues cada vértice se puede colorear de k formas de manera independiente, ya que no hay aristas que intervengan.*

(2). En el otro extremo, si $G = K_n$ entonces $f_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$. Esto se debe a que todo par de vértices forman una arista. Luego, hay k formas de colorear el primer vértice, $k-1$ de colorear un segundo vértice, y así sucesivamente.

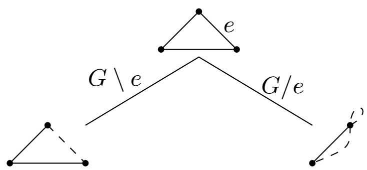
Ahora que tenemos mejor entendimiento de $f_G(k)$ queremos una forma de calcularlo en general. Para esto, introducimos dos operaciones sobre grafos las cuales nos ayudarán a establecer una fórmula de recurrencia para $f_G(k)$.

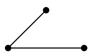
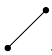
Sea $G = (V, E)$ y sea $e = \{u, v\} \in E$ una arista de G.

(a) *Eliminación de e.* La eliminación de la arista e se define como el grafo $G \setminus e$ obtenido de G tras borrar e. Esto es, $G \setminus e = ([n], E - e)$.

(b) *Contracción de e.* La contracción de la arista e se define como el grafo G/e obtenido de G tras identificar los vértices u, v y borrando todo bucle o arista repetida que pueda producirse. Nótese que el grafo G/e contiene un vértice menos que G y su conjunto de aristas también es menor.

Ejemplo 13. *Veamos estas operaciones aplicadas a K_3 donde hemos dibujado con lineas punteadas las aristas que debemos borrar después de la operación realizada:*



Así, $G \setminus e =$  *y* $G/e =$ .

La ventaja de contraer o eliminar una arista es que el grafo resultante es menos complejo que el grafo original ya que eliminar y contraer produce un grafo con menos arsitas que el grafo G.

Proposición 8. *Sea $G = ([n], E)$ y sea $e = \{u, v\}$ una arista de G. El número de k-coloraciones de G satisface la recurrencia*

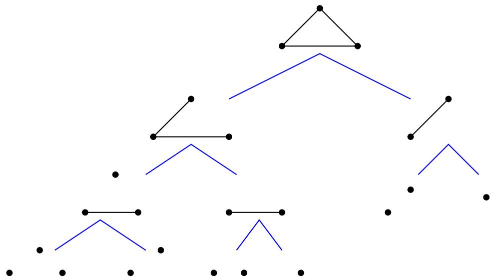
$$f_G(k) = f_{G\setminus e}(k) - f_{G/e}(k).$$

Mas aun, $f_G(k)$ es un polinomio en k.

Prueba: Probaremos que $f_G(k) + f_{G/e}(k) = f_{G\setminus e}(k)$. Para ver esto, nótese que toda k-coloración propia c de $G \setminus e$ es tal que $c(u) = c(v)$ ó $c(u) \neq c(v)$. Si $c(u) \neq c(v)$ entonces la coloración c es tambien una k-coloración propia de G. Si $c(u) = c(v)$ entonces c es una k-coloración propia de G/e. Así, $f_G(k) + f_{G/e}(k) = f_{G\setminus e}(k)$. Para ver que $f_G(k)$ es un polinomio procedemos por inducción sobre $|E|$. El caso base $|E| = 0$ nos dice que $G = D_n$ para algún n y ya vimos que en este caso $f_G(k) = k^n$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para grafos con menos aristas que G. Usando la recurrencia que acabamos de probar, sabemos que $f_G(k) = f_{G\setminus e}(k) - f_{G/e}(k)$.. Luego, por hipótesis de inducción, tanto $f_{G\setminus e}(k)$ como $f_{G/e}(k)$ son polinomios en k. Así se sigue que $f_G(k)$ es un polinomio. □

El polinomio $f_G(k)$ se denomina *el polinomio cromático de* G. La idea de la recurrencia de $f_G(k)$ es usarla en forma iterativa en el grafo G dado hasta llegar a obtener grafos nulos.

Ejemplo 14. *Continuando con el Ejemplo 12, aplicando eliminación y contracción a cada uno de los grafos resultantes en cada paso, tenemos*



Una vez finalizada la recursión, esto es, una vez obtenemos grafos nulos, calculamos el polinomio cromático del grafo original. Leyendo las ramas del árbol de recursiones de izquierda a derecha obtenemos los polinomios cromáticos k^3, k^2, k^2, k, k^2, k, *en ese orden. Así, teniendo en cuenta lso signos de la recursión* $f_G(k) = f_{G\setminus e}(k) - f_{G/e}(k)$ *tenemos que para el grafo completo* $G = K^3$

$$f_G(k) = k^3 - k^2 - k^2 + k - k^2 + k = k^3 - 3k^2 + 2k = k(k-1)(k-2).$$

como esperábamos.

El problema de calcular el polinomio cromático de un grafo es, en general, un problema de una complejidad computacional muy alta. Sin embrago, los ejercicios nos mostrarán muchas propiedades lindas de este polinomio, entre otras cosas.

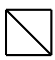
5.2. EJERCICIOS

I Para cada uno de los siguientes grafos calcule su polinomio cromático

(a) El grafo completo K_n

(b) El grafo cíclico C_4.

(c) El camino P_n.

(d) El grafo 

II Pruebe las siguientes propiedades de $f_G(k)$

(a) El término constante de $f_G(k)$ siempre es 0.

(b) El coeficiente de k es no nulo si y sólo si G es conexo.

(c) El grado de $f_G(k)$ es el número de vértices de G.

(d) El coeficiente de k^{n-1} es $-m$ donde m es el número de aristas de G.

III Ejercicios adicionales.

(a) Un grafo conexo G con n vértices es un *árbol* si G tiene $n-1$ aristas. Pruebe que si $f_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ entonces G es un árbol.

(b) Muestre que el polinomio $p(k) = k^4 - 4k^3 + 3k^2$ no es el polinomio cromático de ningún grafo.

(c) Pruebe que un grafo G con número cromático k tiene al menos $\binom{k}{2}$ aristas.

(d) Queremos agendar 9 eventos $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. Cada evento está en conflicto (en términos de hora) con el evento que lo sigue en la lista, y el evento i está en conflicto con a. ¿Cuántas horas debo disponer como mínimo para agendar estos 9 eventos de forma que no haya conflicto?

Referencias

[1] F. Ardila, *Enumerative Combinatorics*, Lecture notes http://math.sfsu.edu/federico/Clase/EC/ec.html (2013).

[2] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley (1994).

[3] The Online Encyclopedia of Integer Sequences https://oeis.org/search?q=catalan&language=english&go=Search.

[4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics I*, 2nd ed, Cambridge University Press (2011).

[5] R. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press (2015).