

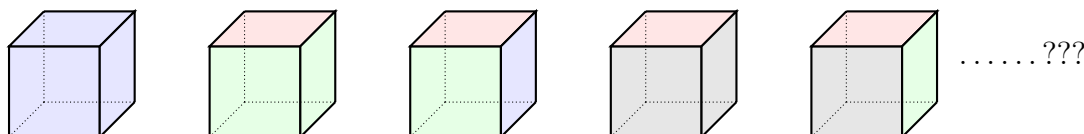
# GRUPOS Y ENUMERACIONES

NANTEL BERGERON

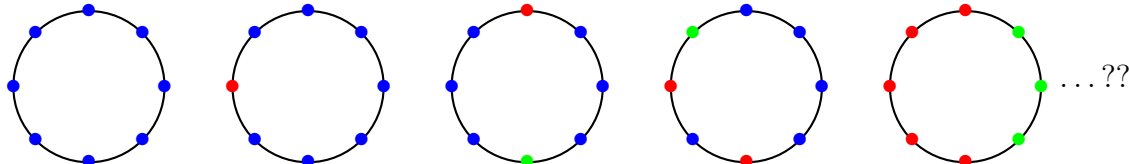
## Día 1

### 1. INTRODUCCIÓN RÁPIDA

En este mini curso veremos cómo contar varios atributos relacionados con las simetrías de un objeto. Por ejemplo, ¿cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir?



Hay muchas posibilidades y es difícil responder sin las herramientas que vamos a construir. Otro ejemplo típico ¿Cuántos collares diferentes podemos construir usando 3 tipos de perlas?

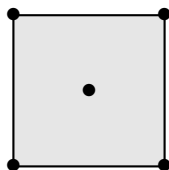


Para lograr esto necesitamos aprender sobre grupos de simetrías, acciones de grupos, coconjuntos, etc. Veremos enumeraciones y aplicaciones mucho más interesantes.

### 2. SIMETRÍAS Y GRUPOS

Nos interesa entender todas las simetrías de un objeto que estudiamos y las estructuras algebraicas sobre esas simetrías.

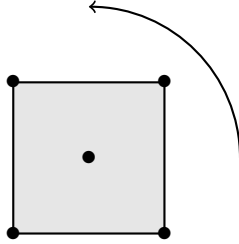
**2.1. Conjuntos de Simetrías.** Suponga que tiene un cuadrado sólido adjunta en el medio:



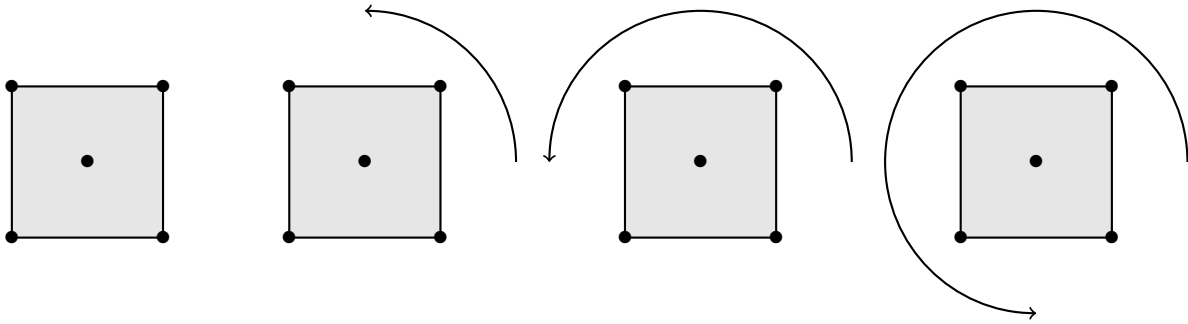
---

Research of Bergeron supported in part by NSERC and York Research Chair.

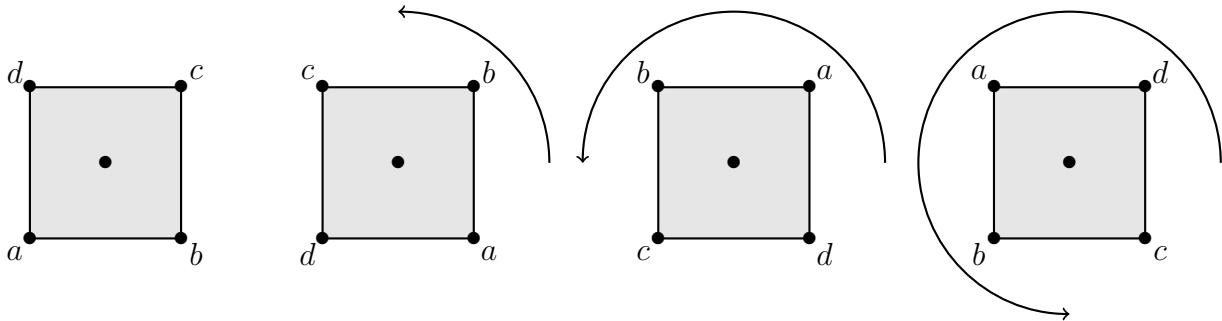
Podemos dar vuelta el cuadrado y recuperar el mismo. Esto es una simetría.



Queremos listar todas las posibilidades:



¿Hay más? **¿Cuándo creen que dos simetrías son las mismas?** Para hacer un seguimiento, podemos nombrar los vértices del cuadrado para ver qué les sucede. Esta es una marca secreta y no es parte del objeto, es sólo allí para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que sucede:

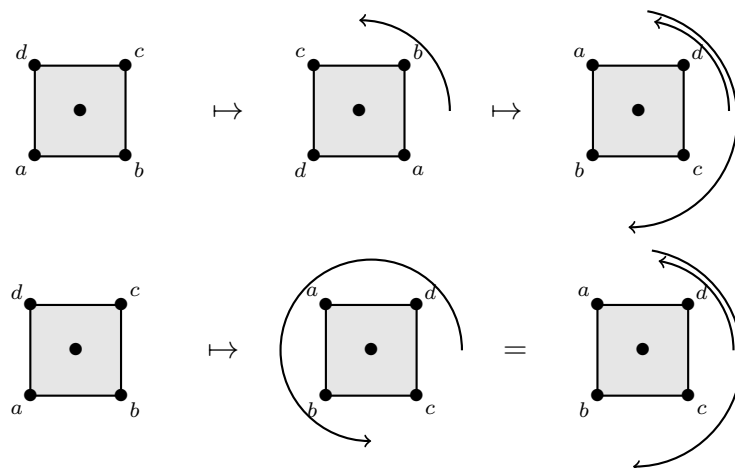


Entonces podemos codificar lo que sucede al cuadrado, enumerando solamente lo que sucede a  $a, b, c$ , y  $d$ :

$$\sigma_0 = \begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}, \quad \sigma_1 = \begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}, \quad \sigma_2 = \begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}, \quad \sigma_3 = \begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}.$$

Este es un modelo matemático de las simetrías del cuadrado. Ahora decimos que dos simetrías son **iguales** si cuando comienzan con la misma marca, terminan con la misma marca después

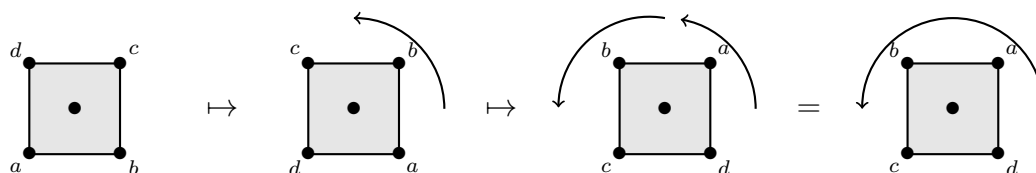
de la simetría.



Este modelo es útil para comprender las estructuras de esas simetrías y centrarse en lo que nos interesa en este momento (los vértices en la esquina del cuadrado). Esto describe de alguna manera todas las simetrías del cuadrado. Pienso en ellos como funciones. Esto no es único, consideraremos pronto otras descripciones de las **mismas simetrías** y veremos que pueden tener diferentes presentaciones.

**2.2. Operaciones sobre simetrías.** Ahora queremos describir la operación que podemos hacer sobre las simetrías. Primero,

**Componiendo simetrías:** ¿Qué pasa si hago una rotación, y luego otra?



Ahora usando nuestro modelo matemático:

$$\begin{array}{cccc}
 a & b & c & d \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 d & a & b & c \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 c & d & a & b
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 abcd \\
 cdab
 \end{array}
 .$$

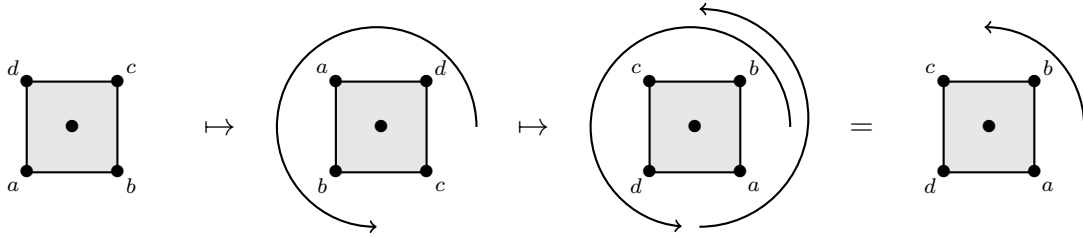
Es decir, composición de funciones:

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_1: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\} & \sigma_2: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\} \\
 a \mapsto d & a \mapsto c \\
 b \mapsto a & b \mapsto d \\
 c \mapsto b & c \mapsto a \\
 d \mapsto c & d \mapsto b
 \end{array}$$

Lo que vimos anteriormente es que

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$$

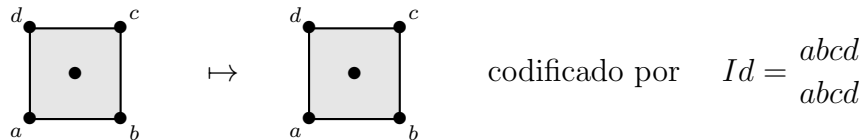
Son los mismos funciones (de ahí la misma simetría). Otro ejemplo



En todo caso la composición de rotaciones nos da otra rotación. Ahora, usando nuestro modelo matemático podemos ver todos los casos

	$abcd$ $abcd$	$abcd$ $dabc$	$abcd$ $cdab$	$abcd$ $bcda$
$abcd$ $abcd$	$abcd$ $abcd$	$abcd$ $dabc$	$abcd$ $cdab$	$abcd$ $bcda$
$abcd$ $dabc$	$abcd$ $dabc$	$abcd$ $cdab$	$abcd$ $bcda$	$abcd$ $abcd$
$abcd$ $cdab$	$abcd$ $cdab$	$abcd$ $bcda$	$abcd$ $abcd$	$abcd$ $dabc$
$abcd$ $bcda$	$abcd$ $bcda$	$abcd$ $abcd$	$abcd$ $dabc$	$abcd$ $cdab$

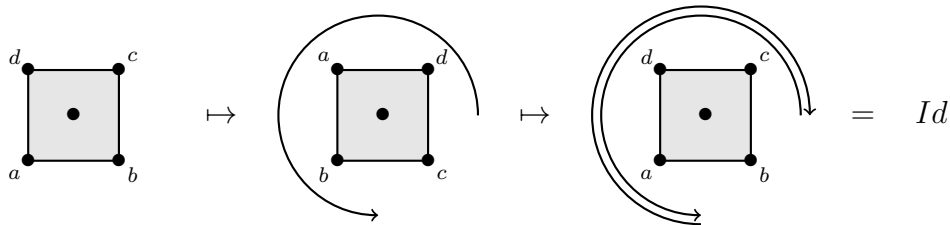
**La simetría identidad:** Observaste que hay una simetría especial que “no hace nada”:



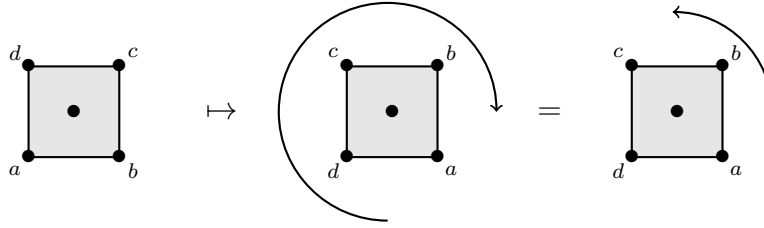
Esta simetría es especial en el sentido de que si componemos por  $Id$  a la derecha o a la izquierda no cambiamos nada:

$$Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$$

**Invertir simetrías:** Finalmente, usted ve que cualquier simetría se puede deshacer:



Aquí tenemos que



Decimos que es la **inversa**. Si  $\sigma$  es una simetría, denotamos su inversa por  $\sigma^{-1}$ . Usando la notación como arriba, tenemos

$$\sigma_0^{-1} = Id = \sigma_0 \quad \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \quad \sigma_3^{-1} = \sigma_1$$

**2.3. Grupos abstractos.** Cuando hablamos de las simetrías de un objeto hemos visto cuatro características importantes

- (1) Tenemos un **conjunto** de simetrías
- (2) Podemos **componer** simetrías y devolver una simetría en nuestro conjunto
- (3) Tenemos una simetría especial llamada **identidad**
- (4) Cada simetría tiene una **inversa**

En términos matemáticos, tenemos un **grupo**. Más formalmente, un grupo es:

- (1) Un **conjunto**  $G$
- (2) Una **operación asociativa**  $m: G \times G \rightarrow G$   
[escribimos a menudo  $m(a, b) = ab$  o  $m(a, b) = a + b$ ]

$$\text{Asociativa: } a(bc) = (ab)c$$

- (3) Un **elemento único**  $1 \in G$ : Tal que, para todos  $g \in G$

$$1g = g1 = g$$

- (4) Cada  $g \in G$  tiene una **inversa**  $g^{-1}$ :

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

**Ejemplo 1.**  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  donde asumimos  $a^4 = 1$  entonces

$m$	1	$a$	$a^2$	$a^3$
1	1	$a$	$a^2$	$a^3$
$a$	$a$	$a^2$	$a^3$	1
$a^2$	$a^2$	$a^3$	1	$a$
$a^3$	$a^3$	1	$a$	$a^2$

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a^3, \quad a^{-2} = a^2, \quad a^{-3} = a.$$

**Ejemplo 2.**  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  donde asumimos  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 1$  y  $ab = ba$  entonces

$m$	1	$a$	$b$	$ab$
1	1	$a$	$b$	$ab$
$a$	$a$	1	$ab$	$b$
$b$	$b$	$ab$	1	$a$
$ab$	$ab$	$b$	$a$	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ab.$$

**Ejemplo 3.**  $S_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$  donde asumimos  $s^2 = 1$ ,  $t^2 = 1$  y  $sts = tst$  (¿Lo tenemos todo?), entonces

$m$	1	$s$	$t$	$st$	$ts$	$sts$
1	1	$s$	$t$	$st$	$ts$	$sts$
$s$	$s$	1	$st$	$t$	$sts$	$ts$
$t$	$t$	$ts$	1	$tst$	$s$	$st$
$st$	$st$	$sts$	$s$	$ts$	1	$t$
$ts$	$ts$	$t$	$sts$	1	$st$	$s$
$sts$	$sts$	$st$	$ts$	$s$	$t$	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ab.$$

**2.4. Grupo simétrico.** Hemos visto anteriormente que las simetrías de un objeto pueden ser codificadas por algunas biyecciones de un conjunto finito (permutaciones). Esto trae dos preguntas

- (1) ¿Es posible realizar cualquier grupo (abstracto) con un grupo de biyecciones? Equivalentemente, ¿es cierto que los grupos abstractos son las simetrías de algo?
- (2) ¿Es el conjunto de todas las biyecciones de un conjunto finito un grupo?

Primero respondamos a la segunda pregunta. Sea  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  y considere el conjunto

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma: [n] \rightarrow [n] \text{ Biyección}\}$$

Decimos que el elemento de  $S_n$  son **permutaciones**. Por ejemplo

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

donde codificamos las permutaciones por su lista de valores. Que está usando el orden natural  $1 < 2 < \dots < n$ , enumeramos los valores  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ . Por ejemplo, la permutación 231 es la biyección

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{1, 2, 3\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Tenemos la permutación **identidad**  $Id = 123 \cdots n \in S_n$ , y dadas dos permutaciones  $\sigma, \pi \in S_n$  podemos componer las dos funciones y obtenemos una permutación  $\sigma \circ \pi \in S_n$ . Además, para cada permutación  $\sigma \in S_n$  podemos encontrar  $\sigma^{-1}$  tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id.$$

Esto nos da un grupo interesante y lo llamamos **el grupo simétrico**.

**2.5. Representación de permutaciones.** Consideremos ahora la pregunta de considerar un grupo abstracto como un grupo de simetrías. Mira Ejemplo 1. Puede comprobar que el conjunto de la funciones

$$1 \mapsto 1234; \quad a \mapsto 2341; \quad a^2 \mapsto 3412; \quad a^3 \mapsto 4123$$

es una realización del grupo  $C_4$ . Ahora compare esto con nuestro ejemplo inicial de rotación del cuadrado y vea que hasta cambiar los nombres, tenemos el mismo grupo de simetrías. El grupo abstracto  $C_4$  se realiza usando permutaciones (un subconjunto de  $S_4$ ):

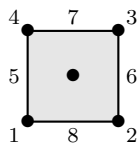
$$\{1234, 2341, 3412, 4123\} \subset S_4.$$

Necesitamos hacer algunas observaciones. Cuando tenemos  $\{Id\} \subseteq H \subseteq S_n$  y  $H$  es un grupo por sí mismo decimos que  $H$  es un **subgrupo de permutaciones** de  $S_n$ . Para un grupo  $G$ , si tenemos una función  $\varphi: G \rightarrow S_n$  tal que  $\varphi(1) = Id$  y  $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ , entonces decimos que  $\varphi$  es un **homomorfismo** de  $G$ . Puede comprobar que en este caso  $\{Id\} \subseteq \varphi(G) \subseteq S_n$  es entonces un subgrupo de permutación de  $S_n$  y decimos que  $\varphi(G)$  es una **representación de permutaciones** de  $G$ . Más aún, si  $|G| = |\varphi(G)|$  entonces decimos que  $\varphi(G)$  es una **realización de permutaciones** de  $G$ .

### Ejercicios A.

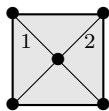
Ej.2.1 Para  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  donde asumimos  $a^4 = 1$ , encuentre un homomorfismo  $\varphi: C_4 \rightarrow S_5$ . Encuentre 5 puntos sobre el cuadrado que sean enviados a sí mismos después de rotar y visualícelos usando el mapa  $\varphi$ .

Ej.2.2 Ponga números en los vértices y los lados del cuadrado



y use esto para definir un homomorfismo  $\phi: C_4 \rightarrow S_8$ . Ahora usted ve que el mismo grupo puede tener muchas realizaciones de permutaciones diferentes.

Ej.2.3 Dibuje las dos diagonales del cuadrado y llámelas 1 y 2:



Use esto para definir un homomorfismo  $\phi: C_4 \rightarrow S_2$ . Esto es una representación de permutaciones pero ¿es una realización de permutaciones? ¿Por qué?

- Ej.2.4 Considere el grupo  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  donde asumimos  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 1$  y  $ab = ba$ . Encuentre una manera de verlo como la simetría de un objeto. Utilice esto para dar un homomorfismo  $\varphi: C_2 \times C_2 \rightarrow S_4$  y dar una realización de permutaciones de este grupo.
- Ej.2.5 Muestra que  $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$  donde asumimos  $s^2 = 1$ ,  $t^2 = 1$  y  $sts = tst$ , es lo mismo que  $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ . Encontrar un isomorfismo  $\varphi: \mathbb{S}_3 \rightarrow S_3$ . ¿Cuáles son las permutaciones  $\varphi(s)$  y  $\varphi(t)$ ? ¿Puedes encontrar un objeto geométrico tal que  $S_3$  describa las simetrías de ese objeto?
- Ej.2.6 ¿Cuál es la cardinalidad de  $S_n$ ? Esa es la cantidad de permutaciones de  $[n]$  que hay.
- Ej.2.7 Tome un objeto geométrico o politopo en  $\mathbb{R}^3$  (prisma, cubo, tetraedro, ...). Describa su simetría. Luego, ponga la etiqueta en su objeto para obtener una realización de permutaciones de ese grupo de simetrías.



## Día 2

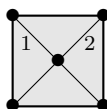
### 3. ACCIONES DE GRUPOS Y ENUMERACIONES

En los ejercicios de la Sección 2, hemos visto que para obtener una realización de permutaciones de un grupo, consideramos un objeto para visualizar las simetrías y luego nombrar algunas porciones del objeto para obtener la permutación. Ahora voy a discutir cómo hacerlo sistemáticamente.

**3.1. Acciones.** Una **acción** de un grupo  $G$  en un conjunto finito  $X$  es un mapa  $G \times X \rightarrow X$  tal que

- $1.x = x$
- $(gh).x = g.(h.x)$

Observemos que la notación aquí pone énfasis en el hecho de que  $G$  hace algo al elemento de  $X$ . Mire el ejercicio Ej.2.3 donde usamos  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  como las simetrías del cuadrado



Esto nos da una acción de  $C_2$  en  $X = \{1, 2\}$ .

$$\begin{array}{lll} a.1 = 2 & a^2.1 = 1 & a^3.1 = 2 \\ a.2 = 1 & a^2.2 = 2 & a^3.2 = 1 \end{array}$$

Vemos que para un  $g \in G$  fijo, la función  $X \rightarrow X$  dado por  $x \mapsto g.x$  es una permutación de  $X$ . Es fácil comprobar que esta función es invertible ya que

$$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = 1.x = x.$$

Así que cada vez que tenemos una acción, tendremos una representación de permutaciones. ¿Cuándo sabemos si es una realización o no? En el ejemplo anterior vemos que  $\{1, a^2\}$  da la misma permutación (la identidad) en  $X$ . Además,  $\{a, a^3\}$  también da la misma permutación en  $X$ . Podemos dividir el grupo  $C_4$  en clases de acuerdo con la permutación que dan

$$\left\{ \{1, a^2\}, \{a, a^3\} \right\}$$

Esto nos da una pista de lo que sucede. Antes de que realmente hagamos esto permítanme primero dar algunas proposiciones generales.

**Proposición 4.** Dado un grupo finito  $G$  y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Sea

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

- (1)  $\{gH \mid g \in G\}$  es una partición de  $G$
- (2)  $|gH| = |H|$  para todos  $g \in G$
- (3)  $|G|$  es divisible por  $|H|$  y  $\left| \{gH \mid g \in G\} \right| = \frac{|G|}{|H|}$

Un **subgrupo**, como antes, es un subconjunto  $\{1\} \subseteq H \subseteq G$  tal que  $H$  es en sí mismo un grupo dentro de  $G$ . Usted ve que (3) se sigue de (1) y (2). Para cualquier  $g \in G$  vemos que una correspondencia de uno a uno

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & gH \\ h & \mapsto & gh \\ g^{-1}gh = h & \longleftarrow & gh \end{array}$$

Esto nos da que (2) es siempre verdadero. Ahora (1) necesita ser bien entendido. ¿Qué estamos diciendo realmente? Veamos  $C_4$  arriba y observamos que  $H = \{1, a^2\}$  es de hecho un subgrupo. Ahora para el conjunto de conjuntos

$$1H = \{1, a^2\}; \quad aH = \{a, a^3\}; \quad a^2H = \{1, a^2\}; \quad a^3H = \{a, a^3\}.$$

Entonces cuando escribimos

$$\{gH \mid g \in C_4\} = \{\{1, a^2\}, \{a, a^3\}\}$$

Queremos decir que **no repetimos** elementos que son los mismos. Así que lo que (1) está diciendo es que

$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \implies g_1H = g_2H.$$

Vamos a hacer algunos ejemplos. Tome  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  (ver Ejemplo 2) y  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Podemos definir

$$\begin{array}{ccc} \varphi(a): X \rightarrow X & \varphi(b): X \rightarrow X & \varphi(ab): X \rightarrow X \\ 1 \mapsto a.1 = 2 & 1 \mapsto b.1 = 1 & 1 \mapsto ab.1 = 2 \\ 2 \mapsto a.2 = 1 & 2 \mapsto b.2 = 2 & 2 \mapsto ab.2 = 1 \\ 3 \mapsto a.3 = 3 & 3 \mapsto b.3 = 4 & 3 \mapsto ab.3 = 4 \\ 4 \mapsto a.4 = 4 & 4 \mapsto b.4 = 3 & 4 \mapsto ab.4 = 3 \end{array}$$

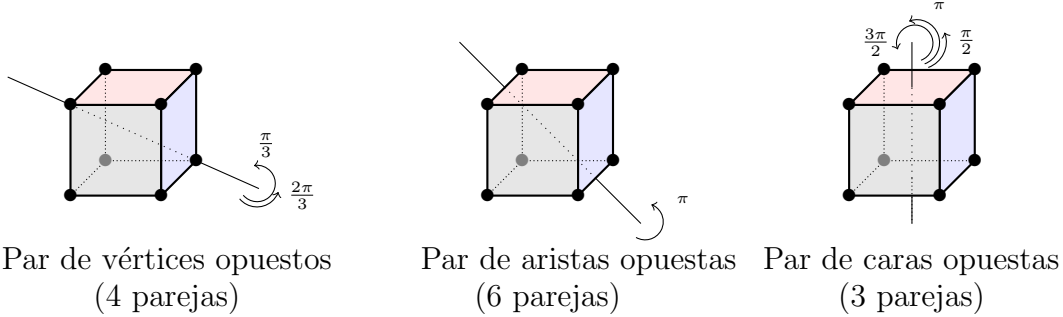
Vemos que  $(\varphi(a))^2 = Id$ ,  $(\varphi(b))^2 = Id$  y  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$ . Entonces, esta es una acción bien definida y tenemos un homomorfismo. Además sólo  $\varphi(1) = Id$  y tenemos una realización de permutaciones de  $C_2 \times C_2$ .

Si en cambio tomamos

$$\begin{array}{ccc} \phi(a): X \rightarrow X & \phi(b): X \rightarrow X & \phi(ab): X \rightarrow X \\ 1 \mapsto a.1 = 2 & 1 \mapsto b.1 = 2 & 1 \mapsto ab.1 = 1 \\ 2 \mapsto a.2 = 1 & 2 \mapsto b.2 = 1 & 2 \mapsto ab.2 = 2 \\ 3 \mapsto a.3 = 4 & 3 \mapsto b.3 = 4 & 3 \mapsto ab.3 = 3 \\ 4 \mapsto a.4 = 3 & 4 \mapsto b.4 = 3 & 4 \mapsto ab.4 = 4 \end{array}$$

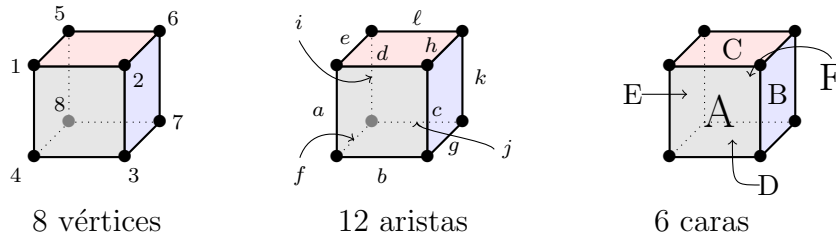
Vemos de nuevo que  $(\phi(a))^2 = Id$ ,  $(\phi(b))^2 = Id$  y  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$ , y esta es una acción diferente del mismo grupo en  $X$ . Pero esta vez  $\phi(1) = \phi(ab) = Id$  y aquí no tenemos una realización de permutaciones desde  $H = \{1, ab\}$ .

3.2. **El cubo.** Nos gustaría tener un ejemplo mucho más grande para entender. Consideremos el grupo  $B_3$  de simetría de un cubo



Este grupo tiene 1 función de identidad,  $4 * 2$  rotaciones de  $\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{3}$  para cada par de vértices opuestos, 6 rotaciones de  $\pi$  para cada par de aristas opuestas y  $3 * 3$  rotaciones de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$  para cada par de caras opuestas. Eso es  $24 = 1 + 8 + 6 + 9$ . Este grupo comienza a ser complicado y tomar algún tiempo para escribir la tabla completa de multiplicación. Pronto nombraremos todo su elemento.

Para ayudarnos, vamos a nombrar todos los componentes del cubo



El grupo  $B_3$  actúa sobre el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, A, B, C, D, E, F\}$$

Por ejemplo, la permutación correspondiente a la rotación de  $\frac{2\pi}{3}$  alrededor de la línea a través de los vértices 3 y 5 es

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & \ell & A & B & C & D & E & F \\
 \downarrow & \downarrow \\
 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & h & c & g & k & \ell & d & b & j & e & a & f & i & B & D & F & A & C & E
 \end{array}$$

En algún momento es mejor escribir eso en la notación de ciclos disjuntos. Para esto simplemente seguimos lo que sucede con el elemento mientras iteramos la misma simetría:  $1 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 1$  y tenemos un ciclo. Simplemente escribimos  $(168)$  y asumimos el ciclo cerrado. Entonces, la permutación anterior es

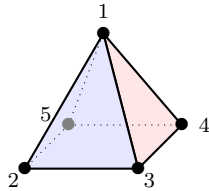
$$(168)(274)(3)(5)(ahj)(bcg)(dkf)(eli)(ABD)(CFE)$$

La acción que describimos nos da una representación de permutaciones  $\varphi: B_3 \rightarrow S_{26}$ . Esta es una realización de permutaciones de  $B_3$  (se puede ver por qué?). En esta representación de permutaciones, el elemento anterior tiene 8 ciclos de longitud 3 y 2 ciclos de longitud 1. Llamamos a eso la **estructura de los ciclos** del elemento. La estructura de los ciclos

desempeñará un papel muy importante en la teoría de Polya. Por supuesto, si cambiamos la representación de permutaciones, obtenemos diferentes estructuras de ciclos.

**3.3. Órbitas y conteo de puntos.** Cuando estudiamos las acciones de  $B_3$  en el conjunto  $X$  de vértices, aristas, caras del cubo observamos que una simetría envía un vértice a otro vértice, una arista a otra arista y una cara a una cara. Una simetría preserva los tipos. Esto nos lleva a definir la noción de órbita de un punto  $x \in X$ .

Antes de comenzar vamos a considerar el ejemplo más pequeño. Echemos un vistazo a las simetrías de



Vemos que cualquier simetría necesita fijar el punto 1. Por otro lado, siempre podemos encontrar una simetría que envíe cualquier punto de  $\{2, 3, 4, 5\}$  a otro punto de  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Decimos que el grupo de simetría que actúa sobre los puntos  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  tiene dos órbitas:  $\{1\}$  y  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Vemos que las órbitas codifican la naturaleza de los puntos en nuestros objetos. Así que las órbitas nos dan información interesante sobre las simetrías de los objetos. Ahora vamos a definir órbitas y ver cómo contar puntos dentro de una órbita.

Dado un grupo  $G$  que actúa sobre un conjunto  $X$ , decimos que la **órbita**  $G.x$  de un punto  $x \in X$  es el conjunto

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Este es el conjunto de puntos de  $X$  que podemos alcanzar desde  $x$  con la acción de  $G$ . Vimos arriba un ejemplo de órbitas.

¿Cómo contar el número de puntos dentro de las órbitas de  $X$ ? Es decir, ¿podemos encontrar una fórmula útil para  $|G.x|$ . Ya hemos encontrado este principio. Dejar

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subseteq G$$

Como se ve  $G.x \subseteq X$  y  $Stab(x) \subseteq G$ . El conjunto  $Stab(x)$  es de hecho un subgrupo de  $G$ . Esto nos da una buena manera de calcular  $G.x$ :

**Proposición 5** (Teorema de Lagrange). *Para  $x \in X$ , tenemos*

$$|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

La idea es construir una biyección explícita entre los dos conjuntos

$$G.x \leftrightarrow \{gS \mid g \in G\}$$

donde  $S = Stab_x(G)$ . Para cualquier  $y \in G.x$ , hay muchos posibles  $g \in G$  tal que  $y = g.x$ .

$$\begin{aligned} \alpha: G.x &\rightarrow \{gS \mid g \in G\} \\ y &\mapsto gS \text{ donde } g \text{ es tal que } g.x = y \end{aligned}$$

Por supuesto tenemos que asegurarnos de que está bien definido. Eso es si

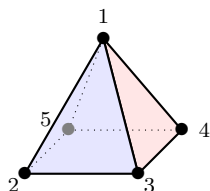
$$y = g.x = h.x \iff h^{-1}g.x = x \iff gS = hS$$

La función en la otra dirección está dada por

$$\begin{aligned} \beta: \{gS \mid g \in G\} &\rightarrow G.x \\ gS &\mapsto g.x \end{aligned}$$

Las dos funciones construyen una correspondencia entre los dos conjuntos.

Si volvemos a nuestro pequeño ejemplo. El grupo de simetrías de



es  $C_4$  (¿ves esto?). Hemos observado 2 órbitas:  $\{1\}$  y  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Por 1, vemos que cada simetría fija 1, entonces

$$\frac{|C_4|}{|Stab(1)|} = \frac{4}{4} = 1$$

Para cualquiera de los puntos 2, 3, 4 o 5, sólo la simetría de identidad fija tal punto. Obtenemos

$$\frac{|C_4|}{|Stab(2)|} = \frac{4}{1} = 4$$

## Ejercicios B.

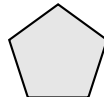
Ej.3.1  $D_3, D_4, D_5, D_6$ : Estudia los grupos dihedrales. Estos son grupos de simetrías de



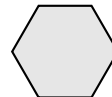
$$D_3 = S_3$$



$$D_4$$



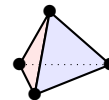
$$D_5$$



$$D_6$$

donde aquí podemos girar la figura y también podemos sacarla de la mesa, voltearla y ponerla de nuevo (reflexión). Encuentre una realización de permutaciones para cada uno y dé la estructura de los ciclos de sus elementos.

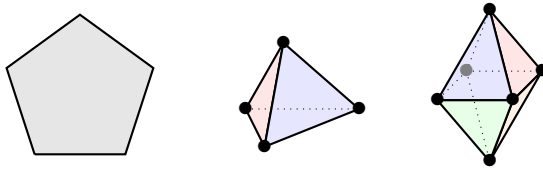
Ej.3.2  $A_4$ : Estudia el grupo de simetrías rotacionales de un tetraedro. Encuentre una realización de permutaciones y describa la estructura de los ciclos.



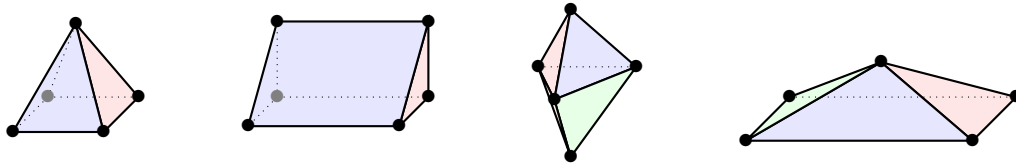
[¿Qué sucede si se permiten las reflexiones? Es un grupo más grande, ¿cuál?]

Ej.3.3 Sea  $G = S_3$ . Encuentre todas las diferentes acciones de  $S_3$  en  $X = \{a, b, c\}$ . En cada caso, describa el homomorfismo correspondiente  $\varphi: S_3 \rightarrow S_3$ . Describa la estructura de los ciclo de cada elemento de  $S_3$ , para cada representación de permutación que construyó.

Ej.3.4 Contar el número de puntos, bordes y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7.



Ej.3.5 El objeto no siempre es totalmente simétrico y los puntos, bordes y caras se dividen en órbitas más pequeñas (diferentes tipos de puntos, aristas, caras). Entender las órbitas para contar el número de puntos, aristas y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7 y grupo de simetrías.



(Ejercicios adicionales)

Ej.3.6 Vea nuevamente Ej.2.2. Describa la estructura de los ciclos de cada elemento de  $C_4$  para esta representación de permutaciones.

Ej.3.7 Muestra que  $H$  en Proposición 7 es un subgrupo.

Ej.3.8 Muestra que  $Stab(x)$  es un subgrupo.

Ej.3.9 En Proposición 4, muestre que  $\alpha \circ \beta = Id$  and  $\beta \circ \alpha = Id$ .

Ej.3.10 Contar el número de vértices, aristas, 2-caras, 3-caras, ..., de un hiper-cubo de dimensión  $n$ .

[sugerencia. Encontrar un grupo de simetría del hiper-cubo que contiene exactamente una órbita para cada tipo de caras]

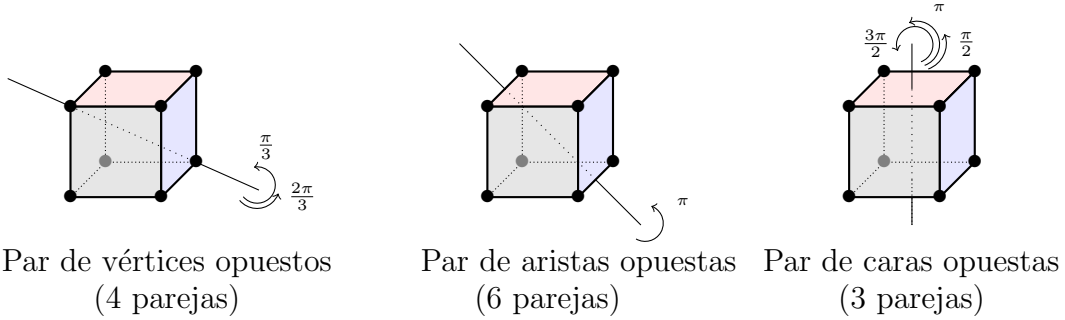
## Día 3

## 4. REVIEW TEOREMA DE LAGRANGE

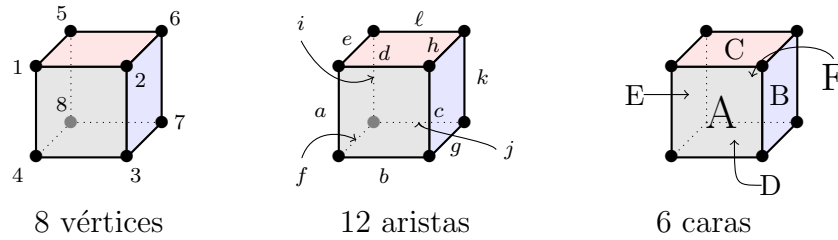
**Proposición 6** (Teorema de Lagrange). *Sea  $G$  actúa en  $X$ . Para  $x \in X$ , tenemos*

- (1) *una biyección  $G.x \rightarrow \{gStab(x) \mid g \in G\}$*
- (2)  $|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$

Ejemplo: Si miramos a Sección 3.2, el grupo  $B_3$



actúa sobre el conjunto de vértices, aristas y caras del cubo:



Vemos que exactamente tres simetrías fijan el vértice 1. Por lo tanto

$$|B_{3.1}| = \frac{|B_3|}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Similarmente, sólo dos simetrías fijan la arista  $a$ , entonces

$$|B_{3.a}| = \frac{|B_3|}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Finalmente cuatro simetrías fijan una cara, entonces

$$|B_{3.A}| = \frac{|B_3|}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Esto es útil para contar vértices, aristas, caras, de objetos con muchas simetrías. Es aún más útil para las cosas que no podemos ver (como en las dimensiones superiores).

una ultima ejemplo

**Proposición 7.** *Dado un grupo finito  $G$  que actúa sobre un conjunto finito  $X$ . Sea*

$$H = \{g \in G \mid g.x = x \text{ para todo } x \in X\}.$$

- (1)  $H$  es un subgrupo de  $G$ .
- (2) La acción da una realización de permutaciones si y sólo si  $|H| = 1$
- (3) Podemos tomar  $X = G$  y la acción es multiplicación a la izquierda, en este caso obtenemos una realización de permutaciones.

Voy a dejar como un ejercicio para mostrar (1). Si nunca has hecho eso, es bueno hacerlo. Si lo ha visto antes es fácil.

El elemento (2) es sutil. Cuando tenemos una acción  $G \times X \rightarrow X$  hemos visto en el ejercicio que podemos construir un homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow S_{|X|}$ . Para un  $g$  fijo, la permutación  $\varphi(g)$  viene dada como  $g$  permuta  $X$  con la función  $x \mapsto g.x$ . Ahora tenemos

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \iff g_1 H = g_2 H.$$

en efecto

$$g_1.x = g_2.x \iff g_2^{-1}g_1.x = g_2^{-1}g_2.x = x$$

Esto es válido para todos los  $x$  si y sólo si  $g_2^{-1}g_1 \in H$ . Esto es  $g_2^{-1}g_1 H = H$  (ya que  $H$  es un subgrupo) y por tanto  $g_1 H = g_2 H$ . Usted ve que tenemos tantas permutaciones en  $\varphi(G)$  como tenemos elementos en  $\left| \{gH \mid g \in G\} \right| = \frac{|G|}{|H|}$  entonces

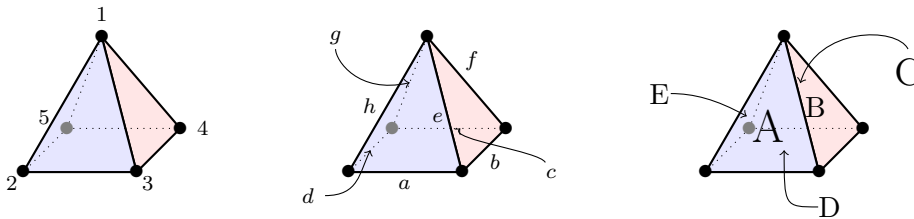
$$|\varphi(G)| = \left| \{gH \mid g \in G\} \right| = \frac{|G|}{|H|} = |G| \iff |H| = 1.$$

Ahora (3) es mucho más fácil. Observemos que la acción aquí es  $G \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  la multiplicación habitual, pero pensamos en  $\mathbf{G}$  como el conjunto en el que actuamos. El hecho de que sea una acción es claro al comparar el requisito de acción con la asociatividad y la multiplicación por 1. Si tenemos  $gh = h$  entonces está claro que  $g = gh h^{-1} = h h^{-1} = 1$ . Así  $H = \{1\}$  solamente.

**Observación 8.** La Proposición 7 (3) nos dicen que cualquier grupo abstracto puede realizarse (al menos en una forma) como un grupo de permutaciones. Esto se conoce como teorema de Cayley.

**4.1. Contando el número de órbitas.** En este punto espero que esté convencido de que el uso de la teoría de grupos es poderoso para contar cosas relacionadas con la simetría. Nuestro siguiente paso es contar el número de órbitas. Como hemos visto anteriormente, podemos ver esto como contando el número de tipos de puntos que tenemos.

Veamos nuevamente  $C_4$  actuando sobre la pirámide cuadrada y consideremos sus vértices, aristas y caras.





El grupo  $C_4$  actúa sobre el conjunto  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E\}$ . Este conjunto se descompone en órbitas disjuntas. Denotamos esto como

$$Y/C_4 = \left\{ \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{A, B, C, E\}, \{D\} \right\}$$

Vemos que el número de órbitas cuentan los diferentes tipos de cosas.

En cuanto al número de elemento en una órbita, también hay fórmula muy hermosa para contar el número de órbitas de una acción. Deje que  $G$  actúe sobre un conjunto  $X$  y defina

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

.

**Proposición 9** (Lema de Burnside). *Por  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ , tenemos*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Esto no es difícil de ver después de algunas manipulaciones de los conceptos que hemos visto

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |Fix(g)| &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \delta_{x, g.x} = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} \delta_{x, g.x} \\ &= \sum_{x \in X} |Stab(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G.x|} \\ &= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G.x|} = |G| |X/G| \end{aligned}$$

La última igualdad es un buen truco.

Así que si queremos contar el número de órbita de una acción, simplemente necesitamos encontrar la cardinalidad del conjunto  $Fix(g)$  para cada  $g \in G$ . Veamos nuevamente  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  actuando sobre  $Y$  arriba. Encontramos eso

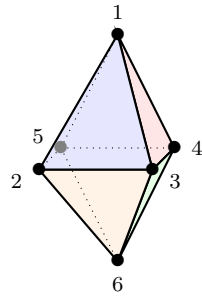
$$\begin{aligned} Fix(\mathbf{1}) &= Y \\ Fix(a) &= \{1, D\} \\ Fix(a^2) &= \{1, D\} \\ Fix(a^3) &= \{1, D\} \end{aligned}$$

Hence

$$|Y/C_4| = \frac{1}{4}(18 + 2 + 2 + 2) = \frac{24}{4} = 6$$

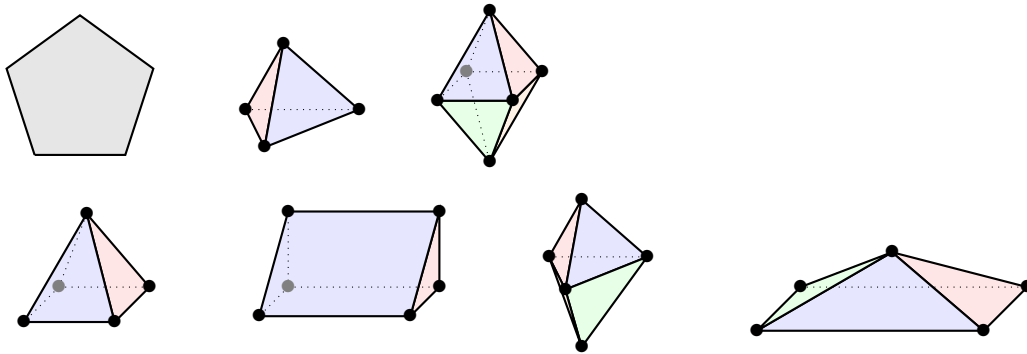
Siempre me maravillo del hecho de que esto funciona tan bien.

Vamos a hacer una más ejemplos. Vamos a describir los simetrías, ciclos, orbitas de los vértices, aristas, y caras, de

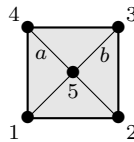


### Ejercicios C.

Ej.4.1.1 Mire las acciones que definió ayer en cada objetos debaho y use Proposición 9 para contar el número de órbitas.



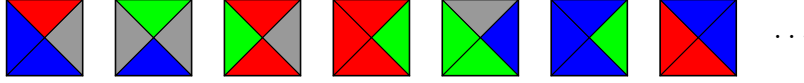
Ej.4.1.2 Considere las acciones de  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  en el conjunto  $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$  con los cinco vértices  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y los dos segmentos diagonales  $\{a, b\}$  representados a continuación. Utilice Proposición 9 para contar el número de órbitas



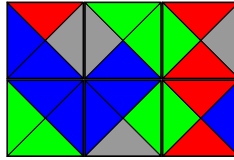
## Día 4

## 5. COLORACIÓN Y TEORÍA DE POLYA

Supongamos que su amiga Laura quiere crear un juego con piezas que son teja como



El juego será tejar un tablero de  $2 \times 3$  de modo que el color coincida donde la teja toca. Un buen juego terminará con un mosaico como este:



Pero a ella le gustaría saber cuántos tipos de tejas necesitamos, y cuántos diferentes buenos juegos serán posibles. Vamos a tratar de ayudar...

**5.1. Coloraciones de acciones.** Cuando tenemos un conjunto finito  $X$ , una **coloración** de  $X$  con ciertos colores es una función  $w: X \rightarrow \{\text{colores}\}$ . De hecho, si usted tiene un conjunto como  $X = \{1, 2, 3\}$  y su tiene dos colores *rojo* y *azul*, puede hacer 8 coloraciones diferentes. A saber

*123*;    *123*;    *123*;    *123*;    *123*;    *123*;    *123*;    *123*;

Esto es lo mismo que las funciones  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ . Si  $C$  es un conjunto de color, entonces denotamos por  $C^X$  el conjunto de todos los coloraciones de  $X$  por  $C$ . Ese es el conjunto de todas las funciones

$$C^X = \{w: X \rightarrow C \text{ funciones}\}$$

Para nuestro ejemplo anterior con  $X = \{1, 2, 3\}$  y  $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  obtenemos

$$C^X = \{\text{123}, \text{123}, \text{123}, \text{123}, \text{123}, \text{123}, \text{123}, \text{123}\}$$

Ahora, cuando un grupo  $G$  actúa sobre  $X$ , entonces  $G$  **también** actúa sobre el conjunto más grande de todos los coloraciones  $C^X$  de manera natural. De hecho, si  $w \in C^X$ , deja  $(g.w)(x) = w(g^{-1}.x)$  y funciona. Aquí  $g.w$  es una nueva función construida desde  $w$ . Necesitamos usar la inversa de  $g$  en esta definición para que el “tecnicismo” de la definición de acción funcione para la acción en  $C^X$ .

$$((hg).w)(x) = w((hg)^{-1}.x) = w((g^{-1}h^{-1}).x) = w(g^{-1}.(h^{-1}.x)) = (g.w)(h^{-1}.x) = (h.(g.w))(x)$$

Puse esto aquí para mostrarle el tecnicismo en mostrar que  $(hg).w = h.(g.w)$ . Trate de entender cada igualdad. Este tecnicismo es importante para que las cosas funcionen bien, pero no jugarán un gran papel al final.

Permite trabajar con nuestro ejemplo y el grupo de permutaciones  $S_3$  actuando sobre  $X = \{1, 2, 3\}$  (permute los números). Recordar que

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

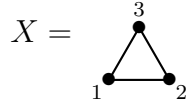
Y cada  $\sigma \in S_3$  es una permutación  $\sigma: X \rightarrow X$  y tenemos una acción. Sea  $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  y considere  $w \in C^X$ . Por ejemplo, **123** es la función  $w(1) = \text{rojo}$ ,  $w(2) = \text{azul}$  y  $w(3) = \text{rojo}$ . Sea  $\sigma = 231$  y compruebe que  $\sigma^{-1} = 312$ . Así que la nueva función  $\sigma.w$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} (\sigma.w)(1) &= w(\sigma^{-1}(1)) = w(3) = \text{rojo} \\ (\sigma.w)(2) &= w(\sigma^{-1}(2)) = w(1) = \text{rojo} \\ (\sigma.w)(3) &= w(\sigma^{-1}(3)) = w(2) = \text{azul} \end{aligned}$$

Así que  $\sigma.w = \text{123}$ . Si observamos las órbitas de  $X$  con la acción de  $S_3$  vemos que sólo hay una órbita ( $X$  es una sola órbita). Pero si miramos las órbitas de la acción sobre  $C^X$ , surge una imagen muy diferente:

$$C^X/S_3 = \left\{ \{\text{123}\}, \{\text{123, 123, 123}\}, \{\text{123, 123, 123}\}, \{\text{123}\} \right\}$$

Podemos representar esto en un triángulo. Recordemos que  $S_3 = D_3$  es la simetría del triángulo permitiendo volteretas y rotaciones



El conjunto  $C^X/S_3$  se puede representar como

$$C^X/S_3 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\} \right\}$$

Como puede ver, cada órbita representa **un** tipo posible de collar con tres perlas y dos colores de perlas diferentes. Así que podemos usar PProposición 9 para contar el número de posibilidades. Primero tenemos que averiguar qué es  $Fix(g)$  para cada simetría en el conjunto  $C^X$ . Veamos primero nuestro ejemplo. Para  $Id = 123 \in S_3$  es fácil como 123 siempre fijar todo las coloraciones

$$Fix(Id) = C^X \implies |Fix(123)| = |C|^{|X|} = 2^3 = 8$$

Luego miramos las otras permutaciones:

$$Fix(132) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\} \implies |Fix(132)| = 4 = 2^2$$

$$Fix(213) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\} \implies |Fix(213)| = 4 = 2^2$$

$$Fix(231) = \{\{\text{123, 123}\} \implies |Fix(231)| = 2 = 2^1$$

$$Fix(312) = \{\{\text{123, 123}\} \implies |Fix(312)| = 2 = 2^1$$

$$Fix(321) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\} \implies |Fix(321)| = 4 = 2^2$$

Usando Proposición 9 obtenemos la respuesta correcta:

$$|C^X/S_3| = \frac{1}{6}(8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4) = \frac{24}{6} = 4$$

Notaste que  $|Fix(g)|$  siempre es un poder de  $|C| = 2$ , esto no es un accidente.

**Proposición 10.** Deje que  $G$  actúen sobre  $X$ . Como arriba obtenemos una acción de  $G$  sobre  $C^X$ . Por  $g \in G$ , tenemos que

$$w \in Fix(g) \iff w(x) = w(g.x) = w(g^2.x) = w(g^3.x) = \dots \text{ para todos los } x \in X$$

Es decir,  $w$  es constante durante los ciclos de  $G$  para la acción en  $X$

Tenga cuidado aquí, tenemos **dos** acciones a considerar. La acción de  $G$  sobre  $X$  y la acción de  $G$  sobre  $C^X$ . Estamos interesados en el conjunto  $Fix(g)$  para la acción de  $G$  en  $C^X$ , pero para calcularlo, utilizamos la acción de  $G$  sobre  $X$ . Vemos en la Proposición que estamos interesados en los ciclos disjuntos de  $g$  sobre  $X$ . Recuerde que los ciclos de  $g \in G$  se obtiene observando lo que sucede cuando aplicamos un poder sucesivo de  $g$  a los elementos de  $X$ :  $x \rightarrow g.x \rightarrow g^2.x \rightarrow \dots$  hasta que regresemos  $x$ . Si  $w$  es fijo por  $g$ , es decir  $(g.w)(x) = w(x)$ , entonces aplicando  $g^{-1}$  ambos lados obtenemos

$$w(x) = (g^{-1}.w)(x) = w(g.x)$$

Aplicando  $g^{-1}$  de nuevo a la igualdad arriba obtenemos

$$w(g.x) = (g^{-1}.w)(x) = (g^{-2}.w)(x) = w(g^2.x)$$

Y podemos seguir así para mostrar una de las implicaciones de la Proposición 10.

En la notación de ciclos, la permutación 213 es  $(1\ 2)(3)$ . Mire otra vez  $Fix(213)$  y de hecho todos los coloraciones del conjunto tienen el mismo color para el ciclo  $(1\ 2)$  y para el ciclo  $(3)$ . Por otro lado, 231 es un solo ciclo  $(1\ 2\ 3)$  y sólo 2 colores son constantes en este ciclo. Os dejo a vosotros ver lo contrario de la proposición anterior. Lo que hemos visto hasta ahora es que cuando  $G$  actúa sobre  $C^X$  tenemos

$$|Fix(g)| = |C|^{|cyc_X(g)|}$$

donde  $cyc_X(g)$  es la descomposición del ciclo de  $g$  para la acción en  $X$ .

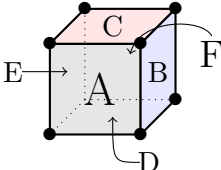
**Teorema 11.** Dado  $G$  actuando en  $X$ . Tenemos que  $G$  actúa sobre  $C^X$ . Sea  $c = |C|$ ,

$$|C^X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} c^{|cyc_X(g)|}$$

Usted entiende que esto viene de Proposición 9 y Proposición 10.

## Ejercicios D.

Nuestra amiga Laura que acaba de aprender sobre este teorema está bastante segura de que podemos usarlo para resolver su pregunta. Hagamos eso juntos ... primero un poco de calentamiento.

Ej.5.1 Deje que  $B_3$  actúe sobre el cubo  y sea  $X = \{A, B, C, D, E, F\}$

el conjunto de caras. Considere  $C = \{\text{rojo}, \text{black}, \text{azul}, \text{green}\}$  y  $B_3$  actúa en los coloraciones  $C^X$ . Ahora responda a la primera pregunta que teníamos: cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir.

- Ej.5.2 Ahora responde a la segunda pregunta que hemos visto: cuántos collares de longitud 8 con 3 tipos de perlas podemos hacer? [Sugerencia: use  $D_8$  actua sobre un octogone]
- Ej.5.3 Resuelve las dos preguntas de Laura. Tenga en cuenta que los tejas están coloreados en un solo lado.

## REFERENCES

1. Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson (2010).
2. G. Pólya and R. C. Read *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* Springer-Verlag (1987).

NANTEL BERGERON, DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, YORK UNIVERSITY, TORONTO, ONTARIO M3J 1P3, CANADA

*E-mail address:* `bergeron@mathstat.yorku.ca`

*URL:* `http://www.math.yorku.ca/bergeron/`