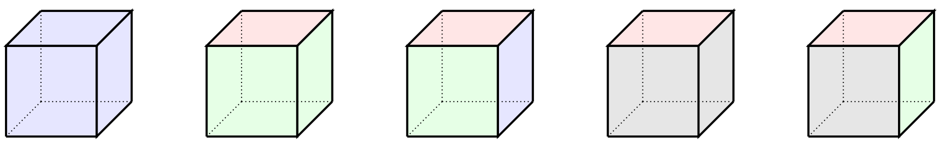
GRUPOS Y ENUMERACIONES

NANTEL BERGERON

Día 1

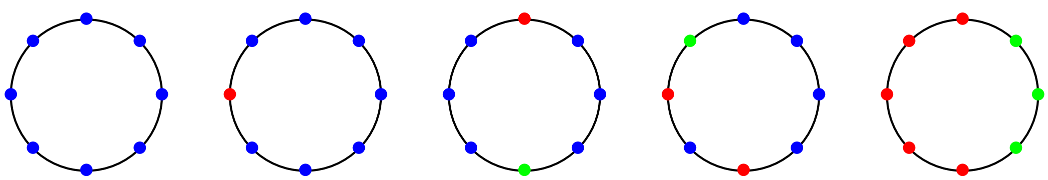
1. Introducción rápida

En este mini curso veremos cómo contar varios atributos relacionados con las simetrías de un objeto. Por ejemplo, ¿cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir?



......???

Hay muchas posibilidades y es difícil responder sin las herramientas que vamos a construir. Otro ejemplo típico ¿Cuántos collares diferentes podemos construir usando 3 tipos de perlas?



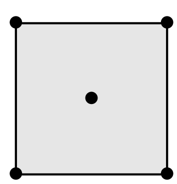
...??

Para lograr esto necesitamos aprender sobre grupos de simetrías, acciones de grupos, coconjuntos, etc. Veremos enumeraciones y aplicaciones mucho más interesantes.

2. Simetrias y groupos

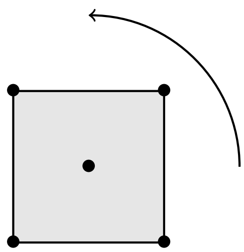
Nos interesa entender todas las simetrías de un objeto que estudiamos y las estructuras algebraicas sobre esas simetrías.

2.1. **Conjuntos de Simetrías.** Suponga que tiene un cuadrado sólido adjunta en el medio:

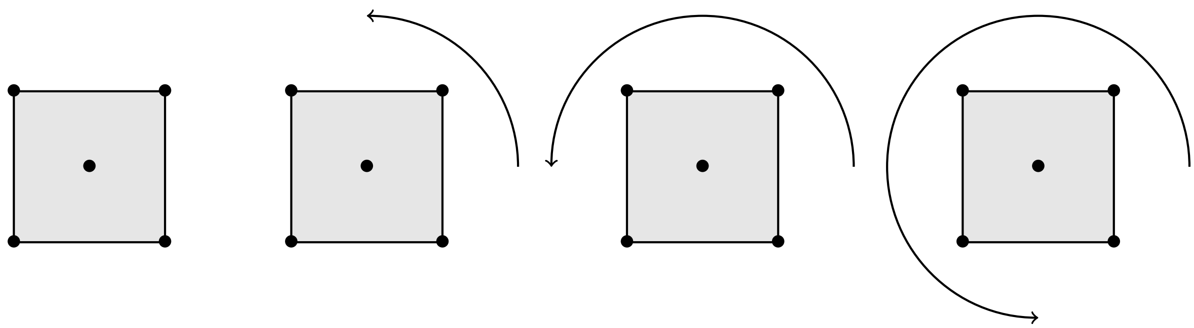


Research of Bergeron supported in part by NSERC and York Research Chair.

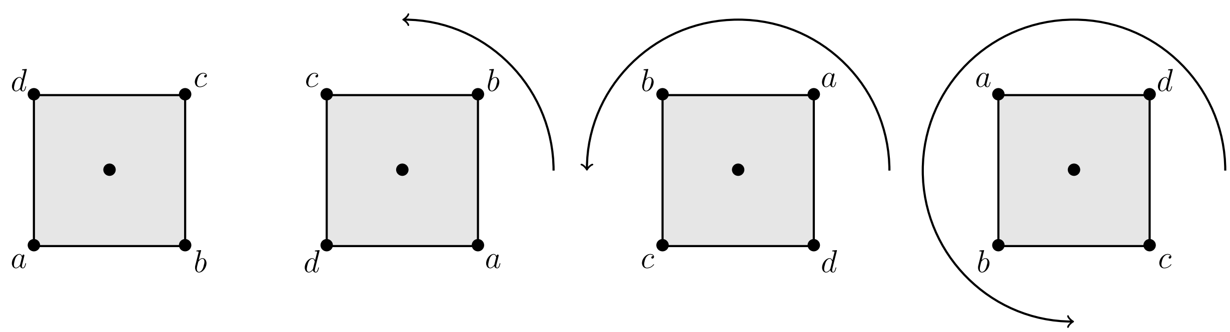
Podemos dar vuelta el cuadrado y recuperar el mismo. Esto es una simetría.



Queremos listar todas las posibilidades:



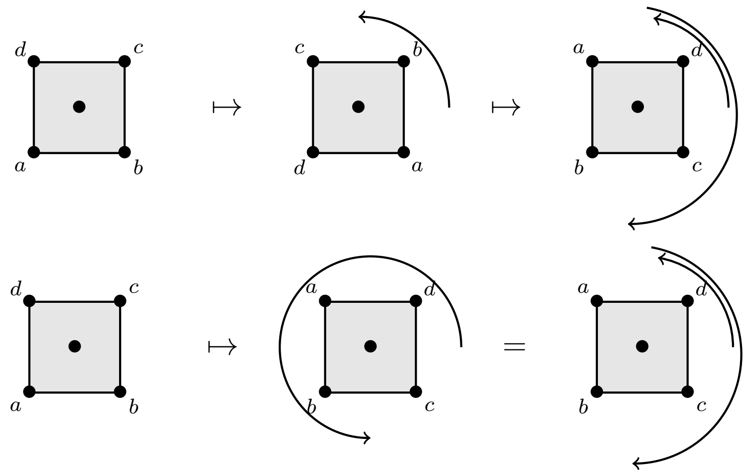
¿Hay más? **¿Cuándo creen que dos simetrías son las mismas?** Para hacer un seguimiento, podemos nombrar los vértices del cuadrado para ver qué les sucede. Esta es una marca secreta y no es parte del objeto, es sólo allí para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que sucede:



Entonces podemos codificar lo que sucede al cuadrado, enumerando solamente lo que sucede a $a, b, c,$ y d:

$$\sigma_0 = \begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}\,, \qquad \sigma_1 = \begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}\,, \qquad \sigma_2 = \begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}\,, \qquad \sigma_3 = \begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}\,.$$

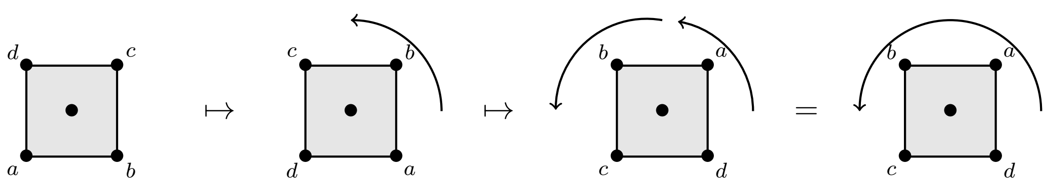
Este es un modelo matemático de las simetrías del cuadrado. Ahora decimos que dos simetrías son **iguales** si cuando comienzan con la misma marca, terminan con la misma marca después de la simetría.



Este modelo es útil para comprender las estructuras de esas simetrías y centrarse en lo que nos interesa en este momento (los vértices en la esquina del cuadrado). Esto describe de alguna manera todas las simetrías del cuadrado. Pienso en ellos como funciones. Esto no es único, consideraremos pronto otras descripciones de las **mismas simetrías** y veremos que pueden tener diferentes presentaciones.

2.2. **Operaciones sobre simetrías.** Ahora queremos describir la operación que podemos hacer sobre las simetrás. Primero,

Componiendo simetrías: ¿Qué pasa si hago una rotación, y luego otra?



Ahora usando nuestro modelo matemático:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & d & a & b \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} abcd \\ cdab \end{array}.$$

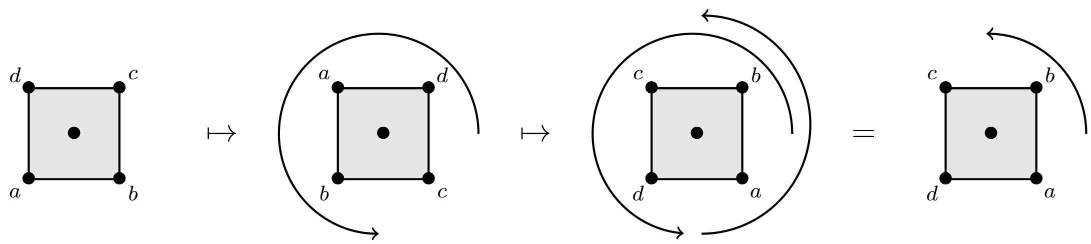
Es decir, composición de funciones:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & d \\ b & \mapsto & a \\ c & \mapsto & b \\ d & \mapsto & c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sigma_2\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & c \\ b & \mapsto & d \\ c & \mapsto & a \\ d & \mapsto & b \end{array}$$

Lo que vimos anteriormente es que

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$$

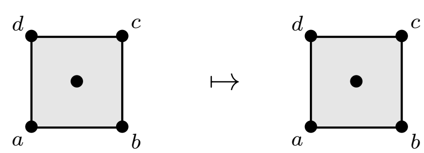
Son los mismos functiones (de ahí la misma simetría). Otro ejemplo



En todo caso la composición de rotaciones nos da otra rotación. Ahora, usando nuestro modelo matemático podemos ver todos los casos

	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$

La simetría identidad: Observaste que hay una simetría especial que "no hace nada":

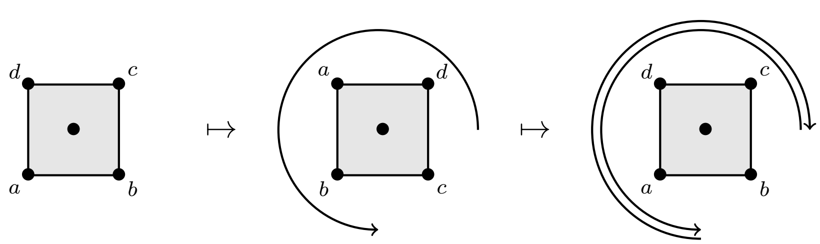


codificado por $Id = \begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$

Esta simetría es especial en el sentido de que si componemos por Id a la derecha o a la izquierda no cambiamos nada:

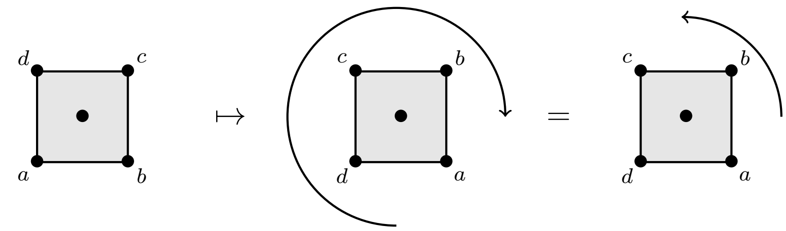
$$Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$$

Invertir simetrías: Finalmente, usted ve que cualquier simetría se puede deshacer:



$= \; Id$

Aquí tenemos que



Decimos que es la **inversa**. Si σ es una simetría, denotamos su inversa por σ^{-1}. Usando la notación como arriba, tenemos

$$\sigma_0^{-1} = Id = \sigma_0 \qquad \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \qquad \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \qquad \sigma_3^{-1} = \sigma_1$$

2.3. **Grupos abstractos.** Cuando hablamos de las simetrías de un objeto hemos visto cuatro características importantes

(1) Tenemos un **conjunto** de simetrías
(2) Podemos **componer** simetrías y devolver una simetría en nuestro conjunto
(3) Tenemos una simetría especial llamada **identidad**
(4) Cada simetría tiene una **inversa**

En términos matemáticos, tenemos un **grupo**. Más formalmente, un grupo es:

(1) Un **conjunto** G
(2) Una **operación asociativa** $m\colon G \times G \to G$
[escribimos a menudo $m(a, b) = ab$ o $m(a, b) = a + b$]

$$\text{Asociativa: } a(bc) = (ab)c$$

(3) Un **elemento único** $1 \in G$: Tal que, para todos $g \in G$

$$1g = g1 = g$$

(4) Cada $g \in G$ tiene una **inversa** g^{-1}:

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

Ejemplo 1. $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$ entonces

m	1	a	a^2	a^3
1	1	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	1
a^2	a^2	a^3	1	a
a^3	a^3	1	a	a^2

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a^3, \qquad a^{-2} = a^2, \qquad a^{-3} = a.$$

Ejemplo 2. $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$ entonces

m	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

Ejemplo 3. $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$ donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$ (¿Lo tenemos todo?), entonces

m	1	s	t	st	ts	sts
1	1	s	t	st	ts	sts
s	s	1	st	t	sts	ts
t	t	ts	1	tst	s	st
st	st	sts	s	ts	1	t
ts	ts	t	sts	1	st	s
sts	sts	st	ts	s	t	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

2.4. **Grupo simétrico.** Hemos visto anteriormente que las simetrías de un objeto pueden ser codificadas por algunas biyecciones de un conjunto finito (permutaciones). Esto trae dos preguntas

(1) ¿Es posible realizar cualquier grupo (abstracto) con un grupo de biyecciones? Equivalentemente, ¿es cierto que los grupos abstractos son las simetrías de algo?
(2) ¿Es el conjunto de todas las biyecciones de un conjunto finito un grupo?

Primero respondamos a la segunda pregunta. Sea $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y considere el conjunto

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma\colon [n] \to [n] \textbf{ Biyección}\}$$

Decimos que el elemento de S_n son **permutaciones**. Por ejemplo

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

donde codificamos las permutaciones por su lista de valores. Que está usando el orden natural $1 < 2 < \ldots < n$, enumeramos los valores $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Por ejemplo, la permutación 231 es la bijección

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Tenemos la permutación **identidad** $Id = 123\cdots n \in S_n$, y dadas dos permutaciones $\sigma, \pi \in S_n$ podemos componer las dos funciones y obtenemos una permutación $\sigma \circ \pi \in S_n$. Además, para cada permutación $\sigma \in S_n$ podemos encontrar σ^{-1} tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id.$$

Esto nos da un grupo interesante y lo llamamos **el grupo simétrico**.

2.5. **Representación de permutaciones.** Consideremos ahora la pregunta de considerar un grupo abstracto como un grupo de simetrías. Mira Ejemplo 1. Puede comprobar que el conjunto de la functiones

$$\mathbf{1} \mapsto 1234; \qquad a \mapsto 2341; \qquad a^2 \mapsto 3412; \qquad a^3 \mapsto 4123$$

es una realización del grupo C_4. Ahora compare esto con nuestro ejemplo inicial de rotación del cuadrado y vea que hasta cambiar los nombres, tenemos el mismo grupo de simetrías. El grupo abstracto C_4 se realiza usando permutaciones (un subconjunto de S_4):

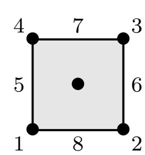
$$\{1234, 2341, 3412, 4123\} \subset S_4.$$

Necesitamos hacer algunas observaciones. Cuando tenemos $\{Id\} \subseteq H \subseteq S_n$ y H es un grupo por sí mismo decimos que H es un **subgrupo de permutaciones** de S_n. Para un grupo G, si tenemos una function $\varphi\colon G \to S_n$ tal que $\varphi(1) = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, entonces decimos que φ es un **homomorfismo** de G. Puede comprobar que en este caso $\{Id\} \subseteq \varphi(G) \subseteq S_n$ es entonces un subgrupo de permutación de S_n y decimos que $\varphi(G)$ es una **representación de permutaciones** de G. Más aún, si $|G| = |\varphi(G)|$ entonces decimos que $\varphi(G)$ es una **realización de permutaciones** de G.

Ejercicios A.

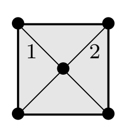
Ej.2.1 Para $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$, encuentre un homomorfismo $\varphi\colon C_4 \to S_5$. Encuentre 5 puntos sobre el cuadrado que sean enviados a sí mismos después de rotar y visualícelos usando el mapa φ.

Ej.2.2 Ponga números en los vértices y los lados del cuadrado



y use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_8$. Ahora usted ve que el mismo grupo puede tener muchas realizaciones de permutaciones diferentes.

Ej.2.3 Dibuje las dos diagonales del cuadrado y llámelas 1 y 2:



Use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_2$. Esto es una representación de permutaciones pero ¿es una realización de permutaciones? ¿Por qué?

Ej.2.4 Considere el grupo $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$. Encuentre una manera de verlo como la simetría de un objeto. Utilice esto para dar un homomorfismo $\varphi\colon C_2 \times C_2 \to S_4$ y dar una realización de permutaciones de este grupo.

Ej.2.5 Muestra que $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$ donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$, es lo mismo que $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$. Encontrar un isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{S}_3 \to S_3$. ¿Cuáles son las permutaciones $\varphi(s)$ y $\varphi(t)$? ¿Puedes encontrar un objeto geométrico tal que S_3 describa las simetrías de ese objeto?

Ej.2.6 ¿Cuál es la cardinalidad de S_n? Esa es la cantidad de permutaciones de $[n]$ que hay.

Ej.2.7 Tome un objeto geométrico o politopo en $\mathbb{R}^3$ (prisma, cubo, tetraedro, ...). Describa su simetría. Luego, ponga la etiqueta en su objeto para obtener una realización de permutaciones de ese grupo de simetrías.

Día 2

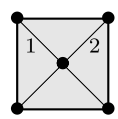
3. Acciones de grupos y enumeraciones

En los ejercicios de la Sección 2, hemos visto que para obtener una realización de permutaciones de un grupo, consideramos un objeto para visualizar las simetrías y luego nombrar algunas porciones del objeto para obtener la permutación. Ahora voy a discutir cómo hacerlo sistemáticamente.

3.1. **Acciones.** Una **acción** de un grupo G en un conjunto finito X es un mapa $G \times X \to X$ tal que

- 1.x=x
- (gh).x=g.(h.x)

Observemos que la notación aquí pone énfasis en el hecho de que G hace algo al elemento de X. Mire el ejercicio Ej.2.3 donde usamos $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ como las simetrías del cuadrado



Esto nos da una acción de C_2 en $X = \{1, 2\}$.

$$\begin{array}{lll} a.1 = 2 & a^2.1 = 1 & a^3.1 = 2 \\ a.2 = 1 & a^2.2 = 2 & a^3.2 = 1 \end{array}$$

Vemos que para un $g \in G$ fijo, la functión $X \to X$ dado por $x \mapsto g.x$ es una permutación de X. Es fácil comprobar que esta función es invertible ya que

$$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = 1.x = x\,.$$

Así que cada vez que tenemos una acción, tendremos una representación de permutaciones. ¿Cuándo sabemos si es una realización o no? En el ejemplo anterior vemos que $\{1, a^2\}$ da la misma permutación (la identidad) en X. Además, $\{a, a^3\}$ también da la misma permutación en X. Podemos dividir el grupo C_4 en clases de acuerdo con la permutación que dan

$$\Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\}$$

Esto nos da una pista de lo que sucede. Antes de que realmente hagamos esto permítanme primero dar algunas proposiciones generales.

Proposición 4. *Dado un grupo finito G y H un subgrupo de G. Sea*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

(1) $\Big\{gH \ \Big|\ g \in G\Big\}$ *es una partición de G*
(2) $|gH| = |H|$ *para todos $g \in G$*
(3) $|G|$ *es divisible por $|H|$ y* $\Big|\Big\{gH \ \Big|\ g \in G\Big\}\Big| = \frac{|G|}{|H|}$

Un **subgrupo**, como antes, es un subconjunto $\{1\} \subseteq H \subseteq G$ tal que H es en sí mismo un grupo dentro de G. Usted ve que (3) se sigue de (1) y (2). Para cualquier $g \in G$ vemos que una correspondencia de uno a uno

$$\begin{array}{rcl} H & \longleftrightarrow & gH \\ h & \mapsto & gh \\ g^{-1}gh = h & \leftarrow\!\shortmid & gh \end{array}$$

Esto nos da que (2) es siempre verdadero. Ahora (1) necesita ser bien entendido. ¿Qué estamos diciendo realmente? Veamos C_4 arriba y observamos que $H = \{1, a^2\}$ es de hecho un subgrupo. Ahora para el conjunto de conjuntos

$$1H = \{1, a^2\}; \quad aH = \{a, a^3\}; \quad a^2H = \{1, a^2\}; \quad a^3H = \{a, a^3\}.$$

Entonces cuando escribimos

$$\Big\{gH \;\Big|\; g \in C_4\Big\} = \Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\}$$

Queremos decir que **no repetimos** elementos que son los mismos. Así que lo que (1) está diciendo es que

$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad g_1H = g_2H.$$

Vamos a hacer algunos ejemplos. Tome $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ (ver Ejenplo 2) y $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 3 \end{array}$$

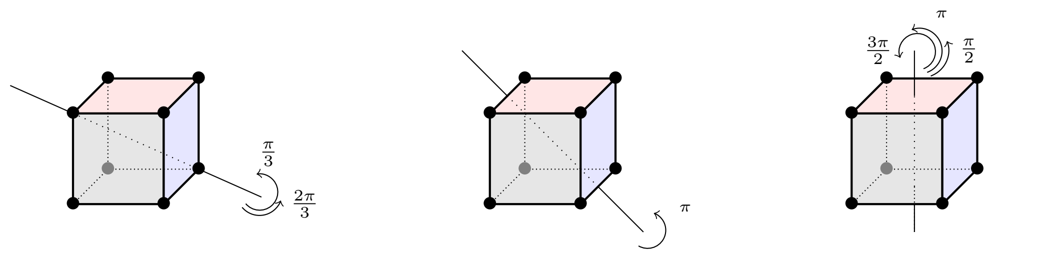
Vemos que $\big(\varphi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\varphi(b)\big)^2 = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$. Entonces, esta es una acción bien definida y tenemos un homomorfismo. Además sólo $\varphi(1) = Id$ y tenemos una realización de permutaciones de $C_2 \times C_2$.

Si en cambio tomamos

$$\begin{array}{rcl} \phi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 4 \end{array}$$

Vemos de nuevo que $\big(\phi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\phi(b)\big)^2 = Id$ y $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$, y esta es una acción diferente del mismo grupo en X. Pero esta vez $\phi(1) = \phi(ab) = Id$ y aquí no tenemos una realización de permutaciones desde $H = \{1, ab\}$.

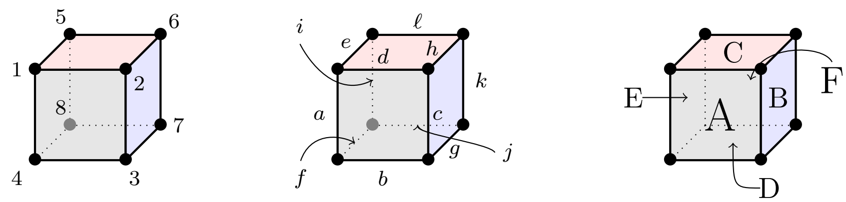
3.2. **El cubo.** Nos gustaría tener un ejemplo mucho más grande para entender. Consideremos el grupo B_3 de simetría de un cubo



Par de vértices opuestos (4 parejas) | Par de aristas opuestas (6 parejas) | Par de caras opuestas (3 parejas)

Este grupo tiene 1 función de identidad, $4 * 2$ rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ para cada par de vértices opuestos, 6 rotaciones de π para cada par de aristas opuestos y $3 * 3$ rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ para cada par de caras opuestas. Eso es $24 = 1 + 8 + 6 + 9$. Este grupo comienza a ser complicado y tomar algún tiempo para escribir la tabla completa de multiplicación. Pronto nombraremos todo su elemento.

Para ayudarnos, vamos a nombrar todos los componentes del cubo



8 vértices | 12 aristas | 6 caras

El grupo B_3 actúa sobre el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, A, B, C, D, E, F\}$$

Por ejemplo, la permutación correspondiente a la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor de la línea a través de los vértices 3 y 5 es

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & \ell & A & B & C & D & E & F \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & h & c & g & k & \ell & d & b & j & e & a & f & i & B & D & F & A & C & E
\end{array}$$

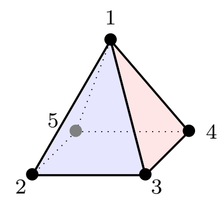
En algún momento es mejor escribir eso en la notación de ciclos disjuntos. Para esto simplemente seguimos lo que sucede con el elemento mientras iteramos la misma simetría:$1 \to 6 \to 8 \to 1$ y tenemos un ciclo. Simplemente escribimos $(1\,6\,8)$ y asumimos el ciclo cerado. Entonces, la permutación anterior es

$$(1\,6\,8)(2\,7\,4)(3)(5)(a\,h\,j)(b\,c\,g)(d\,k\,f)(e\,\ell\,i)(A\,B\,D)(C\,F\,E)$$

La acción que describimos nos da una representación de permutaciones $\varphi\colon B_3 \to S_{26}$. Esta es una realización de permutaciones de B_3 (se puede ver por qué?). En esta representación de permutaciones, el elemento anterior tiene 8 ciclos de longitud 3 y 2 ciclos de longitud 1. Llamamos a eso la **estructura de los ciclos** del elemento. La estructura de los ciclos desempeñará un papel muy importante en la teoría de Polya. Por supuesto, si cambiamos la representación de permutaciones, obtenemos diferentes estructuras de ciclos.

3.3. **Órbitas y conteo de puntos.** Cuando estudiamos las acciones de B_3 en el conjunto X de vértices, aristas, caras del cubo observamos que una simetría envía un vértice a otro vértice, una arista a otra arista y una cara a una cara. Una simetría preserva los tipos. Esto nos lleva a definir la noción de órbita de un punto $x \in X$.

Antes de comenzar vamos a considerar el ejemplo más pequeño. Echemos un vistazo a las simetrías de



Vemos que cualquier simetría necesita fijar el punto 1. Por otro lado, siempre podemos encontrar una simetría que envíe cualquier punto de $\{2,3,4,5\}$ a otro punto de $\{2,3,4,5\}$. Decimos que el grupo de simetría que actúa sobre los puntos $\{1,2,3,4,5\}$ tiene dos órbitas: $\{1\}$ y $\{2,3,4,5\}$. Vemos que las órbitas codifican la naturaleza de los puntos en nuestros objetos. Así que las órbitas nos dan información interesante sobre las simetrías de los objetos. Ahora vamos a definir órbitas y ver cómo contar puntos dentro de una órbita.

Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, decimos que la **órbita** $G.x$ de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Este es el conjunto de puntos de X que podemos alcanzar desde x con la acción de G. Vimos arriba un ejemplo de órbitas.

¿Cómo contar el número de puntos dentro de las órbitas de X? Es decir, ¿podemos encontrar una fórmula útil para $|G.x|$. Ya hemos encontrado este principio. Dejar

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subseteq G$$

Como se ve $G.x \subseteq X$ y $Stab(x) \subseteq G$. El conjunto $Stab(x)$ es de hecho un subgrupo de G. Esto nos da una buena manera de calcular $G.x$:

Proposición 5 (Teorema de Lagrange)**.** *Para $x \in X$, tenemos*

$$|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

La idea es construir una biyección explícita entre los dos conjuntos

$$G.x \quad \leftrightarrow \quad \{gS \mid g \in G\}$$

donde $S = Stag_x(G)$. Para cualquier $y \in G.x$, hay muchos posibles $g \in G$ tal que $y = g.x$.

$$\begin{aligned} \alpha\colon G.x &\to \{gS \mid g \in G\} \\ y &\mapsto gS \text{ donde } g \text{ es tal que } g.x = y \end{aligned}$$

Por supuesto tenemos que asegurarnos de que está bien definido. Eso es si

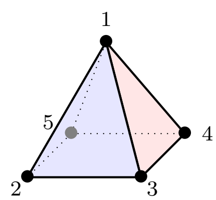
$$y = g.x = h.x \iff h^{-1}g.x = x \iff gS = hS$$

La función en la otra dirección está dada por

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \{gS \mid g \in G\} & \to & G.x \\ gS & \mapsto & g.x \end{array}$$

Las dos funciones construyen una correspondencia entre los dos conjuntos.

Si volvemos a nuestro pequeño ejemplo. El grupo de simetrías de



es C_4 (¿ves esto?). Hemos observado 2 órbitas:$\{1\}$ y $\{2,3,4,5\}$. Por 1, vemos que cada simetría fija 1, entonces

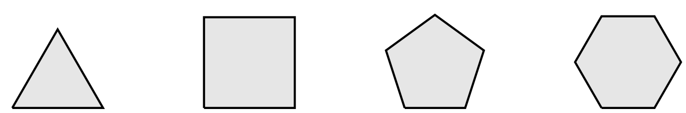
$$\frac{|C_4|}{|Stab(1)|} = \frac{4}{4} = 1$$

Para cualquiera de los puntos $2, 3, 4$ o 5, sólo la simetría de identidad fija tal punto. Obtenemos

$$\frac{|C_4|}{|Stab(2)|} = \frac{4}{1} = 4$$

Ejercicios B.

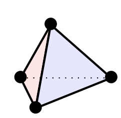
Ej.3.1 D_3, D_4, D_5, D_6: Estudia los grupos dihedrales. Estos son grupos de simetrías de



$D_3 = S_3$ D_4 D_5 D_6

donde aquí podemos girar la figura **y** también podemos sacarla de la mesa, voltearla y ponerla de nuevo (reflexión). Encuentre una realización de permutaciones para cada uno y dé la estructura de los ciclos de sus elementos.

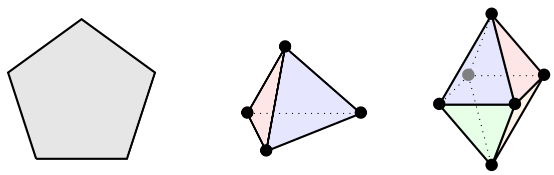
Ej.3.2 A_4: Estudia el grupo de simetrías rotacionales de un tetraedro. Encuentre una realización de permutaciones y describa la estructura de los ciclos.



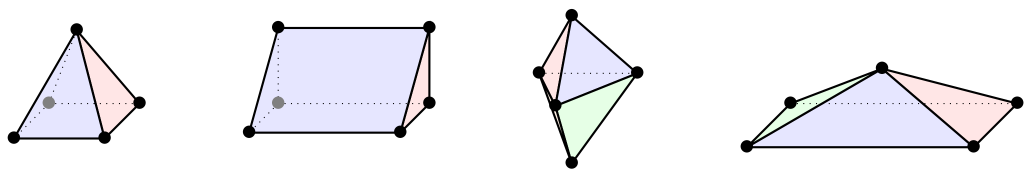
[¿Qué sucede si se permiten las reflexiones? Es un grupo más grande, ¿cuál?]

Ej.3.3 Sea $G = S_3$. Encuentre todas las diferentes acciones de S_3 en $X = \{a, b, c\}$. En cada caso, describa el homomorfismo correspondiente $\varphi\colon S_3 \to S_3$. Describa la estructura de los ciclo de cada elemento de S_3, para cada representación de permutación que construyó.

Ej.3.4 Contar el número de puntos, bordes y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7.



Ej.3.5 El objeto no siempre es totalmente simétrico y los puntos, bordes y caras se dividen en órbitas más pequeñas (diferentes tipos de puntos, aristas, caras). Entender las órbitas para contar el número de puntos, aristas y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7 y grupo de simetrías.



(Ejercicios adicionales)

Ej.3.6 Vea nuevamente Ej.2.2. Describa la estructura de los ciclos de cada elemento de C_4 para esta representación de permutaciones.

Ej.3.7 Muestra que $Stab(x)$ es un subgrupo.

Ej.3.8 En Proposición 4, muestre que $\alpha \circ \beta = Id$ and $\beta \circ \alpha = Id$.

Ej.3.9 Contar el número de vértices, aristas, 2-caras, 3-caras, ..., de un herpercubo de dimensión n.
[sugerencia. Encontrar un grupo de simetría del hipercubo que contiene exactamente una órbita para cada tipo de caras]

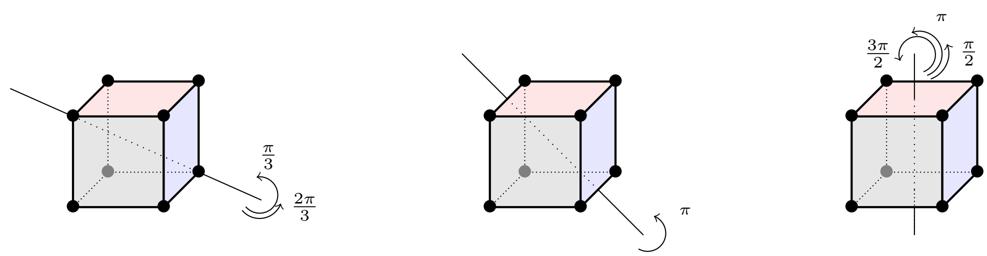
Día 3

4. Revisión del Teorema de Lagrange

Proposición 6 (Teorema de Lagrange)**.** *Sea G actua en X. Para $x \in X$, tenemos*

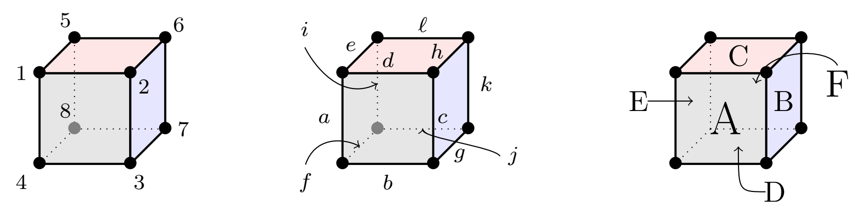
(1) *una biyección $G.x \to \{gStab(x) \mid g \in G\}$*
(2) $|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$

Ejemplo: Si miramos a Sección 3.2, el grupo B_3



Par de vértices opuestos (4 parejas) | Par de aristas opuestas (6 parejas) | Par de caras opuestas (3 parejas)

actúa sobre el conjunto de vértices, aristas y caras del cubo:



8 vértices | 12 aristas | 6 caras

Vemos que exactamente tres simetrías fijan el vértice 1. Por lo tanto

$$|B_3.1| = \frac{|B_3|}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Similarmente, sólo dos simetrías fijan la arista a, entonces

$$|B_3.a| = \frac{|B_3|}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Finalmente cuatro simetrías fijan una cara, entonces

$$|B_3.A| = \frac{|B_3|}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Esto es útil para contar vértices, aristas, caras, de objetos con muchas simetrías. Es aún más útil para las cosas que no podemos ver (como en las dimensiones superiores).

una ultima ejemplo

Proposición 7. *Dado un grupo finito G que actúa sobre un conjunto finito X. Sea*

$$H = \{g \in G \mid g.x = x \text{ para todo } x \in X\}.$$

(1) *H es un subgrupo de G.*
(2) *La acción da una realización de permutaciones si y sólo si $|H| = 1$*
(3) *Podemos tomar $X = G$ y la acción es multiplicación a la izquierda, en este caso obtenemos una realización de permutaciones.*

Voy a dejar como un ejercicio para mostrar (1). Si nunca has hecho eso, es bueno hacerlo. Si lo ha visto antes es fácil.

El elemento (2) es sutil. Cuando tenemos una acción $G \times X \to X$ hemos visto en el ejercicio que podemos construir un homomorfismo $\varphi\colon G \to S_{|X|}$. Para un g fijo, la permutación $\varphi(g)$ viene dada como g permuta X con la función $x \mapsto g.x$. Ahora tenemos

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_1 H = g_2 H.$$

en efecto

$$g_1.x = g_2.x \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_2^{-1} g_1.x = g_2^{-1} g_2.x = x$$

Esto es válido para todos los x si y sólo si $g_2^{-1} g_1 \in H$. Esto es $g_2^{-1} g_1 H = H$ (ya que H es un subgrupo) y por tanto $g_1 H = g_2 H$. Usted ve que tenemos tantas permutaciones en $\varphi(G)$ como tenemos elementos en $\left|\left\{ gH \;\middle|\; g \in G \right\}\right| = \frac{|G|}{|H|}$ entonces

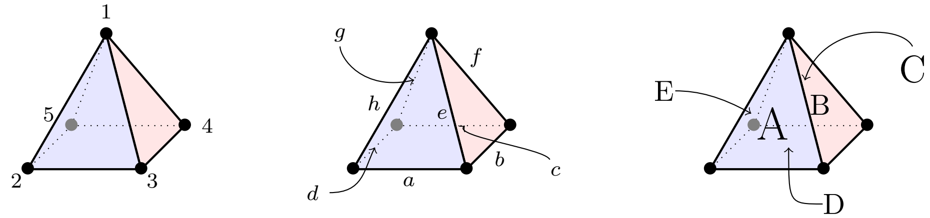
$$|\varphi(G)| = \left|\left\{ gH \;\middle|\; g \in G \right\}\right| = \frac{|G|}{|H|} = |G| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |H| = 1.$$

Ahora (3) es mucho más fácil. Observemos que la acción aquí es $G \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ la multiplicación habitual, pero pensamos en $\mathbf{G}$ como el conjunto en el que actuamos. El hecho de que sea una acción es claro al comparar el requisito de acción con la asociatividad y la multiplicación por 1. Si tenemos $gh = h$ entonces está claro que $g = ghh^{-1} = hh^{-1} = 1$. Así $H = \{1\}$ solamente.

Observación 8. La Proposición 7 (3) nos dicen que cualquier grupo abstracto puede realizarse (al menos en una forma) como un grupo de permutaciones. Esto se conoce como teorema de Cayley.

4.1. **Contando el número de órbitas.** En este punto espero que esté convencido de que el uso de la teoría de grupos es poderoso para contar cosas relacionadas con la simetría. Nuestro siguiente paso es contar el número de órbitas. Como hemos visto anteriormente, podemos ver esto como contando el número de tipos de puntos que tenemos.

Veamos nuevamente C_4 actuando sobre la pirámide cuadrada y consideremos sus vértices, aristas y caras.



El grupo C_4 actúa sobre el conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E\}$. Este conjunto se descompone en órbitas disjuntas. Denotamos esto como

$$Y/C_4 = \Big\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{A, B, C, E\}, \{D\}\Big\}$$

Vemos que el número de órbitas cuentan los diferentes tipos de cosas.

En cuanto al número de elemento en una órbita, también hay fórmula muy hermosa para contar el número de órbitas de una acción. Deje que G actúe sobre un conjunto X y defina

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

.

Proposición 9 (Lema de Burnside)**.** *Por G actuando sobre un conjunto X, tenemos*

$$\big|X/G\big| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\big|Fix(g)\big|$$

Esto no es difícil de ver después de algunas manipulaciones de los conceptos que hemos visto

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G}\big|Fix(g)\big| &= \sum_{g\in G}\sum_{x\in X}\delta_{x,g.x} = \sum_{x\in X}\sum_{g\in G}\delta_{x,g.x}\\
&= \sum_{x\in X}\big|Stab(x)\big| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|G.x|}\\
&= |G|\textstyle\sum_{x\in X}\frac{1}{|G.x|} = |G|\big|X/G\big|
\end{aligned}$$

La última igualdad es un buen truco.

Así que si queremos contar el número de órbita de una acción, simplemente necesitamos encontrar la cardinalidad del conjunto $Fix(g)$ para cada $g \in G$. Veamos nuevamente $C_4 = \{\mathbf{1}, a, a^2, a^3\}$ actuando sobre Y arriba. Encontramos eso

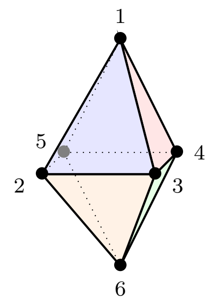
$Fix(\mathbf{1}) = Y$
$Fix(a) = \{1, D\}$
$Fix(a^2) = \{1, D\}$
$Fix(a^3) = \{1, D\}$

Hence

$$\big|Y/C_4\big| = \frac{1}{4}(18 + 2 + 2 + 2) = \frac{24}{4} = 6$$

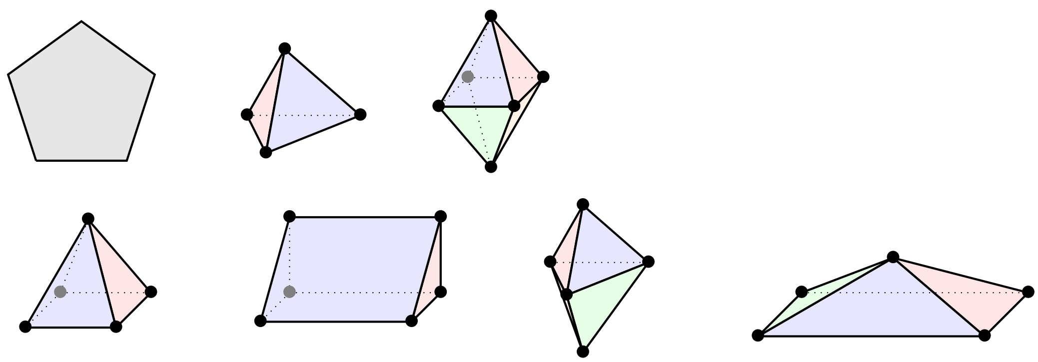
Siempre me maravillo del hecho de que esto funciona tan bien.

Vamos a hacer una más ejemplos. Vamos a describir los simetrías, ciclos, orbitas de los vértices, aristas, y caras, de

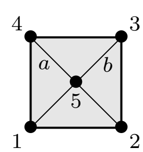


Ejercicios C.

Ej.4.1.1 Mire las acciones que definió ayer en cada objectos debaho y use Proposición 9 para contar el número de órbitas.



Ej.4.1.2 Considere las acciones de $C_4 = \{\mathbf{1}, a, a^2, a^3\}$ en el conjunto $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$ con los cinco vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los dos segmentos diagonales $\{a, b\}$ representados a continuación. Utilice Proposición 9 para contar el número de órbitas

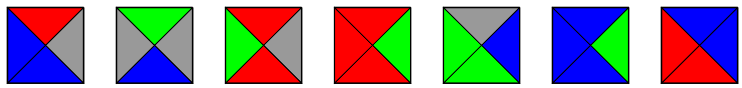


Ej.4.1.3 Muestra que H en Proposición 7 es un subgrupo.

Día 4

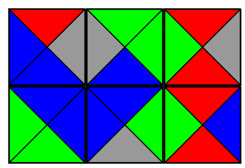
5. Coloración y teoría de Polya

Supongamos que noestra amiga Laura quiere crear un juego con piezas que son baldosa como



…???

El juego será embaldosar un tablero de 2×3 de modo que el color coincida donde la baldosa toca. Un buen juego terminará con un mosaico como este:



…???

Pero a ella le gustaría saber cuántos tipos de baldosas necesitamos, y cuántos juegos buenos diferentes serán posibles. Vamos a tratar de ayudar...

5.1. **Coloraciones de acciones.** Cuando tenemos un conjunto finito X, una **coloración** de X con ciertos colores es una función $w\colon X \to \{colores\}$. De hecho, si usted tiene un conjunto como $X = \{1, 2, 3\}$ y dos colores *rojo* y *azul*, puede hacer 8 coloraciones diferentes. A saber

123; 123; 123; 123; 123; 123; 123; 123;

Esto es lo mismo que las funciones $\{1, 2, 3\} \to \{rojo, azul\}$. Si C es un conjunto de colores, entonces denotamos por C^X el conjunto de todos las coloraciones de X por C. Ese es el conjunto de todas las funciones

$$C^X = \{w\colon X \to C \text{ función}\}$$

Para nuestro ejemplo anterior con $X = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{rojo, azul\}$ obtenemos

$$C^X = \{123, 123, 123, 123, 123, 123, 123, 123\}$$

Ahora, cuando un grupo G actúa sobre X, entonces G **también** actúa sobre el conjunto más grande de todos las coloraciones C^X de manera natural. De hecho, si $w \in C^X$, tomamos $(g.w)(x) = w(g^{-1}.x)$ y funciona. Aquí $g.w$ es una nueva función construida desde w. Necesitamos usar la inversa de g en esta definición para que el "tecnicismo" de la definición de acción funcione para la acción en C^X.

$$((hg).w)(x) = w((hg)^{-1}.x) = w((g^{-1}h^{-1}).x) = w(g^{-1}.(h^{-1}.x)) = (g.w)(h^{-1}.x)) = (h.(g.w))(x)$$

Puse esto aquí para mostrarle el tecnicismo en mostrar que $(hg).w = h.(g.w)$. Trate de entender cada igualdad. Este tecnicismo es importante para que las cosas funcionen bien, pero no jugará un gran papel al final.

Permítame trabajar con nuestro ejemplo y el grupo de permutaciones S_3 actuando sobre $X = \{1, 2, 3\}$ (permuta los números). Recordar que

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

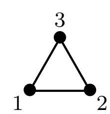
Y cada $\sigma \in S_3$ es una permutación $\sigma\colon X \to X$ y tenemos una acción. Sea $C = \{rojo, azul\}$ y considere $w \in C^X$. Por ejemplo, 123 es la función $w(1) = rojo$, $w(2) = azul$ y $w(3) = rojo$. Sea $\sigma = 231$ y compruebe que $\sigma^{-1} = 312$. Así que la nueva función $\sigma.w$ se define como sigue:

$$(\sigma.w)(1) = w(\sigma^{-1}(1)) = w(3) = rojo$$
$$(\sigma.w)(2) = w(\sigma^{-1}(2)) = w(1) = rojo$$
$$(\sigma.w)(3) = w(\sigma^{-1}(3)) = w(2) = azul$$

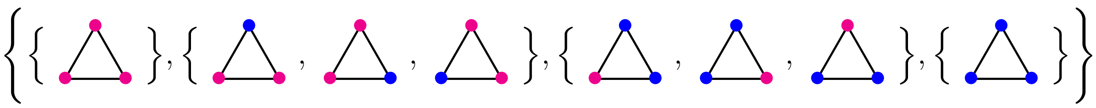
Así que $\sigma.w = 123$. Si observamos las órbitas de X con la acción de S_3 vemos que sólo hay una órbita (X es una sola órbita). Pero si miramos las órbitas de la acción sobre C^X, surge una imagen muy diferente:

$$C^X/S_3 = \Big\{\{123\}, \{123, 123, 123\}, \{123, 123, 123\}, \{123\}\Big\}$$

Podemos representar esto en un triángulo. Recordemos que $S_3 = D_3$ es la simetría del triángulo permitiendo volteretas y rotaciones

$X =$ 

El conjunto C^X/S_3 se puede representar como

$C^X/S_3 =$ 

Como puede ver, cada orbita representa **un** tipo posible de collar con tres perlas y dos colores de perlas diferentes. Así que podemos usar Proposición 9 para contar el número de posibilidades. Primero tenemos que averiguar qué es $Fix(g)$ para cada simetría en el conjunto C^X. Veamos primero nuestro ejemplo. Para $Id = 123 \in S_3$ es fácil como 123 siempre fija todo las coloraciones

$$Fix(Id) = C^X \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(123)\big| = |C|^{|X|} = 2^3 = 8$$

Luego miramos las otras permutaciones:

$$Fix(132) = \{123, 123, 123, 123\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(132)\big| = 4 = 2^2$$
$$Fix(213) = \{123, 123, 123, 123\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(213)\big| = 4 = 2^2$$
$$Fix(231) = \{123, 123\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(231)\big| = 2 = 2^1$$
$$Fix(312) = \{123, 123\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(312)\big| = 2 = 2^1$$
$$Fix(321) = \{123, 123, 123, 123\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(321)\big| = 4 = 2^2$$

Usando Proposición 9 obtenemos la respuesta correcta:

$$\big|C^X/S_3\big| = \frac{1}{6}(8+4+4+2+2+4) = \frac{24}{6} = 4$$

Notaste que $\big|Fix(g)\big|$ siempre es un potencia de $|C| = 2$, esto no es un accidente.

Proposición 10. *Sea G actúen sobre X. Como arriba obtenemos una acción de G sobre C^X. Para $g \in G$, tenemos que*

$$w \in Fix(g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w(x) = w(g.x) = w(g^2.x) = w(g^3.x) = \dots \text{ para todos los } x \in X$$

Es decir, w es constante durante los ciclos de g para la acción en X

Tenga cuidado aquí, tenemos **dos** acciones a considerar. La acción de G sobre X y la acción de G sobre C^X. Estamos interesados en el conjunto $Fix(g)$ para la acción de G en C^X, pero para calcularlo, utilizamos la acción de G sobre X. Vemos en la proposición que estamos interesados en los ciclos disjuntos de g sobre X. Recuerde que los ciclos de $g \in G$ se obtiene observando lo que sucede cuando aplicamos una potencia sucesiva de g a los elementos de X: $x \to g.x \to g^2.x \to \cdots$ hasta que regresemos a x. Si w está fijado por g, es decir $(g.w)(x) = w(x)$, entonces aplicando g^{-1} ambos lados obtenemos

$$w(x) = (g^{-1}.w)(x) = w(g.x)$$

Aplicando g^{-1} de nuevo a la igualdad arriba obtenemos

$$w(g.x) = (g^{-1}.w)(x) = (g^{-2}.w)(x) = w(g^2.x)$$

Y podemos seguir así para mostrar una de las implicaciones de la Proposición 10.

En la notación de ciclos, la permutación 213 es $(1\,2)(3)$. Mire otra vez $Fix(213)$ y de hecho todos los coloraciones del conjunto tienen el mismo color para el ciclo $(1\,2)$ y para el ciclo (3). Por otro lado, 231 es un sólo ciclo $(1\,2\,3)$ y sólo 2 colores son constantes en este ciclo. Les dejo a ustedes ver el recíproco de la proposición anterior. Lo que hemos visto hasta ahora es que cuando G actúa sobre C^X tenemos

$$\left|Fix(g)\right| = |C|^{|cyc_X(g)|}$$

donde $cyc_X(g)$ es la descomposición del ciclo de g para la acción en X.

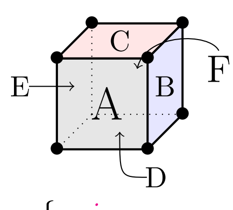
Teorema 11. *Dado G actuando en X. Tenemos que G actúa sobre C^X. Sea $c = |C|$,*

$$\left|C^X/G\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c^{|cyc_X(G)|}$$

Usted entiende que esto viene de la Proposición 9 y Proposición 10.

Ejercicios D.

Nuestra amiga Laura que acaba de aprender sobre este teorema está bastante segura de que podemos usarlo para resolver su pregunta. Hagamos eso juntos ... primero un poco de calentamiento.

Ej.5.1 Deje que B_3 actúe sobre el cubo 

y sea $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ el conjunto de caras. Considere $C = \{rojo, negro, azul, verdura\}$ y B_3 actua en los coloraciones C^X. Ahora responda a la primera pregunta que teníamos: cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir.

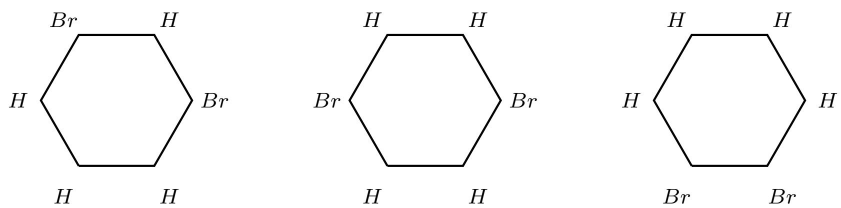
Ej.5.2 Ahora responde a la segunda pregunta que hemos visto: ¿cuántos collares de longitud 8 con 3 tipos de perlas podemos hacer? [Sugerencia: use D_8 actua sobre un octágono]

Ej.5.3 Resuelve las dos preguntas de Laura. Tenga en cuenta que las baldosas están coloreadas en un solo lado.

Día 5

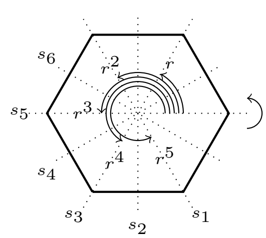
6. Teoria de Polya

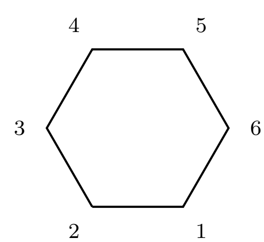
Hoy, Laura dijo que es una mala idea tener el mismo color en una sola teja más de dos veces. Esto haría el juego más interesante si no permitimos el mismo color más de dos veces en cada teja. ¿Pero ahora todo nuestro conteo necesita ser rehecho? No está segura de que podamos resolver su problema. Pero ella oyó que un químico nombre Polya tenía un problema similar y encontró una solución. La molécula $C_6H_4Br_2$ es 6 átomos de carbono (C) en un hexágono y los átomos de hidrógeno (H) y Bromo (Br) se unen de forma circular alrededor de él. Pero en la naturaleza hay más de una posibilidad y la molécula puede tener un comportamiento diferente dependiendo de la configuración



Quería también entender la posible configuración de una molécula más compleja y para ello necesitaba refinar el principio de contar y poder contar coloraciones con un tipo de colores especificado (cuántos de cada color). Para esto necesitamos refinar nuestra grabación de conteo cuáles colores fueron usados.

Vamos a seguir un ejemplo. Recuerde que $D_6 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ actúan sobre el hexágono como se muestra abajo y esto define una acción en los vértices $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:





Hemos visto en Teorema 11 que el número de ciclos para cada elemento del grupo desempeña un papel importante en el conteo de coloraciones. Si queremos refinar nuestro conteo, ahora tenemos que estudiar exactamente el tipo de ciclos de cada elemento de D_6 usando la representación de permutaciones con respecto a X. Para ello utilizaremos monomio para codificar el tipo de ciclos de cada elemento. Por ejemplo, si un elemento tiene 2 ciclos de longitud 1, 3 ciclos de longitud 2 y 1 ciclo de longitud 4, entonces lo codificaremos con un monomio

$$x_1^2 x_2^3 x_4$$

En general, el exponente de x_i es el número de ciclos de longitud i en nuestra representación de permutaciones del elemento. Por D_6 actuando sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ arriba tenemos

elemento de D_6	tipo de ciclos	monomio de cyclos
1	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	x_1^6
r	(1 2 3 4 5 6)	x_6
r^2	(1 3 5)(2 4 6)	x_3^2
r^3	(1 4)(2 5)(3 6)	x_2^3
r^4	(1 5 3)(2 6 4)	x_3^2
r^5	(1 6 5 4 3 2)	x_6
s_1	(1)(4)(2 6)(3 5)	$x_1^2x_2^2$
s_2	(1 2)(3 6)(4 5)	x_2^3
s_3	(2)(5)(1 3)(4 6)	$x_1^2x_2^2$
s_4	(2 3)(1 4)(5 6)	x_2^3
s_5	(3)(6)(2 4)(1 5)	$x_1^2x_2^2$
s_6	(3 4)(2 5)(1 6)	x_2^3

Ahora ponemos toda esta información en un polinomio (la suma de todos los monomios) que producimos

$$P_{D_6,X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12}\left(x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2\right)$$

Llamamos a esto el **polinomio índicador de ciclos** de la representación de permutaciones de D_6. El factor $\frac{1}{12}$ está ahí, ya que jugará un papel en el resultado final. Este polinomio no utiliza las variables x_4 y x_5 en este caso.

En general, considere un grupo G que actúa sobre un conjunto finito X donde $n = |X|$. El índice de ciclos de la representación de permutaciones de G sobre X es

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{G}\sum_{g\in G} x_1^{|cyc_{X,1}(g)|} x_2^{|cyc_{X,2}(g)|} \cdots x_n^{|cyc_{X,n}(g)|}$$

donde $cyc_{X,i}(g)$ es el número de ciclos de longitud i en la representación de permutaciiones de g con X. Observamos de inmediato que si coloreamos la acción con $c = |C|$ colores, Teorema 11 se puede escribir como sigue

$$\left|C^X/G\right| = P_{G,X}(c, c, ..., c).$$

¿Ves esto?

Por D_6

$$P_{D_6,X}(c, c, c, c, c, c) = \frac{1}{12}\left(c^6 + 2c + 2c^2 + 4c^3 + 3c^2c^2\right) = \frac{1}{12}\left(c^6 + 2c + 2c^2 + 4c^3 + 3c^{2+2}\right).$$

Ahora el exponente de c en el lado derecho, cuenta exactamente el número de ciclos como en Teorema 11.

Si queremos refinar nuestro conteo, podemos usar el polinomio índicador de ciclo que conoce el tamaño de cada ciclo. Recuerde que un colorante debe respetar los ciclos de un elemento para ser fijado por este elemento. La variable x_i en el polinomio índicador de ciclos aporta un ciclo de longitud i. En lugar de sustituir $x_i \leftarrow c$, podemos intentar mantener un registro de qué color se usó y cuántas veces. La manera de codificar que con la función de generación es hacer

$$x_i \leftarrow a_1^i + a_2^i + \cdots + a_c^i$$

Entendemos el lado derecho como "eligiendo" (el "+") un color de $\{a_1, a_2, \ldots, a_c\}$ y usándolo i-veces.

Veamos lo que sucede cuando hacemos esto con $P_{D_6,X}$ teniendo dos colores $\{a, r\}$:

$$P_{D_6,X}(a+r, a^2+r^2, a^3+r^3, a^4+r^4, a^5+r^5, a^6+r^6)$$
$$= \frac{1}{12}\big((a+r)^6 + 2(a^6+r^6) + 2(a^3+r^3)^2 + 4(a^2+r^2)^3 + 3(a+r)^2(a^2+r^2)^2\big)$$

Vamos a expandir cada monomio:

$$\begin{aligned}
&(a+r)^6 = a^6 + 6a^5r + 15a^4r^2 + 20a^3r^3 + 15a^2r^4 + 6ar^5 + r^6\\
&a^6 + r^6 = a^6 + r^6\\
&(a^3+r^3)^2 = a^6 + 2a^3r^3 + r^6\\
&(a^2+r^2)^3 = a^6 + 3a^4r^2 + 3a^2r^2 + r^6\\
&(a+r)^2(a^2+r^2)^2 = (a^2 + 2ar + r^2)(a^4 + 2a^2r^2 + r^4)\\
&\qquad = a^6 + 2a^5r + 3a^4r + 2a^3r + 3a^2r + 2ar^5 + r^6
\end{aligned}$$

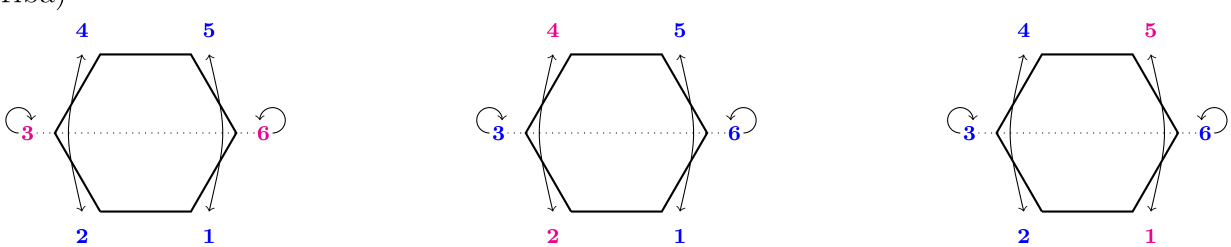
Cada expansión monomial "cuenta" el número de coloracioes fijado por un elemento de D_6. Por ejemplo, $s_5 \in D_6$ tiene ciclos $(3)(6)(2\,4)(1\,5)$. Sabemos que un color será fijado una vez que escojamos un color para 3, 6, $\{2, 4\}$ (misma color) y $\{1, 5\}$ (misma color). El monomio de cyclos es $x_1^2x_2^2$. Cuando sustituimos $x_1 \leftarrow a + r$ y $x_2 \leftarrow a^2 + r^2$ producimos todas las opciones de elegir un color $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$ para 3, 6, $\{2, 4\}$ y $\{1, 5\}$, respectivamente. Entonces, la expansión

$$a^6 + 2a^5r + 3a^4r + 2a^3r + 3a^2r + 2ar^5 + r^6$$

Nos da un refinamiento de contar los coloraciones que se fijan por s_5 teniendo en cuenta cuántas veces se utiliza un color. Por ejemplo, el coeficiente 3 delante de a^4r^2 significa que hay 3 colores que serán fijados por s_5 con cuatro a y Dos r. Cuando expandimos $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$ podemos obtener a^4r^2 de tres maneras diferentes:

$$(a+\underline{\mathbf{r}})(a+\underline{\mathbf{r}})(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)$$
$$(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a}}+r)(a+\underline{\mathbf{r^2}})(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)$$
$$(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)(a+\underline{\mathbf{r^2}})$$

Cada forma de obtener el monómico a^4r^2 corresponde exactamente a una opción de color que se fija por s_5 seleccionando el color que ponemos en cada ciclo 3, 6, $\{2, 4\}$ y $\{1, 5\}$ respectivamente. Son (enumerados de la misma manera que conseguimos los monomios arriba)



Donde aquí coloreé el elementos de X rojo para los r y azul para los a. Entonces si continuamos nuestra expansión de $P_{D_6,X}$

$$
\begin{aligned}
P_{D_6,X}&(a+r, a^2+r^2, a^3+r^3, a^4+r^4, a^5+r^5, a^6+r^6)\\
&= \tfrac{1}{12}\big(12a^6 + 12a^5r + 36a^4r^2 + 24a^3r^3 + 36a^2r^4 + 12ar^5 + 12r^6\big)\\
&= a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6
\end{aligned}
$$

Cuando hacemos esto, delante de cada monomio usamos Proposici ón 9 para cada distribución de colores por separado. Entonces

$$P_{D_6,X} = a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6$$

Nos da la distribución de coloraciones posible dependiendo de cuántas veces se utiliza cada color. De hecho la pregunta de Polya se responde ya que hay exactamente tres coloraciones posibles de un exagón usando 2 Br y 4 H. Es el coeficiente de a^2r^4 en $P_{D_6,X}$ después de la sustitución $x_i \leftarrow a^i + r^i$.

Resumimos todo nuestro entendimiento general como sigue

Teorema 12 (Polya)**.** *Dado un grupo G actuando sobre un conjunto X. Sea $c = |C|$ y considere la acción de G sobre C^X.*

(a) *Calcule $P_{G,X}$ y*

$$P_{G,X}(c, c, \ldots, c) = \left|C^X/G\right|$$

(b) *Calcule la sustitución $x_i \leftarrow a_1^i + a_2^i + \cdots + a_c^i$ in $P_{G,X}$. El coeficiente de $a_1^{d_1}a_2^{d_2}\cdots a_c^{d_c}$ en el polinomio resultante es el número de coloraciones de X con el color a_i usado d_i veces.*

Ejercicios E.

Ahora trataremos de resolver la pregunta de Laura. Una vez más, permite calentar un poco antes

Ej.6.1 Elige una representación de permutaciones que tengamos encuentro esta semana y
- (a) Dé el polinomio índicador de ciclos
- (b) Contar el número de coloraciones usando 3 colores
- (c) Contar el número de coloraciones usando 3 colores, pero no repetir ningún color en una coloración
- (d) Contar el número de coloraciones usando 3 colores, pero teniendo un color repetido una vez.

Ej.6.2 Contar el número de manera de construir baldosas de la Laura sin colores utilizados más de dos veces.

Ej.6.3 ¿Puedes contar el número de los buenos 2×3 embaldosados de Laura usando sólo los azulejos de Ej.6.2?

Ej.6.4 ¿Puede usted hacer coloraciones en la dimensión más alta? (Coloraciones de un politopo)?

References

1. Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson (2010).
2. G. Pólya and R. C. Read *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* Springer-Verlag (1987).

Nantel Bergeron, Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, Ontario M3J 1P3, Canada

E-mail address: bergeron@mathstat.yorku.ca

URL: http://www.math.yorku.ca/bergeron/