

# Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

## Notas de Clase

### Días de Combinatoria 2017

Rafael S. González D'León

19 de julio de 2017

#### Resumen

Notas de clase del minicurso de introducción a los conjuntos parcialmente ordenados y retículos. La mayor parte de estas notas está basada en la obra y notas de clase de Richard Stanley [2, Capítulo 3] y en el artículo de Federico Ardila [1, Sección 4] para la parte de conjuntos parcialmente ordenados; y en las notas de clase de Michelle Wachs [3] para la parte de topología de conjuntos parcialmente ordenados.

## Índice

<b>1. Conjuntos Parcialmente Ordenados</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	1
1.2. Mapas entre posets . . . . .	3
1.3. Construcciones y operaciones entre posets . . . . .	6
<b>2. Retículos</b>	<b>6</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	6
2.2. Retículos distributivos . . . . .	7
2.3. Retículos geométricos . . . . .	9
<b>3. Álgebras de incidencia y la función de Möbius</b>	<b>11</b>
3.1. Álgebras de incidencia . . . . .	11
3.1.1. Algunas funciones en $I(P)$ . . . . .	12
3.2. Calculando la función de Möbius . . . . .	13
3.3. La formula de inversión de Möbius . . . . .	14
<b>4. Topología de posets</b>	<b>16</b>

## 1. Conjuntos Parcialmente Ordenados

### 1.1. Definiciones básicas

**Definición 1.1.** Un conjunto parcialmente ordenado, también llamado *po-conjunto* o *poset* (por su nombre en inglés), es un par  $(P, \leq)$  en donde  $P$  es un conjunto y  $\leq$  es una *relación de orden*, o sea una relación binaria que es:

- (I). (Reflexiva) Para todo  $x \in P$  se tiene  $x \leq x$ .
- (II). (Antisimétrica) Para  $x, y \in P$  se tiene que  $x \leq y$  y  $y \leq x$  implica  $x = y$ .
- (III). (Transitiva) Para  $x, y, z \in P$  se tiene que  $x \leq y$  y  $y \leq z$  implica  $x \leq z$ .

Uno de los ejemplos más simples que se puede dar de un conjunto parcialmente ordenado es el de una colección  $\mathcal{C}$  de conjuntos relacionados por la relación de inclusión no estricta " $\subseteq$ ". En donde  $A \subseteq B$  quiere decir que todo elemento de  $A$  es también un elemento de  $B$ . En esta relación tenemos que para todo conjunto  $A$  es cierto que  $A \subseteq A$ , verificando la relación reflexiva. Adicionalmente se verifican fácilmente la antisimetría ya que  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$  implican que  $A$  y  $B$  tienen los mismos elementos (o sea  $A = B$ ) y la transitividad ya que  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$  claramente implican  $A \subseteq C$ . Nótese que en una clase de conjuntos  $\mathcal{C}$  pueden existir dos conjuntos  $A$  y  $B$  para los cuales  $A \not\subseteq B$  y  $B \not\subseteq A$  y entonces  $A$  y  $B$  no están relacionados o son *incomparables*, de ahí el nombre de orden **parcial**. Un conjunto parcialmente ordenado  $P$  se llama *orden total* o *cadena* si para cualquier par de elementos  $x, y \in P$  tenemos que  $x$  y  $y$  son comparables, o sea  $x \leq y$  o  $y \leq x$ .

Se usa frecuentemente la notación  $x \leq_P y$  para aclarar que la relación de orden es la asociada a  $(P, \leq)$ . Cuando la relación de orden es clara en el contexto normalmente abusaremos de la notación y diremos que  $P$  es un poset sin hacer referencia a la relación de orden. También decimos que  $x < y$  cuando  $x \leq y$  pero  $x \neq y$ . Si  $x \leq y$  en  $P$  y no existe un  $z \in P$  tal que  $x < z < y$  entonces diremos que  $y$  *cubre* a  $x$  y lo denotamos  $x < y$ .

**Ejemplo 1.2.** Denotemos  $\mathbb{B}_S$  al conjunto potencia (algunas veces se usa  $\mathcal{P}([n])$  o  $2^{[n]}$ ) de un conjunto  $S$ , es decir el conjunto de subconjuntos de  $S$ . En particular cuando  $S = [n] := \{1, 2, \dots, n\}$  denotamos  $B_n := B_S$ . Usando el mismo orden dado por inclusión descrito anteriormente podemos considerar  $\mathbb{B}_n$  como un poset y llamaremos este poset *el álgebra de Boole sobre  $[n]$*  o *el poset de subconjuntos de  $[n]$* . El *diagrama de Hasse* de un poset  $P$  es un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de  $P$  y cuyas aristas dirigidas son las relaciones de cobertura en  $P$ . En la Figura 1a se ilustra el diagrama de Hasse de  $\mathbb{B}_3$ .

**Ejemplo 1.3.** Una *cadena* es un poset en donde sus elementos están totalmente ordenados. En particular los reales  $\mathbb{R}$ , los enteros  $\mathbb{Z}$  y los naturales  $\mathbb{N}$  forman una cadena de acuerdo a su orden usual. Estas cadenas son cadenas infinitas. Vamos a denotar  $\mathbf{n}$  ó  $C_n$  a la cadena que sus elementos son  $[n]$  y en donde  $x \leq y$  en  $\mathbf{n}$  de acuerdo al orden usual de los enteros. Llamamos  $\mathbf{n}$  la *cadena de orden  $n$*  (o la *cadena de longitud  $n - 1$* , razón que es aparente en el diagrama de Hasse de la Figura 1c).

**Ejemplo 1.4.** El conjunto  $D_n$  de divisores enteros positivos del entero  $n$  puede considerarse como un poset con la relación de orden parcial dada por  $x \leq y$  siempre que  $x|y$  ( $x$  dividida a  $y$ ).  $D_n$  se es conocido como el *poset de divisibilidad de  $n$*  o el *poset de divisores de  $n$* , ver la Figura 1d.

**Ejemplo 1.5.** Una partición de un conjunto  $S$  es una colección  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  de subconjuntos disjuntos (también llamados *bloques*) de  $S$  tal que su unión  $\cup_{i=1}^k B_i = S$ . Sea  $\Pi_n$  el conjunto de particiones de  $[n]$  y para  $\pi, \pi' \in \Pi_n$  decimos que  $\pi$  es un *refinamiento* de  $\pi'$  si para cada bloque  $B \in \pi$  hay un bloque  $B' \in \pi'$  tal que  $B \subseteq B'$ . Podemos verificar que  $\Pi_n$  tiene la estructura de poset con la relación dada por refinamiento, o sea,  $\pi \leq \pi'$  siempre que  $\pi$  sea un refinamiento de  $\pi'$ . Llamamos a  $\Pi_n$  el *poset de particiones*. La Figura 1b ilustra el diagrama de Hasse de  $\Pi_3$ .

*Observación 1.6.* Si en la definición 1.1 la relación  $\leq$  solamente satisface las propiedades (i) y (ii), el par  $(P, \leq)$  es llamado un preorden o *preposet*. Si en un preposet consideramos la relación de

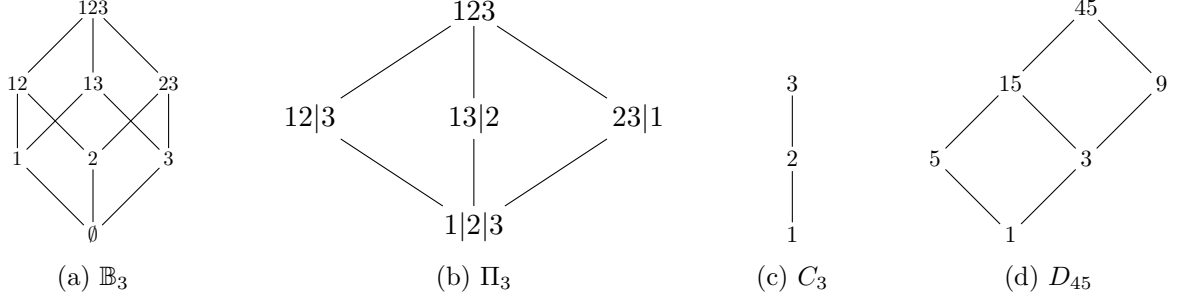


Figura 1: Ejemplos de posets

equivalencia  $x \sim y$  siempre que  $x \leq y$  y  $y \leq x$  en  $P$ , entonces  $\leq$  induce un orden parcial en el conjunto de clases de equivalencia. En la Figure 2 se ilustra un ejemplo del diagrama de Hasse de las clases de equivalencia de un preposet sobre el conjunto  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . En este caso tenemos por ejemplo que  $b \leq c$  y  $c \leq b$  pero  $b \neq c$ .

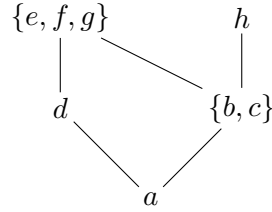


Figura 2: Diagrama de Hasse de un preposet

*Observación 1.7.* Decimos que un poset  $P$  es *finito* si  $|P| < \infty$ . En un poset finito es suficiente con describir las relaciones de cobertura para describir todo el poset (véase la Figura 1). Esto no es cierto para un poset infinito, por ejemplo en  $\mathbb{R}$  con su relación de orden total clásica no existen relaciones de cobertura. En este minicurso trabajaremos con posets finitos a no ser de que se especifique lo contrario.

## 1.2. Mapas entre posets

**Definición 1.8.** Una *función monótona, preservante de orden, mapa de posets o morfismo de posets* es una función  $f : P \rightarrow Q$  en donde  $P$  y  $Q$  son posets y siempre que  $x \leq_P y$  tenemos que  $f(x) \leq_Q f(y)$ . Un *isomorfismo* entre los posets  $P$  y  $Q$  es una biyección monótona  $f : P \rightarrow Q$  tal que su inversa  $f^{-1} : Q \rightarrow P$  también es monótona. En el lenguaje de la teoría de categorías diríamos que un isomorfismo de posets es un isomorfismo en la categoría  $\mathcal{Poset}$  formada por posets y funciones monótonas.

**Definición 1.9.** Para un poset  $P$  definimos su *poset dual*  $P^*$  como el poset formado por el mismo conjunto de elementos que  $P$  pero tal que  $x \leq_{P^*} y$  si y solo si  $y \leq_P x$ . En el ejemplo de la Figura 3 están los diagramas de Hasse de un poset y su dual.

**Proposición 1.10.** El algebra de Boole  $\mathbb{B}_n$  es auto-dual, es decir,  $\mathbb{B}_n \cong \mathbb{B}_n^*$ .

*Demostración.* El mapa definido por  $A \mapsto [n] \setminus A$  para cada  $A \subseteq [n]$  es una biyección que claramente es monótona y su inversa es monótona, osea es un isomorfismo de posets.  $\square$

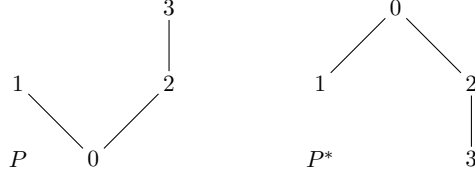


Figura 3: Un par de posets duales

**Ejemplo 1.11.** Una *composición de  $n$*  es una sucesión finita de enteros positivos cuya suma es igual a  $n$ . Por ejemplo  $(2, 1, 1, 3, 1)$  es una composición de 8. Denotemos  $\text{COMP}_n$  al conjunto de composiciones de  $n$ . Para  $\nu, \mu \in \text{COMP}_n$  definimos la relación de cobertura  $\nu \leq \mu$  si  $\mu$  puede ser obtenido de  $\nu$  sumando entradas adyacentes, por ejemplo  $(2, 1, 1, 3, 1) \leq (2, 1, 4, 1)$ .

**Proposición 1.12.** *Tenemos que  $\text{COMP}_n \cong \mathbb{B}_{n-1}$ .*

*Demostración.* Sea  $f : \text{COMP}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-1}^*$  la función definida por  $f(\mu) = \{\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \dots, \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{|\mu|-1}\}$  en donde  $|\mu|$  es el número de elementos en  $\mu$ .

- **$f$  es una biyección:**  $f$  tiene una inversa  $f^{-1} : \mathbb{B}_{n-1}^* \rightarrow \text{COMP}_n$  definida  $f^{-1}(A) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{|A|} - a_{|A|-1}, n - a_{|A|})$  para  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{|A|}\}$ .
- **$f$  es monótona:** Sea  $\mu \leq \nu$ , para algún  $r \in [|\mu| - 1]$  tenemos que  $\nu_i = \mu_i$  siempre que  $i < r$ ,  $\nu_r = \mu_r + \mu_{r+1}$  y  $\nu_i = \mu_{i+1}$  siempre que  $i > r$ . Entonces  $\sum_{j=1}^i \nu_j = \sum_{j=1}^i \mu_j$  cuando  $i < r$ , y  $\sum_{j=1}^i \nu_j = \sum_{j=1}^{i+1} \mu_j$  cuando  $i \geq r$  y entonces  $f(\mu) \supseteq f(\nu)$ . Como estamos trabajando con posets finitos solo tenemos que chequear que  $f$  es monótona en relaciones de cobertura ya que a la conclusión se llega por inducción.
- **$f^{-1}$  es monótona:** Sea  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{|A|}\} \supseteq B = \{a_1 < a_2 < \dots < \hat{a}_r < \dots < a_{|A|}\}$  una relación de cobertura en  $\mathbb{B}_{n-1}^*$ , en donde  $\hat{a}_r$  indica que el elemento  $a_r$  lo hemos removido de  $A$ . Entonces por definición tenemos que  $f^{-1}(B)_i = f^{-1}(A)_i$  para  $i < r$ ,  $f^{-1}(B)_r = a_{r+1} - a_{r-1} = a_{r+1} - a_r + a_r - a_{r-1} = f^{-1}(A)_r + f^{-1}(A)_{r+1}$  y  $f^{-1}(B)_i = f^{-1}(A)_{i+1}$  para  $i > r$ .  $\square$

**Proposición 1.13.** *Si  $f : P \rightarrow P$  es una biyección monótona y  $P$  es un poset finito entonces  $f$  es un automorfismo de posets.*

*Demostración.* Si  $f$  es el mapa identidad entonces la conclusión es trivial, en cualquier otro caso como  $f$  es una biyección sobre el mismo conjunto entonces es una permutación de  $P$ . Como  $P$  es finito entonces  $f$  tiene orden finito en el grupo permutaciones de  $P$ , osea para algún  $k > 1$  tenemos que  $f^k = \text{Id}$ . Tenemos entonces que  $f^{-1} = f^{k-1}$  es un mapa monótono ya que la composición de mapas monótonos es un mapa monótono.  $\square$

**Ejemplo 1.14.** La conclusión de la Proposición 1.13 no se cumple cuando  $P$  no es finito. Consideremos por ejemplo el poset infinito  $P$  de la Figura 4 y el mapa  $f : P \rightarrow P$  dado por  $f(i) = i$  y  $f(i') = (i + 1)'$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Este mapa es una biyección monótona pero su inversa no es monótona.

**Definición 1.15.** A un poset  $Q$  lo llamamos *subposet en el sentido débil* de un poset  $P$  si  $Q \subseteq P$  como conjuntos y para cada  $x, y \in Q$  tenemos que  $x \leq_Q y$  implica que  $x \leq_P y$ , en otras palabras, el mapa de inclusión  $Q \hookrightarrow P$  es un mapa de posets. Si  $Q = P$  como conjuntos entonces decimos que  $P$

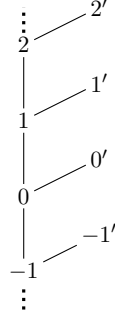


Figura 4

es un *refinamiento* de  $Q$ . Decimos que  $Q$  es un *subposet (inducido)* de  $P$  si  $Q \subseteq P$  como conjuntos y para  $x, y \in Q$  tenemos que  $x \leq_Q y$  si y solo si  $x \leq_P y$ . En otras palabras, un subposet de  $P$  se obtiene al tomar un subconjunto  $Q$  de  $P$  junto con todas las relaciones que tienen los elementos de  $Q$  en  $P$ .

Dos ejemplos particulares de subposets son los intervalos cerrados  $[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$  y los intervalos abiertos  $(x, y) := \{z \in P \mid x < z < y\}$ . De un poset en el cual todo intervalo es finito se dice que es *localmente finito*. Por ejemplo la cadena infinita  $\mathbb{Z}$  de enteros con su orden natural es localmente finita. Las cadenas de subposet  $P$  son todos los subposets de  $P$  cuyo orden inducido sea total. Una cadena  $C \subseteq P$  es *saturada* si no hay un  $z \in P \setminus C$  tal que  $x < z < y$  para todo par de elementos  $x, y \in C$  tal que  $C \cup \{z\}$  es también una cadena. Una cadena es *máxima* si no hay un  $z \in P \setminus C$  tal que  $C \cup \{z\}$  sea también una cadena. La *longitud* de un poset se define como  $\ell(P) := \{|C| \mid C \subseteq P \text{ es una cadena}\}$ . A un poset se le llama *puro, graduado o ranqueado* si todas las cadenas maximas tienen la misma longitud. A un elemento  $x \in P$  se le llama *minimal (maximal)* si no hay un elemento  $z \in P$  tal que  $z < x$  ( $z > x$ ). Denotaremos  $\text{Min}(P)$  ( $\text{Max}(P)$ ) al conjunto de elementos minimales (maximales) de  $P$ .

**Proposición 1.16.** *Si  $P$  es un poset finito graduado entonces existe una función bien definida  $\rho : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  (llamada función de grado) tal que  $\rho(x) = 0$  siempre que  $x \in \text{Min}(P)$  y si  $x < y$  entonces  $\rho(y) = \rho(x) + 1$ .*

Cuando  $P$  es graduado con función de grados  $\rho$  decimos que el *grado* de un elemento  $x$  es  $\rho(x)$ . La *función generadora por grados* de  $P$  es el polinomio

$$F(P, t) := \sum_{x \in P} t^{\rho(x)} = \sum_{k=0}^{\ell(P)} W(P, k) t^k,$$

en donde

$$W(P, k) := \sum_{\substack{x \in P \\ \rho(x)=k}} 1$$

se llaman los *números de Whitney del segundo tipo*.

**Ejemplo 1.17.** (a)  $F(C_n, t) = 1 + t + \cdots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = [n + 1]_t$ .

(b)  $F(\mathbb{B}_n, t) = (1 + t)^n$ .

(c)  $F(\Pi_n, t) = \sum_{k=0}^{n-1} S(n, n - k) t^k$  en donde  $S(n, k)$  es el número de particiones de  $[n]$  en exactamente  $k$  bloques, también conocidos como *números de Stirling del segundo tipo*.

### 1.3. Construcciones y operaciones entre posets

**Definición 1.18.** Entre posets  $P$  y  $Q$  también tenemos las siguientes operaciones

- (I) (Union disjunta) La *union disjunta o suma directa*  $P+Q$  se define como el poset cuyo conjunto de elementos es  $P \sqcup Q$  y cuya relación de orden está dada por  $x \leq_{P+Q} y$  si y solo si  $x \leq_P y$  o  $x \leq_Q y$ .
- (II) (Producto directo) El *producto directo o producto cartesiano*  $P \times Q$  es el poset cuyo conjunto de elementos es  $P \times Q$  y cuya relación de orden esta dada por  $(x, x') \leq_{P \times Q} (y, y')$  si y solo si  $x \leq_P y$  y  $x' \leq_Q y'$ .
- (III) (Sum ordinal) La *suma ordinal*  $P \oplus Q$  es el poset en  $P \sqcup Q$  cuya relación de orden esta dada por  $x \leq_{P \oplus Q} y$  si y solo si  $x \leq_P y$ ,  $x \leq_Q y$  ó  $x \in P$  y  $y \in Q$ .
- (IV) (Producto ordinal) El *producto ordinal o producto diccionario*  $P \otimes Q$  es el poset con elementos  $P \times Q$  y cuya relación de orden está dada por  $(x, x') \leq_{P \otimes Q} (y, y')$  si y solo si  $x \leq_P y$  ó  $x = y$  y  $x' \leq_Q y'$ .
- (V) (Potencia) Denotamos  $Q^P$  al poset formado por todos los mapas monótonos  $f : P \rightarrow Q$  con relación de orden dada por  $f \leq g$  para  $f, g \in Q^P$  si  $f(t) \leq g(t)$  para todo  $t \in P$ .

## 2. Retículos

### 2.1. Definiciones básicas

Sea  $P$  un poset. Para un subconjunto  $A \subseteq P$  decimos que  $u \in P$  es una *cota superior* de  $A$  si  $u \geq x$  para todo  $x \in A$ . A  $u$  le llamamos *cota superior mínima, supremo o juntura* (en inglés se usa comúnmente la palabra “join”) de los elementos de  $A$  si para cualquier otra cota superior  $z$  se cumple que  $z \geq u$ . De la misma manera definimos el concepto de *cota inferior* de  $A$  como un elemento  $l \in P$  tal que  $l \leq x$  para todo  $x \in A$  y a  $l$  le llamamos *cota inferior máxima, infimo o concurrencia* (en inglés se usa comúnmente la palabra “meet”) si cualquier otra cota inferior  $z$  cumple que  $z \leq l$ . Usaremos la notación  $\vee A$  y  $\wedge A$  para la juntura y concurrencia de  $A$  respectivamente siempre que existan, y cuando  $A = \{x, y\}$  tenga solo dos elementos usaremos la notación  $x \vee y$  y  $x \wedge y$ . En el poset de la Figura 5 tenemos que  $y \vee w = r$  pero el conjunto  $\{y, w\}$  no tiene una concurrencia ya que  $x$  y  $z$  son ambos cotas inferiores de  $\{y, w\}$  pero  $x$  y  $z$  son incomparables. En un poset  $P$  denotamos  $\hat{1} = \wedge P$  y  $\hat{0} = \vee P$  en caso de que estos elementos existan y los llamamos respectivamente elementos *tope* y *base*. A un poset que tenga ambos, un elemento tope y un elemento base, le llamamos *acotado*.

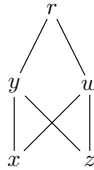


Figura 5

**Definición 2.1.** Un *retículo* es un poset  $L$  en el cuál todo par de elementos  $x, y \in P$  tiene una juntura  $x \vee y$  y una concurrencia  $x \wedge y$ .

**Ejemplo 2.2.** (a)  $\mathbb{N}$  es un retículo en el cuál  $x \wedge y = \min\{x, y\}$  y  $x \vee y = \max\{x, y\}$ .

(b)  $\mathbb{B}_n$  es un retículo en el cuál  $A \wedge B = A \cap B$  y  $A \vee B = A \cup B$ .

(c)  $\Pi_n$  es un retículo en donde  $\pi \wedge \pi' = \{B \cap B' \mid B \in \pi, B' \in \pi'\}$  y  $\pi \vee \pi'$  es la partición más fina con la propiedad de que si  $B \in \pi$  y  $B' \in \pi'$  tienen una intersección no vacía  $B \cap B' \neq \emptyset$  entonces ambos  $B \subseteq X$  y  $B' \subseteq X$  para algún bloque  $X \in \pi \vee \pi'$ .

(d)  $D_n$  es un retículo en el cuál  $x \wedge y = \gcd(x, y)$  y  $x \vee y = \text{lcm}(x, y)$ .

**Definición 2.3.** A un poset  $P$  se le conoce como *semiretículo por concurrencia* (*semiretículo por juntura*) si todo par de elementos en  $P$  tiene un ínfimo (supremo).

**Proposición 2.4.** Un semiretículo por concurrencia finito con un  $\hat{1}$  es un retículo.

*Demostración.* Para mostrar que cada par de elementos  $x, y \in P$  tienen también una juntura en  $P$  consideremos el conjunto

$$A = \{z \in P \mid z \geq x \text{ y } z \geq y\}$$

(nótese que  $|A| < \infty$ ). Entonces  $l := \bigwedge_{a \in A} a$  es una cota superior mínima para  $x$  y  $y$ .  $\square$

*Observación 2.5.* La Proposición 2.4 falla cuando  $P$  no es finito, considerese por ejemplo el poset  $\{\hat{0}\} \oplus (C_0 + C_0) \oplus \mathbb{N}^*$ .

**Ejemplo 2.6.** El poset  $\mathbb{B}_{\leq k}$  formado por los subconjuntos de  $[n]$  de cardinalidad a lo sumo  $k$  o exactamente  $n$  es un retículo.

## 2.2. Retículos distributivos

**Definición 2.7.** Un retículo  $L$  se dice que es *distributivo* si satisface las leyes distributivas:

(D1)  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  para todo  $x, y, z \in L$ .

(D2)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  para todo  $x, y, z \in L$ .

*Observación 2.8.* Un retículo satisface la propiedad (D1) si y sólo si satisface la propiedad (D2).

**Ejemplo 2.9.** Las operaciones sobre conjuntos  $\wedge = \cap$  y  $\vee = \cup$  cumplen con las propiedades (D1) y (D2) entonces  $\mathbb{B}_n$  es un retículo distributivo.

Un *ideal de orden (inferior)*  $I$  es un subconjunto de  $P$  tal que si  $x \in I$  y  $z \leq x$  entonces  $z \in I$ . Similarmente un *ideal de orden superior o filtro*  $U$  es un subconjunto de  $P$  tal que si  $x \in U$  y  $x \leq z$  entonces  $z \in U$ . Como estamos trabajando con posets finitos, podemos caracterizar un ideal de orden  $I$  por su conjunto de elementos maximales  $\text{máx } I$ . Nótese que todo par de elementos en  $\text{máx } I$  es incomparable, un conjunto con esta propiedad se conoce como una *anticadena*. Cómo cada anticadena también describe un ideal de orden entonces hay una biyección entre anticadenas de  $P$  e ideales de orden de  $P$ . Para un subconjunto  $A \subseteq P$  denotamos  $I(A) := \{z \in P \mid z \leq x \text{ para algún } x \in A\}$  el ideal de orden generado por  $A$  y si  $|A| = 1$  este ideal se le llama *principal*. El conjunto  $J(P)$  de ideales de orden de  $P$  tiene la estructura de un poset cuando consideramos la relación de inclusión (ver la Figura 6).

**Proposición 2.10.** Sea  $P$  un poset finito, entonces  $J(P)$  es un retículo distributivo.

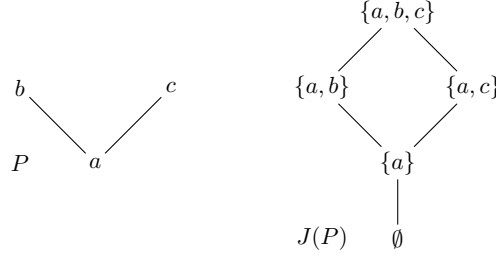


Figura 6

*Demostración.* Nótese que siempre que  $I$  e  $I'$  son ideales de orden en  $J(P)$  entonces  $I \cap I'$  e  $I \cup I'$  también lo son. Entonces  $J(P)$  es un subposet del álgebra de Boole  $B_P$  en los elementos de  $P$  cerrado al tomar uniones e intersecciones (también llamado *subretículo*). Y sabemos que uniones e intersecciones en  $B_P$  satisfacen (D1) y (D2).  $\square$

*Observación 2.11.* Nótese que si  $P$  es un poset con  $n$  elementos, entonces  $J(P)$  es graduado de grado  $n$ .

**Definición 2.12.** A un elemento  $x \neq \hat{0}$  de un retículo  $L$  le llamamos *irreducible (con respecto a juntura)* si  $x = a \vee b$  implica que  $a = x$  o  $b = x$ , es decir,  $x$  no se puede expresar como la juntura de dos elementos estrictamente menores.

**Lema 2.13.** Si  $x \in L$  es irreducible entonces cubre exactamente un elemento de  $L$ .

**Proposición 2.14.** Sea  $P$  un poset finito. El subposet de  $J(P)$  formado por los elementos irreducibles es isomorfo a  $P$ .

*Demostración.* Sea  $I \in J(P)$  irreducible. Gracias al Lema 2.13 sabemos que  $I$  cubre exactamente un elemento, y esto es verdad si y solo si  $I = I(x)$  es un ideal de orden principal, en donde  $x \in P$ . Tenemos entonces una biyección entre los elementos  $x \in P$  y los irreducibles (ideales de orden principales)  $I(x) \in J(P)$ . Adicionalmente  $I(x) \subseteq I(y)$  si y solo si  $x \leq y$ .  $\square$

**Teorema 2.15** (Teorema Fundamental de los Retículos finitos distributivos). Sea  $L$  un retículo finito distributivo. Entonces existe un único poset finito (salvo isomorfismo)  $P$  tal que  $L \cong J(P)$ .

*Sketch de la demostración.* Sea  $P$  el subposet formado por los irreducibles de  $L$ , queremos mostrar que  $L \cong J(P)$ . Para esto consideramos la función  $\psi : L \rightarrow J(P)$  que para cada  $x \in L$  esta dada por

$$\psi(x) = \{z \in P \mid z \leq x\}.$$

Esta función es claramente monótona y cuenta con una inversa dada por

$$\phi(I) = \bigvee_{z \in I} z$$

que es también claramente monótona.  $\square$



### 2.3. Retículos geométricos

**Definición 2.16.** A un retículo graduado  $L$  se le llama *semimodular (superior)* si su función de grados  $\rho$  cumple que

$$\rho(x) + \rho(y) \geq \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y) \quad \forall x, y \in L. \quad (2.1)$$

El concepto de *semimodular inferior* se define de manera similar cambiando la dirección de la desigualdad y decimos que  $L$  es modular cuando la relación es dada por la igualdad.

**Proposición 2.17.** Sea  $L$  un retículo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (I)  $L$  es graduado y su función de grados satisface la ecuación 2.1.
- (II) Para todo  $x, y \in L$  si  $x$  cubre  $x \wedge y$  entonces  $x \vee y$  cubre  $y$ .
- (III) Para todo  $x, y \in L$  si  $x$  y  $y$  ambos cubren  $x \wedge y$  entonces  $x \vee y$  cubre ambos  $x$  y  $y$ .

*Demostración.* Probamos primero  $(i) \Rightarrow (ii)$ . Podemos reescribir 2.1 de la siguiente manera:

$$\rho(x) - \rho(x \wedge y) \geq \rho(x \vee y) - \rho(y).$$

Si  $x \succ x \wedge y$  entonces  $\rho(x) - \rho(x \wedge y) = 1$  y por consiguiente  $\rho(x \vee y) - \rho(y)$  puede ser solamente 0 ó 1. Si este valor fuera 0 entonces  $\rho(x \vee y) = \rho(y)$  lo que implicaría que  $x \leq y$  y  $x = x \wedge y$ , una contradicción. Entonces  $\rho(x \vee y) - \rho(y) = 1$  lo que implica que  $x \vee y \succ y$ .

Como  $(iii)$  se desprende fácilmente de  $(ii)$  nos queda únicamente por mostrar que  $(iii) \Rightarrow (i)$ . Demostraremos primero que  $L$  es graduado. Supongamos que no y escojamos un intervalo  $[x, y]$  de longitud mínima en  $L$  que no sea graduado. Entonces tienen que existir dos elementos  $z, w \in [x, y]$  y enteros positivos  $\ell_1 \neq \ell_2$  tal que  $x \leq z$ ,  $x \leq w$  y que toda cadena máxima en  $[z, y]$  sea de longitud  $\ell_1$  y toda cadena máxima en  $[w, y]$  sea de longitud  $\ell_2$ . Pero  $(iii)$  nos dice que  $z \vee w$  cubre ambos  $z$  y  $w$  implicando que toda cadena saturada de la forma  $z \vee w = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = y$  tiene ambas longitudes  $\ell_1 - 1$  y  $\ell_2 - 1$ , una contradicción. Así que  $L$  tiene que ser graduado.

Ahora, asumamos que  $L$  falla en satisfacer la ecuación 2.1 y escojamos un par  $x, y$  tal que

$$\rho(x) + \rho(y) < \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y)$$

con las propiedades de que el intervalo  $[x \wedge y, x \vee y]$  sea de longitud mínima y la cantidad  $\rho(x) + \rho(y)$  sea mínima. Nótese que ambos  $x$  y  $y$  no pueden cubrir  $x \wedge y$  al mismo tiempo ya que por  $(iii)$   $\rho(x) + \rho(y) = \rho(x \wedge y) + \rho(x \vee y)$ , que sería una contradicción. Entonces asumamos sin pérdida de generalidad que hay un elemento  $x'$  tal que  $x \wedge y < x' < x$ .

Por la minimalidad de  $\ell(x \wedge y, x \vee y)$  y  $\rho(x) + \rho(y)$  tenemos que

$$\rho(x') + \rho(y) \geq \rho(x' \wedge y) + \rho(x' \vee y).$$

y como  $x \wedge y = x' \wedge y$  concluimos de las dos desigualdades que

$$\rho(x) + \rho(x' \vee y) < \rho(x') + \rho(x \vee y).$$

Como  $x \vee (x' \vee y) = x \vee y$  y  $x \wedge (x' \vee y) \geq x'$  tenemos que el par  $x, x' \vee y$  satisface

$$\rho(x) + \rho(x' \vee y) < \rho(x \wedge (x' \vee y)) + \rho(x \vee (x' \vee y))$$

y  $\ell(x \wedge (x' \vee y), x \vee (x' \vee y)) < \ell(x \wedge y, x \vee y)$ , que es una contradicción. □

**Proposición 2.18.** *Un retículo finito  $L$  es modular si y solo si cumple:*

$$\forall x, y, z \in L \text{ tal que } x \leq z, \text{ tenemos } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \quad (2.2)$$

*Observación 2.19.* Es un corolario de la Proposición 2.18 que todo retículo finito distributivo es también modular. En la Figura 7 se muestra un ejemplo de un retículo que es semimodular pero no es modular.

**Ejemplo 2.20.** El álgebra de Boole  $\mathbb{B}_n$  es un ejemplo de un retículo modular ya que para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$  se tiene que

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

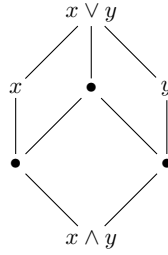


Figura 7

**Definición 2.21.** En un poset  $P$  con  $\hat{0}$  llamamos *átomo* a un elemento  $a$  que cubre al  $\hat{0}$ . Decimos que un retículo  $L$  es *atómico* si todo elemento  $x \in L$  se puede expresar como una juntura  $x = \bigvee_{a \in A'} a$  en donde  $A'$  es un conjunto de átomos. Un retículo atómico semimodular finito se conoce como un *retículo geométrico*.

*Observación 2.22.* La razón detrás del nombre retículo geométrico es que estos precisamente son los retículos de conjuntos cerrados de matroides simples (también conocidas como geometrías combinatorias).

**Ejemplo 2.23.**  $\mathbb{B}_n$  es atómico y modular así que también es geométrico.

**Proposición 2.24.** *Un retículo finito  $L$  es geométrico si y solo si satisface la siguiente condición:*

$$x < y \iff \exists a \succ \hat{0} \text{ tal que } y = x \vee a. \quad (2.3)$$

**Ejemplo 2.25.** En  $\Pi_n$  un átomo es una partición que contiene exactamente un solo bloque que no es singulete con dos elementos. Para cada relación de cobertura  $\pi < \pi'$  en  $\Pi_n$  podemos considerar los dos bloques  $B_1, B_2 \in \pi$  que se combinan en un solo bloque en  $\pi'$ . Seleccionemos cualesquier elementos  $x \in B_1$  y  $y \in B_2$  y llamemos  $a_{x,y}$  al átomo cuyo solo bloque que no es singulete es  $\{x, y\}$ . Es fácil de chequear que  $\pi' = \pi \vee a_{x,y}$ . Entonces por la Proposición 2.24 concluimos que  $\Pi_n$  es geométrico. Nótese que esto en particular implica que  $\Pi_n$  es a la vez semimodular y atómico.

### 3. Álgebras de incidencia y la función de Möbius

#### 3.1. Álgebras de incidencia

Sea  $\mathbf{k}$  un campo. En esta Sección estaremos trabajando con espacios vectoriales con coeficientes en  $\mathbf{k}$ . Para un poset finito  $P$  denotaremos  $\text{Int}(P)$  al conjunto de intervalos cerrados en  $P$ .

**Definición 3.1.** El álgebra de incidencia de  $P$  es la  $\mathbf{k}$ -álgebra  $I(P)$  generada por todas las funciones

$$f : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbf{k},$$

con la operación de *convolución* definida para funciones  $f, g \in I(P)$  por

$$f \star g([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} f([x, z])g([z, y]).$$

**Proposición 3.2.**  $I(P)$  es un álgebra asociativa con unidad dada por la función  $\epsilon : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbf{k}$  definida por

$$\epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La siguiente proposición nos describe cuales son los elementos invertibles de  $I(P)$ .

**Proposición 3.3.** Las siguientes condiciones son equivalentes para  $f \in I(P)$ :

1.  $f$  tiene una inversa por derecha, o sea, existe  $g \in I(P)$  tal que  $f \star g = \epsilon$ .
2.  $f$  tiene una inversa por izquierda, o sea, existe  $h \in I(P)$  tal que  $h \star f = \epsilon$ .
3.  $f$  tiene una inversa bilateral única.
4.  $f([x, x]) \neq 0$  para todo  $x \in P$ .

*Demostración.* La ecuación  $f \star g = \epsilon$  se lee como

$$f \star g([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} f([x, z])g([z, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si  $x = y$  entonces tenemos que  $f([x, x])g([x, x]) = 1$  y esta ecuación se satisface si y solo si  $f([x, x]) \neq 0$ . En este caso  $g([x, x]) = f([x, x])^{-1}$ . Si  $x < y$  entonces tenemos

$$g([x, y]) = -f([x, x])^{-1} \sum_{x < z \leq y} f([x, z])g([z, y]),$$

y entonces  $g([x, y])$  es definida recursivamente y existe si y solo si  $f([x, x]) \neq 0$ . El mismo argumento aplica con la ecuación  $h \star f = \epsilon$ . Entonces si se tiene la inversa por un lado se tiene la inversa por el otro y finalmente si tenemos que  $f \star g = \epsilon$  y  $h \star f = \epsilon$  entonces  $h = h \star \epsilon = h \star f \star g = \epsilon \star g = g$ .  $\square$

### 3.1.1. Algunas funciones en $I(P)$

**Definición 3.4.** La *función zeta*  $\zeta$  es la función en  $I(P)$  definida para todo  $x \leq y$  en  $P$  por  $\zeta([x, y]) = 1$ .

**Ejemplo 3.5.** Nótese que las potencias de  $\zeta$  cuentan ciertos invariantes de  $P$ . Por ejemplo,

$$\zeta^{\star 2}([x, y]) := \zeta \star \zeta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta([x, z])\zeta([z, y]) = |\{x \leq z \leq y \mid z \in P\}|.$$

**Definición 3.6.** Una *multicadena* de (orden  $k$ ) en un poset  $P$  es una sucesión de la forma  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$  en donde  $m_i \in P$  para todo  $i$ .

**Proposición 3.7.** Sea  $P$  un poset acotado finito, entonces

$$\zeta^{\star k}(P) = |\{\hat{0} = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = \hat{1}\}|,$$

es decir,  $\zeta^{\star k}$  cuenta multicadenas de orden  $k + 1$ .

Si lo que queremos contar son cadenas en lugar de multicadenas podemos usar una función un poco modificada.

**Proposición 3.8.** Sea  $P$  un poset acotado, entonces

$$(\zeta - \epsilon)^{\star k}(P) = |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \hat{1}\}|.$$

*Demostración.* Nótese que

$$(\zeta - \epsilon)([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad \square$$

**Proposición 3.9.** Sea  $P$  un poset acotado, entonces

$$(2\epsilon - \zeta)^{-1}(P) = |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \hat{1} \mid \text{para algún } k \in \mathbb{N}\}|.$$

*Demostración.* Nótese que

$$(2\epsilon - \zeta)([x, y]) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

entonces  $(2\epsilon - \zeta)$  es invertible y podemos expresar  $(2\epsilon - \zeta)^{-1} = (\epsilon - (\zeta - \epsilon))^{-1}$ . Ahora consideremos la función  $\sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{\star k}$  en donde  $(\zeta - \epsilon)^0 = \epsilon$ . Esta es una función válida en  $I(P)$  ya que  $P$  es finito y entonces  $(\zeta - \epsilon)^{\star N} = 0$  para todo  $N > \ell(P)$ . Además tenemos que

$$(\epsilon - (\zeta - \epsilon)) \star \sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{\star k} = \epsilon,$$

o sea que

$$(2\epsilon - \zeta)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (\zeta - \epsilon)^{\star k}.$$

Finalmente el resultado se concluye usando la Proposición 3.8.  $\square$

**Definición 3.10.** Como  $\zeta([x, x]) = 1$  para todo  $x \in P$ , sabemos por la Proposition 3.3 que  $\zeta$  es invertible. La *función de Möbius*  $\mu$  es la inversa de  $\zeta$ , o sea  $\mu := \zeta^{-1}$ .

### 3.2. Calculando la función de Möbius

**Proposición 3.11.** *La función de Möbius  $\mu$  puede definirse recursivamente para un intervalo  $[x, y]$  como*

$$\mu([x, y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu([x, z]) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

*Demostración.* Como  $\mu$  es la inversa de  $\zeta$ , tenemos que  $\mu \star \zeta = \epsilon$ , lo que implica que

$$\mu \star \zeta([x, x]) = \mu([x, x])\zeta([x, x]) = \epsilon([x, x]) = 1,$$

o sea que  $\mu([x, x]) = 1$ . Y si  $x < y$  entonces

$$\mu \star \zeta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu([x, z])\zeta([z, y]) = \epsilon([x, y]) = 0,$$

lo que implica la fórmula que buscamos. □

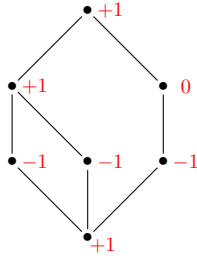


Figura 8: Valores  $\mu([\hat{0}, x])$  de la función de Möbius

**Ejemplo 3.12.** Sea  $\mathbf{n}$  la cadena con  $n$  elementos. Tenemos entonces

$$\mu(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Por inspección podemos calcular  $\mu(\mathbf{1}) = 1$ ,  $\mu(\mathbf{2}) = -1$  y  $\mu(\mathbf{3}) = 0$ . Ahora por inducción y usando la formula recursiva 3.1 tenemos que para  $n \geq 3$

$$\mu(\mathbf{n}) = -\sum_{k=1}^{n-1} \mu(\mathbf{k}) = -\mu(\mathbf{1}) - \mu(\mathbf{2}) = 0.$$

**Proposición 3.13.** *Sean  $P$  y  $Q$  posets localmente finitos y  $(x, y) \leq (x', y')$  en  $P \times Q$  entonces*

$$\mu([(x, y), (x', y')]) = \mu([x, x'])\mu([y, y']).$$

*Demostración.* Procederemos por inducción en  $\ell([(x, y), (x', y')])$ . Si  $\ell([(x, y), (x', y')]) = 0$  entonces  $x = x'$  y  $y = y'$  y la conclusión es trivial. Ahora consideremos  $\ell([(x, y), (x', y')]) \geq 1$  y obsérvese

que todo intervalo cerrado  $[(x, y), (x', y')]$  en  $P \times Q$  es un producto de intervalos  $[x, x'] \times [y, y']$ . Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\mu([(x, y), (x', y')]) &= - \sum_{(x, y) \leq (z, w) < (x', y')} \mu([(x, y), (z, w)]) \\
&= - \sum_{(x, y) \leq (z, w) < (x', y')} \mu([x, z])\mu([y, w]) \\
&= - \sum_{(x, y) \leq (z, w) \leq (x', y')} \mu([x, z])\mu([y, w]) + \mu([x, x'])\mu([y, y']) \\
&= - \sum_{x \leq z \leq x'} \mu([x, z]) \sum_{y \leq w \leq y'} \mu([y, w]) + \mu([x, x'])\mu([y, y']) \\
&= \mu([x, x'])\mu([y, y']). \square
\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.14.** Cómo  $\mathbb{B}_n \cong \mathbf{2}^n$  tenemos que

$$\mu(\mathbb{B}_n) = \mu(\mathbf{2}^n) = \mu(\mathbf{2})^n = (-1)^n.$$

De igual forma si  $A \subseteq B$  en  $\mathbb{B}_n$ , es fácil verificar que  $[A, B] \cong \mathbb{B}_{B \setminus A}$ , así que

$$\mu([A, B]) = \mu(\mathbb{B}_{B \setminus A}) = (-1)^{|B| - |A|}.$$

La estructura adicional de un retículo facilita la siguiente fórmula recursiva de Weisner para calcular los valores de la función de Möbius.

**Teorema 3.15** (Teorema de Weisner). *Para todo  $x \leq w < y$  en un retículo  $L$  tenemos queda*

$$\sum_{\substack{x \leq z \leq y \\ w \wedge z = x}} \mu([z, y]) = 0. \quad (3.2)$$

**Ejemplo 3.16.** En  $\Pi_n$  escogamos  $w$  como el coátomo  $12 \cdots (n-1)|n$ . Nótese que los valores de  $z \in \Pi_n$  tales que  $w \wedge z = \hat{0}$  son  $z = \hat{0}$  o elementos de la forma  $z = 1|2| \cdots |\hat{i}| \cdots (n-1)|in$ , para los cuales se verifica que  $[z, \hat{1}] \cong \Pi_{n-1}$ . Usando el teorema de Weisner tenemos entonces que

$$\mu(\Pi_n) + (n-1)\mu(\Pi_{n-1}) = 0.$$

Resolviendo ésta ecuación en diferencias tenemos que  $\mu(\Pi_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ .

### 3.3. La formula de inversión de Möbius

**Proposición 3.17** (La fórmula de inversión de Möbius). *Sea  $P$  un poset en el cuál para todo  $x \in P$  tenemos que  $|I(x)| < \infty$  y sean  $f, g : P \rightarrow \mathbf{k}$  un par de funciones en  $P$ . Las siguientes dos aseercciones son equivalentes:*

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \quad \forall y \in P \quad (3.3)$$

$$f(y) = \sum_{x \leq y} g(x)\mu([x, y]) \quad \forall x \in P. \quad (3.4)$$

*Demostración.* El espacio vectorial  $\mathbf{k}^P$  formado por las funciones  $f : P \rightarrow \mathbf{k}$  tiene una acción por derecha del álgebra de incidencia  $I(P)$  dada por

$$f\xi(y) = \sum_{x \leq y} f(x)\xi([x, y]) \text{ para todo } f \in \mathbf{k}^P \text{ y para todo } \xi \in I(P).$$

Entonces la ecuación (3.3) se lee en este lenguaje como  $g = f\zeta$  y entonces como  $\zeta^{-1} = \mu$  tenemos que  $f = g\mu$  que es la ecuación (3.4).  $\square$

**Proposición 3.18** (Forma dual del teorema de inversión de Möbius). *Sea  $P$  un poset en el cuál para todo  $x \in P$  tenemos que  $|I(x)| < \infty$  y sean  $f, g : P \rightarrow \mathbf{k}$  un par de funciones en  $P$ . Las siguientes dos aserciones son equivalentes:*

$$g(y) = \sum_{x \geq y} f(x) \quad \forall y \in P \quad (3.5)$$

$$f(y) = \sum_{x \geq y} \mu([y, x])g(x) \quad \forall x \in P. \quad (3.6)$$

**Ejemplo 3.19.** (a) En la cadena  $\mathbf{n}$  el teorema de inversión de Möbius es una versión discreta del Teorema Fundamental del Cálculo:

$$g(n) = \sum_{k=0}^n f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

$$f(n) = g(n) - g(n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

(b) En el álgebra de Boole  $\mathbb{B}_n$  el teorema de inversión de Möbius es conocido como el Principio de Inclusión-Exclusión:

$$g(A) = \sum_{B \subseteq A} f(B) \quad \forall B \subseteq A \quad (3.9)$$

$$f(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} g(B) \quad \forall B \subseteq A. \quad (3.10)$$

(c) Si en el álgebra de boole las funciones  $g(A)$  y  $f(A)$  solamente dependen de la cardinalidad del conjunto  $A$  entonces obtenemos un teorema de inversión conocido como Teorema de Inversión Binomial.

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{P} \quad (3.11)$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g(k) \quad \forall n \in \mathbb{P}. \quad (3.12)$$

(d) En el retículo de divisibilidad  $D_n$  el teorema de inversión de Möbius es un teorema clásico en la teoría de números:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \forall n \in \mathbb{P} \quad (3.13)$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \quad \forall n \in \mathbb{P}, \quad (3.14)$$

en donde  $\mu(n)$  es la función de Möbius clásica de teoría de números dada por:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

**Ejemplo 3.20.** Dado un alfabeto  $A$  de tamaño  $|A| = m$ , Una *palabra circular* de longitud  $n$  es una clase de equivalencia de *palabras lineales*  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  bajo la acción de la operación de desplazamiento o shift  $\tau w = w_n w_1 w_2 \dots w_{n-1}$ . Una palabra circular es llamada *primitiva* si su clase de equivalencia contiene exactamente  $n$  palabras lineales distintas. Denotemos por  $a(n)$  al número de palabras circulares primitivas de longitud  $n$  y  $b(n)$  al número de todas las palabras circulares de longitud  $n$  (primitivas y no primitivas). Nuestro objetivo será encontrar una formula para determinar el número de palabras circulares  $b(n)$ . Nótese que una palabra circular es primitiva si y solo si no es una potencia de otra palabra así que tenemos la relación

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

Nótese también que hay  $c$  palabras lineales distintas en la clase de equivalencia de una palabra circular  $w$  de longitud  $\ell(w) = d$  de la forma  $w = u^{\frac{d}{c}}$  en donde  $u$  es una palabra circular primitiva de longitud  $\ell(u) = c$ . Así que contando todas las palabras lineales de longitud  $d$  tenemos

$$m^d = \sum_{c|d} c a(c).$$

El teorema de inversión de Möbius nos dice que

$$da(d) = \sum_{c|d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) m^c.$$

concluimos que

$$b(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{c|d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) m^c.$$

## 4. Topología de posets

**Definición 4.1.** Un *complejo simplicial*  $\Delta \subset 2^{[n]}$  en  $[n]$  es una clase de subconjuntos de  $[n]$  tal que si  $F \in \Delta$  y  $F' \subseteq F$  entonces  $F' \in \Delta$ . A cada  $F \in \Delta$  lo llamamos una *cara* y a las caras máximas por inclusión las llamamos *carotas*. Definimos  $\dim F = |F| - 1$  y  $\dim \Delta = \max_{F \in \Delta} \dim F$ . Existe un único complejo simplicial de dimensión  $-1$  ( $\Delta = \{\emptyset\}$ ) y usemos la convención de que el complejo simplicial vacío tiene dimensión  $-2$ .

**Definición 4.2.** Para un poset finito  $P$  definimos su *complejo de orden*  $\Delta(P)$  como el complejo simplicial cuyas caras son las cadenas de  $P$ .

**Definición 4.3.** Para un poset acotado  $P$  denotamos  $\bar{P} := P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ . De una manera similar denotamos  $\hat{P} := P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$  al poset  $P$  luego de añadirle elementos mínimos y máximos únicos.

**Ejemplo 4.4.** Sea  $P = \mathbf{3}$ , la cadena con tres elementos en  $[3]$ , entonces  $\Delta(P) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 1 < 2, 1 < 3, 2 < 3, 1 < 2 < 3\}$ . En la figura 9 y 10 se ilustran los complejos de orden de dos subposets de  $\mathbb{B}_3$ .



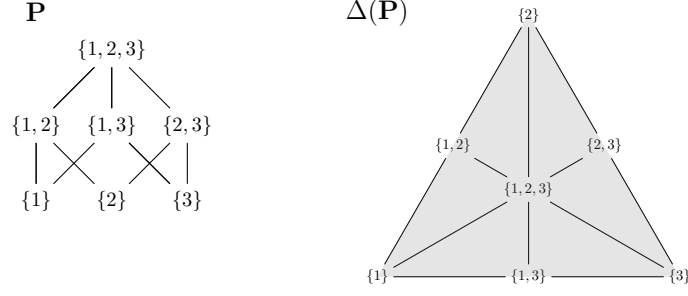


Figura 9: Complejo de orden de  $\mathbb{B}_3 \setminus \{\hat{0}\}$

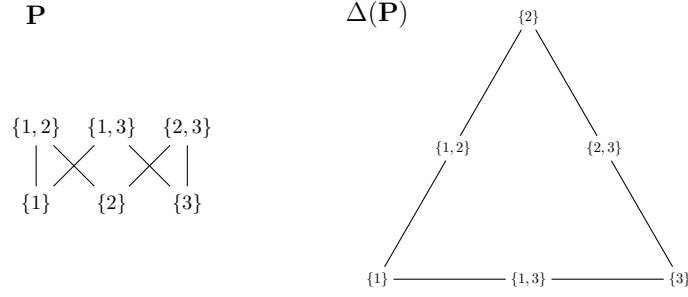


Figura 10: Complejo de orden de  $\overline{\mathbb{B}}_3$

**Definición 4.5.** Dado un complejo simplicial  $\Delta$  sea  $f_i$  el número de caras de dimensión  $i$ . Definimos la *característica de Euler reducida* de  $\Delta$  como:

$$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^i f_i.$$

**Ejemplo 4.6.** Para el complejo de orden de la Figura 10 tenemos que

$$\tilde{\chi}(\Delta(\overline{\mathbb{B}}_3)) = -f_{-1} + f_0 - f_1 = -1 + 6 - 6 = -1.$$

**Teorema 4.7** (Teorema de Philip Hall). *Sea  $P$  un poset finito y acotado tal que  $\ell(P) \geq 1$  entonces*

$$\mu(P) = \tilde{\chi}(\Delta(\overline{P})).$$

**Teorema 4.8** (Teorema de Philip Hall theorem versión 2). *Sea  $P$  un poset finito entonces*

$$\mu(\hat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)).$$

*Demostración.* Tenemos que  $\mu = \zeta^{-1} = (\epsilon + (\zeta - \epsilon))^{-1}$  so

$$\begin{aligned}
\mu(\hat{P}) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (\zeta - \epsilon)^{\star k} (\hat{P}) \\
&= 2\epsilon(\hat{P}) - 1 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k |\{\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = \hat{1}\}| \\
&= -1 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k f_{k-2}(\Delta(P)) \\
&= \sum_{k \geq -1} (-1)^k f_k(\Delta(P)) \\
&= \tilde{\chi}(\Delta(P)).
\end{aligned}$$

□

## Referencias

- [1] F. Ardila. Algebraic and geometric methods in enumerative combinatorics. *Handbook of enumerative combinatorics*, pages 3–172, 2015.
- [2] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.
- [3] M. L. Wachs. Poset topology: tools and applications. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 497–615. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.