Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 1

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Dibuje todos los posets sin etiquetas (clases de isomorfismo) que hay en un conjunto de uno, dos, tres o cuatro elementos. Cuantos posets diferentes hay en los conjuntos [1], [2], [3] y [4]?
2. Verifique que el conjunto Π_n de particiones del conjunto $[n]$ junto con la relación de refinamiento forman un conjunto parcialmente ordenado. Describa las relaciones de cobertura.
3. Sea G un grafo conexo con n vertices y sea Π_G el subposet inducido de Π_n formado por el conjunto de particiones $\pi \in \Pi_n$ con la propiedad de que para cada bloque $B \in \pi$, el subgrafo inducido $G|_B$ es conexo. Muestre que cuando $G = T$ es un árbol (un grafo conexo sin loops ni ciclos) $\Pi_T \cong \mathbb{B}_{n-1}$, o sea Π_T es un poset isomorfo al álgebra de Boole $\mathbb{B}_{n-1}$.
4. Verifique que si $f : P \to Q$ y $g : Q \to R$ son mapas monótonos entonces $g \circ f : P \to R$ también lo es.
5. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \to Q$ que no sea un isomorfismo de posets. Dé un ejemplo de una biyección monótona $f : P \to P$ que no sea un automorfismo de posets. Que condición tiene que cumplir P en este caso?
6. Dé un ejemplo de un poset finito que no sea graduado.
7. Demuestre la siguiente proposición:

   Proposición *Si P es un poset finito graduado entonces existe una función bien definida $\rho : P \to \mathbb{N}_0$ tal que $\rho(x) = 0$ siempre que $x \in \mathcal{M}in(P)$ y si $x \lessdot y$ entonces $\rho(y) = \rho(x) + 1$.*
8. Encuentre una fórmula en términos de productos de polinomios para la función generadora por grados del álgebra de Boole $F(\mathbb{B}_n, t)$.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 2

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Dé un ejemplo concreto (utilizando diagramas de Hasse) de cada una de las operaciones $P+Q$, $P\oplus Q$, $P\times Q$, $P\otimes Q$ y Q^P. Cuales de estas operaciones son simétricas, o sea, $P \circledast Q \cong Q \circledast P$?
2. Muestre que $\mathbb{B}_n \cong \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\cdots\times\mathbf{2} = \mathbf{2}^n$. Calcule $F(\mathbb{B}_n, t)$ usando esta relación y la conclusión del ejercicio 7.
3. Cuales de los posets en uno, dos, tres, cuatro o cinco elementos son retículos?.
4. Determine la estructura de $J(P)$ cuando P es una cadena, una anticadena o la suma directa de cadenas.
5. Muestre que Π_n es un retículo. Describa para un par de particiones $\pi,\pi' \in \Pi_n$ su concurrencia $\pi\wedge\pi'$ y su juntura $\pi\vee\pi'$.
6. Muestre que un retículo, $\vee$ y $\wedge$ cumplen con las *leyes de absorción* $x\wedge(x\vee y) = x$ y $x\vee(x\wedge y) = x$.

Ejercicios adicionales

7. Muestre que $F(P\times Q, t) = F(P,t)F(Q,t)$.
8. Sea n un entero positivo con decomposición en primos $n = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$. Muestre que $D_n \cong \mathbf{n_1+1}\times\mathbf{n_2+1}\times\cdots\times\mathbf{n_k+1}$. Encuentre $F(D_n,t)$ usando esta relación.
9. Muestre que las operaciones fundamentales entre posets satisfacen las siguientes relaciones:
   - $P\times(Q+R) \cong (P\times Q)+(P\times R)$.
   - $P^{Q+R} \cong P^Q\times P^R$.
   - $(P^Q)^R \cong P^{Q\times R}$.
10. Muestre que $J(P+Q) \cong J(P)\times J(Q)$.
11. Muestre que en un retículo L las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas (así expresiones como $x\wedge y\wedge z$ tienen sentido), conmutativas e idempotentes ($x\vee x = x$).
12. Verifique que si L y M son retículos entonces también lo son L^*, $L\times M$, $L\oplus M$ y $\widehat{L+M}$, en donde $\widehat{L+M} := \{\hat{0}\}\oplus(L+M)\oplus\{\hat{1}\}$.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 3

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Calcule los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para $\mathbb{B}_3$ y Π_3.
2. Compute varios ejemplos de los valores $\mu([\hat{0}, x])$ de la función de Möbius para D_n. Conjeture y pruebe una formula para $\mu(D_n)$. Sugerencia: Use el siguiente hecho demostrado en la sesión 2

   Sea n un entero positivo con descomposición en primos $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. Entonces es un producto de cadenas $D_n \cong \mathbf{n_1 + 1} \times \mathbf{n_2 + 1} \times \cdots \times \mathbf{n_k + 1}$.
3. Utilice las *leyes de absorción* $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$ que se cumplen en todo retículo para mostrar que un retículo satisface la ley distributiva (D1) si y sólo si satisface la ley distributiva (D2).

   (D1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para todo $x, y, x \in L$.

   (D2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para todo $x, y, x \in L$.
4. Sea P un poset. Muestre que existe una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos que si los ordenamos por inclusión, o sea $A \leq B$ siempre que $A \subseteq B$, tenemos que $P \cong \mathcal{S}$.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 4

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Utilice la fórmula de Weisner para calcular los valores de la función de Möbius en $\mathbb{B}_n$.
2. Sean ζ la función en $I(P)$ definida para todo $x \leq y$ en P por $\zeta([x,y]) = 1$ y ϵ la función en $I(P)$ definida por
$$\epsilon([x,y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
Encuentre una fórmula para los valores de $(2\epsilon - \zeta)^2([x,y])$ cuando $\ell([x,y]) = 1$, $\ell([x,y]) = 2$ y $\ell([x,y]) \geq 3$.
3. Es la función
$$(\zeta - \epsilon)([x,y]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
invertible en $I(P)$? Porqué?
4. *a*) Demuestre la siguiente fórmula recursiva alternativa para calcular la función de Möbius:
Proposición *(Definición dual recursiva de la función de Möbius) La función de Möbius μ puede definirse recursivamente para un intervalo $[x,y]$ como*
$$\mu([x,y]) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = y \\ -\sum_{x < z \leq y} \mu([z,y]) & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
Sugerencia: recuerde que μ es la función definida como la inversa de ζ, es decir, satisface $\zeta \star \mu = \epsilon$ y $\mu \star \zeta = \epsilon$.
b) Utilice la fórmula alternativa de la primera parte para calcular $\mu(\mathbb{B}_4)$ y $\mu(\Pi_4)$. Son estos valores los mismos que si hubiéramos calculado μ con la definición recursiva original?
c) Utilice lo observado en las dos partes anteriores para concluir que para todo poset finito acotado P (recuerde que acotado significa que P tiene un elemento base $\hat{0}$ y un elemento tope $\hat{1}$, es decir, P es el intervalo cerrado $[\hat{0}, \hat{1}]$)
$$\mu(P) = \mu(P^*).$$
Sugerencia: Haga uso de las dos definiciones recursivas de μ.

Conjuntos parcialmente ordenados y retículos

Sesión de Problemas No. 5

DIAS 2017

Rafael S. González D'León

Ejercicios para trabajar en la sesión

1. Determine cual es el complejo de orden $\Delta(\mathbf{n})$ de la cadena con n elementos. Calcule la característica reducida de Euler $\tilde{\chi}(\Delta(\mathbf{n}))$ utilizando el teorema de Philip Hall.
2. Un desarreglo es una permutación de $[n]$ (una biyección $\sigma : [n] \to [n]$) que no contiene puntos fijos, es decir puntos tal que $\sigma(i) = i$. Teniendo en cuenta que hay $n!$ permutaciones de $[n]$, demuestre que el número $d(n)$ de desarreglos de $[n]$ puede ser calculado con la formula
$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
(Sugerencia: Utilice el teorema de inversión binomial y la fórmula $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$)
3. Para un complejo simplicial Γ definimos su *subdivisión baricéntrica* como $\Delta(L(\Gamma) \setminus \emptyset)$, en donde $L(\Gamma) \setminus \emptyset$ es el poset formado por las caras no vacías de Γ ordenadas por inclusión.
   a) Determine cual es la subdivisión baricéntrica del simplex Δ_2 de dimensión 2 (Dibuje el complejo simplicial resultante).
   b) Calcule la característica de Euler de Δ_2.
   c) Calcule la característica de Euler de $\Delta(L(\Delta_2) \setminus \emptyset)$ usando la función de Möbius. Sugerencia agregue un $\hat{0}$ y un $\hat{1}$ a $L(\Delta_2) \setminus \emptyset$ y utilice el Teorema de Philip Hall.
   d) Que conclusión podemos conjeturar de las partes (b) y (c)?