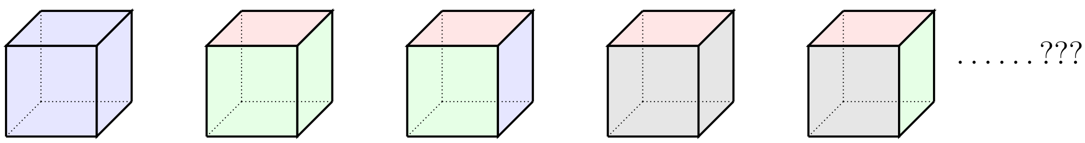
GRUPOS Y ENUMERACIONES

NANTEL BERGERON

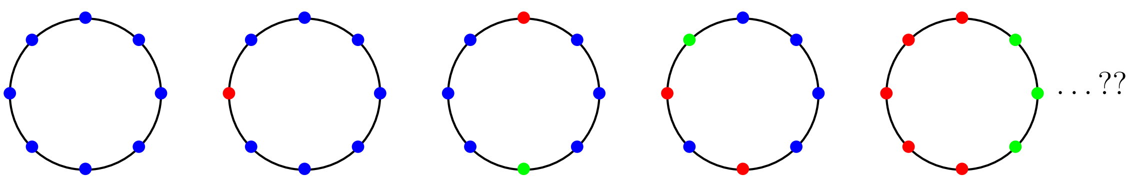
Día 1

1. Introducción rápida

En este mini curso veremos cómo contar varios atributos relacionados con las simetrías de un objeto. Por ejemplo, ¿cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir?



Hay muchas posibilidades y es difícil responder sin las herramientas que vamos a construir. Otro ejemplo típico ¿Cuántos collares diferentes podemos construir usando 3 tipos de perlas?

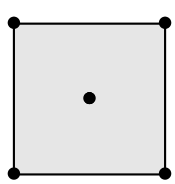


Para lograr esto necesitamos aprender sobre grupos de simetrías, acciones de grupos, coconjuntos, etc. Veremos enumeraciones y aplicaciones mucho más interesantes.

2. Simetrias y groupos

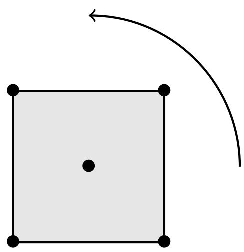
Nos interesa entender todas las simetrías de un objeto que estudiamos y las estructuras algebraicas sobre esas simetrías.

2.1. **Conjuntos de Simetrías.** Suponga que tiene un cuadrado sólido adjunta en el medio:

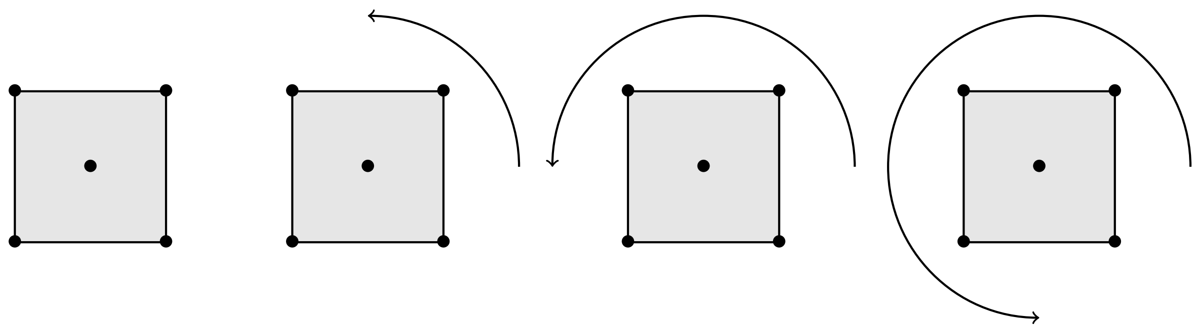


Research of Bergeron supported in part by NSERC and York Research Chair.

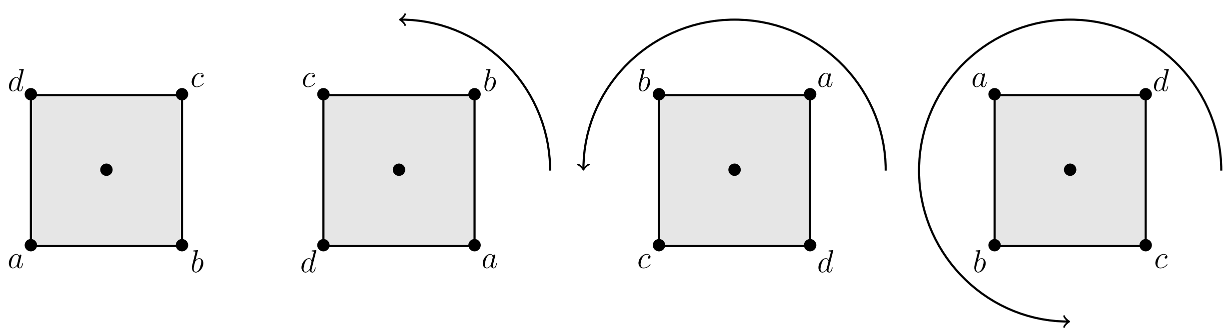
Podemos dar vuelta el cuadrado y recuperar el mismo. Esto es una simetría.



Queremos listar todas las posibilidades:



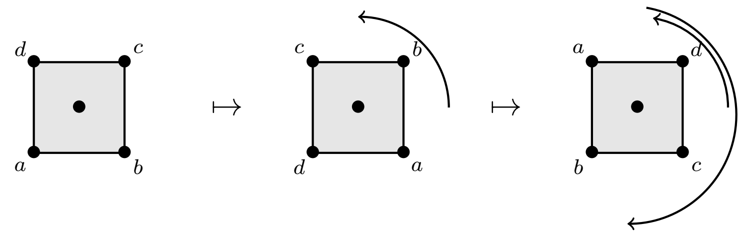
¿Hay más? **¿Cuándo creen que dos simetrías son las mismas?** Para hacer un seguimiento, podemos nombrar los vértices del cuadrado para ver qué les sucede. Esta es una marca secreta y no es parte del objeto, es sólo allí para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que sucede:

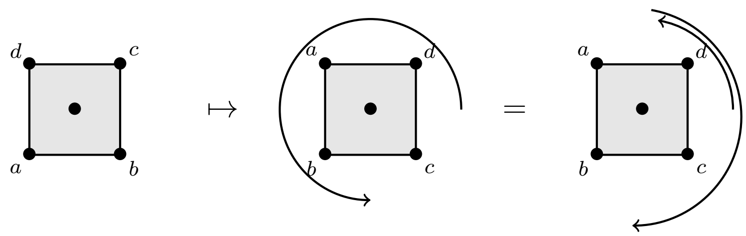


Entonces podemos codificar lo que sucede al cuadrado, enumerando solamente lo que sucede a a, b, c, y d:

$$\sigma_0 = \begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}\,, \qquad \sigma_1 = \begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}\,, \qquad \sigma_2 = \begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}\,, \qquad \sigma_3 = \begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}\,.$$

Este es un modelo matemático de las simetrías del cuadrado. Ahora decimos que dos simetrías son **iguales** si cuando comienzan con la misma marca, terminan con la misma marca después de la simetría.

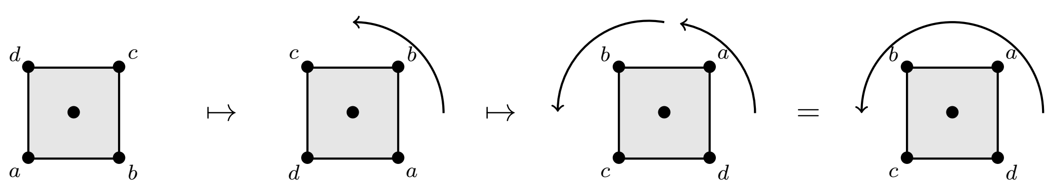




Este modelo es útil para comprender las estructuras de esas simetrías y centrarse en lo que nos interesa en este momento (los vértices en la esquina del cuadrado). Esto describe de alguna manera todas las simetrías del cuadrado. Pienso en ellos como funciones. Esto no es único, consideraremos pronto otras descripciones de las **mismas simetrías** y veremos que pueden tener diferentes presentaciones.

2.2. **Operaciones sobre simetrías.** Ahora queremos describir la operación que podemos hacer sobre las simetrás. Primero,

Componiendo simetrías: ¿Qué pasa si hago una rotación, y luego otra?



Ahora usando nuestro modelo matemático:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & d & a & b \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} abcd \\ cdab \end{array}.$$

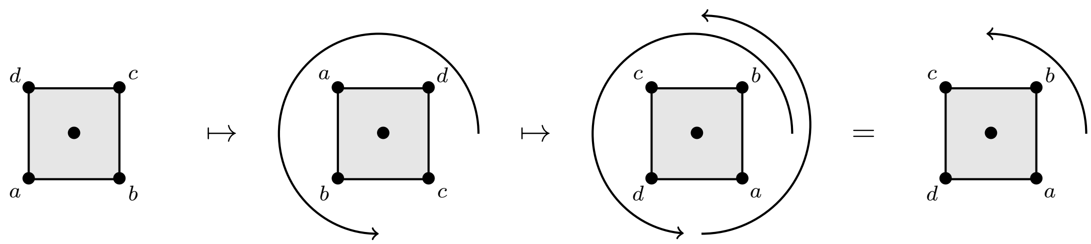
Es decir, composición de funciones:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & d \\ b & \mapsto & a \\ c & \mapsto & b \\ d & \mapsto & c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sigma_2\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & c \\ b & \mapsto & d \\ c & \mapsto & a \\ d & \mapsto & b \end{array}$$

Lo que vimos anteriormente es que

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$$

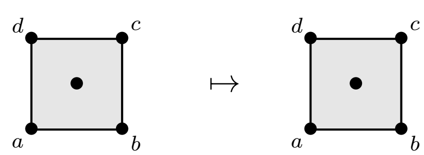
Son los mismos functiones (de ahí la misma simetría). Otro ejemplo



En todo caso la composición de rotaciones nos da otra rotación. Ahora, usando nuestro modelo matemático podemos ver todos los casos

	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$
$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\bcda\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\dabc\end{matrix}$	$\begin{matrix}abcd\\cdab\end{matrix}$

La simetría identidad: Observaste que hay una simetría especial que "no hace nada":

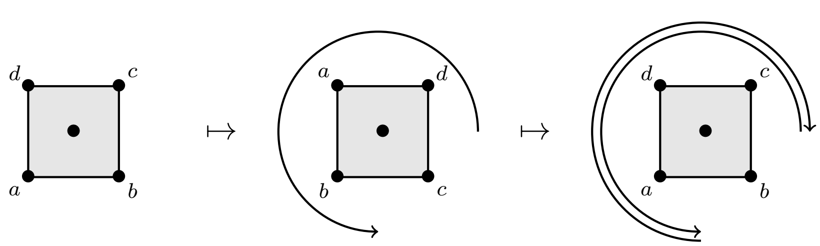


codificado por $Id = \begin{matrix}abcd\\abcd\end{matrix}$

Esta simetría es especial en el sentido de que si componemos por Id a la derecha o a la izquierda no cambiamos nada:

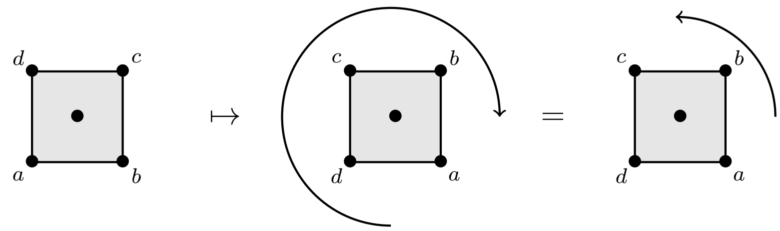
$$Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$$

Invertir simetrías: Finalmente, usted ve que cualquier simetría se puede deshacer:



$= \quad Id$

Aquí tenemos que



Decimos que es la **inversa**. Si σ es una simetría, denotamos su inversa por σ^{-1}. Usando la notación como arriba, tenemos

$$\sigma_0^{-1} = Id = \sigma_0 \qquad \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \qquad \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \qquad \sigma_3^{-1} = \sigma_1$$

2.3. **Grupos abstractos.** Cuando hablamos de las simetrías de un objeto hemos visto cuatro características importantes

(1) Tenemos un **conjunto** de simetrías
(2) Podemos **componer** simetrías y devolver una simetría en nuestro conjunto
(3) Tenemos una simetría especial llamada **identidad**
(4) Cada simetría tiene una **inversa**

En términos matemáticos, tenemos un **grupo**. Más formalmente, un grupo es:

(1) Un **conjunto** G
(2) Una **operación asociativa** $m\colon G \times G \to G$
[escribimos a menudo $m(a,b) = ab$ o $m(a,b) = a + b$]

$$\text{Asociativa: } a(bc) = (ab)c$$

(3) Un **elemento único** $1 \in G$: Tal que, para todos $g \in G$

$$1g = g1 = g$$

(4) Cada $g \in G$ tiene una **inversa** g^{-1}:

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

Ejemplo 1. $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$ entonces

m	1	a	a^2	a^3
1	1	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	1
a^2	a^2	a^3	1	a
a^3	a^3	1	a	a^2

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a^3, \qquad a^{-2} = a^2, \qquad a^{-3} = a.$$

Ejemplo 2. $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$ entonces

m	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

Ejemplo 3. $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$ donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$ (¿Lo tenemos todo?), entonces

m	1	s	t	st	ts	sts
1	1	s	t	st	ts	sts
s	s	1	st	t	sts	ts
t	t	ts	1	tst	s	st
st	st	sts	s	ts	1	t
ts	ts	t	sts	1	st	s
sts	sts	st	ts	s	t	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

2.4. **Grupo simétrico.** Hemos visto anteriormente que las simetrías de un objeto pueden ser codificadas por algunas biyecciones de un conjunto finito (permutaciones). Esto trae dos preguntas

(1) ¿Es posible realizar cualquier grupo (abstracto) con un grupo de biyecciones? Equivalentemente, ¿es cierto que los grupos abstractos son las simetrías de algo?
(2) ¿Es el conjunto de todas las biyecciones de un conjunto finito un grupo?

Primero respondamos a la segunda pregunta. Sea $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y considere el conjunto

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma \colon [n] \to [n] \ \textbf{Biyección}\}$$

Decimos que el elemento de S_n son **permutaciones**. Por ejemplo

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

donde codificamos las permutaciones por su lista de valores. Que está usando el orden natural $1 < 2 < \ldots < n$, enumeramos los valores $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Por ejemplo, la permutación 231 es la bijección

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Tenemos la permutación **identidad** $Id = 123 \cdots n \in S_n$, y dadas dos permutaciones $\sigma, \pi \in S_n$ podemos componer las dos funciones y obtenemos una permutación $\sigma \circ \pi \in S_n$. Además, para cada permutación $\sigma \in S_n$ podemos encontrar σ^{-1} tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id.$$

Esto nos da un grupo interesante y lo llamamos **el grupo simétrico**.

2.5. **Representación de permutaciones.** Consideremos ahora la pregunta de considerar un grupo abstracto como un grupo de simetrías. Mira Ejemplo 1. Puede comprobar que el conjunto de la functiones

$$\mathbf{1} \mapsto 1234; \qquad a \mapsto 2341; \qquad a^2 \mapsto 3412; \qquad a^3 \mapsto 4123$$

es una realización del grupo C_4. Ahora compare esto con nuestro ejemplo inicial de rotación del cuadrado y vea que hasta cambiar los nombres, tenemos el mismo grupo de simetrías. El grupo abstracto C_4 se realiza usando permutaciones (un subconjunto de S_4):

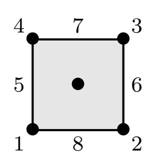
$$\{1234, 2341, 3412, 4123\} \subset S_4.$$

Necesitamos hacer algunas observaciones. Cuando tenemos $\{Id\} \subseteq H \subseteq S_n$ y H es un grupo por sí mismo decimos que H es un **subgrupo de permutaciones** de S_n. Para un grupo G, si tenemos una functión $\varphi\colon G \to S_n$ tal que $\varphi(1) = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, entonces decimos que φ es un **homomorfismo** de G. Puede comprobar que en este caso $\{Id\} \subseteq \varphi(G) \subseteq S_n$ es entonces un subgrupo de permutación de S_n y decimos que $\varphi(G)$ es una **representación de permutaciones** de G. Más aún, si $|G| = |\varphi(G)|$ entonces decimos que $\varphi(G)$ es una **realización de permutaciones** de G.

Ejercicios A.

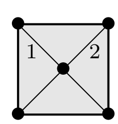
Ej.2.1 Para $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$, encuentre un homomorfismo $\varphi\colon C_4 \to S_5$. Encuentre 5 puntos sobre el cuadrado que sean enviados a sí mismos después de rotar y visualícelos usando el mapa φ.

Ej.2.2 Ponga números en los vértices y los lados del cuadrado



y use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_8$. Ahora usted ve que el mismo grupo puede tener muchas realizaciones de permutaciones diferentes.

Ej.2.3 Dibuje las dos diagonales del cuadrado y llámelas 1 y 2:



Use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_2$. Esto es una representación de permutaciones pero ¿es una realización de permutaciones? ¿Por qué?

Ej.2.4 Considere el grupo $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$. Encuentre una manera de verlo como la simetría de un objeto. Utilice esto para dar un homomorfismo $\varphi\colon C_2 \times C_2 \to S_4$ y dar una realización de permutaciones de este grupo.

Ej.2.5 Muestra que $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$ donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$, es lo mismo que $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$. Encontrar un isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{S}_3 \to S_3$. ¿Cuáles son las permutaciones $\varphi(s)$ y $\varphi(t)$? ¿Puedes encontrar un objeto geométrico tal que S_3 describa las simetrías de ese objeto?

Ej.2.6 ¿Cuál es la cardinalidad de S_n? Esa es la cantidad de permutaciones de $[n]$ que hay.

Ej.2.7 Tome un objeto geométrico o politopo en $\mathbb{R}^3$ (prisma, cubo, tetraedro, ...). Describa su simetría. Luego, ponga la etiqueta en su objeto para obtener una realización de permutaciones de ese grupo de simetrías.

Día 2

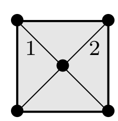
3. Acciones de grupos y enumeraciones

En los ejercicios de la Sección 2, hemos visto que para obtener una realización de permutaciones de un grupo, consideramos un objeto para visualizar las simetrías y luego nombrar algunas porciones del objeto para obtener la permutación. Ahora voy a discutir cómo hacerlo sistemáticamente.

3.1. **Acciones.** Una **acción** de un grupo G en un conjunto finito X es un mapa $G \times X \to X$ tal que

- 1.x=x
- (gh).x=g.(h.x)

Observemos que la notación aquí pone énfasis en el hecho de que G hace algo al elemento de X. Mire el ejercicio Ej.2.3 donde usamos $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ como las simetrías del cuadrado



Esto nos da una acción de C_2 en $X = \{1, 2\}$.

$$\begin{array}{lll} a.1 = 2 & a^2.1 = 1 & a^3.1 = 2 \\ a.2 = 1 & a^2.2 = 2 & a^3.2 = 1 \end{array}$$

Vemos que para un $g \in G$ fijo, la función $X \to X$ dado por $x \mapsto g.x$ es una permutación de X. Es fácil comprobar que esta función es invertible ya que

$$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = 1.x = x\,.$$

Así que cada vez que tenemos una acción, tendremos una representación de permutaciones. ¿Cuándo sabemos si es una realización o no? En el ejemplo anterior vemos que $\{1, a^2\}$ da la misma permutación (la identidad) en X. Además, $\{a, a^3\}$ también da la misma permutación en X. Podemos dividir el grupo C_4 en clases de acuerdo con la permutación que dan

$$\Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\}$$

Esto nos da una pista de lo que sucede. Antes de que realmente hagamos esto permítanme primero dar algunas proposiciones generales.

Proposición 4. *Dado un grupo finito G y H un subgrupo de G. Deja que*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

(1) $\Big\{gH \;\Big|\; g \in G\Big\}$ *es una partición de G*
(2) $|gH| = |H|$ *para todos $g \in G$*
(3) $|G|$ *es divisible por $|H|$ y* $\Big|\Big\{gH \;\Big|\; g \in G\Big\}\Big| = \frac{|G|}{|H|}$

Un **subgrupo**, como antes, es un subconjunto $\{1\} \subseteq H \subseteq G$ tal que H es en sí mismo un grupo dentro de G. Usted ve que (3) se sigue de (1) y (2). Para cualquier $g \in G$ vemos que una correspondencia de uno a uno

$$\begin{array}{rcl} H & \longleftrightarrow & gH \\ h & \mapsto & gh \\ g^{-1}gh = h & \leftarrow\!\shortmid & gh \end{array}$$

Esto nos da que (2) es siempre verdadero. Ahora (1) necesitan ser bien entendidos. ¿Qué estamos diciendo realmente? Veamos C_4 arriba y observamos que $H = \{1, a^2\}$ es de hecho un subgrupo. Ahora para el conjunto de conjuntos

$$1H = \{1, a^2\}; \quad aH = \{a, a^3\}; \quad a^2H = \{1, a^2\}; \quad a^3 = \{a, a^3\}.$$

Entonces cuando escribimos

$$\Big\{gH \;\Big|\; g \in C_4\Big\} = \Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\}$$

Queremos decir que **no repetimos** elementos que son los mismos. Así que lo que (1) está diciendo es que

$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \quad \implies \quad g_1H = g_2H.$$

Proposición 5. *Dado un grupo finito G que actúa sobre un conjunto finito X. Dejar que*

$$H = \{g \in G \mid g.x = x \textit{ for all } x \in X\}.$$

(1) *H es un subgrupo de G.*
(2) *La acción da una realización de permutaciones si y sólo si $|H| = 1$*
(3) *Podemos tomar $X = G$ y la acción es multiplicación a la izquierda, en este caso obtenemos una realización de permutaciones.*

Voy a dejar como un ejercicio para mostrar (1). Si nunca has hecho eso, es bueno hacerlo. Si usted ha visto que antes de que sea fácil.

El elemento (2) es sutil. Cuando tenemos una acción $G\times X \to X$ hemos visto en el ejercicio que podemos construir un homoporfismo $\varphi\colon G \to S_{|X|}$. Para un g fijo, la permutación $\varphi(g)$ viene dada como g permuta X con la función $x \mapsto g.x$. Ahora tenemos

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_1 H = g_2 H.$$

en efecto

$$g_1.x = g_2.x \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_2^{-1} g_1.x = g_2^{-1} g_2.x = x$$

Esto es válido para todos los x si y sólo si $g_2^{-1}g_1 \in H$. Esto es $g_2^{-1}g_1 H = H$ (ya que H es un subgrupo) y por tanto $g_1 H = g_2 H$. Usted ve que tenemos tantas permutaciones en $\varphi(G)$ como tenemos elemento en $\Big|\big\{gH \bigm| g \in G\big\}\Big| = \frac{|G|}{|H|}$ entonces

$$|\varphi(G)| = \Big|\big\{gH \bigm| g \in G\big\}\Big| = \frac{|G|}{|H|} = |G| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |H| = 1.$$

Ahora (3) es mucho más fácil. Observemos que la acción aquí es $G \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ la multiplicación habitual, pero pensamos en $\mathbf{G}$ como el conjunto en el que actuamos. El hecho de que sea una acción es claro al comparar el requisito de acción con la asociatividad y la multiplicación por 1. Si tenemos $gh = h$ entonces está claro que $g = ghh^{-1} = hh^{-1} = 1$. Tan $H = \{1\}$ solamente.

Observación 6. La Proposición 5 (3) nos dicen que cualquier grupo abstracto puede realizarse (al menos en una forma) como un grupo de permutaciones. Esto se conoce como teorema de Cayley.

Vamos a hacer algunos ejemplos. Tome $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ (ver Ejenplo 2) y $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 3 \end{array}$$

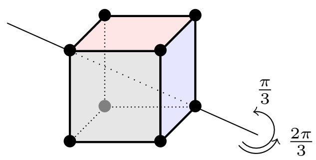
Vemos que $\big(\varphi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\varphi(b)\big)^2 = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$. Entonces, esta es una acción bien definida y tenemos un homomorfismo. Además sólo $\varphi(1) = Id$ y tenemos una realización de permutaciones de $C_2 \times C_2$.

Si en cambio tomamos

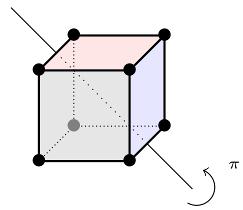
$$\begin{array}{rcl} \phi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 4 \end{array}$$

Vemos de nuevo que $\big(\phi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\phi(b)\big)^2 = Id$ y $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$, y esta es una acción diferente del mismo grupo en X. Pero esta vez $\phi(1) = \phi(ab) = Id$ y aquí no tenemos una realización de permutaciones desde $H = \{1, ab\}$.

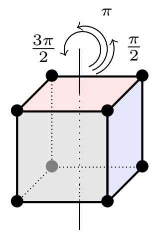
3.2. **El cubo.** Nos gustaría tener un ejemplo mucho más grande para entender. Consideremos el grupo B_3 de simetría de un cubo



Par de vértices opuestos
(4 parejas)



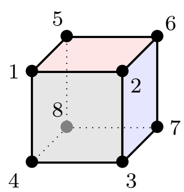
Par de aristas opuestas
(6 parejas)



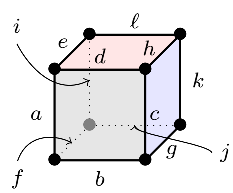
Par de caras opuestas
(3 parejas)

Este grupo tiene 1 función de identidad, $4*2$ rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ para cada par de vértices opuestos, 6 rotaciones de π para cada par de aristas opuestos y $3*3$ rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ para cada par de caras opuestas. Eso es $24 = 1+8+6+9$. Este grupo comienza a ser complicado y tomar algún tiempo para escribir la tabla completa de multiplicación. Pronto nombraremos todo su elemento.

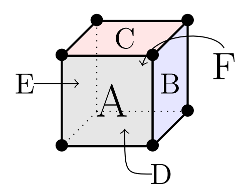
Para ayudarnos, vamos a nombre todos los componentes del cubo



8 vértices



12 aristas



6 caras

El grupo B_3 actúa sobre el conjunto

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,\ell,A,B,C,D,E,F\}$$

Por ejemplo, la permutación correspondiente a la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor de la línea a través de los vértices 3 y 5 es

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & \ell & A & B & C & D & E & F \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & h & c & g & k & \ell & d & b & j & e & a & f & i & B & D & F & A & C & E
\end{array}$$

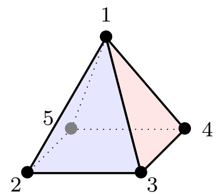
En algún momento es mejor escribir eso en la notación de ciclos disjuntos. Para esto simplemente seguimos lo que sucede con el elemento mientras iteramos la misma simetría:$1 \to 6 \to 8 \to 1$ y tenemos un ciclo. Simplemente escribimos $(1\,6\,8)$ y asumimos el ciclo de cerca. Entonces, la permutación anterior es

$$(1\,6\,8)(2\,7\,4)(3)(5)(a\,h\,j)(b\,c\,g)(d\,k\,f)(e\,\ell\,i)(A\,B\,D)(C\,F\,E)$$

La acción que describimos nos da una representación de permutaciones $\varphi\colon B_3 \to S_{26}$. Esta es una realización de permutaciones de B_3 (se puede ver por qué?). En esta representación de permutaciones, el elemento anterior tiene 8 ciclos de longitud 3 y 2 ciclos de longitud 1. Llamamos a eso la **estructura del ciclos** del elemento. La estructura del ciclos desempeñará un papel muy importante en la teoría de Polya. Por supuesto, si cambiamos la representación de permutaciones, obtenemos diferentes estructuras de ciclos.

3.3. **Órbitas y conteo de puntos.** Cuando estudiamos las acciones de B_3 en el conjunto X de vértices, aristas, caras del cubo observamos que una simetría envía un vértice a otro vértice, un arista a otro arista y una cara a una cara. Una simetría preserva los tipos. Esto nos lleva a definir la noción de órbita de un punto $x \in X$.

Antes de comenzar vamos a considerar el ejemplo más pequeño. Echemos un vistazo a las simetrías de



Vemos que cualquier simetría necesita fijar el punto 1. Por otro lado, siempre podemos encontrar una simetría que envíe cualquier punto de $\{2, 3, 4, 5\}$ a otro punto de $\{2, 3, 4, 5\}$. Decimos que el grupo de simetría que actúa sobre los puntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tiene dos órbitas: $\{1\}$ y $\{2, 3, 4, 5\}$. Vemos que las órbitas codifican la naturaleza de los puntos en nuestros objetos. Así que las órbitas nos dan información interesante sobre las simetrías de los objetos. Ahora vamos a definir órbitas y ver cómo contar puntos dentro de una órbita.

Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, decimos que la **órbita** $G.x$ de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Este es el conjunto de puntos de X que podemos alcanzar desde x con la acción de G. Vimos arriba un ejemplo de órbitas.

¿Cómo contar el número de puntos dentro de las órbitas de X? Es decir, ¿podemos encontrar una fórmula útil para $|G.x|$. Ya hemos encontrado este principio. Dejar

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subseteq G$$

Como se ve $G.x \subseteq X$ y $Stab(x) \subseteq G$. El conjunto $Stab(x)$ es de hecho un subgrupo de G. Esto nos da una buena manera de calcular $G.x$:

Proposición 7 (Teorema de Lagrange)**.** *Por $x \in X$, tenemos*

$$|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

La idea es construir una biyección explícita entre los dos conjuntos

$$G.x \quad \leftrightarrow \quad \{gS \mid g \in G\}$$

donde $S = Stag_x(G)$. Para cualquier $y \in G.x$, hay muchos posibles $g \in G$ tal que $y = g.x$.

$$\begin{aligned} \alpha\colon G.x &\to \{gS \mid g \in G\} \\ y &\mapsto gS \text{ donde } g \text{ es tal que } g.x = y \end{aligned}$$

Por supuesto tenemos que asegurarnos de que está bien definido. Eso es si

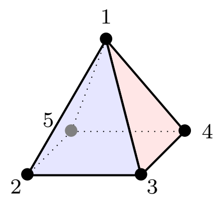
$$y = g.x = h.x \quad \Longleftrightarrow \quad h^{-1}g.x = x \quad \Longleftrightarrow \quad gS = hS$$

La función en la otra dirección está dada por

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \{gS \mid g \in G\} & \to & G.x \\ gS & \mapsto & g.x \end{array}$$

Las dos funciones construyen una correspondencia entre los dos conjuntos.

Si volvemos a nuestro pequeño ejemplo. El grupo de simetrías de



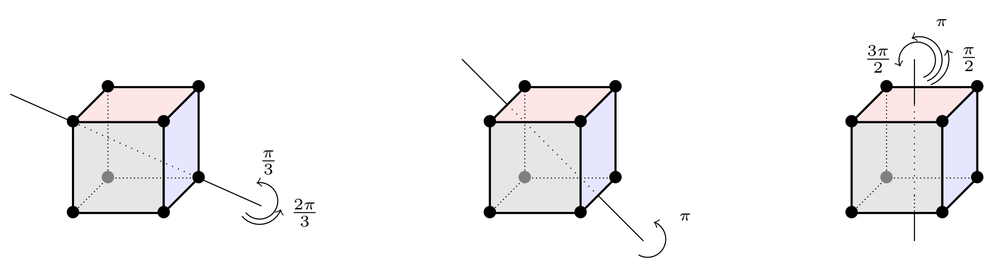
es C_4 (¿ves esto?). Hemos observado 2 órbitas:$\{1\}$ y $\{2,3,4,5\}$. Por 1, vemos que cada simetría fija 1, entonces

$$\frac{|C_4|}{|Stab(1)|} = \frac{4}{4} = 1$$

Para cualquiera de los puntos $2,3,4$ o 5, sólo la simetría de identidad fijar tal punto. Obtenemos

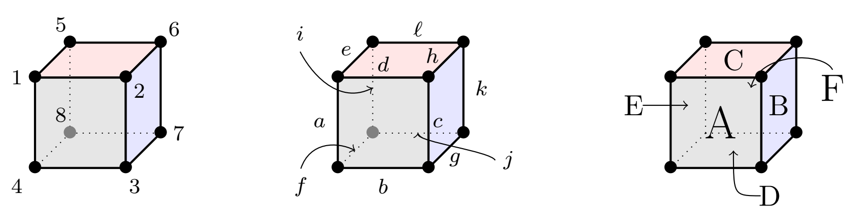
$$\frac{|C_4|}{|Stab(2)|} = \frac{4}{1} = 4$$

Si miramos a Sección 3.2, el grupo B_3



Par de vértices opuestos (4 parejas) | Par de aristas opuestas (6 parejas) | Par de caras opuestas (3 parejas)

actúa sobre el conjunto de vértices, aristas y caras del cubo:

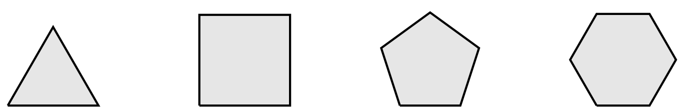


8 vértices | 12 aristas | 6 caras

Vemos que exactamente tres simetrías fijan el vértice 1. Por lo tanto
$$|B_3.1| = \frac{|B_3|}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$
Similarmente, sólo dos simetrías fijan la arista a, entonces
$$|B_3.a| = \frac{|B_3|}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$
Finalmente cuatro simetrías fijan una cara, entonces
$$|B_3.A| = \frac{|B_3|}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$
Esto es útil para contar vértices, aristas, caras, de objetos con muchas simetrías. Es aún más útil para las cosas que no podemos ver (como en las dimensiones superiores).

Ejercicios B.

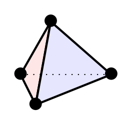
Ej.3.1 D_3, D_4, D_5, D_6: Estudia los grupos dihedrales. Estos son grupos de simetrías de



$D_3 = S_3$ D_4 D_5 D_6

donde aquí podemos girar la figura **y** también podemos sacarla de la mesa, voltearla y ponerla de nuevo (reflexión). Encuentre una realización de permutaciones para cada uno y dé a la estructura del ciclos de sus elementos.

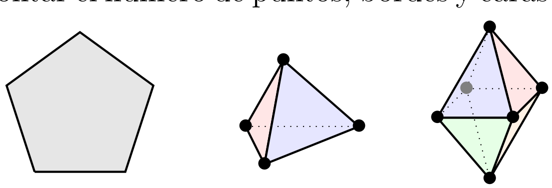
Ej.3.2 A_4: Estudia el grupo de simetrías rotacionales de un tetraedro. Encuentre una realización de permutaciones y describa la estructura del ciclos.



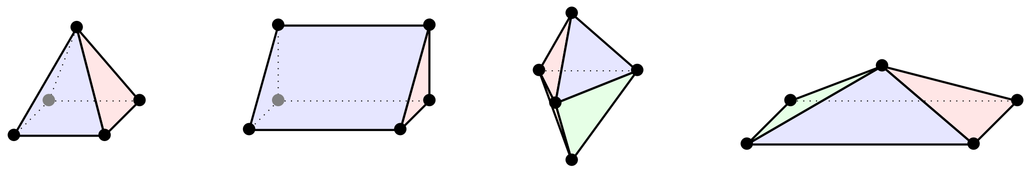
[¿Qué sucede si se permiten las reflexiones? Es un grupo más grande, ¿cuál?]

Ej.3.3 Sea $G = S_3$. Encuentre todas las diferentes acciones de S_3 en $X = \{a, b, c\}$. En cada caso, describa el homomorfismo correspondiente $\varphi\colon S_3 \to S_3$. Describa la estructura del ciclo de cada elemento de S_3, para cada representación de permutación que construyó.

Ej.3.4 Contar el número de puntos, bordes y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7.



Ej.3.5 El objeto no siempre es totalmente simétrico y los puntos, bordes y caras se dividen en órbitas más pequeñas (diferentes tipos de puntos, aristas, caras). Entender las órbitas para contar el número de puntos, aristas y caras de los siguientes objetos usando Proposición 7 y grupo de simetras.



(Ejercicios adicionales)

Ej.3.6 Vea nuevamente Ej.1.2. Describa la estructura de los ciclos de cada elemento de C_4 para esta representación de permutaciones.

Ej.3.7 Muestra que H_X en Proposición 5 es un subgrupo.

Ej.3.8 Muestra que $Stab(x)$ es un subgrupo.

Ej.3.9 En Proposición 7, muestre que $\alpha \circ \beta = Id$ and $\beta \circ \alpha = Id$.

Ej.3.10 Contar el número de vértices, aristas, 2-caras, 3-caras, ..., de un herpercubo de dimensión n.
[sugerencia. Encontrar un grupo de simetra del hipercubo que contiene exactamente una órbita para cada tipo de caras]

References

1. Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson (2010).
2. G. Pólya and R. C. Read *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* Springer-Verlag (1987).

Nantel Bergeron, Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, Ontario M3J 1P3, Canada

E-mail address: `bergeron@mathstat.yorku.ca`

URL: `http://www.math.yorku.ca/bergeron/`