

Simulasi OSN-K SMA Ikigai 2024

Rafael Feng* dan Kevin Ivander W

Februari 2024

1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Jawablah setiap soal berikut dengan menulis jawaban akhirnya saja. Setiap soal yang dijawab benar bernilai +2 poin. Tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Diketahui fungsi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga memenuhi

$$f(g(x)) = x^2 - x + 1 \text{ dan } g(f(x)) = 2x + 5.$$

Nilai dari $f(-5)$ adalah...

2. Nilai terbesar dari $\text{FPB}(12n^2 + 39n + 7, 6n + 2)$ untuk n bilangan asli adalah
3. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 40, AC = 60$ dan $BC = 50$. Garis bagi $\angle BAC$ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di titik P . Tentukan nilai dari BP^2 .

4. Tentukanlah sisa dari

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2404}$$

jika dibagi 1000.

5. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_{47} merupakan akar-akar kompleks yang memenuhi sistem persamaan $x^{47} - 47 = 0$. Tentukanlah sisa pembagian

$$\sum_{i=1}^{47} (x_i^{2022} + x_i^{2021} - x_i^{2020})$$

jika dibagi 1000.

6. Pada suatu hari, Feng mengikuti sebuah tes yang berisi 25 soal pilihan ganda, yang masing-masing memiliki 1, 2, ..., 25 pilihan jawaban. Ia memutuskan untuk memilih sembarang satu pilihan jawaban pada setiap soal. Jika peluang Feng menjawab total sebanyak genap soal dengan benar adalah $\frac{a}{b}$ dengan a, b saling prima. Tentukanlah $a \times b$.

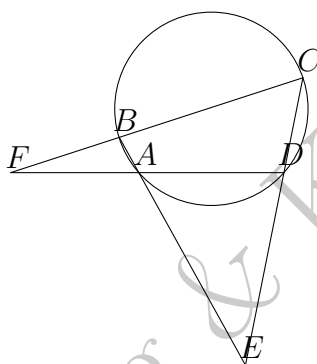
*rafaelfeng.github.io/Portfolio

7. Diberikan a, b, c bilangan real. Diketahui bahwa persamaan kubik,

$$x^3 + bx^2 + cax + a = 0$$

semua akarnya merupakan bilangan bulat. Tentukan nilai maksimum dari c jika $a \neq 0$.

8. Diberikan sebuah segiempat siklis $ABCD$. Perpanjangan BA dan perpanjangan CD berpotongan di E (titik E terletak lebih dekat dengan titik A dan D daripada titik B dan C). Perpanjangan DA dan perpanjangan CB berpotongan di F (titik F terletak lebih dekat dengan titik B dan A daripada titik C dan D). Jika diketahui $BC = 8, CD = 4, DA = 6$, dan $AE = 9$. Jika panjang FB dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$ dengan a, b saling prima, maka tentukan nilai dari $a + b$.



9. Suatu pabrik akan membuat berbagai macam produk dengan kode dan tipenya. Kode terdiri dari sebuah kata 4 huruf (boleh berulang) dengan hanya menggunakan huruf A, B, C, D, dan E. Suatu produk memiliki berbagai tipe berupa 1 huruf yang ada pada kode produk.

Contoh : Produk BCDA memiliki tipe a, b, c, dan d. Produk AECE memiliki tipe a, c, dan e. Sedangkan produk AAAA hanya memiliki tipe a saja.

Banyaknya produk dengan tipenya yang berbeda yang bisa dibuat oleh pabrik tersebut adalah...

10. Terdapat 2 kursi merah, 2 kursi biru, dan 2 kursi kuning yang akan ditempatkan pada suatu meja bundar. Kursi yang berwarna sama dianggap identik. 6 orang kemudian akan duduk pada kursi-kursi ini. Dua dari orang-orang ini adalah Anto dan Budi. Anto ingin duduk di kursi biru, dan Budi tidak ingin duduk di kursi biru. Jika keduanya tidak ingin duduk bersebelahan, maka banyaknya penempatan kursi dan orang yang berbeda adalah

2 Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Jawablah setiap soal berikut dengan menulis jawaban akhirnya saja. Setiap soal yang dijawab benar bernilai +4 poin, bernilai -1 poin apabila dijawab salah, dan bernilai 0 apabila tidak dijawab (kosong)

1. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $\angle ABC = 24^\circ$ dan $\angle ACB = 40^\circ$. Jika P adalah titik di BC sehingga $\angle BAP = 64^\circ$ dan Q adalah titik di AB sehingga $\angle QCB = 20^\circ$. Carilah nilai dari $\angle PQC$.
2. Misalkan a dan b real positif dengan $a, b \neq 1$ yang memenuhi $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$. Tentukanlah nilai dari $2(a^2 + b^2)$.
3. Jika banyak bilangan asli n yang memenuhi

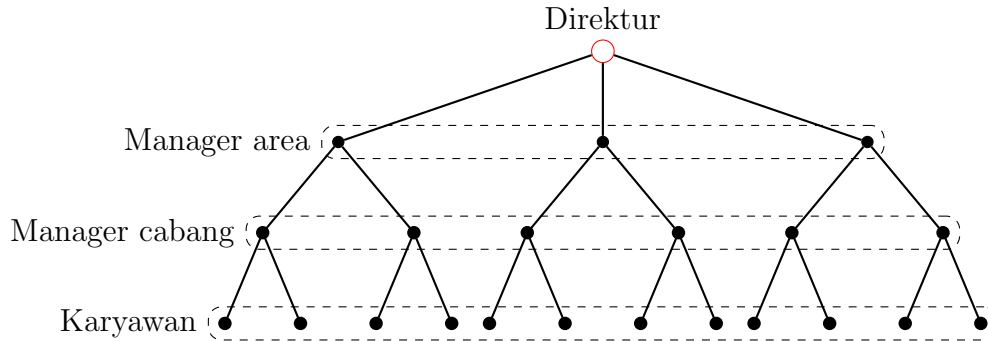
$$\left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \right\rfloor = 23^{23}$$

adalah X . Tentukanlah dua angka terakhir dari X .

4. Diberikan ABC adalah segitiga siku-siku sama kaki di C dan P adalah sembarang titik di ruas garis CB . Bila Q adalah titik tengah dari AB serta R, S adalah titik pada ruas garis AP sehingga $CR \perp AP$ dan $AS = CR$. Tentukan nilai dari $\left(\frac{RS}{SQ}\right)^2$.
5. Banyaknya solusi a, b, c bilangan asli sehingga $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - 2(a^3 + b^3 + c^3 + abc) = 64$ adalah
6. Tentukan banyaknya bilangan asli $a, b, c, d \leq 2024$ sehingga $3^a 5^b 7^c 13^d$ habis membagi $(a + b + c + d)!$.

Catatan : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

7. Diberikan segitiga ABC dengan panjang segmen $AB = 14, BC = 15$, dan $CA = 13$. Misalkan pusat dari B -excircle adalah titik O sehingga menyinggung garis BC, CA , dan AB berturut-turut di titik X, Y , dan Z . Jika t_1, t_2 , dan t_3 secara berurutan menyatakan jarak terpendek dari titik O ke segmen XY, YZ , dan ZX . Bila nilai dari $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = \frac{a}{b}$ dimana a, b saling prima. Tentukanlah sisa dari a jika dibagi b .
8. Pada suatu perusahaan otomotif terdapat seorang direktur, tiga orang manager area, enam orang manager cabang, dan dua belas karyawan. Berikut adalah stuktur perusahaan tersebut:



Perusahaan tersebut memiliki suatu kebiasaan yang aneh, yaitu

- Setiap orang hanya mengenal bawahannya dan/atau atasannya yang berbeda 1 tingkat saja dan dihubungkan oleh sebuah *edge*.
Sebagai contoh: Seorang direktur hanya mengenal tiga orang manager area. Seorang manager area hanya mengenal direktur dan dua orang manager cabang (yang tepat di bawahnya).
- Tidak ada satupun orang yang saling mengenal jika tidak dihubungkan oleh sebuah *edge*.

Suatu ketika Feng mengikuti acara tahunan yang diadakan oleh perusahaan tersebut. Pada awalnya Feng tidak mengetahui satupun jabatan dari setiap orang pada perusahaan tersebut. Kemudian, Feng ingin mencari tahu siapa yang menjabat sebagai direktur. Setiap orang di perusahaan itu tidak boleh memberikan informasi mengenai jabatan mereka, akan tetapi mereka boleh memberi informasi siapa saja yang mereka kenal di perusahaan itu.

Tentukan setelah berapa kali bertanya Feng mengetahui secara pasti siapa yang menjadi direktur, asumsikan ia bekerja dengan kemampuan yang optimal serta menyusun strategi.

9. Suatu bilangan asli dikatakan *cakep* jika jumlah n digit pertamanya habis dibagi n untuk setiap n bilangan asli tidak lebih dari banyaknya digit bilangan tersebut. Banyaknya bilangan *cakep* yang jumlah semua digitnya 45 adalah...
10. Suatu nomor telpon 8 digit $d_1d_2d_3\dots d_7d_8$ bisa dibilang mudah diingat jika $d_1d_2d_3$ sama dengan setidaknya salah satu dari $d_4d_5d_6$, $d_5d_6d_7$, atau $d_6d_7d_8$. Jika setiap digit nomor telpon ini boleh bernilai 0 hingga 9. Tentukan banyaknya nomor telpon mudah diingat ini.

Selamat mengerjakan!