# FPB dan KPK

Rafael Feng*

25 Desember 2023

## 1 Pengantar

Kita akan membahas materi tentang teori bilangan, khususnya mengenai FPB dan KPK. FPB dan KPK sendiri merupakan salah satu bagian penting dalam keterbagian, akan banyak digunakan untuk mengerjakan soal dari tingkat mudah hingga sulit. Dalam beberapa tahun terakhir, penggunakan FPB dan KPK lebih terpakai untuk mengerjakan soal di tingkat provinsi dan nasional, bahkan di tahun 2023 menjadi salah satu soal OSN. Walaupun begitu FPB dan KPK bukan berarti tidak penting untuk persiapan OSK. Pada setiap tahun dari tahun 2020 hingga 2022, muncul setidaknya 1 soal yang menggunakan teknik/trik FPB dan KPK.

## 2 Materi

### 2.2.1 Dasar

Pada bagian ini, yang akan menjadi fokus bahasan kita adalah teorema dan sifat-sifat. Teorema dan sifat-sifat yang dibahas di bagian ini, akan digunakan sebagai senjata untuk mengerjakan bagian lanjut dan latihan soal. Contoh soal yang disediakan pada bagian ini hanyalah sebagai penguatan untuk memahami materi yang telah dijelaskan, hanya perlu menggunakan materi yang dijelaskan tanpa teknik/trik khusus.

**Definisi 2.1** Diberikan bilangan bulat $a$ dan $b$ salah satunya tak nol. Ada beberapa bilangan sehingga $m \mid a$ dan $m \mid b$. Diantara bilangan-bilangan tersebut ada yang terbesar. Bilangan terbesar $m$ sehingga $m \mid a$ dan $m \mid b$ disebut faktor persekutan terbesar dari $a$ dan $b$. Ditulis dalam bentuk $\text{FPB}(a, b)$.

**Definisi 2.2** Diberikan bilangan bulat $a$ dan $b$ yang keduanya tak nol. Ada tak hingga bilangan asli sehingga $a \mid n$ dan $b \mid n$. Diantara bilangan-bilangan tersebut ada yang terkecil. Bilangan terkecil $n$ sehingga $a \mid n$ dan $b \mid n$ disebut kelipatan persekutuan terkecil dari $a$ dan $b$. Ditulis dalam bentuk $\text{KPK}(a, b)$.

**Definisi 2.3** Beberapa hal yang perlu diketahui:

1. $\text{FPB}(a, 1) = 1$.
2. $\text{FPB}(a, 0) = |a|$.
3. $\text{FPB}(a, a) = |a|$.

*rafaelfeng.github.io/Portfolio

**Sifat 2.1** Beberapa sifat yang sering digunakan:

1. (a) Jika $d \mid a$ dan $d \mid b$ maka $d \mid \text{FPB}(a, b)$.
   (b) Jika $a \mid d$ dan $b \mid d$ maka $\text{KPK}(a, b) \mid d$.
2. (a) $a = \text{FPB}(a, b) \iff a \mid b$.
   (b) $a = \text{KPK}(a, b) \iff b \mid a$.
3. (a) $\text{FPB}(da, db) = d \cdot \text{FPB}(a, b)$.
   (b) $\text{KPK}(da, db) = d \cdot \text{KPK}(a, b)$.
4. Sifat komutatif.
   (a) $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, a) = \text{FPB}(|a|, |b|)$.
   (b) $\text{KPK}(a, b) = \text{KPK}(b, a) = \text{KPK}(|a|, |b|)$.

   Tetap berlaku untuk banyak variabel.
5. Sifat asosiatif.
   (a) $\text{FPB}(a, b, c) = \underbrace{\text{FPB}(a, \text{FPB}(b, c))}_{\text{dan permutasinya}} = \text{FPB}(\text{FPB}(a, b), \text{FPB}(b, c), \text{FPB}(c, a))$.
   (b) $\text{KPK}(a, b, c) = \underbrace{\text{FPB}(a, \text{KPK}(b, c))}_{\text{dan permutasinya}} = \text{KPK}(\text{KPK}(a, b), \text{KPK}(b, c), \text{KPK}(c, a))$.

   Tetap berlaku untuk banyak variabel.

**Teorema 2.1**
Jika $a$ dan $b$ bilangan bulat sehingga $\text{FPB}(a, b) = d$, maka terdapat bilangan bulat $x$ dan $y$ sehingga $a = dx$ dan $b = dy$ dengan $\text{FPB}(x, y) = 1$.

*Bukti.* Kita buktikan dengan kontradiksi. Andaikan $\text{FPB}(x, y) = p > 1$. Maka

$$\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(dx, dy) = d \times \text{FPB}(x, y) = dp > d$$

yang berarti kontradiksi bahwa $\text{FPB}(a, b) = d$. Jadi disimpulkan bahwa $\text{FPB}(x, y) = 1$, terbukti.

**Akibat 2.1** Jika $a$ dan $b$ bilangan bulat, maka berlaku

$$\text{FPB}(a, b) \cdot \text{KPK}(a, b) = ab.$$

*Bukti.* Misalkan $\text{FPB}(a, b) = d$. Berdasarkan Teorema 2.1, maka $a = dx$ dan $b = dy$ dengan $\text{FPB}(x, y) = 1$. Maka,

$$\begin{aligned} \text{FPB}(a, b) \cdot \text{KPK}(a, b) &= d \cdot \text{KPK}(dx, dy) \\ &= d^2 \cdot \text{KPK}(x, y) \\ &= d^2 xy \\ &= dx \cdot dy \\ &= ab. \end{aligned}$$

Terbukti.

**Contoh 2.1**
Banyak pasangan bilangan asli $(x, y)$ sehingga $\text{FPB}(x, y) = 5$ dan $\text{KPK}(x, y) = 30$ adalah ...

**Contoh 2.2**
Diberikan bilangan asli $m$ dan $n$. Jika $\text{FPB}(m, n) = 7$ dan $\text{FPB}(2m, 3n) = 42$, nilai dari $\text{FPB}(21m, 14n)$ adalah ...

Selanjutnya ada properti yang sangat berguna, yaitu Algoritma Euclid.

**Teorema 2.2**
(Algoritma Euclid) Jika $a, b$, dan $k$ bilangan bulat, maka

$$\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(a + bk, b) = \text{FPB}(a, b + ak).$$

*Bukti.* Misalkan $\text{FPB}(a + bk, b) = d$ dengan $d \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa $d \mid b$ dan $d \mid a + bk$ sehingga

$$d \mid (a + bk) - (bk) = a.$$

Akibatnya dapat dituliskan $a = dx$ dan $b = dy$. Maka $\text{FPB}(a + bk, b) = \text{FPB}(dx + dyk, dy) = d \cdot \text{FPB}(x + yk, y) = d \implies \text{FPB}(x + yk, y) = 1$.

Selanjutnya, misalkan $\text{FPB}(x, y) = s$ dengan $s \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa $s \mid x$ dan $s \mid y$ sehingga $s \mid x + yk$. Akibatnya $\text{FPB}(x + yk, y) = s \implies s = 1$. Maka $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(dx, dy) = d \cdot \text{FPB}(x, y) = d$.

Jadi $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(a + bk, b)$, terbukti.

**Contoh 2.3**
Tanpa kalkulator, tentukanlah $\text{FPB}(123456, 234567)$.

**Contoh 2.4**
Bilangan asli ganjil $b$ terbesar sehingga barisan bilangan asli $a_n = n^2 + 19n + b$ memenuhi

$$\text{FPB}(a_n, a_{n+1}) = \text{FPB}(a_{n+2}, a_{n+1})$$

untuk setiap bilangan asli $n$ adalah ...

**Teorema 2.3**
(Identitas Bézout) Untuk bilangan bulat $a$ dan $b$ dimana $a, b \neq 0$. Maka akan selalu ada $x, y$ bilangan bulat sehingga

$$ax + by = \text{FPB}(a, b).$$

*Bukti.* Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \geq b$.

Bila $b \mid a$ dapat dituliskan $a = bk$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $ax + by = \text{FPB}(a, b) \implies bkx + by = b \implies kx + y = 1$ sehingga dapat dikonstruksikan $x = 1$ dan $y = 1 - k$, kita selesai.

Bila $b \nmid a$ maka dapat dituliskan $a = bx_1 + r_1$ dengan $r_1, x_1 \in \mathbb{Z}$ dan $0 < r_1 < |b|$. Dengan Algoritma Euclid diperoleh $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, r_1)$. Lakukan proses ini berulang kali:

$$\text{Algoritma Euclid} \begin{cases} a = bx_1 + r_1, & 0 < r_1 < |b| \\ b = r_1x_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ \quad\vdots & \\ r_{n-1} = r_nx_{n+1} + r_{n+1}, & 0 < r_{n+1} < r_n \\ r_n = r_{n+1}x_{n+2}. & \end{cases}$$

Perhatikan bahwa indeks $n + 1$ merupakan bilangan terbesar sehingga $r_{n+1} \neq 0$. Selanjutnya, dari persamaan kedua dari bawah, kita dapat menyatakan $r_{n+1}$ dalam bentuk $r_{n-1}$ dan $r_n$. Lalu, kita dapat menyatakan $r_n$ dalam bentuk $r_{n-1}$ dan $r_{n-2}$, hingga kita dapat menyatakan $r_{n+1}$ dalam bentuk $a$ dan $b$ (ini disebut *Extended Euclidean Algorithm*). Karena $r_{n+1}$ merupakan hasil pembagian terakhir yang tak nol, maka $\text{FPB}(a, b) = r_{n+1}$.

Jadi akan selalu ada $x, y$ bilangan bulat sehingga $ax + by = \text{FPB}(a, b)$. Terbukti.

**Akibat 2.2** (Lemma Euclid) Jika $\text{FPB}(a, b) = 1$ dan $a \mid bc$, maka $a \mid c$.

*Bukti.* Dari Identitas Bezout, dengan meninjau $\text{FPB}(a, b) = 1$ kita bisa mendapatkan bilangan bulat $x, y$ sehingga $ax + by = 1 \iff axc + byc = c$. Ingat bahwa $a \mid axc$ dan $a \mid bc \implies a \mid byc$, sehingga $a \mid axc + byc = c$. Terbukti.

**Akibat 2.3** Untuk setiap bilangan asli $a, m$, dan $n$, maka

$$\text{FPB}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{FPB}(m,n)} - 1.$$

*Bukti.* Misalkan $\text{FPB}(a^m - 1, a^n - 1) = d$ dengan $d \in \mathbb{N}$ sehingga $a^m - 1 \equiv 0 \pmod{d}$ dan $a^n - 1 \equiv 0 \pmod{d}$. Maka $a^m \equiv 1 \pmod{d}$ dan $a^n \equiv 1 \pmod{d}$.

Berdasarkan Teorema 2.3, kita dapat memisalkan $x, y \in \mathbb{Z}$ merupakan solusi dari $mx + ny = \text{FPB}(m, n)$. Selanjutnya, tinjau $a^{mx} \equiv 1 \pmod{d}$ dan $a^{ny} \equiv 1 \pmod{d}$ sehingga $a^{mx+ny} \equiv 1 \pmod{d}$. Didapat,

$$\begin{aligned} a^{mx+ny} = a^{\text{FPB}(m,n)} \equiv 1 \pmod{d} &\implies a^{\text{FPB}(m,n)} - 1 \equiv 0 \pmod{d} \\ &\implies d \mid a^{\text{FPB}(m,n)} - 1. \end{aligned}$$

Kemudian, karena $\text{FPB}(m, n) \mid m$ dan $\text{FPB}(m, n) \mid n$ maka $a^{\text{FPB}(m,n)} - 1 \mid a^m - 1$ dan $a^{\text{FPB}(m,n)} - 1 \mid a^n - 1$. Akibatnya $a^{\text{FPB}(m,n)} - 1 \mid \text{FPB}(a^m - 1, a^n - 1) = d$.

Jadi $\text{FPB}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{FPB}(m,n)} - 1$, terbukti.

**Contoh 2.5**

Misalkan $d$ merupakan faktor persekutuan terbesar dari $2^{30^{10}} - 2$ dan $2^{30^{45}} - 2$. Tentukanlah nilai dari,

$$\sqrt[5]{\log_2 (d + 2)}.$$

**Contoh 2.6**
(Extended Euclidean Algorithm) Tentukanlah bilangan bulat $x$ dan $y$ sehingga $1914x + 899y = \text{FPB}(1914, 899)$.

### 2.2.2 Lanjutan

Pada bagian ini, kita hanya akan membahas contoh soal, tanpa ada materi lagi. Contoh soal yang disediakan memiliki tingkat kesulitan yang lebih tinggi dibandingkan bagian sebelumnya, serta terdapat beberapa soal pembuktian. Bagian ini dapat dikerjakan atau dilompati, karena pada OSK masih belum ada soal uraian (pembuktian).

**Contoh 2.7**
Buktikan bahwa $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan untuk setiap bilangan asli $n$.

**Contoh 2.8**
Tentukanlah

$$\text{FPB}(2002^1 + 2, 2002^2 + 2, 2002^3 + 2, \cdots).$$

**Contoh 2.9**
Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $a$ dan $b$, bilangan

$$n = \text{FPB}(a, b) + \text{KPK}(a, b) - a - b$$

adalah bilangan bulat genap tak negatif.

**Contoh 2.10**
Misalkan $a$ dan $b$ adalah bilangan bulat positif sehingga $\text{FPB}(a, b) + \text{KPK}(a, b)$ adalah kelipatan $a + 1$. Jika $b \leq a$, tunjukkan bahwa $b$ adalah kuadrat sempurna.

**Contoh 2.11**
Misalkan $a, b, c$ merupakan bilangan bulat positif sehingga

$$\text{FPB}(a, b) + \text{FPB}(b, c) + \text{FPB}(c, a) = b + c + 2023$$

Buktikan bahwa $\text{FPB}(b, c) = 2023$.

**Contoh 2.12**
Buktikan bahwa

$$\frac{\mathrm{FPB}(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

merupakan bilangan bulat untuk setiap $n \geq m \geq 1$.

## 3 Latihan Soal

1. Tentukan jumlah semua nilai berbeda yang mungkin dari

$$\mathrm{FPB}(n^2+n+1, n^2+3n+5)$$

untuk suatu bilangan asli $n$.

2. Misalkan $n_1, n_2, n_3, \ldots$ adalah bilangan asli yang memenuhi

$$\frac{n-13}{4n+12}$$

merupakan pecahan positif yang tidak dapat disederhanakan. Jika $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, tentukan $n_7$.

3. Bilangan-bilangan pada barisan 101, 104, 109, 116,... dapat dinyatakan dalam bentuk $a_n = 100 + n^2$ dimana $n = 1, 2, 3, \ldots$. Didefinisikan $d_n$ merupakan FPB dari $a_n$ dan $a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tentukanlah nilai maksimum dari $d_n$ dengan $n$ pada range bilangan asli.

4. Tentukan dengan bukti, adakah kuadruplet bilangan asli $(a, b, c, d)$ yang memenuhi persamaan

$$a^2 + b^5 + c^{11} = d^{2021}.$$

5. Tentukan semua tripel bilangan asli $(a, b, c)$ sehingga

$$\mathrm{KPK}(a, b, c) = a + b + c.$$

6. Didefinisikan bilangan *ciamik* dari $a$ dan $b$ adalah bilangan bulat positif terbesar sehingga habis membagi $a$ dan $b$ (sebagai contoh: bilangan *ciamik* dari 12 dan 16 adalah 4). Tentukanlah bilangan *ciamik* dari

$$4058 \text{ dan } \frac{2025^{2029} + 2033^{2029}}{4058}.$$

7. Tentukan semua tripel $(a, b, c)$ bilangan bulat positif sehingga,

$$\mathrm{FPB}(a, 20) = b, \mathrm{FPB}(b, 15) = c, \text{ dan } \mathrm{FPB}(a, c) = 5.$$

8. Misalkan $a$, $b$, $c$, $d$ merupakan bilangan bulat positif sehingga $ab = cd$. Buktikan bahwa

$$\mathrm{FPB}(a, c) \cdot \mathrm{FPB}(a, d) = a \cdot \mathrm{FPB}(a, b, c, d).$$

9. Jika untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ berlaku
   - ▷ $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ dan $b_i \neq 1$.
   - ▷ $\text{FPB}(a_i, b_i) = 1$ dan $\text{FPB}(b_i, b_j) = 1$ untuk setiap $i \neq j$.

   Buktikan bahwa
   $$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$$
   bukan merupakan bilangan bulat.

10. Tentukan semua tripel bilangan bulat positif $(a, b, c)$ sehingga
    $$\text{KPK} = \frac{ab + bc + ca}{4}.$$

*Sumber soal akan disertakan pada pembahasan.*