Tes Awal Teori Bilangan

Rafael Feng*

16 Januari 2024

TES : Teori Bilangan **WAKTU : 120 Menit**

Terdiri dari 20 soal isian singkat. Jawablah setiap soal berikut dengan menuliskan jawaban akhirnya saja, jawaban dipastikan merupakan bilangan bulat non negatif. Jawaban benar bernilai +2 dan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang dijawab salah atau tidak dijawab.

1. Tentukan banyak bilangan asli $n \leq 2023$ sehingga untuk setiap bilangan dari n bilangan asli berurutan, terdapat bilangan asli kubik yang membagi habis bilangan tersebut.

2. Misalkan $n_1, n_2, n_3, ...$ adalah bilangan asli yang memenuhi

$$\frac{n-13}{4n+12}$$

merupakan pecahan positif yang tidak dapat disederhanakan. Jika $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, tentukan n_7.

3. Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi sistem persamaan

$$a + 2b + 3c = 455 \text{ dan } 5a + 3b + c = 420.$$

4. Tentukan bilangan bulat terbesar k sedemikian sehingga $k^3 - 2023$ habis dibagi $k + 23$.

5. Tentukan banyak pasangan bilangan prima (a, b, c) sedemikian sehingga $a - b - 8$ dan $b - c - 8$ masing-masing merupakan bilangan prima.

6. Misalkan s menyatakan perkalian semua faktor-faktor dari $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7$ yang merupakan kuadrat sempurna. Nilai dari s dapat dinyatakan sebagai $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ untuk suatu bilangan asli a, b, dan c. Tentukan nilai dari $a + b + c$.

7. Tentukan jumlah semua nilai berbeda yang mungkin dari

$$\text{FPB}(n^2 + n + 1, n^2 + 3n + 5)$$

untuk suatu bilangan asli n.

8. Tentukan banyaknya bilangan asli empat digit yang habis dibagi 3 dan digit-digit penyusunnya hanyalah 0, 1, 2, 3, 4, 6, atau 8 (setiap digit boleh digunakan berulang kali).

---

*`rafaelfeng.github.io/Portfolio`

9. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (m, n) yang memenuhi persamaan
$$n^{2023} = (m+n)(m+2n)\dots(m+2023n).$$

10. Diketahui p dan q adalah dua bilangan asli yang relatif prima sedemikian sehingga
$$(ab.cbcb\dots)_7 = (ac.aaaa\dots)_9 = \frac{p}{q}$$
dimana a, b, dan c menyatakan suatu digit, serta p, q saling prima. Tentukan nilai $p+q$.

11. Tentukan jumlah semua bilangan bulat positif n, sehingga banyak faktor positif n tepat ada sebanyak $\sqrt{n+1}$.

12. Tentukan jumlah 2022 digit terakhir dari,
$$\left\lfloor \frac{60^{2022}}{7} \right\rfloor.$$

13. Jika,
$$S_n = 2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{222...222}_{n \text{ digit}}.$$
Tentukanlah 4 digit terakhir dari S_{2022}.

14. Pada suatu hari Feng menuliskan daftar semua bilangan asli $n \leq 2023$ sehingga $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ habis dibagi 4. Di waktu yang sama, Kevin juga melakukan hal yang sama, akan tetapi karena ia memiliki fobia, ia tidak dapat menuliskan bilangan yang mengandung digit ganjil (baik sebagai satuan, puluhan, ratusan, maupun ribuan). Tentukanlah selisih banyak bilangan yang telah dituliskan oleh Feng dan Kevin.

15. Tentukan banyak bilangan asli $n \leq 2023$ sehingga
$$1 + 2^{n+1} + 3^{2n} \equiv 0 \pmod{57}.$$

16. Terdapat 3 bilangan bulat a, b, c dengan $abc \neq 0$. Tentukan banyaknya solusi persamaan
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2026abc.$$

17. Didefinisikan bilangan *ciamik* dari a dan b adalah bilangan bulat positif terbesar sehingga habis membagi a dan b (sebagai contoh: bilangan *ciamik* dari 12 dan 16 adalah 4). Tentukanlah bilangan *ciamik* dari
$$4058 \text{ dan } \frac{2025^{2029} + 2033^{2029}}{4058}.$$

18. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023}$ merupakan barisan naik yang masing-masing merupakan bilangan asli sehingga
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2023} = 1234^{5678}.$$
Tentukan sisa dari $a_1^9 + a_2^9 + \ldots + a_{2023}^9$ ketika dibagi 15.

19. Diketahui a dan b adalah bilangan asli kurang dari 15 yang memenuhi $3ab - a - 2b$ dan $ab - 5a - 3b$ masing-masing habis dibagi 15. Tentukan jumlah semua nilai ab yang mungkin.

20. Suatu bilangan asli N dikatakan *nice* jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a \ \boxed{}\ b\ \boxed{}\ c\ \boxed{}\ d$$

dimana $\boxed{}$ dapat diisi dengan simbol $+$ atau $-$, serta a, b, c, d merupakan bilangan asli yang memenuhi syarat-syarat berikut:

- $a + 2^b + 3^c = 3d! + 1$ dan
- a dapat dinyatakan dalam bentuk $(p+1)(2p+1) = (q+1)(q-1)^2$ untuk suatu bilangan prima p dan q.

Tentukan jumlah semua N *nice* berbeda.