Uraian Awal Teori Bilangan

Rafael Feng*

13 Januari 2024

TES : Teori Bilangan **WAKTU : 120 Menit**

Terdiri dari 5 soal uraian. Jawablah setiap soal berikut dengan menuliskan argumen dengan jelas, padat, dan lengkap. Setiap soal bernilai pada rentang 0 - 7 poin, tidak ada pengurangan poin untuk jawaban yang salah/kosong.

1. Suatu bilangan asli $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ memiliki ciri-ciri yang unik, salah satunya dalam keterbagian 2^n. Didefinisikan n digit terakhir dari N adalah $\overline{a_{k-n+1} a_{k-n+2} \ldots a_k}$ untuk setiap $k \geq n$.

   (a) Buktikan bahwa jika digit terakhir suatu bilangan asli genap, maka bilangan tersebut bisa dibagi 2. **[1 poin]**

   Contoh: $\overline{124}$ memiliki digit terakhir 4, sehingga 2 habis membagi 4. Maka 2 habis membagi $\overline{124}$.

   (b) Buktikan bahwa jika dua digit terakhir suatu bilangan asli habis dibagi 4, maka bilangan tersebut bisa dibagi 4. **[2 poin]**

   Contoh: $\overline{124}$ memiliki dua digit terakhir $\overline{24}$, sehingga 4 habis membagi $\overline{24}$. Maka 4 habis membagi $\overline{124}$.

   (c) Buktikan bahwa jika n digit terakhir suatu bilangan asli habis dibagi 2^n, maka bilangan tersebut bisa dibagi 2^n. **[4 poin]**

2. Bilangan prima merupakan bilangan yang unik, karena bilangan ini hanya habis dibagi oleh 1 dan dirinya sendiri (tepat hanya memiliki 2 faktor positif).

   (a) Buktikan bahwa setiap bilangan prima ganjil dapat dinyatakan dalam bentuk $4m - 1$ atau $4m + 1$ dengan $m \in \mathbb{N}$. **[1 poin]**

   (b) Buktikan bahwa setiap bilangan prima > 3 dapat dinyatakan dalam bentuk $6m - 1$ atau $6m + 1$ dengan $m \in \mathbb{N}$. **[1 poin]**

   (c) Buktikan bahwa ada tak terhingga bilangan prima. **[2 poin]**

   (d) Buktikan bahwa ada tak terhingga bilangan prima yang dapat dinyatakan dalam bentuk $4m + 1$. **[3 poin]**

3. (a) Buktikanlah bahwa nilai terkecil yang mungkin dari $|8^m - 5^n|$ adalah 3, untuk m dan n bilangan asli. **[4 poin]**

   (b) Apakah kita bisa simpulkan bahwa nilai terkecil yang mungkin dari $|x^m - y^n|$ adalah $|x - y|$ dimana $x, y \in \mathbb{N}$ serta $\text{FPB}(x, y) = 1$, untuk m dan n bilangan asli? **[3 poin]**

*rafaelfeng.github.io/Portfolio

4. Fungsi floor $\lfloor x \rfloor$ adalah fungsi yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

   (a) Misalkan $A_n = (\sqrt{3}+1)^{2n}$ dan $B_n = (\sqrt{3}-1)^{2n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   i. Buktikan bahwa $A_n + B_n$ merupakan bilangan bulat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   ii. Buktikan bahwa B_n berada pada range $(0, 1)$.

   [1 poin]

   (b) Dari (a), simpulkan bahwa $\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n} + 1 \rfloor$ habis dibagi oleh 2^{n+1}. **[2 poin]**

   (c) Buktikan bahwa $\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n+1} \rfloor$ juga habis dibagi oleh 2^{n+1}. **[2 poin]**

   (d) Dari (b) dan (c), coba buktikan bahwa

   $$\nu_2\left(\left\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n} + 1 \right\rfloor\right) \text{ dan } \nu_2\left(\left\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n+1} \right\rfloor\right)$$

   adalah $n + 1$. **[2 poin]**

5. (a) Misalkan n merupakan bilangan genap. Buktikan bahwa tidak ada bilangan ganjil $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sehingga

   $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

   [2 poin]

   (b) Jika untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ berlaku

   - $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ dan $b_i \neq 1$.
   - FPB$(a_i, b_i) = 1$ dan FPB$(b_i, b_j) = 1$ untuk setiap $i \neq j$.

   Buktikan bahwa

   $$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}$$

   bukan merupakan bilangan bulat. **[5 poin]**