Jawaban

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad

30 Juni 2022 – 1 Juli 2022

Soal 1. Find all pairs (a, b) of positive integers such that

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

Jawab : Tinjau bahwa,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq (a-b)(3ab)$$

Maka,

$$(a-b)(3ab) \leq (a-b)(a^2 + ab + b^2) \leq 12ab$$
$$a - b \leq 4$$
$$a - 4 \leq b$$

Kemudian karena $a, b \in \mathbb{N}$ haruslah $a^3 - b^3 \geq 0 \Longrightarrow a \geq b$. Maka,

$$a - 4 \leq b \leq a$$

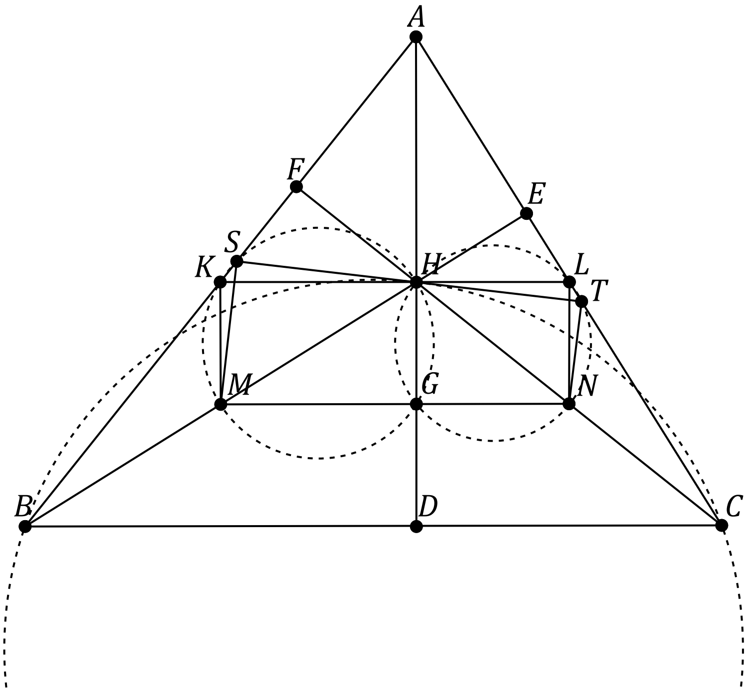
Bagi kasus :

1. Bila $b = a - 4$ maka,
$$11a(a-4) \leq a^3 - (a-4)^3 \leq 12a(a-4)$$
$$11a^2 - 44a \leq 12a^2 - 48a + 64 \leq 12a^2 - 48a$$
Kontradiksi.
2. Bila $b = a - 3$ maka,
$$11a(a-3) \leq a^3 - (a-3)^3 \leq 12a(a-3)$$
$$11a^2 - 33a \leq 9a^2 - 27a + 27 \leq 12a^2 - 36a$$
$$9 \leq (a-3)a \leq \frac{27}{2}$$
Maka $a = 5$ memenuhi sehingga $b = 2$. Untuk $a \geq 6 \Longrightarrow (a-3)a \geq 18$, tidak mungkin.
3. Bila $b = a - 2$ maka,
$$11a(a-2) \leq a^3 - (a-2)^3 \leq 12a(a-2)$$
$$11a^2 - 22a \leq 6a^2 - 12a + 8 \leq 12a^2 - 24a$$
$$\frac{4}{3} \leq (a-2)a \leq \frac{8}{5}$$
Karena $1 < \frac{4}{3} < \frac{8}{5} < 2$ maka jelas tidak ada yang memenuhi.
4. Bila $b = a - 1$ maka,
$$11a(a-1) \leq a^3 - (a-1)^3 \leq 12a(a-1)$$
$$11a^2 - 11a \leq 3a^2 - 3a + 1 \leq 12a^2 - 12a$$
$$\frac{1}{9} \leq (a-2)a \leq \frac{1}{8}$$
Karena $0 < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} < 1$ maka jelas tidak ada yang memenuhi.
5. Bila $b = a$ maka,
$$11a(a) \leq a^3 - (a)^3 \leq 12a(a)$$
$$11a^2 \leq 0 \leq 12a^2$$
Maka $a = 0$ akan tetapi karena $a \in \mathbb{N}$, tidak memenuhi.

Jadi solusi dari (a, b) adalah $(5, 2)$.

Soal 2. Let ABC be an acute triangle such that $AH = HD$, where H is the orthocenter of ABC and $D \in BC$ is the foot of the altitude from the vertex A. Let ℓ denote the line through H which is the tangent to the circumcircle of the triangle BHC. Let S and T be the intersection points of ℓ with AB and AC, respectively. Denote the midpoints of BH and CH by M and N, respectively. Prove that the lines SM and TN are parallel.

Jawab : Perhatikan gambar dibawah ini.



Karena ST menyinggung lingkaran luar BHC bisa didapat,

$$\angle SHB = \angle BCH = 90^\circ - \angle ABC$$
$$\angle SBH = \angle ABE = 90^\circ - \angle BAC$$

Darisini didapat,

$$\angle BSH = 180^\circ - (90^\circ - \angle ABC) - (90^\circ - \angle BAC) = \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ - \angle BCA$$
$$\Rightarrow \angle AST = 180^\circ - \angle BSH = \angle BCA$$

Karena H titik tengah dari AD dan kemudian dimisalkan K serta L adalah titik tengah dari AB dan AC. Maka KH dan BC sejajar kemudian karena M titik tengah BC diperoleh KM dan AD juga sejajar. Darisini disimpulkan $KM \perp KH$ sehingga $\angle MKH = 90^\circ$.

$$\angle KHM = \angle KHB = \angle HBC$$

Maka,

$$\angle HMK = 90^\circ - \angle KHM = 90^\circ - \angle HBC = 90^\circ - (90^\circ - \angle BCA) = \angle BCA = \angle AST$$
$$= 180^\circ - \angle KSH$$

Didapat $MSKH$ siklis sehingga $\angle MSH = 90^\circ$, analog untuk $HLTN$ siklis sehingga $\angle HTN = 90^\circ$. Jadi terbukti bahwa SM dan TN sejajar.

Soal 3. Find all quadruples of positive integers (p, q, a, b), where p and q are prime numbers and $a > 1$, such that

$$p^a = 1 + 5q^b$$

Jawab : Bagi kasus jika ruas kanan ganjil dan genap.

1. Jika ruas kanan berparitas ganjil maka $5q^b$ genap. Maka didapat $q = 2$ dan p berparitas ganjil sehingga persamaan berbentuk,

$$p^a = 1 + 5 \cdot 2^b$$

Selanjutnya kembali bagi kasus :

a. Bila a ganjil maka,

$$p^a - 1 = (p-1)(p^{a-1} + p^{a-2} + \cdots + 1) = 5 \cdot 2^b$$

Karena $p^{a-1} + p^{a-2} + \cdots + 1 > 1$ dan berparitas ganjil sehingga $p^{a-1} + p^{a-2} + \cdots + 1 = 5$ padahal (ingat bahwa $a > 1$),

$$p^{a-1} + p^{a-2} + \cdots + 1 \geq p^2 + p + 1 \geq 3^2 + 3 + 1 = 13 > 5$$

Tidak mungkin.

b. Bila a genap dan misalkan $a = 2k$ dimana $k \in \mathbb{N}$. Maka,

$$p^{2k} - 1 = (p^k - 1)(p^k + 1) = 5 \cdot 2^b$$

Selanjutnya perhatikan bahwa FPB$(p^k - 1, p^k + 1) = 2$ sehingga salah satu dari $p^k - 1$ atau $p^k + 1$ habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 4.

i. Jika $p^k - 1$ habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 4. Perhatikan bila $5 \mid p^k - 1$ maka $p^k - 1 = 10 \Longrightarrow p = 11$ dan $k = 1$ sehingga $p^k + 1 = 2^{b-1} \Longrightarrow 12 = 2^{b-1}$, tidak mungkin. Kemudian bila $5 \mid p^k + 1$ maka $p^k - 1 = 2 \Longrightarrow p = 3$ dan $k = 1$ sehingga $p^k + 1 = 5 \cdot 2^{b-1} \Longrightarrow 4 = 5 \cdot 2^{b-1}$, tidak memenuhi.

ii. Jika $p^k + 1$ habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 4. Perhatikan bila $5 \mid p^k - 1$ maka $p^k + 1 = 2 \Longrightarrow p^k = 1$, tidak mungkin. Kemudian bila $5 \mid p^k + 1$ maka $p^k + 1 = 10 \Longrightarrow p = 3$ dan $k = 2$ sehingga $p^k - 1 = 2^{b-1} \Longrightarrow 8 = 2^{b-1} \Longrightarrow b = 4$ dan $a = 2k = 4$.

Maka $(p, q, a, b) = (3, 2, 4, 4)$.

2. Jika ruas kanan berparitas genap sehingga p^a juga genap. Maka didapat $p = 2$ sehingga persamaan berbentuk,

$$2^a = 1 + 5q^b \equiv 1 \pmod 5$$

Darisini diperoleh $a \equiv 0 \pmod 4$, misalkan saja $a = 4k$ dimana $k \in \mathbb{N}$ sehingga,

$$2^{4k} = 1 + 5q^b$$

$$q^b = \frac{(2^{2k} - 1)(2^{2k} + 1)}{5} = \frac{(4^k - 1)(4^k + 1)}{5}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa $4^k - 1 \equiv 3 \pmod 5$ dan $4^k + 1 \equiv 0 \pmod 5$. Karena tidak mungkin $4^k - 1$ dan $4^k + 1$ memiliki residu yang sama dalam mod 5 sehingga $\frac{4^k+1}{5} = 5^x$. Maka didapat,

$$4^k + 1 = 5^{x+1}$$

Lalu bagi kasus lagi :

a. Bila $x + 1$ genap maka $4^k + 1 = 2^{2k} + 1$ adalah bilangan kuadrat. Karena 2^{2k} adalah bilangan kuadrat tentu tidak mungkin $2^{2k} + 1$ bilangan kuadrat.

b. Bila $x + 1$ ganjil. Maka jika $x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0$ didapat $k = 1$, memenuhi. Kemudian jika $x + 1 > 1$ didapat,

$$4^k + 1 = 5^{x+1} = (5-1)(5^x + 5^{x-1} + \cdots + 1)$$

Tidak mungkin.

Maka disini diperoleh,

$$q^b = 4^k - 1 = 3$$

Yang artinya $q = 3$ dan $b = 1$ sehingga $a = 4$. Maka $(p, q, a, b) = (2, 3, 4, 1)$.

Jadi disimpulkan $(p, q, a, b) = (3, 2, 4, 4)$ dan $(2, 3, 4, 1)$.

Soal 4. We call even positive integer n *nice* if the set $\{1, 2, \dots, n\}$ can be partitioned into $\frac{n}{2}$ two-element, such that the sum of the elemenets in each subset is a power of 3. For example, 6 is *nice*, because the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ can be partitioned into subsets $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Find the number of *nice* positive integers which are smaller than 3^{2022}.

Jawab : Misalkan terdapat x *nice* dan k adalah bilangan bulat non negatif sehingga $3^k \leq x < 3^{k+1}$. Kemudian misalkan x akan dipasangkan dengan y dimana $y < x$ sehingga $x + y = 3^a$ dimana $a \in \mathbb{N}$. Maka diperoleh,

$$3^a = x + y < 2x < 2 \cdot 3^{k+1} < 3^{k+2}$$
$$a < k + 2$$

Dilain sisi bisa didapat,

$$x + y \geq 3^k + 1 > 3^k$$
$$a > k$$

Yang artinya $a = k + 1$ sehingga $x + y = 3^{k+1}$. Lalu karena $x > y$ bisa disimpulkan $x > \frac{3^{k+1}}{2}$. Kemudian misalkan saja untuk setiap bilangan z yang berada pada interval $[3^{k+1} - x, x]$ dipasangkan dengan $3^{k+1} - z$. Perhatikan bahwa $\max(3^{k+1} - z, z) \geq \frac{3^{k+1}}{2} > 3^k$ yang artinya $3^k + 1 - z$ hanya bisa dipasangkan dengan z. Maka $3^{k+1} - x - 1$ akan selalu *nice* atau sama dengan 0. Darisini didapat fakta bahwa 3^k harus dipasangkan dengan $2 \cdot 3^k$ yang artinya $x \geq 2 \cdot 3^k$.

Terakhir, misalkan saja banyak n *nice* yang kurang dari 3^n adalah A_n. Maka dengan induksi, kita akan buktikan bahwa $A_n = 2^n - 1$. Trivial untuk $n = 1$ yaitu $A_n = 1$. Kemudian misalkan saja benar $A_n = 2^n - 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kita akan buktikan $A_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Perhatikan banyak bilangan *nice* diantara $2 \cdot 3^n$ dan 3^{n+1} adalah $A_{n+1} - A_n$. Ingat bahwa $3^{n+1} - 1$ akan selalu *nice*. Maka untuk setiap bilangan *nice* x pada interval $[2 \cdot 3^n, 3^{n+1} - 1)$, $3^{n+1} - x - 1$ akan selalu *nice* dan karena $3^{n+1} - x - 1 \leq 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n - 1 = 3^n - 1 < 3^n$ artinya selalu lebih kecil daripada 3^n. Darisini, untuk setiap bilangan positif $y < 3^n$, akan ada x sehingga $2 \cdot$
$A_{n+1} - A_n = A_n + 1$

$$A_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Terbukti.