

O Método dos Elementos Finitos (FEM) consolidou-se desde meados do século XX como a ferramenta padrão para resolver numericamente problemas de elasticidade linear em 2D e 3D. No FEM clássico, o domínio é discretizado em elementos de forma simples (tipicamente triangulares ou quadrilaterais em 2D), sobre os quais são definidas funções de interpolação polinomiais contínuas por partes. Essa abordagem provou-se robusta e eficiente, porém apresenta limitações quando confrontada com geometrias complexas ou discretizações não estruturadas. A geração de malhas de alta qualidade pode ser trabalhosa em domínios com fronteiras curvas ou regiões com fendas e inclusões; além disso, elementos finitos tradicionais sofrem com dificuldade em acoplar malhas de diferentes granulações ou polígonos irregulares sem refinamento global. Nesse contexto, o Método dos Elementos Virtuais (VEM) surgiu como uma generalização do FEM capaz de lidar com malhas poligonais gerais (Beirão da Veiga *et al.*, 2013). No VEM, os elementos podem ter formas poligonais arbitrárias (inclusive não convexas), e o método dispensa a formulação explícita de funções de forma no interior de cada elemento. Em vez disso, o VEM utiliza um espaço de soluções virtuais que reproduz exatamente polinômios até certa ordem e emprega projeções polinomiais para computar as quantidades necessárias, introduzindo termos de estabilização para fechar o sistema (Beirão da Veiga *et al.*, 2013). Assim, mantém-se a consistência e a exatidão em reproduzir campos constantes ou lineares, análogo ao FEM, porém com uma flexibilidade geométrica muito maior. As comparações iniciais mostraram que, em problemas de elasticidade linear, o VEM alcança taxas de convergência e acurácia similares ao FEM tradicional em malhas estruturadas, ao mesmo tempo em que oferece vantagens significativas em malhas não convencionais (Mengolini *et al.*, 2019). Em particular, o VEM facilita o uso de malhas grosseiras com elementos poligonais adaptados a domínios complexos, evitando a necessidade de refinamento global ou elementos degenerados, e permite conectar de forma natural regiões do domínio com discretizações diferentes, algo não trivial no contexto do FEM padrão (Mengolini *et al.*, 2019).

Desde a sua origem, o Método dos Elementos Virtuais tem passado por aprimoramentos e extensões que ampliam seu campo de aplicação. Um dos desenvolvimentos importantes foi a formulação de elementos virtuais de ordem arbitrária (p-VEM), análogo ao p-FEM, possibilitando aumento de ordem polinomial das funções aproximadoras para ganhar acurácia sem refinamento de malha. Estudos demonstraram que o VEM de alta ordem preserva as propriedades de convergência ótimas e pode superar o FEM de mesma ordem em certas situações devido à sua flexibilidade na escolha de malhas (Mengolini *et al.*, 2019). Além disso, o VEM foi aplicado com sucesso a problemas elastoplásticos e outros comportamentos não lineares de materiais. Beirão da Veiga *et al.* (2015), por exemplo, apresentaram uma formulação de VEM para problemas elasto-inelásticos em malhas poligonais, mostrando que o método pode incorporar algoritmos constitutivos complexos (como relações tensão-deformação não lineares) de forma *black-box*, mantendo estabilidade e acurácia. Esse resultado evidenciou a versatilidade do VEM para análises estruturais além da elasticidade linear, cobrindo regimes plásticos e possivelmente dano ou fratura, sem perder as vantagens da discretização poligonal. Outra frente de avanço foi a capacidade de representação geométrica precisa: recentemente foram introduzidos os elementos virtuais curvilíneos, em que as arestas dos polígonos de contorno podem acompanhar bordas curvas do domínio (Artioli *et al.*, 2021). Nessa extensão, o espaço de forma virtual é adaptado para incluir todos os movimentos rígidos (como rotações e translações do corpo indeformável), superando uma limitação presente em formulações VEM anteriores que não continham certas componentes lineares necessárias para representar exatamente rotações rígidas (Artioli *et al.*, 2021). Os

elementos virtuais curvilíneos permitem aproximar exatamente a geometria de domínios definidos por curvas suaves, eliminando o erro geométrico de aproximação de fronteira que ocorreria caso se usassem arestas retas. Estudos numéricos indicam que, para elementos de ordem superior, essa exatidão geométrica se traduz em ganhos de precisão significativos na solução, quando comparada à versão padrão do VEM com arestas lineares (Artioli *et al.*, 2021). Notavelmente, do ponto de vista de implementação, a transição do VEM poligonal padrão para o VEM com arestas curvas requer modificações relativamente modestas no código (essencialmente no cálculo de integrais de elemento e nas funções de forma de bordo), reforçando a viabilidade prática dessa abordagem (Artioli *et al.*, 2021).

Paralelamente ao desenvolvimento dos métodos numéricos clássicos como FEM e VEM, a última década testemunhou o surgimento de técnicas de aprendizado profundo aplicadas à solução de equações diferenciais parciais (PDEs) da mecânica dos sólidos. Entre essas técnicas, destacam-se as chamadas **Physics-Informed Neural Networks** (PINNs), introduzidas por Raissi *et al.* (2019), que consistem em redes neurais treinadas para satisfazer as equações governantes do problema físico. Em uma PINN, a função de perda (loss) é formulada de modo a penalizar as violações da equação de equilíbrio diferencial (por exemplo, as equações de Navier-Cauchy da elasticidade linear) em um conjunto de pontos do domínio, bem como das condições de contorno nos pontos da fronteira. Graças à diferenciação automática disponibilizada por bibliotecas de deep learning, a rede pode calcular as derivadas espaciais necessárias (deformações, tensões etc.) e inserir diretamente na loss o residual do PDE, sem necessidade de malha ou integração numérica tradicional (Lu *et al.*, 2021). Isso torna as PINNs métodos *mesh-free* e bastante gerais, capazes de lidar com domínios complexos e até problemas inversos ou mal-postos com relativa facilidade – já que dados experimentais ou observações podem ser incorporados naturalmente na função de perda juntamente com as equações físicas. No entanto, apesar de sua flexibilidade, as PINNs apresentam desafios em termos de eficiência e convergência. Estudos têm mostrado que, para problemas diretos bem-postos (isto é, quando se deseja apenas resolver a PDE direta com condições de contorno dadas), os solvers clássicos baseados em malha, como FEM ou VEM, tendem a superar as PINNs em termos de rapidez e robustez numérica (Karniadakis *et al.*, 2021; Lu *et al.*, 2021). O treinamento de uma PINN pode demandar tempo substancial e poder de computação (particularmente para domínios de dimensão maior ou soluções com gradientes muito pronunciados), e as redes neurais densas padrão sofrem de viés espectral, tendo dificuldade em representar componentes de alta frequência da solução (Wang *et al.*, 2021). Por outro lado, as PINNs revelam-se especialmente promissoras em problemas inversos ou mal-postos – por exemplo, identificar parâmetros de um material a partir de dados escassos de deslocamentos ou tensões –, onde métodos clássicos enfrentam dificuldade e onde a integração de dados e física no treinamento dá às PINNs uma vantagem significativa (Karniadakis *et al.*, 2021). Buscando tirar o melhor proveito das PINNs, pesquisadores propuseram melhorias como esquemas de amostragem residual adaptativa ao longo do treinamento, que refinam automaticamente os pontos de colocação em regiões de erro alto (Lu *et al.*, 2021), e arquiteturas de rede especializadas (como redes do tipo Fourier ou baseada em wavelets) para contornar o viés espectral. Ainda assim, as PINNs não substituem completamente os métodos numéricos bem estabelecidos no quesito eficiência para problemas diretos, mas representam uma nova ferramenta valiosa, especialmente pela facilidade de incorporar conhecimentos de física e dados no mesmo modelo.

Além das PINNs, outras abordagens de deep learning têm sido investigadas para a resolução de PDEs ou para acelerar simulações numéricas. **Redes generativas** como as GANs (Generative Adversarial Networks) têm sido aplicadas para produzir campos de solução sintéticos que obedecem a certas características estatísticas ou físicas, servindo, por exemplo, para gerar realizações de campos aleatórios de propriedades materiais ou mesmo para aproximar soluções estacionárias de maneira não supervisionada. Já os **autoencoders** profundos – redes neurais treinadas para comprimir e reconstruir dados – encontram aplicação em redução de dimensionalidade de problemas parametrizados. Em mecânica estrutural, autoencoders podem ser usados para identificar uma base latente de baixa dimensão que represente deformações ou campos de tensão típicos de uma estrutura; em seguida, uma rede (um decodificador) pode mapear parâmetros de entrada (como cargas, condições de contorno ou propriedades do material) diretamente para esses coeficientes latentes, permitindo previsões de campos completos de forma muito mais rápida que uma nova análise via FEM/VEM para cada parâmetro. Por exemplo, Liang *et al.* (2018) demonstraram um *surrogate model* baseado em deep learning capaz de estimar distribuições de tensões em estruturas 2D com alta fidelidade, aprendendo a relação entre as configurações de carregamento e o campo de tensões resultante a partir de dados gerados por simulações por elementos finitos. Esse tipo de modelo substituto treinado pode acelerar significativamente análises paramétricas ou procedimentos de otimização de engenharia, pois após o treinamento ele fornece resultados quase instantaneamente (à custa de um erro de aproximação controlado) em comparação com a resolução repetida de um problema via métodos tradicionais. Tais redes, incluindo também autoencoders variacionais e redes baseadas em transformadores ou convoluções, têm ampliado o leque de ferramentas computacionais, combinando aprendizado estatístico e conhecimento físico para lidar com a alta dimensionalidade e não linearidade inerentes a muitos problemas de engenharia.

Um aspecto crítico ao aplicar redes neurais em contextos de engenharia estrutural é a **quantificação de incertezas (UQ)** nas previsões dos modelos de deep learning. Diferentemente de métodos tradicionais como o FEM, que permitem estimativas de erro via análises de malha (por exemplo, cálculo de erro *a posteriori*), as redes neurais standard fornecem apenas um valor predito, sem indicação direta de confiança. Isso é problemático em aplicações de segurança, onde é crucial saber o grau de confiabilidade de uma previsão de tensão ou deslocamento. Para suprir essa lacuna, diversas técnicas baseadas em estatística Bayesiana ou em métodos heurísticos vêm sendo incorporadas aos modelos de deep learning. Gal e Ghahramani (2016) introduziram o conceito de **Monte Carlo Dropout**, mostrando que ao manter ativo o mecanismo de *dropout* (desligamento aleatório de neurônios) durante a fase de teste e realizar múltiplas passes estocásticas pela rede, pode-se interpretar a dispersão das previsões como uma estimativa de incerteza epistemológica do modelo. Essencialmente, o dropout passa a funcionar como uma aproximação de inferência Bayesiana em redes neurais, onde os pesos efetivamente seguem uma distribuição induzida pelo processo de desligamento aleatório. Essa técnica simples fornece, com baixo custo adicional, intervalos de confiança para as respostas da rede – por exemplo, permitindo ao engenheiro saber se a rede está muito incerta em determinada região do domínio ou condição de carregamento. De forma semelhante, o **DropConnect**, que é uma variante do dropout em que os pesos das conexões são zerados aleatoriamente em vez das saídas dos neurônios, também pode ser usado em modo Monte Carlo para estimar incertezas (Mobiny *et al.*, 2021). Mobiny *et al.* (2021) demonstraram que o *Monte Carlo DropConnect* produz resultados alinhados com a abordagem Bayesiana variacional tradicional, sem aumentar o número de parâmetros ou o custo computacional de forma

significativa, tornando-o atrativo para redes profundas grandes. Além dessas aproximações, pesquisas em **redes neurais bayesianas** explicitamente vêm sendo conduzidas há décadas, atribuindo distribuições de probabilidade aos pesos e realizando inferência via métodos como *variational inference* ou *Markov Chain Monte Carlo* (Blundell *et al.*, 2015). Embora teoricamente elegantes e capazes de quantificar de forma mais rigorosa a incerteza, essas abordagens Bayesianas exatas ou variacionais são muito custosas para redes de grande porte empregadas em problemas de engenharia, motivo pelo qual aproximações eficientes como dropout têm maior aceitação prática. Outra linha “híbrida” para quantificar incertezas em deep learning são os **ensembles de modelos**: treina-se múltiplas redes neurais independentes (com inicializações ou subconjuntos de dados diferentes) e, ao combinar suas predições, obtém-se não só uma média mais robusta como também a dispersão entre os modelos fornece uma medida da incerteza aleatória do preditor (Lakshminarayanan *et al.*, 2017). Em suma, a quantificação de incerteza em redes neurais hoje constitui um campo ativo, pois é fundamental para que modelos de aprendizado de máquina possam ser adotados com confiança em aplicações estruturais críticas, permitindo identificar quando a predição de um modelo deve ser tratada com cautela ou desencadear refinamentos/adaptações.

Diante dos progressos tanto nos métodos numéricos clássicos (FEM/VEM) quanto nas técnicas de inteligência artificial, uma tendência recente tem sido **integrar deep learning com métodos numéricos consagrados**, aproveitando as vantagens de ambos em frameworks híbridos. A ideia geral é utilizar conhecimentos ou componentes do método tradicional para guiar o treinamento de um modelo de rede neural, ou vice-versa, usar uma rede neural como componente interno de um método numérico, de forma que se superem limitações isoladas. Por exemplo, Jung *et al.* (2020) propuseram os chamados “**elementos finitos aprendidos por deep learning**” (*deep learned finite elements*), em que redes neurais são incorporadas para gerar as matrizes de deformação (relações entre deslocamentos nodais e deformações) em elementos quadriláteros de 4 e 8 nós. Nesse esquema, a rede substitui a função de forma explícita, aprendendo a garantir que o elemento possua propriedades desejáveis como movimento de corpo rígido e campos de deformação constantes reproduzidos exatamente, tal qual um elemento finito clássico passaria em testes de patch. Os resultados mostraram que esses elementos aprendidos podem alcançar acurácia superior aos elementos polinomiais tradicionais e oferecem maior adaptabilidade para extensões a elementos de ordem mais alta, tridimensionais ou problemas não lineares, uma vez que a rede pode ser treinada para otimizar o desempenho do elemento em diversos cenários. Em outro trabalho relacionado, Jung *et al.* (2022) introduziram o conceito de **elemento finito auto-atualizável** (*self-updated finite element, SUFE*), no qual um elemento finito de placa (quatro nós) é enriquecido por um procedimento iterativo baseado em deep learning que atualiza sua rigidez para corrigir erros de discretização. Especificamente, o SUFE usa a rede neural para estimar direções ótimas de flexão dentro do elemento dado um estado de deformação, minimizando fenômenos indesejados como *shear locking*. Com algumas iterações de atualização interna guiada pela rede, o elemento melhora significativamente sua solução sem necessidade de refinar a malha, passando em testes clássicos de patch test e exibindo excelente desempenho mesmo em malhas grosseiras e distorcidas (Jung *et al.*, 2022). Esses exemplos demonstram que o aprendizado profundo pode ser usado para **automatizar ou adaptar formulações de elementos finitos**, aprimorando a acurácia e eficiência sem alterar o esquema básico de discretização.

Outra linha de integração é o desenvolvimento de métodos variacionais híbridos, como o **Deep Energy Method (DEM)** proposto por Samaniego *et al.* (2020). No DEM, em vez de construir uma malha e funções de forma, utiliza-se uma rede neural como função de aproximação para os campos de deslocamento, e a rede é treinada minimizando a energia potencial total do sistema (um princípio variacional de mínima energia, equivalente às equações de equilíbrio em problemas conservativos). Essa abordagem assegura que, ao convergir, a rede satisfaz intrinsecamente as equações de equilíbrio (derivadas como condição de estacionariedade da energia) e as condições de contorno essenciais (impostas diretamente na arquitetura da rede), oferecendo uma solução sem malha e potencialmente mais escalável para problemas complexos de elasticidade não linear. Samaniego *et al.* (2020) demonstraram o DEM em problemas de hiperelasticidade finita 2D e 3D, obtendo precisão comparável à do FEM, porém contornando a necessidade de remalhamento em grandes deformações e facilitando a incorporação de domínios com geometrias complexas. Extensões subsequentes desse método (Nguyen-Thanh *et al.*, 2021) refinaram aspectos como a integração numérica e a imposição de contornos, bem como aplicaram o DEM em problemas multifísicos, embora desafios permaneçam – por exemplo, tratar condições de contorno de forma robusta e melhorar a convergência do treinamento. Em vez de substituir completamente os métodos clássicos, algumas pesquisas buscam combinar explicitamente **solvers numéricos com redes neurais em um laço híbrido**. Meethal *et al.* (2023) propuseram um esquema no qual a rede neural é treinada para produzir um modelo de substituição (*surrogate*) de alta fidelidade, mas **incorpora diretamente as matrizes e operadores do FEM** em sua função de perda durante o treinamento. Essencialmente, as equações do FEM (após discretização do domínio e aplicação das condições de contorno) são utilizadas como um construtor de loss para a rede, garantindo que o aprendizado da rede seja *physics-conforming* (isto é, conforme às leis físicas discretizadas) e que o problema de treinamento seja bem-posto. Esse híbrido FEM-RNA, por construir-se em torno do problema discreto bem condicionado, mostrou-se altamente eficiente em termos de dados necessários e alcançou **melhor desempenho que as PINNs puras** em testes de problemas estruturais, obtendo maior acurácia e estabilidade (Meethal *et al.*, 2023). Ademais, ao manter o arcabouço do FEM na fase de inferência, o método torna possível estimar o erro de predição de forma quantificável e até integrar módulos de estimativa de incerteza ao usar a rede em conjunto com o solver numérico. Em suma, esses trabalhos híbridos ilustram o estado atual da arte na confluência entre aprendizado de máquina e métodos numéricos: ao invés de concorrentes, as duas abordagens podem atuar em sinergia. Redes neurais profundas podem oferecer rapidez de predição e adaptatividade, enquanto métodos como FEM ou VEM fornecem fundamentação física sólida e estrutura para garantir confiabilidade. Essa integração já demonstrou ganhos importantes, superando limitações individuais (seja a rigidez de malha fixa no FEM, seja a falta de garantias de convergência e precisão no deep learning puro) e apontando para uma nova geração de ferramentas computacionais em engenharia estrutural. Este panorama de avanços estabelece a base para o trabalho proposto, que busca aliar um esquema adaptativo do VEM com modelos de deep learning munidos de quantificação de incerteza, explorando comparativamente o desempenho desse framework híbrido frente às PINNs e aos métodos clássicos.