Propriedades de Funções
Funções Compostas

Cálculo **Aula 3**

Profa. Dra. Adriana Silveira Vieira

Propriedades de Funções

Em muitas situações práticas é necessário operar, no sentido algébrico do termo, com funções .

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções f + g, f – g, fg, f/g , de uma maneira análoga ao modo como somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais. A função f+g é definida pela equação:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Repare que o lado direito desta igualdade só faz sentido se f(x) e g(x) forem ambas definidas, isto é, se x pertence tanto ao domínio de f quanto ao domínio de g. Assim, se o domínio de f é o cojunto A e o domínio de g é B, o domínio de f + g é a interseção destes domínios, isto é $A \cap B$.

Note ainda que o sinal + no lado esquerdo da igualdade indica uma adição de funções mas o mesmo sinal do lado direito, indica a adição dos números reais f(x) e g(x).

Analogamente, define-se a diferença f – g e o produto f.g. Seus respectivos domínios são, também, $A \cap B$.

Analogamente, define-se a diferença f - g e o produto f.g. Seus respectivos domínios são, também, $A \cap B$.

Para definir o quociente f/g de duas funções devemos lembrar que a divisão por zero não faz sentido e portanto, os pontos onde $g(x)=0$ devem ser excluídos do domínio desta nova função.

Sejam f e g duas funções com domínios *A* e *B*, respectivamente. Então as funções f + g, f - g, f.g e f/g são definidas como se segue:

Função	Domínio
$f+g(x)=f(x)+g(x)$	$A\cap B$
$f-g(x)=f(x)-g(x)$	$A\cap B$
$f\,g(x)=f(x)\,g(x)$	$A\cap B$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\{x\in A\cap B;\ g(x)\neq 0\}$

Assim, se $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = x^2 + 4x$, então temos que

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 5 + x^2 + 4x = x^2 + 6x - 5$

(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 5) - (x^2 + 4x) = -x^2 - 2x - 5$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 5) \cdot (x^2 + 4x) = 2x^3 + 3x^2 - 20x$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 + 4}$

Além disso, como o domínio de f e g é o conjunto Â de todos os números reais, os domínios de f + g, f - g e f.g também é Â. O domínio de f/g é o conjunto de todos os números reais excetuando-se aqueles onde

$x^2 + 4x = 0$

isto é, $\{ x \in \Re;\ x \neq 0 \ \text{ e } x \neq -4 \}$.

Em cada um dos itens abaixo ache as funções f + g, f - g, f g e $\dfrac{f}{g}$. Indique, em cada caso, os seus respectivos domínios:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2$ e $g(x) = 3x^2 - 1$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ e $g(x) = \sqrt{1 - x}$

Funções Compostas

Considere as seguintes funções:

***f(x) = x + 1**, **g(x) = 2x – 3** e **h(x) = x²**.*

A composição **f o g o h** (lê-se: ***f composta com g composta com h***) pode ser mais facilmente interpretada ao ser expressa como **f(g(h(x)))**.

Para resolver essa composição de funções, devemos começar pela função composta mais interna ou pela última composição, portanto, **g(h(x))**. Na função **g(x) = 2x – 3**, onde houver **x**, substituiremos por **h(x)**:

$$g(x) = 2x - 3$$
$$g(h(x)) = 2.h(x) - 3$$
$$g(h(x)) = 2.(x^2) - 3$$
$$g(h(x)) = 2.x^2 - 3$$

Agora faremos a última composição **f(g(h(x))).** Na função **f(x) = x + 1**, onde houver **x,** substituiremos por **g(h(x)) = 2.x² – 3**:

$$f(x) = x + 1$$
$$f(g(h(x))) = (2.x^2 - 3) + 1$$
$$f(g(h(x))) = 2.x^2 - 3 + 1$$
$$f(g(h(x))) = 2.x^2 - 2$$

Se **x = 1**, temos que **h(1)** é igual a:

$$h(x) = x^2$$

$$h(1) = 1^2$$

$$h(1) = 1$$

Sabendo que **h(1) =** 1, vamos agora encontrar o valor de **g(h(1)):**

$$g(x) = 2x - 3$$

$$g(h(1)) = 2.h(1) - 3$$

$$g(h(1)) = 2.1 - 3$$

$$g(h(1)) = -1$$

Por fim, vamos calcular o valor de **f(g(h(1)))**, sabendo que **g(h(1)) = – 1**:

$$f(x) = x + 1$$

$$f(g(h(1))) = g(h(1)) + 1$$

$$f(g(h(1))) = -1 + 1$$

$$f(g(h(1))) = 0$$

Sejam as funções: ***f(x)* = *x*² – 2*x***, ***g(x)* = – 2 + 3*x***, ***h(x)* = 5*x*³** *e* ***i(x)* = – *x*,** *determine a lei da função composta* ***f(g(h(i(x))))*.**

Começaremos a resolver essa composição pela função composta mais interna, **h(i(x))**:

$$\mathbf{i(x) = -\,x} \text{ e } \mathbf{h(x) = 5x^3}$$

$$\mathbf{h(x) = 5x^3}$$

$$\mathbf{h(i(x)) = 5.[i(x)]^3}$$

$$\mathbf{h(i(x)) = 5.[-\,x]^3}$$

$$\mathbf{h(i(x)) = -\,5x^3}$$

Vamos agora resolver a composição **g(h(i(x)))**:

$$\mathbf{h(i(x)) = -\,5x^3} \text{ e } \mathbf{g(x) = -\,2 + 3x}$$

$$\mathbf{g(x) = -\,2 + 3x}$$

$$\mathbf{g(h(i(x))) = -\,2 + 3.[h(i(x))]}$$

$$\mathbf{g(h(i(x))) = -\,2 + 3.[-\,5x^3]}$$

$$\mathbf{g(h(i(x))) = -\,2 - 15x^3}$$

Podemos agora determinar a lei da função composta **f(g(h(i(x))))**:

$$g(h(i(x))) = -2 - 15x^3 \text{ e } f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(g(h(i(x)))) = [g(h(i(x)))]^2 - 2x$$

$$f(g(h(i(x)))) = [-2 - 15x^3]^2 - 2x$$

$$f(g(h(i(x)))) = 4 + 60x^3 + 225x^6 - 2x$$

$$f(g(h(i(x)))) = 225x^6 + 60x^3 - 2x + 4$$

Portanto, a lei da função composta **f(g(h(i(x))))** é **f(g(h(i(x)))) = 225x6 + 60x³ – 2x + 4**.

Exemplos 1. Sejam $u = f(x) = \cos x$ e $y = g(u) = u^2$. Então, gof é dada pela equação $y = (\cos x)^2 = \cos^2 x$.

É importante observar que a ordem da composição é significante, isto é, de um modo geral temos $gof \neq fog$. De fato, se tivéssemos

$$\begin{cases} y = f(u) = \cos u \\ u = g(x) = x^2 \end{cases} \Longrightarrow y = fog = f(g(x)) = f(x^2) = \cos x^2.$$

2. Sejam $\begin{cases} y = f(x) = x^3 - 1 \\ y = g(x) = \sqrt{x+1} \end{cases}$ então,

gof é dada por $y = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = \sqrt{(x^3 - 1) + 1} = \sqrt{x^3}$.

fog é dada por $y = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 1$.

O domínio de gof é $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$ e o domínio de fog é $\{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\}$.

Podemos também definir a composta de uma função com si mesma:

$fof(x) = f^2(x) = f(f(x)) = f(x^3 - 1) = \left(x^3 - 1\right)^3 - 1;$

$gog(x) = g^2(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}$

Exercícios

1- Dadas as funções: $f(x) = 2x-1$, $g(x) = (x-1)/4$, $h(x)= x^2-x$ e $i(x) = x+4$

Determine:

a) $P(x)=fog$
b) $P(x)= goh$
c) $P(x)= gohof$
d) $P(x)= fogoi$
e) $P(x)= hoi$
f) $P(x)= iohogof$

2- Nos casos acima determine nos casos de a) a f) o valor de $P(x)$ para $x=1$.