**Cálculo**

UFMS

# INTRODUÇÃO AO LIMITE

## PARTE 1

Aula 5

Profa. Dra. Adriana Silveira Vieira

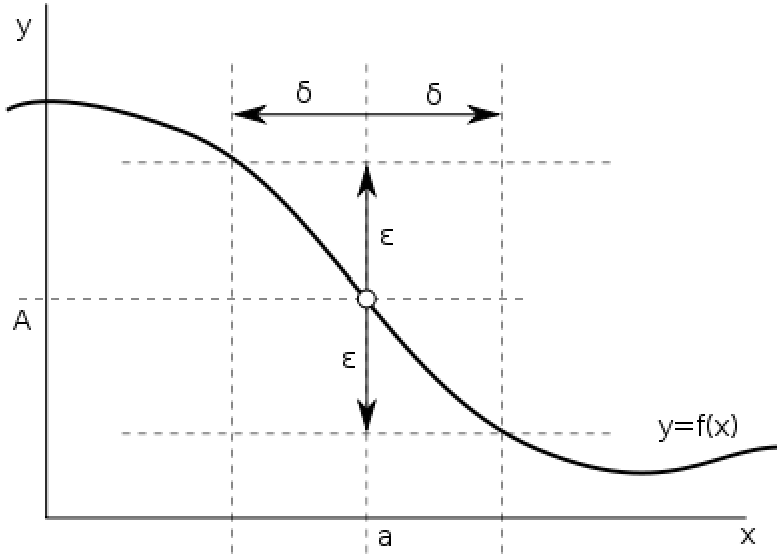
# DEFINIÇÃO

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de números reais, $a \in I$ e $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função real definida em $I - \{a\}$. Escrevemos

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

quando para qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$, vale $|f(x) - L| < \varepsilon$ [1]. Ou, usando a notação simbólica:

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

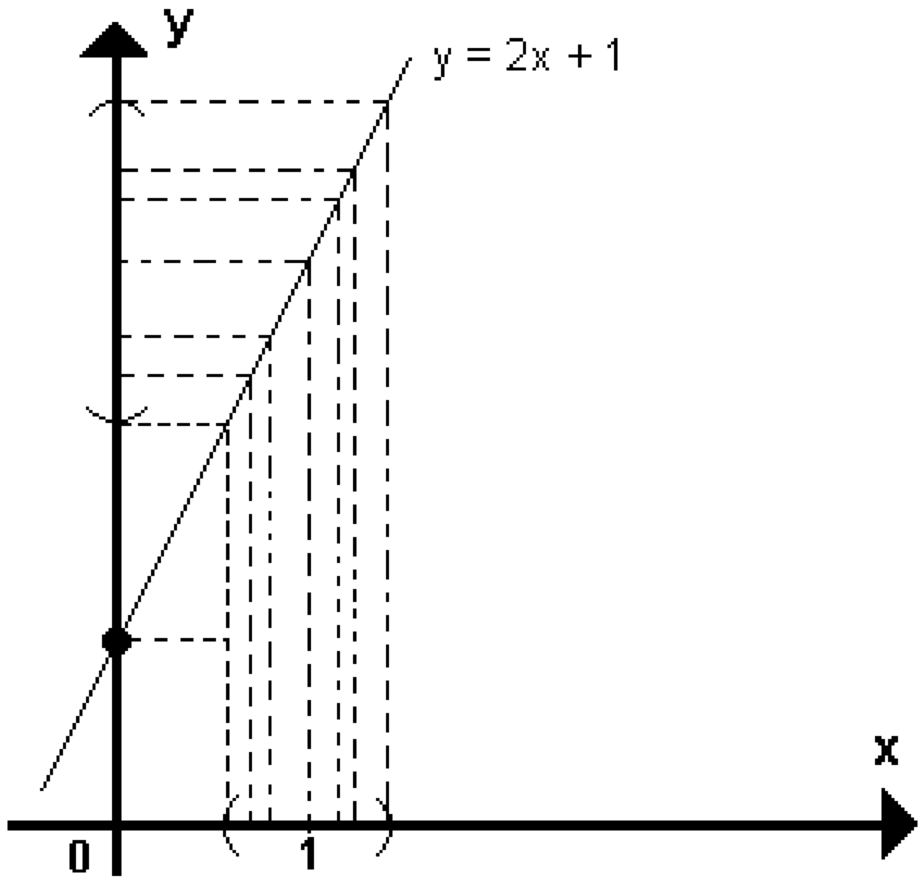


# NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Seja a função f(x)=2x+1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de **y**:

| $x$ | $y = 2x + 1$ |
|---|---|
| 1,5 | 4 |
| 1,3 | 3,6 |
| 1,1 | 3,2 |
| 1,05 | 3,1 |
| 1,02 | 3,04 |
| 1,01 | 3,02 |

| $x$ | $y = 2x + 1$ |
|---|---|
| 0,5 | 2 |
| 0,7 | 2,4 |
| 0,9 | 2,8 |
| 0,95 | 2,9 |
| 0,98 | 2,96 |
| 0,99 | 2,98 |




Notamos que à medida que $x$ se aproxima de 1, $y$ se aproxima de 3, ou seja, quando $x$ tende para 1 ($x \to 1$), $y$ tende para 3 ($y \to 3$), ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3}$$

Observamos que quando $x$ tende para 1, $y$ tende para 3 e o limite da função é 3.

# PROPRIEDADES

1ª) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

O limite da soma é a soma dos limites.
O limite da diferença é a diferença dos limites.

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2 \pm 3x^3\right] = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 3x^3 = 1 + 3 = 4$$

---

2ª) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).\ g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x)$

O limite do produto é o produto dos limites.

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to \pi}\left[3x^3 . \cos x\right] = \lim_{x\to \pi} 3x^3 . \lim_{x\to \pi} \cos x = 3\pi^3 . \cos \pi = 3\pi^3 . (-1) = -3\pi^3$$

---

3ª) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o denominador não seja zero.

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 1} = \frac{\cos 0}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

4ª) $\lim_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to 1} (x^2+3)^2 = \left(\lim_{x\to 1}(x^2+3)\right)^2 = (1+3)^2 = 16$$

5ª) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, n \in \mathbb{N}^*$ e $f(x) > 0$. (Se $f(x) \leq 0$, n é impar.)

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^3+x^2-1} = \sqrt{\lim_{x\to 2} x^3+x^2-1} = \sqrt{2^3+2^2-1} = \sqrt{11}$$

6ª) $\lim_{x\to a} (\ln f(x)) = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$, se $\lim_{x\to a} f(x) > 0$

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to e} (\ln x^2) = \ln\left[\lim_{x\to e} x^2\right] = \ln e^2 = 2.\ln e = 2.1 = 2$$

7ª) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$

**Exemplo:**

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}\left(x^2 + 3x\right) = \operatorname{sen}\left[\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 3x\right)\right] = \operatorname{sen} 4$$

8ª) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$

**Exemplo:**

$$\lim_{x \to 1} e^{x^2 + 3x} = e^{\lim_{x \to 1} x^2 + 3x} = e^4$$

# LIMITES LATERAIS

Se $x$ se aproxima de ***a*** através de valores maiores que ***a*** ou pela sua direita, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a+} f(x) = b}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à direita*** de ***a***.

Se $x$ se aproxima de a através de valores menores que ***a*** ou pela sua esquerda, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a-} f(x) = c}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à esquerda*** de ***a***.

O limite de f($x$) para $x \to a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita a esquerda são iguais, ou sejas:

- Se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
- Se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$, então $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

# CONTINUIDADE

Dizemos que uma função f($x$) é contínua num ponto $a$ do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

- $\exists f(a)$.
- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

# PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

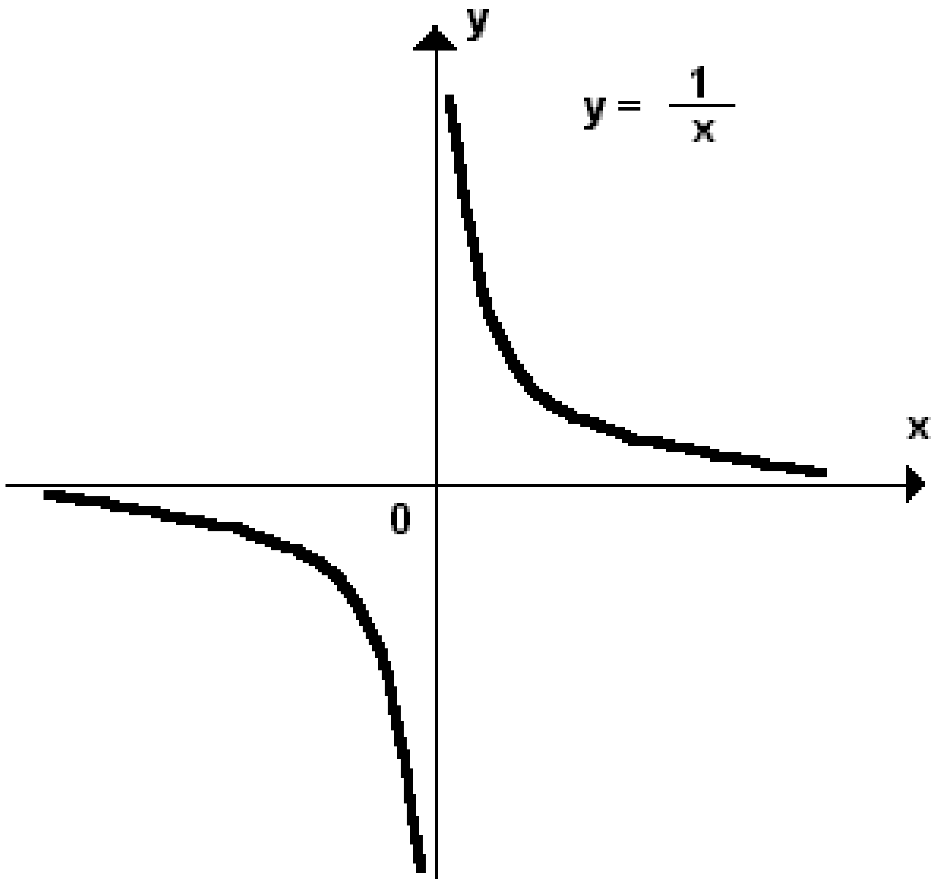
Se f($x$) e g($x$) são contínuas em $x = a$, então:

- f($x$) $\pm$ g($x$) é contínua em $a$;
- f($x$) . g($x$) é contínua em $a$;
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a $(g(a) \neq 0)$.

# LIMITES ENVOLVENDO INFINITO

Conforme sabemos, a expressão $x \to \infty$ ($x$ tende para infinito) significa que $x$ assume valores superiores a qualquer número real e $x \to -\infty$ ($x$ tende para menos infinitos), da mesma forma, indica que $x$ assume valores menores que qualquer número real.

**Exemplo:**



a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* aumenta, *y* tende para zero e o limite é zero.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* diminui, *y* tende para zero e o limite é zero.

c) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, ou seja, quando *x* se aproxima de zero pela direita de zero $(x \to 0_+)$ ou por valores maiores que zero, *y* tende para o infinito e o limite é infinito.

d) $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, ou seja, quando *x* tende para zero pela esquerda ou por valores menores que zero, *y* tende para menos infinito

# LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL $X \to \pm\infty$

Seja a função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Então:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n}$$

Demonstração:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_{n-2}}{x^2}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0}\right)$$

Mas:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-2}}{x^2} = \ldots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$$

Logo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = \ldots = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

De forma análoga, para $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, temos:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

# EXEMPLOS

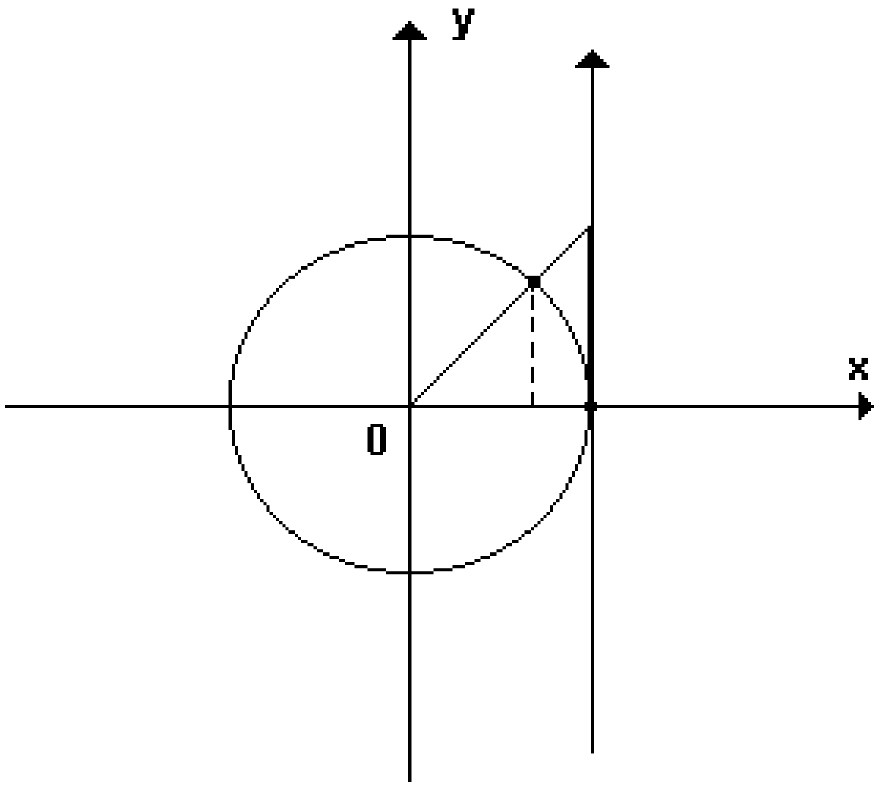
1) $\lim_{x\to\infty}\left(2x^2+x-3\right)=\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^3-4x^2+2x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}3x^3=-\infty$

3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x-1}{x^3+x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty$

# LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$



*Demonstração:*

Para $x \to 0_+$, temos sen $x < x <$ tg $x$. Dividindo a dupla desigualdade por sen $x > 0$, vem:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo, temos:

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Mas:

- $\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$
- $g(x) < f(x) < h(x)$ são funções contínuas e se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, então, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

# LIMITES EXPONENCIAIS

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Neste caso, e representa a base dos logaritmos naturais ou neperianos. Trata-se do número irracional e cujo valor aproximado é 2,7182818.

Veja a tabela com valores de $x$ e de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | 2 | 2,25 | 2,3703 | 2,5937 | 2,7048 | 2,7169 | 2,7181 | 2,7182 |

Notamos que à medida que $x \to \infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$.

De forma análoga, efetuando a substituição $\frac{1}{x} = y$ e $x = \frac{1}{y}$, temos:

$$\boxed{\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e}$$

Ainda de forma mais geral, temos :

$$\boxed{\lim_{y \to 0} (1 + ky)^{\frac{l}{y}} = e^{kl}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{lx} = e^{kl}}$$

As duas formas acima dão a solução imediata a exercícios deste tipo e evitam substituições algébricas.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

Se $a^x - 1 = u$, então $a^x = 1 + u$.

Mas:

$$\ln a^x = \ln(1+u) \Rightarrow x \cdot \ln a = \ln(1+u) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+u)}{\ln a}$$

Logo:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln a}} = \frac{u \cdot \ln a}{\ln(1+u)} = \frac{\ln a}{\frac{1}{u} . \ln(1+u)} = \frac{\ln a}{\ln (1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Como $x \to 0$, então $u \to 0$. Portanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln a}{\ln \underbrace{(1+u)^{\frac{1}{u}}}_{e}} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln a}{\underbrace{\ln e}_{1}} = \boxed{\ln a}$$

Generalizando a propriedade acima, temos $\lim_{x\to 0} \frac{a^{kx} - 1}{x} = k \cdot \ln a$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$\rightarrow$

# TEOREMA DO ANULAMENTO

Se $f$ é uma função limitada e $g$ é uma função tal que Lim $g(x)=0$, quando $x \rightarrow a$, então:

Lim $f(x) \cdot g(x) = 0$

# TEOREMA DO CONFRONTO (REGRA DO SANDUÍCHE)

Se valem as desigualdades $f(x)<g(x)<h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto talvez em x=a e se

Lim $f(x) = L =$ Lim $h(x)$ então: Lim $g(x) = L$

# EXEMPLO

Se para x próximo de 0, vale a relação de desigualdades:
$\cos(x) \leq \text{sen}(x)/x \leq 1$
então, quando $x \rightarrow 0$:

$$1 = \ Lim\, cos(x) \leq Lim \frac{sen(x)}{x} \leq Lim\, 1 = 1$$

**<u>Observações</u>**: Todas as propriedades vistas para o cálculo de limites, são válidas também para limites laterais e para limites no infinito.
Quando, no cálculo do limite de uma função, aparecer uma das sete formas, que são denominadas expressões indeterminadas,

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0.\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

nada se poderá concluir de imediato sem um estudo mais aprofundado de cada caso.

Calcule os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \to 6+} \frac{3}{x-6} \qquad \lim_{x \to 6-} \frac{3}{x-6}$$

## Passo 1

Assim como qualquer resolução de limites, a boa é começar substituindo o $x$ na função do limite, para termos uma ideia do que acontece. Ficaria algo assim:

$$\frac{3}{6-6} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

Agora, o detalhe é que estamos calculando limites laterais, então falta analisar o comportamento pelos lados do $6$. Repara que ali eu coloquei $\pm\infty$ por que ainda não sei se ao aproximar do $6$ eu venho por um número levemente maior ou levemente menor, o que ao fazer $x-6$ resultaria em algo um pouquinho maior ou um pouquinho menor que $0$, respectivamente (ou seja, um é positivo e outro negativo).

## Passo 2

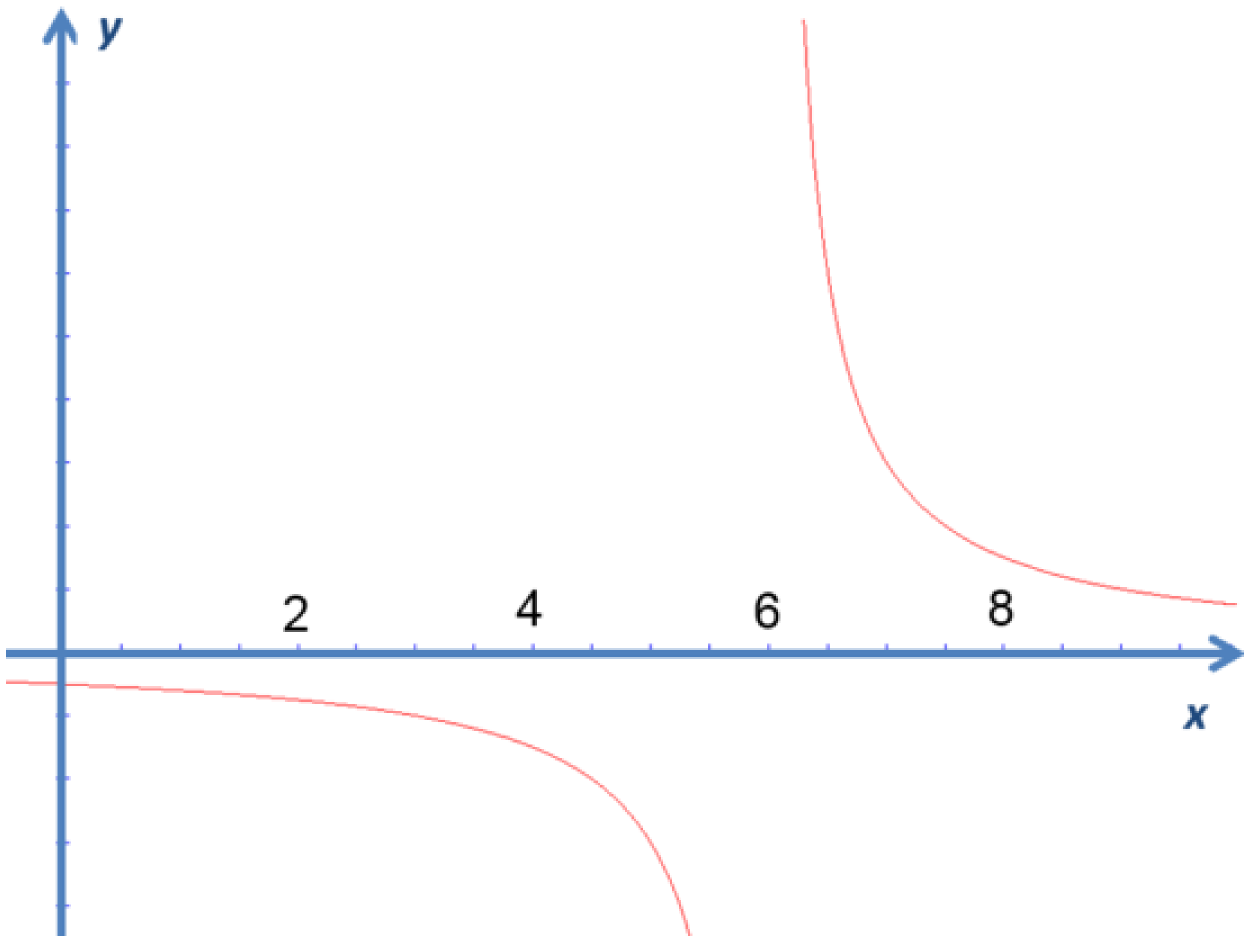
Faz o seguinte, chuta um número abaixo e outro acima de 6. Olha o que acontece com 5 e 7, por exemplo:

$$\lim_{x \to 7+} \frac{3}{x-6} = \frac{3}{7-6} = 3 \qquad \lim_{x \to 5-} \frac{3}{x-6} = \frac{3}{5-6} = -3$$

Sacou? Assim, o que acontece é que pelo lado do 5 (atrás do 6) a função se aproxima negativamente e pelo lado do 7 (na frente do 6) se aproxima positivamente.

$$\lim_{x \to 6+} \frac{3}{x-6} = +\infty \qquad \lim_{x \to 6-} \frac{3}{x-6} = -\infty$$

Ainda não acredita? Desenhei aqui o gráfico para os incrédulos:




Resposta: $\lim_{x \to 6+} \frac{3}{x-6} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 6-} \frac{3}{x-6} = -\infty$

Resolva o limite dado por:

$$\lim_{x \to -2+} \frac{x+3}{(x+2)x^4}$$

## Passo 1

Olhando pro limite, partiu começar como sempre: substituindo o $x$. Olha lá como é que vai ficar:

$$\lim_{x \to -2+} \frac{x+3}{(x+2)x^4} = \frac{(-2+3)}{(-2+2)(-2)^4} = \frac{(1)}{(0)\,(16)}$$

Beleza, olhando aquele zero ali no denominador já sabemos que a resposta será$\pm\infty$, certo? A pergunta é, ao se aproximar pela frente do $-2$, a função é positiva ou negativa. Vamos por partes.

## Passo 2

O $(x+3)$ tem raiz em $-3$, ou seja, a partir desse valor é positivo. Então, em $-2$ sabemos que $(x+3) > 0$.

O $x^4$ é sempre positivo, então deixa ele de lado.

Agora, $(x+2)$ tem raiz exatamente em $-2$. Acima desse número, é positivo. Abaixo, negativo. Dessa maneira, como o limite se aproxima pela direita, ele vem positivamente.

Resumindo, tudo ali é positivo, aproximando a resposta para $+\infty$!

## Resposta

> $$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{(x+2)x^4} = +\infty$$

Resolva o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec x$$

## Passo 1

Vamos, antes de tudo, lembrar o que é $\sec x$. A secante é basicamente dada por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

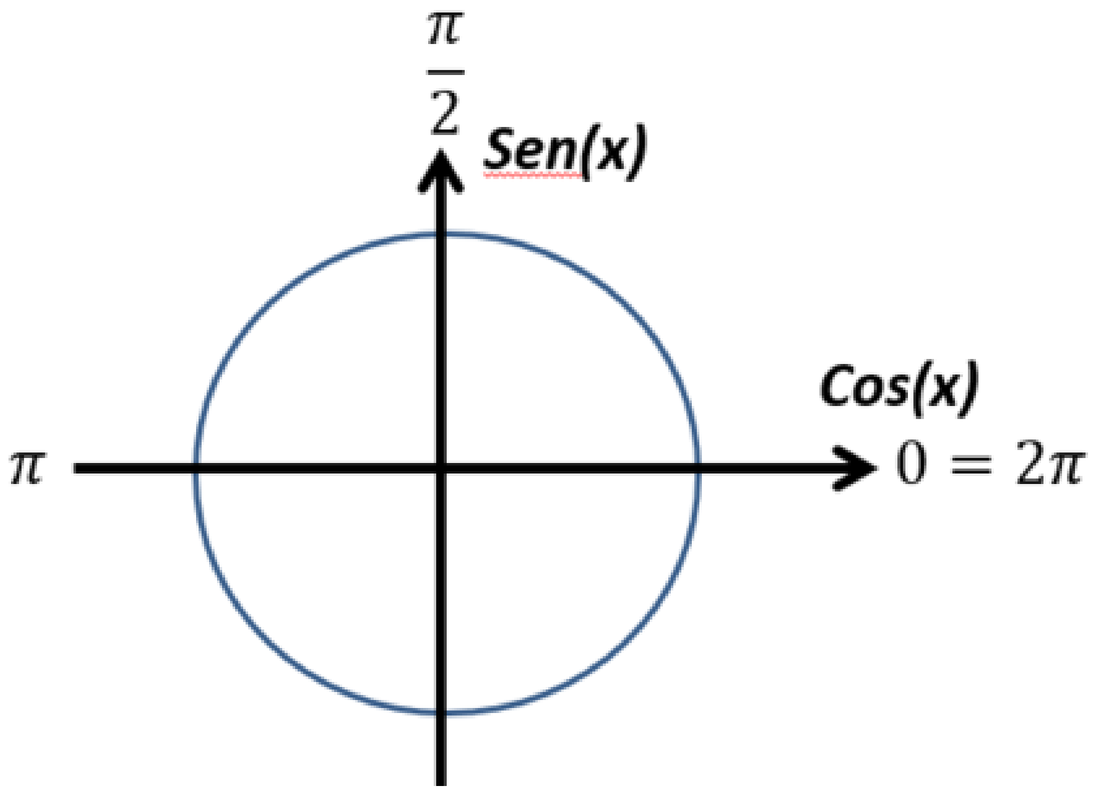
Dessa forma, substituindo o $-\frac{\pi}{2}$ na equação, ficaria assim:

$$\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0}$$

A gente já tem noção que isso vai dar $\pm\infty$. Resta saber como estamos nos aproximando de $-\frac{\pi}{2}$.

## Passo 2

Pensando nessa análise do sinal, você percebe que a aproximação é feita por trás, ou seja, para valores menores que $-\frac{\pi}{2}$. Vamos dar uma olhada no círculo trigonométrico para matar a charada.



Bom, podemos ver que, quando x está vindo por trás de $-\frac{\pi}{2}$ (lembrando que $-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$), temos cosseno negativo. Dessa forma, podemos dizer que a aproximação se dará para $-\infty$.

## Resposta

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec x = -\infty$$

Resolva o limite:

$$\lim_{x \to 7+} \ln(x-7)$$

## Passo 1

Partiu substituir o $x = 7$ no $\ln(x-7)$? Partiu:

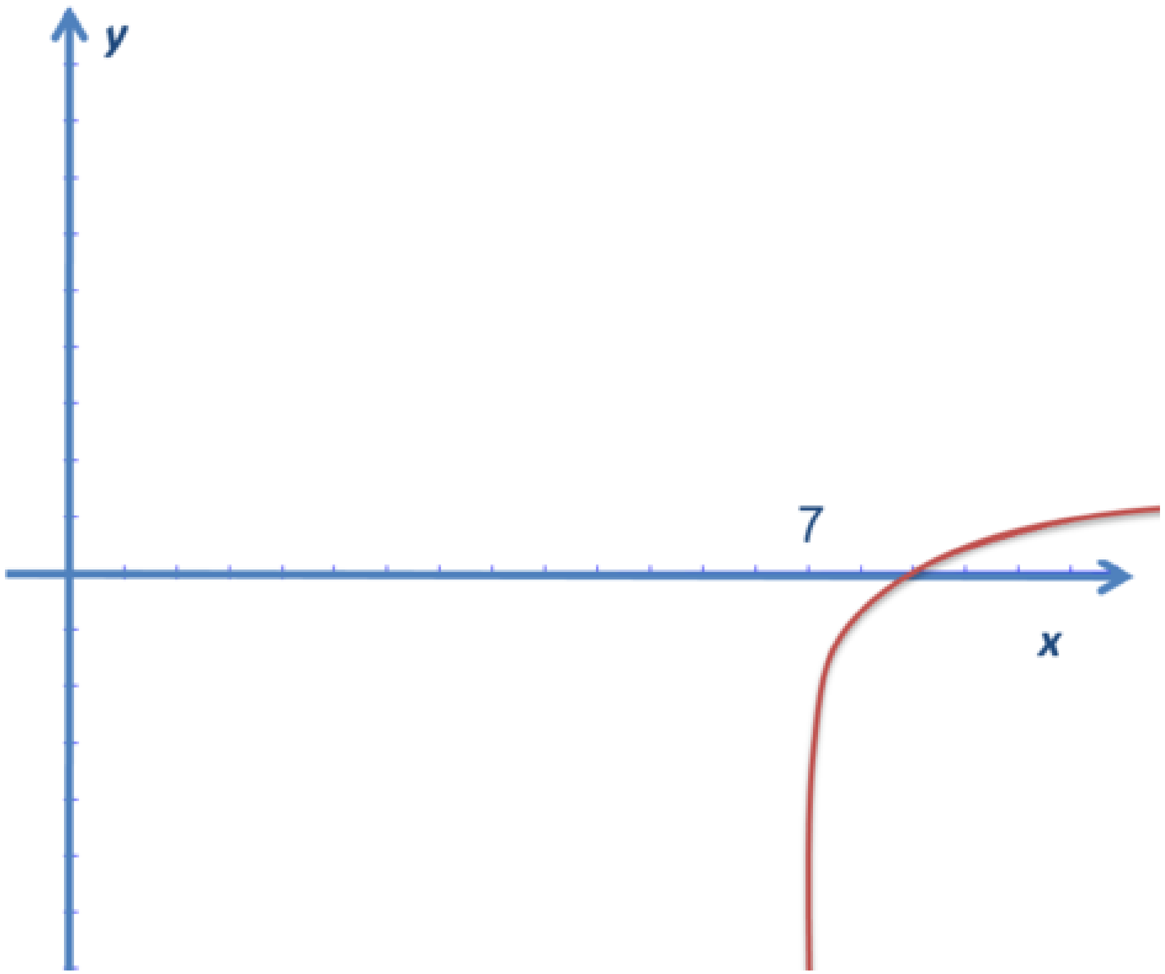
$$\lim_{x \to 7+} \ln(x-7) = \ln(7-7) = \ln(0) = -\infty$$

Pera aí, já acabou? Não podia ser $+\infty$? Rapaz, conhecendo a cara da função logarítmica e olhando para o gráfico, eu sei que ela só é $+\infty$ quando $x \to +\infty$. E digo mais, nesse caso, não existiria nem a aproximação pela esquerda $(x \to 7-)$, já que o domínio existe só quando o que está dentro do $\ln x - 7$é $> 0$:

$$x - 7 > 0$$

$$x > 7$$

Para não restar dúvida, dá uma olhada aqui no desenho do $\ln x - 7$ :




Resposta: $\lim_{x \to 7+} \ln(x-7) = -\infty$

# EXERCÍCIOS

1- Calcule os limites da função f(x) quando $x \to 1$

a) $f(x) = 4x + 1$
b) $f(x) = 3x - 1$
c) $f(x) = (2x-1)/2$
d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$
e) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$
f) $f(x) = (x-2)/(x-1)$