Funções Inversas, Modular, Polinomiais e Trigonométricas

Cálculo Aula 4

Profa. Dra. Adriana Silveira Vieira

Funções Inversas

Para definir funções inversas necessitamos de alguns conceitos preliminares:
Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, é *monótona crescente* se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

f é *monótona não-decrescente* em $[a, b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

f é *monótona decrescente* em $[a, b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

f é *monótona não-crescente* em $[a, b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

f é *biunívoca* em $[a, b]$ se

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

para todo x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$.

Seja $y = f(x)$ uma função biunívoca em $[a, b]$, dizemos que f^{-1} é a função *inversa* de f se $x = f^{-1}(y)$, isto é, se

$$f o f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = I_d(y) = y$$
$$f^{-1} o f(x) = f^{-1}(f(x)) = I_d(x) = x$$

Observamos que o domínio de f^{-1} é a imagem de f e, reciprocamente, $I_m(f^{-1}) = dom(f)$. Ainda, nas condições impostas para a existência da função inversa, temos sempre

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Exemplo 1) Seja $y = f(x) = 2x + 1$. Temos que f é crescente pois se $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_1 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

A função inversa de f é $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$. De fato,

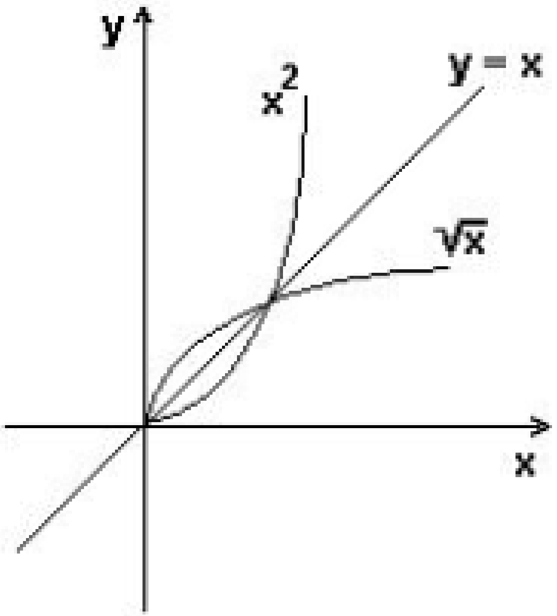
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

e

$$f(f^{-1}(y)) = f(\frac{y-1}{2}) = 2\frac{y-1}{2} - 1 = y$$

2) Seja $y = f(x) = x^2$. Neste caso, f é monótona crescente em $[0, +\infty)$´e monótona decrescente em $(-\infty, 0]$. Então, se $x \in [0, +\infty)$, f tem inversa e $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, com $y \geqslant 0$. No intervalo $(-\infty, 0]$, a função inversa de $y = f(x)$ é dada por $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ (verifique!).

Obs.: O gráfico de uma função inversa $x = f^{-1}(y)$ é *simétrico* ao da função $y = f(x)$, em relação à reta $y = x$.



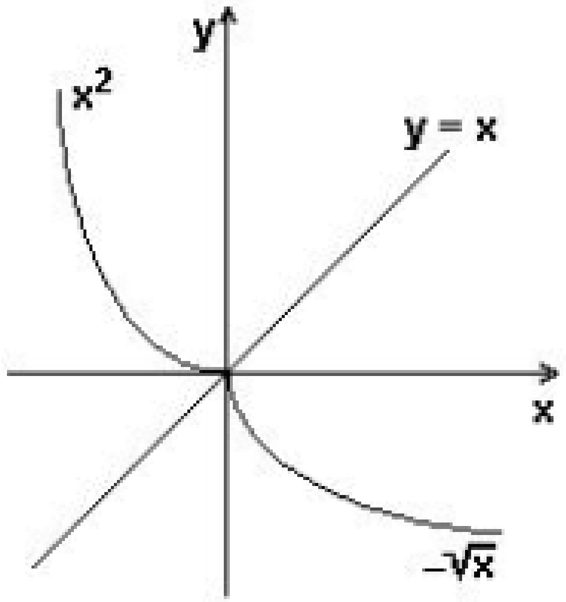


fig.2.21-Os gráficos das inversas são simétricos em reação à reta bissetriz

3) A função $y = senx$ é monótona crescente no intervalo $\frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ e sua inversa, neste intervalo, é $x = sen^{-1}y$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. A função $sen^{-1}y$ significa *"ângulo cujo seno é y"* e geralmente, é denotada por $x = \arcsin y$ (arco cujo seno é y). Para constrir o gráfico desta função inversa basta desenhar uma função simétrica da função $y = senx$, em relação à reta $y = x$.

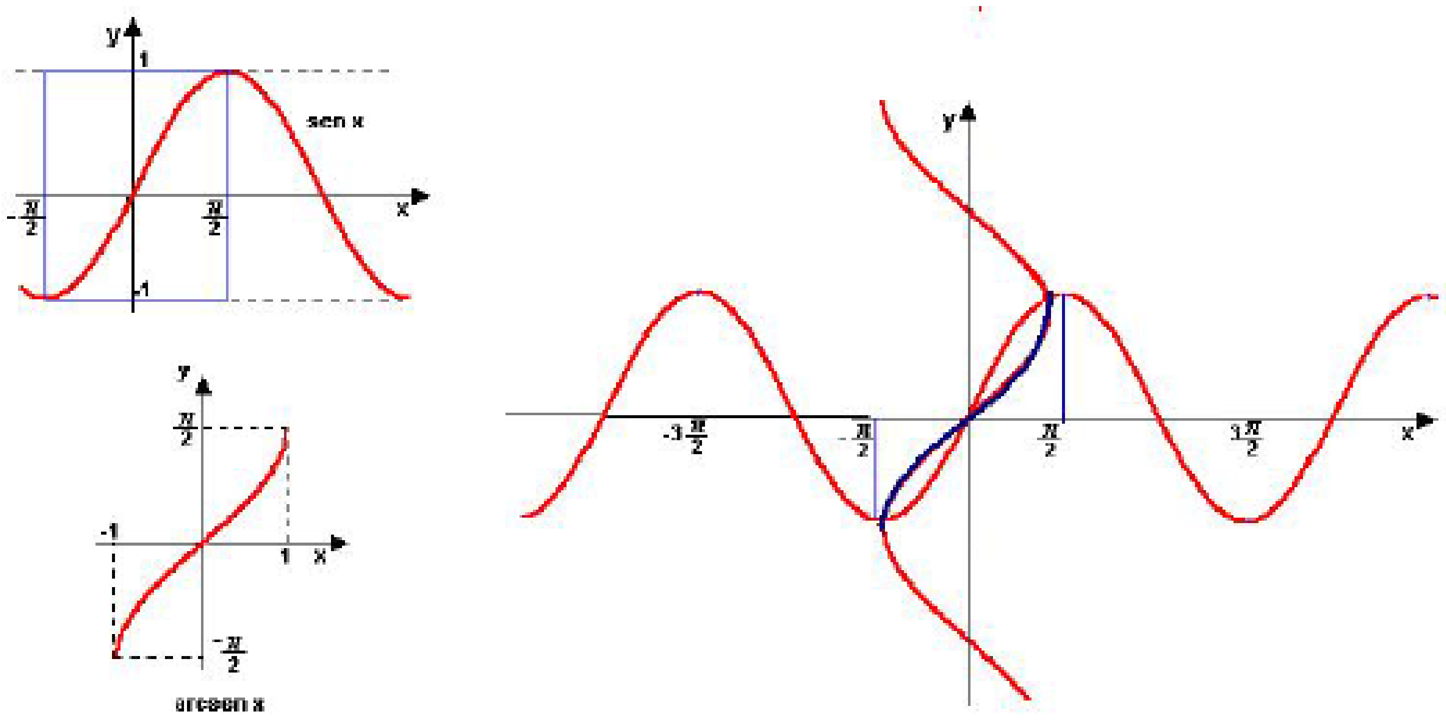


fig.2.22-Gráfico da função arcsenx

Lembramos que $y = arcsenx \Longleftrightarrow seny = x,$

Considerando –se as limitações para x e y.

Exemplos: a) $sen\frac{\pi}{2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} = arcsen1$

b) $sen\ \pi = 0 \Longleftrightarrow \pi = arcsen\ 0$

Função módulo ou Valor Absoluto

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = |x|}$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$, pois o valor absoluto de um número real é sempre não negativo. O gráfico é constituido de duas semi-retas de coeficientes angulares 1 e -1, respectivamente, que se intersectam em $(0, 0)$.

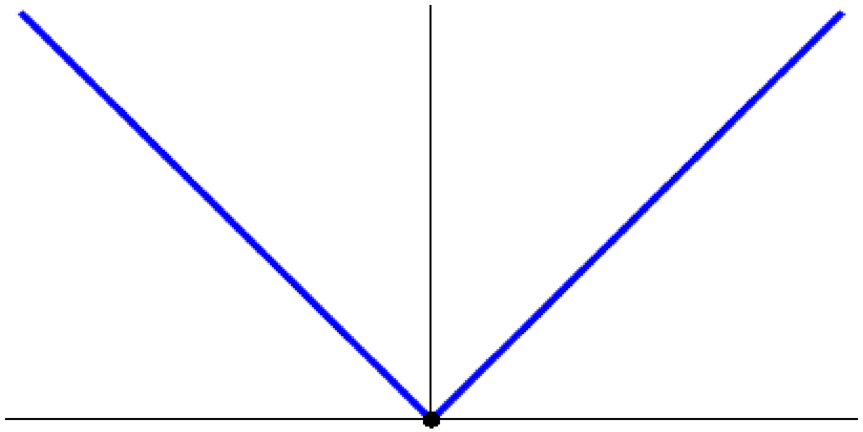


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = |x|$.

Observe que os gráficos de $|f(x)|$ e de $f(|x|)$ podem ser obtidos do gráfico de $f(x)$. De fato, $g(x) = |f(x)|$ é obtido refletindo através do eixo dos x, no primeiro e segundo quadrantes a porção do gráfico de f que esteja no terceiro e quarto quadrantes. Como exercício, diga como pode ser obtido o gráfico de $f(|x|)$.

Exemplos

[1] Escreva a função $f(x) = |x - 3|$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $f(x) = 0$ se, e somente se $x = 3$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{se} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

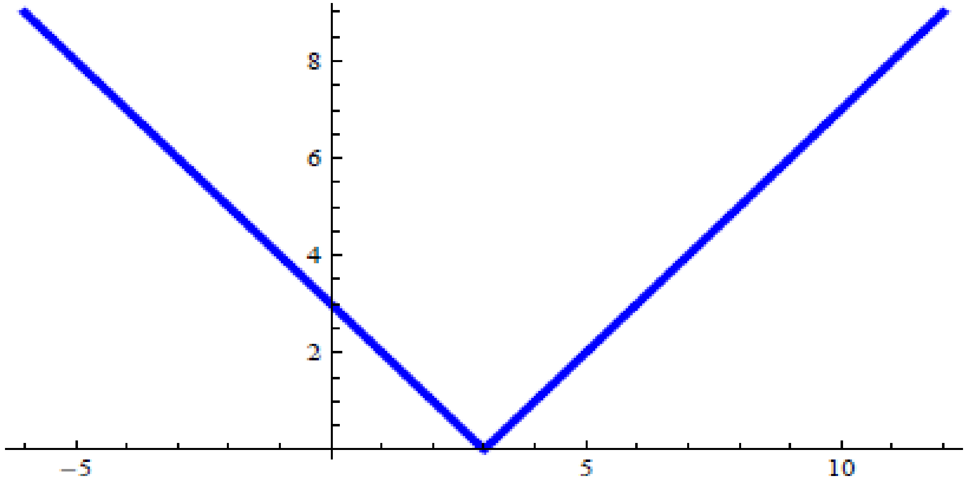


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = |x - 3|$.

[2] Escreva a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

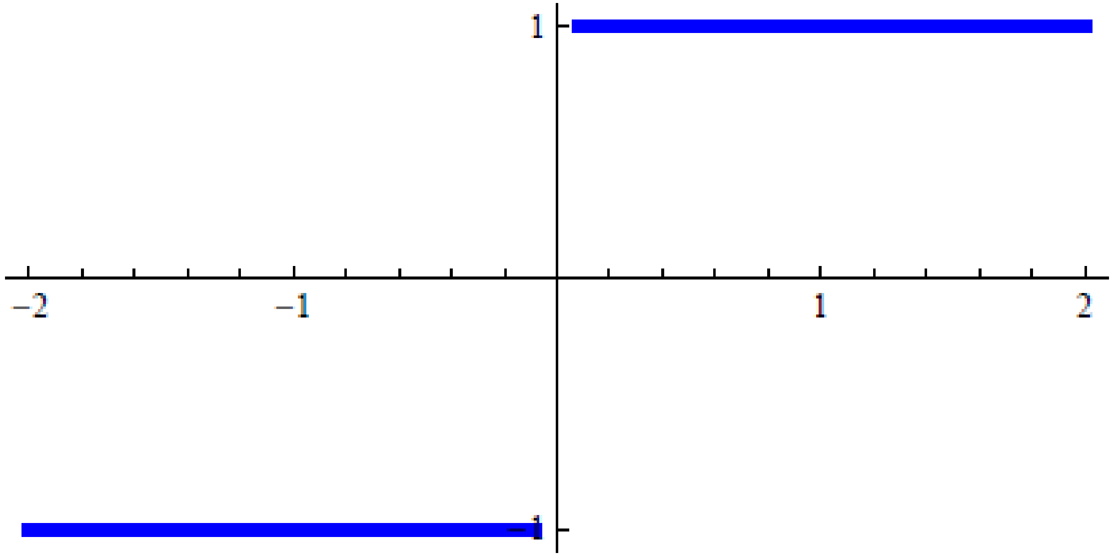


Figura 2.16: Gráfico de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

[3] Esboce os gráficos de:

(a) $g(x) = |x-1| + 2$.

(b) $h(x) = |x^3|$.

Seja $f(x) = |x|$.

(a) $g(x) = f(x-1)+2$; então, o gráfico de g é obtido a partir do gráfico da função f transladando-o ao longo do eixo dos x em 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. O gráfico é constituido de dois segmentos de retas de coeficientes angulares 1 e -1, passando por (1,2) e (0,3), respectivamente.

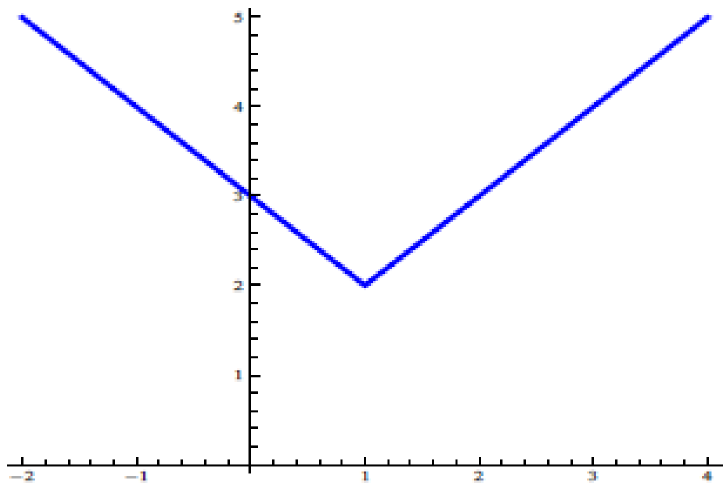


Figura 2.17: Gráfico de g.

(b) Por outro lado $h(x) = f(x^3)$.

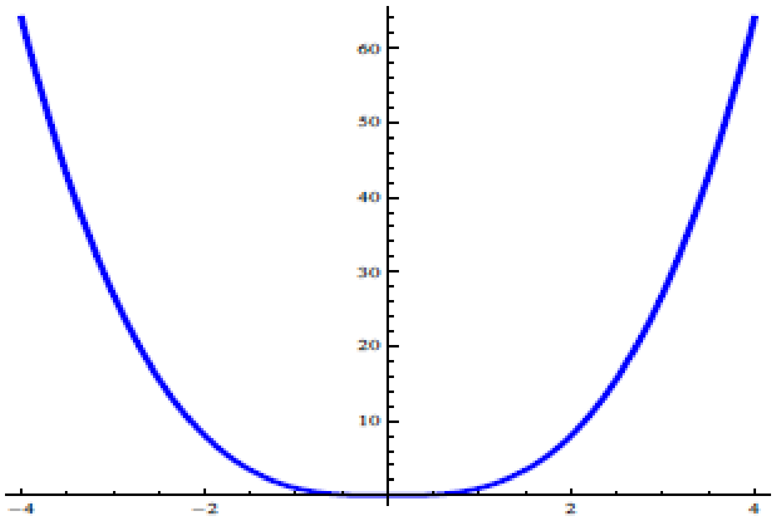


Figura 2.18: Gráfico de h.

Função Polinomial ou Afim - montar