Funções Inversas, Modular, Polinomiais e Trigonométricas

Cálculo Aula 4

Profa. Dra. Adriana Silveira Vieira

Funções Inversas

Para definir funções inversas necessitamos de alguns conceitos preliminares:
Uma função $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, é *monótona crescente* se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

f é *monótona não-decrescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

f é *monótona decrescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

f é *monótona não-crescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

f é *biunívoca* em $[a,b]$ se

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

para todo x_1 e x_2 do intervalo $[a,b]$.

Seja $y = f(x)$ uma função biunívoca em $[a, b]$, dizemos que f^{-1} é a função *inversa* de f se $x = f^{-1}(y)$, isto é, se

$$f o f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = I_d(y) = y$$
$$f^{-1} o f(x) = f^{-1}(f(x)) = I_d(x) = x$$

Observamos que o domínio de f^{-1} é a imagem de f e, reciprocamente, $I_m(f^{-1}) = dom(f)$. Ainda, nas condições impostas para a existência da função inversa, temos sempre

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Exemplo 1) Seja $y = f(x) = 2x + 1$. Temos que f é crescente pois se $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_1 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

A função inversa de f é $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$. De fato,

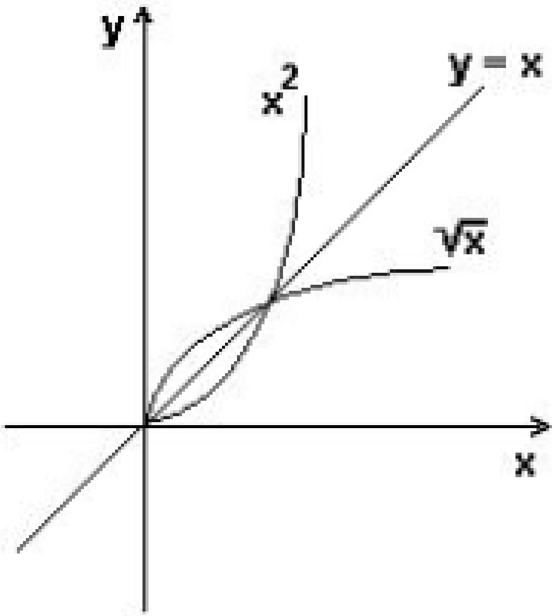
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

e

$$f(f^{-1}(y)) = f(\frac{y-1}{2}) = 2\frac{y-1}{2} - 1 = y$$

2) Seja $y = f(x) = x^2$. Neste caso, f é monótona crescente em $[0, +\infty)$´e monótona decrescente em $(-\infty, 0]$. Então, se $x \in [0, +\infty)$, f tem inversa e $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, com $y \geqslant 0$. No intervalo $(-\infty, 0]$, a função inversa de $y = f(x)$ é dada por $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ (verifique!).

Obs.: O gráfico de uma função inversa $x = f^{-1}(y)$ é *simétrico* ao da função $y = f(x)$, em relação à reta $y = x$.



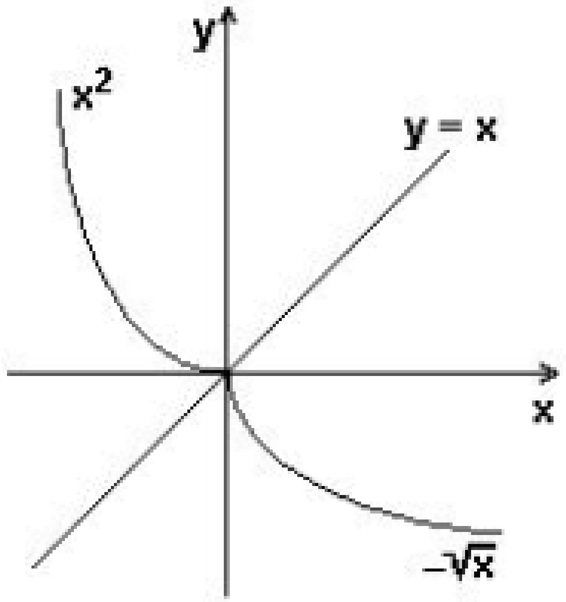


fig.2.21-Os gráficos das inversas são simétricos em reação à reta bissetriz

3) A função $y = senx$ é monótona crescente no intervalo $\frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ e sua inversa, neste intervalo, é $x = sen^{-1}y$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. A função $sen^{-1}y$ significa *"ângulo cujo seno é y"* e geralmente, é denotada por $x = \arcsin y$ (arco cujo seno é y). Para constrir o gráfico desta função inversa basta desenhar uma função simétrica da função $y = senx$, em relação à reta $y = x$.

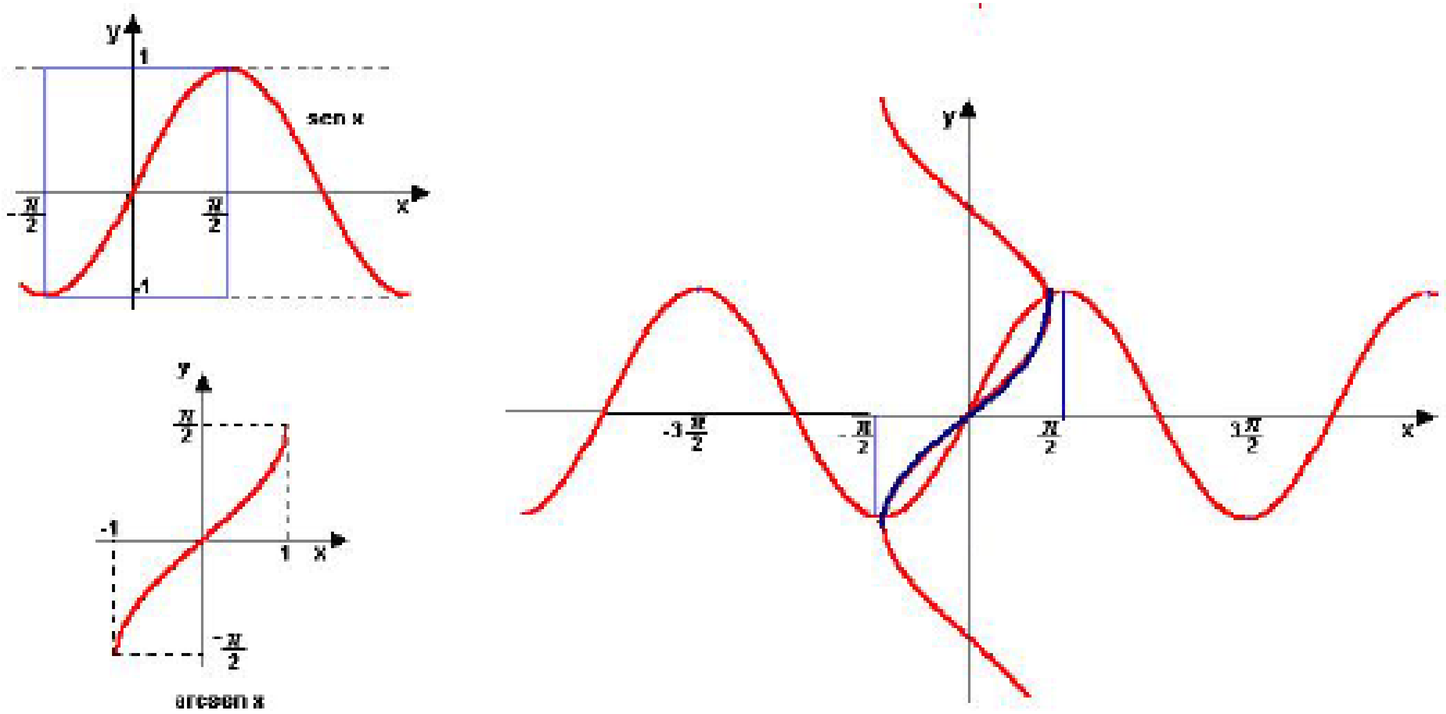


fig.2.22-Gráfico da função arcsenx

Lembramos que $y = arcsenx \Longleftrightarrow seny = x,$

Considerando –se as limitações para x e y.

Exemplos: a) $sen\frac{\pi}{2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} = arcsen 1$

b) $sen\ \pi = 0 \Longleftrightarrow \pi = arcsen\ 0$

Função módulo ou Valor Absoluto

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = |x|}$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$, pois o valor absoluto de um número real é sempre não negativo. O gráfico é constituido de duas semi-retas de coeficientes angulares 1 e -1, respectivamente, que se intersectam em $(0, 0)$.

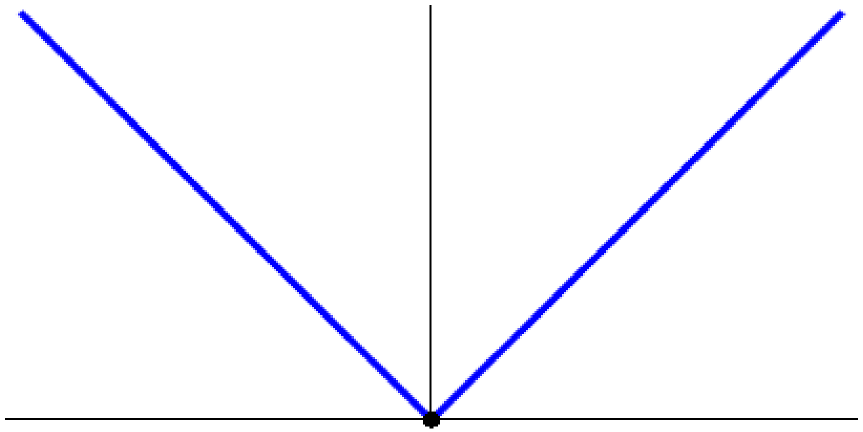


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = |x|$.

Observe que os gráficos de $|f(x)|$ e de $f(|x|)$ podem ser obtidos do gráfico de $f(x)$. De fato, $g(x) = |f(x)|$ é obtido refletindo através do eixo dos x, no primeiro e segundo quadrantes a porção do gráfico de f que esteja no terceiro e quarto quadrantes. Como exercício, diga como pode ser obtido o gráfico de $f(|x|)$.

Exemplos

[1] Escreva a função $f(x) = |x - 3|$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $f(x) = 0$ se, e somente se $x = 3$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{se} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

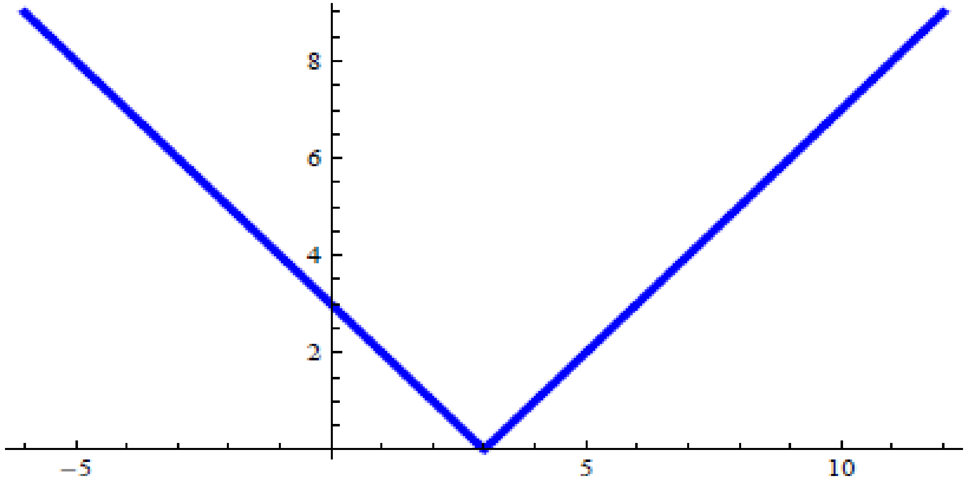


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = |x - 3|$.

[2] Escreva a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

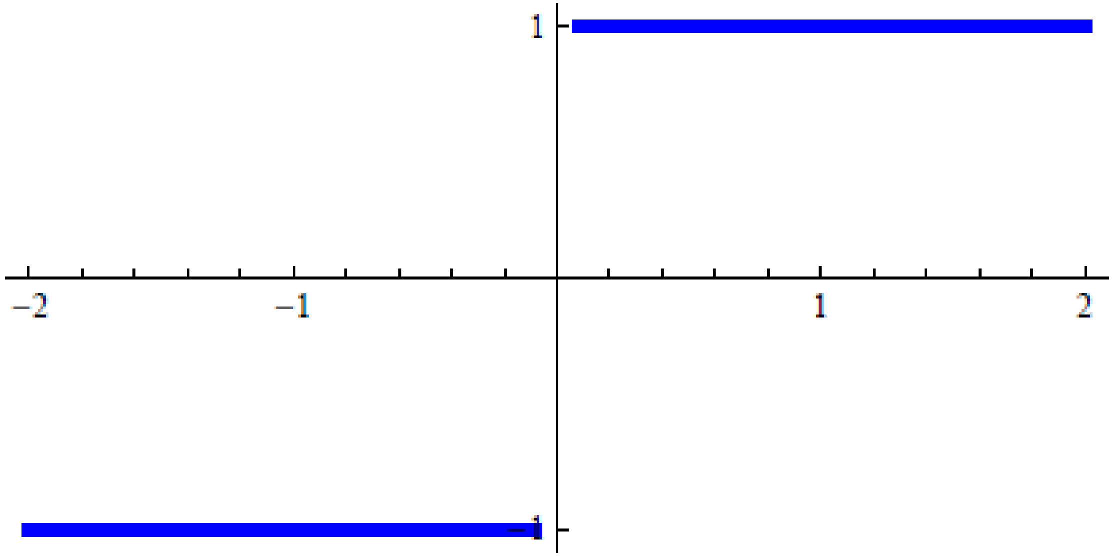


Figura 2.16: Gráfico de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

[3] Esboce os gráficos de:

(a) $g(x) = |x - 1| + 2$.

(b) $h(x) = |x^3|$.

Seja $f(x) = |x|$.

(a) $g(x) = f(x-1)+2$; então, o gráfico de g é obtido a partir do gráfico da função f transladando-o ao longo do eixo dos x em 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. O gráfico é constituido de dois segmentos de retas de coeficientes angulares 1 e -1, passando por (1,2) e (0,3), respectivamente.

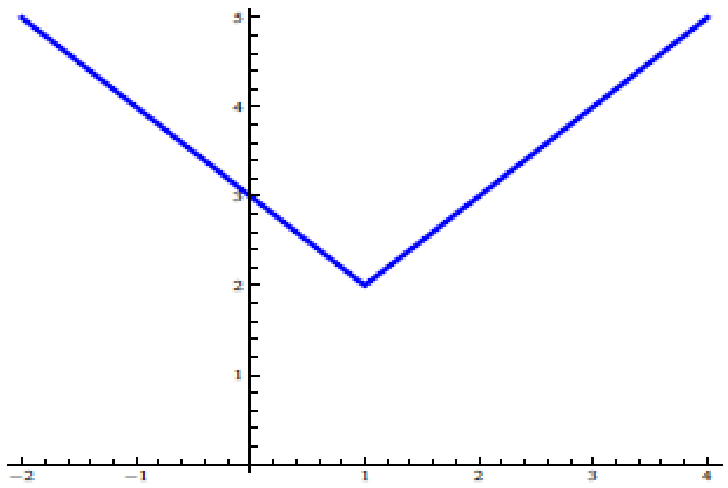


Figura 2.17: Gráfico de g.

(b) Por outro lado $h(x) = f(x^3)$.

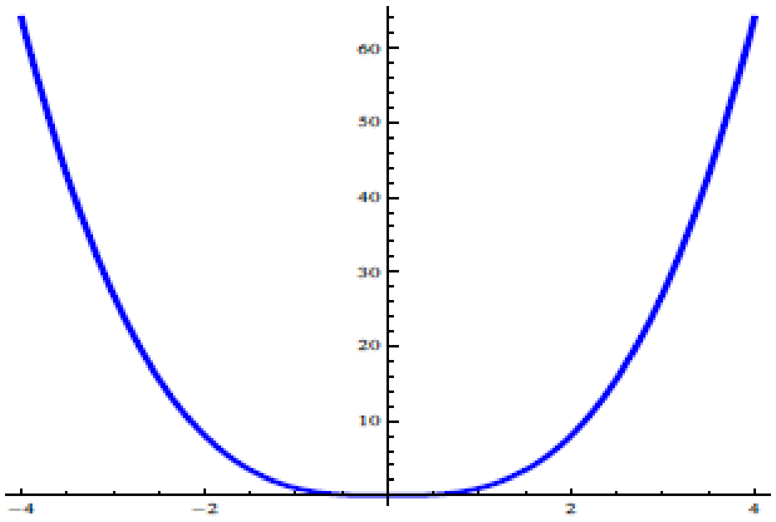


Figura 2.18: Gráfico de h.

Função Polinomial do Primeiro Grau ou Afim

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = m\,x + b}$$

onde $m,\ b \in \mathbb{R}$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Usando a definição de distância entre pontos do plano não é difícil provar que dados três pontos no gráfico de f, estes são colineares; o gráfico de f é a reta de coeficiente angular m passando por $(0, b)$. E, reciprocamente, dados dois pontos que determinem uma reta não vertical existe uma função afim cujo gráfico é a reta. (Verifique!). Note que:

$$m = \frac{f(c) - f(d)}{c - d},$$

para todo $c,\ d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$. Logo:

$$f(0) = b,\ f(1) = m + b,\ \ f(2) = 2\,m + b = f(1) + m,\ f(3) = 3\,m + b = f(2) + m;$$

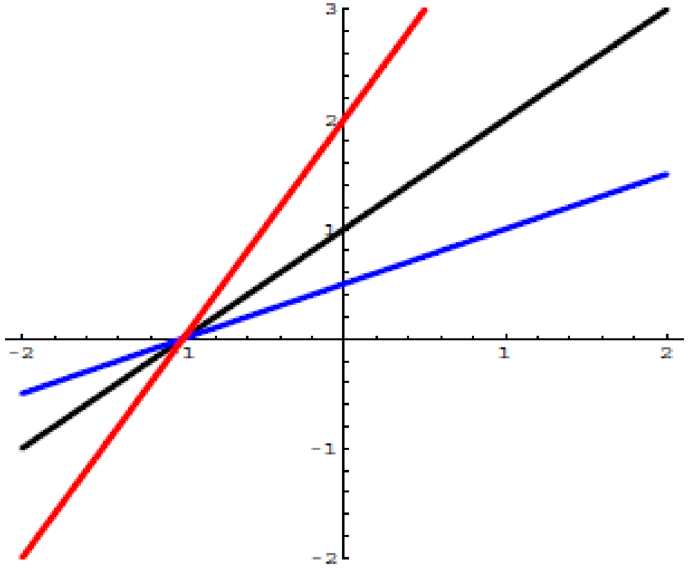
em geral, $f(k+1) = f(k) + m$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $f(0),\ f(1),\ f(2)\,..,\ f(n),..$ formam uma progressão aritmética de razão m.

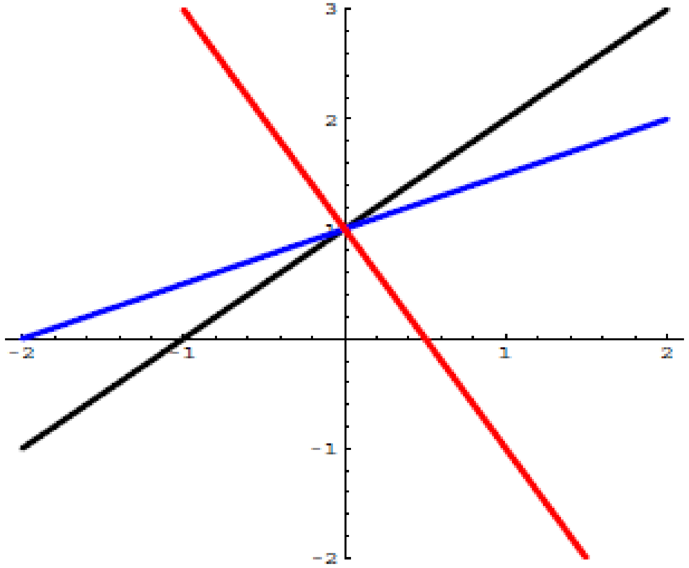
A propriedade que caracteriza as funcões polinomiais de primeiro grau é que $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h, isto é, a acréscimos iguais dados a x correspondem acréscimos iguais para f. É esta característica que deve ser utilizada nas aplicações. Quando $m = 0$, a função é chamada **constante** e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo dos x que passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplos

[1] À esquerda, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $\frac{1}{2}\,f(x) = \frac{x+1}{2}$ (azul) e $2\,f(x) = 2\,x + 2$ (vermelho), respectivamente.

[2] À direita, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 1$ (azul) e $f(-2\,x) = 1 - 2\,x$ (vermelho), respectivamente:





Quando $b = 0$, obtemos um tipo importante de função, chamada **função linear**. Portanto, a função linear é definida por:

$$\boxed{f(x) = m\,x}$$

e é modelo matemático para resolver problemas que envolvem proporcionalidade. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular m passando pela origem.

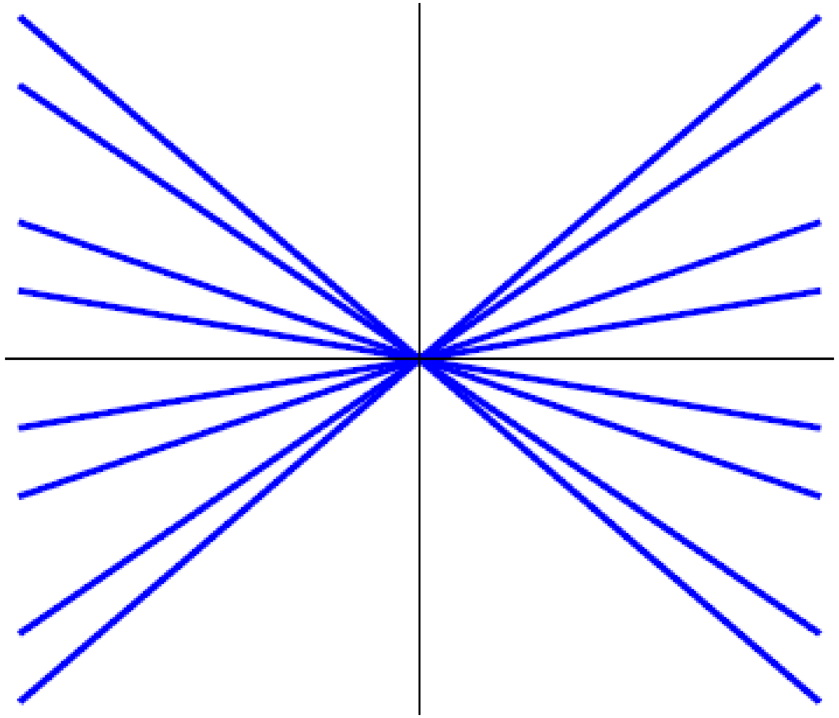


Figura 2.20: O gráfico de $f(x) = m\,x$, para diversos m.

Proposição 1. Seja *f* uma função linear:

1. *Para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, temos que:*

$$\boxed{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$$

2. *Como* $f(1) = m$*,* $f(2) = f(1) + f(1) = 2\,m$*; em geral:*

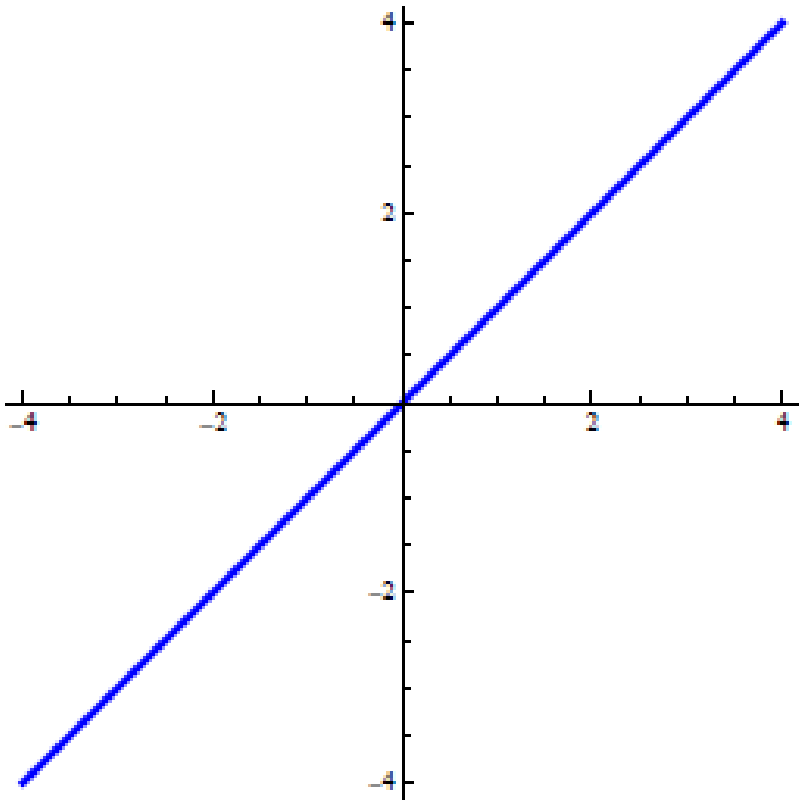
$$\boxed{f(n\,x) = n\,f(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*.*

3. *Quando* $m = 1$*, temos:*

$$\boxed{f(x) = x}$$

que é chamada função **identidade**. *Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular* 1.



$f\,(x)=x$

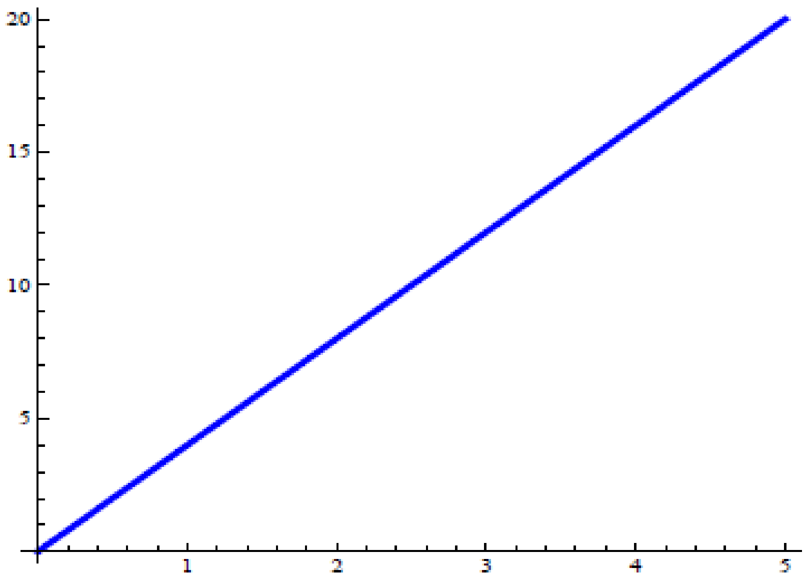
Exemplos

[1] O lucro obtido pela venda de um certo produto, depende da quantidade de unidades vendidas vezes o preço unitário. Se o preço unitário é 4 reais, escreva e esboce a função que representa o lucro.

Claramente este problema envolve proporcionalidade. Logo:

$$f(x) = m\,x \Longrightarrow 4 = f(1) = m,$$

então $f(x) = 4\,x$. Note que $Dom(f) = [0, +\infty)$. O gráfico da função é uma reta de coeficiente angular 4 passando pela origem.



f(x) = 4x

[2] Suponha que os seguintes dados foram coletados num experimento. Se a teoria subjacente à experiência indica que os dados tem uma correlação afim, ache tal função afim.

x	-10.3	-6.8	1.5	14.6	234.6
y	-35.9	-25.4	-0.5	38.8	698.8

Seja $y = f(x) = a\,x + b$. Pelas propriedades das funções afins:

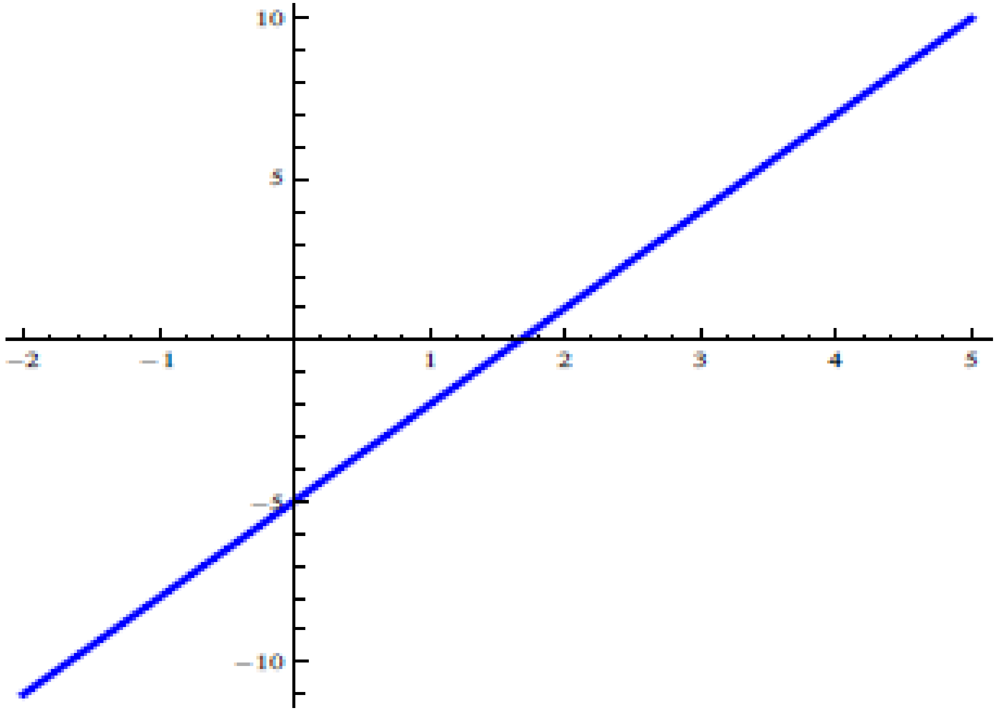
$$-0.5 = f(1.5) = 1.5\,a + b \quad \text{e} \quad -35.9 = f(-10.3) = -10.3\,a + b.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 1.5\,a + b & = -0.5 \\ -10.3\,a + b & = -35.9 \end{cases}$$

obtemos: $a = 3$ e $b = -5$; logo, $f(x) = 3\,x - 5$, e:

$$y = 3\,x - 5.$$



$f\,(x)=3x-5$

Função Polinomial de Segundo grau ou Quadrática

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Claramente $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para todo $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim em x. A $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do discriminante Δ da equação do 2^o grau $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ e do coeficiente a do termo principal.

Vértice da Parábola

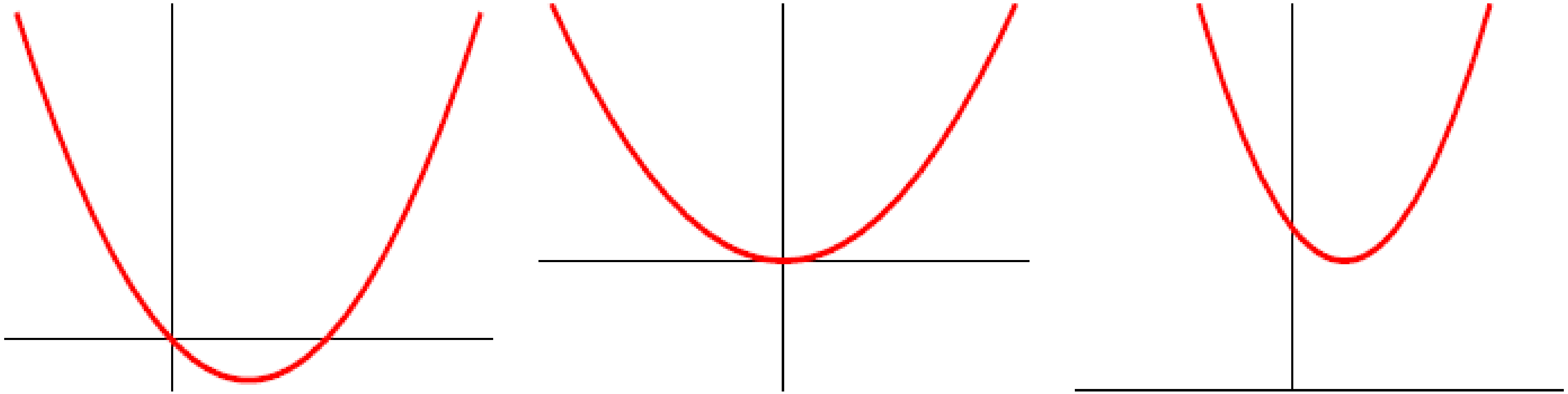
O vértice da parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ é o ponto onde a parábola intersecta seu eixo ; logo, é dado por:

$$v = (-b/2\,a, -\Delta/4\,a).$$

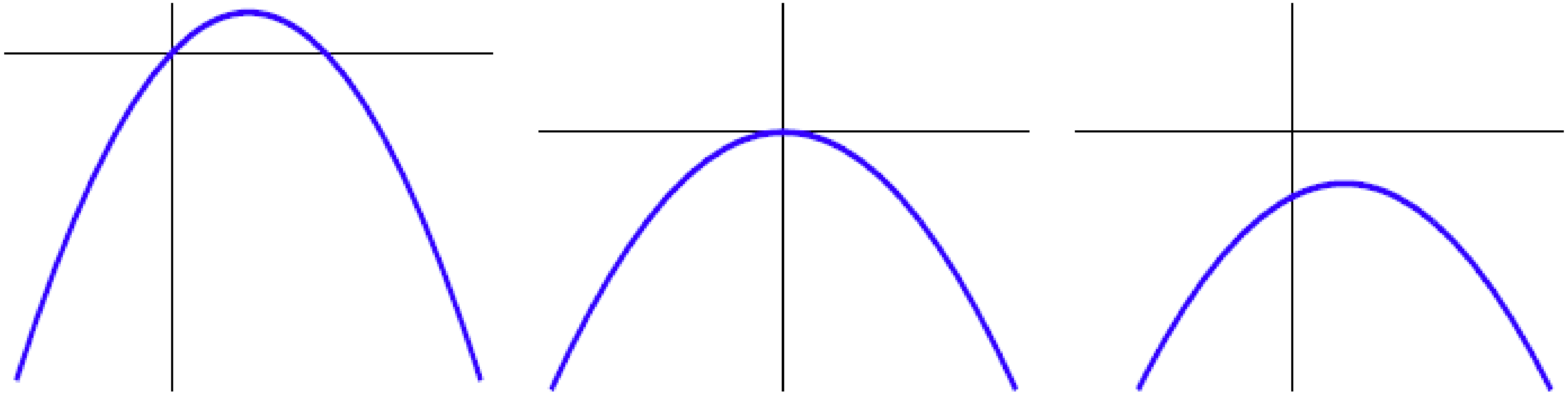
Se $a > 0$, então v é o ponto da parábola de menor altura, pois o ponto mais próximo da diretriz é o vértice. Logo, a função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ atinge seu menor valor.

Se $a < 0$, então v é o ponto da parábola de maior altura. Logo, a função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ atinge seu maior valor.

Gráficos da Função Quadrática



Gráficos para $a > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente

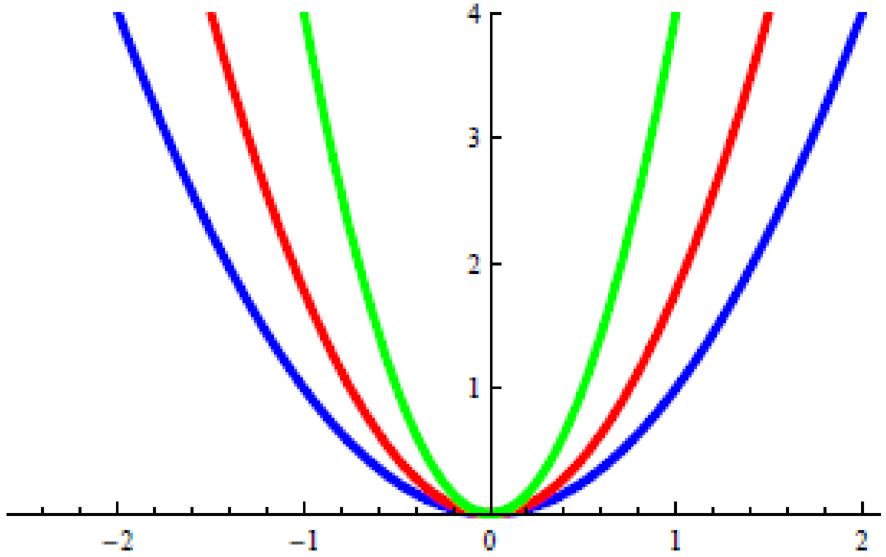


Gráficos para $a < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente

Exemplos

[1] A área de uma esfera é função quadrática de seu raio. De fato, $S(r) = 4\,\pi\,r^2$.

[2] Pelas observações 2.1, os gráficos de $y = f(x) = x^2$ (azul), $y = f\left(-\dfrac{4\,x}{3}\right) = \dfrac{16\,x^2}{9}$ (vermelha) e $y = f(2\,x) = 4\,x^2$ (verde), são:



[3] A emissão de partículas de poluição produzida pelos ônibus, na atmosfera de uma cidade é dada por:

$$h(t) = -10\,t^2 + 300\,t + 2.61$$

t em anos e h em milhares de toneladas, onde se utilizou como ano base 2000.

(a) De quanto foi a poluição no ano de 2007?

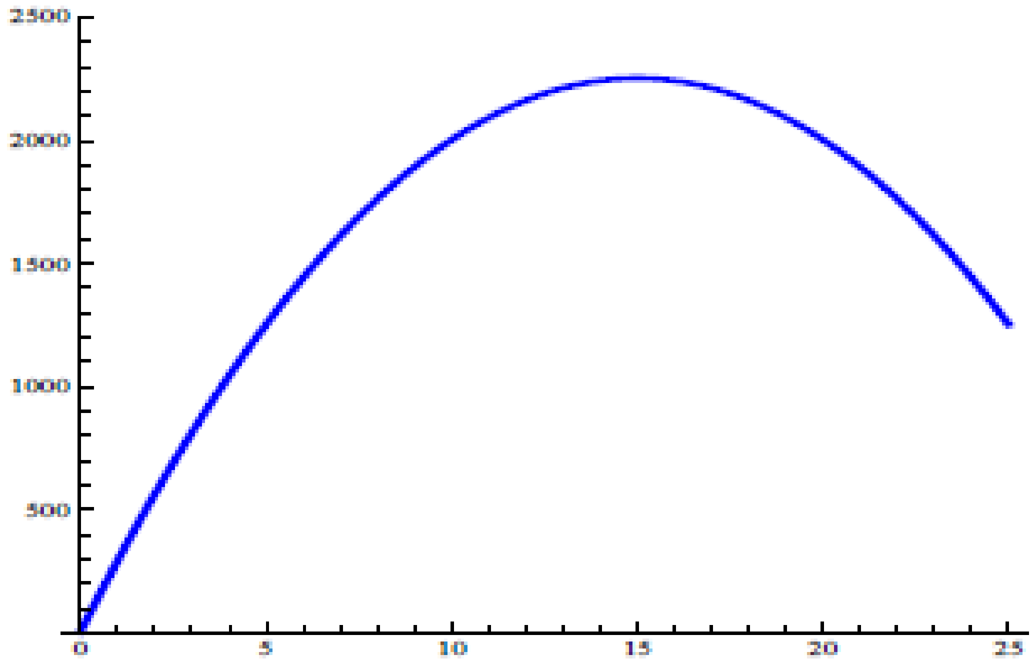
(b) Em que ano a poluição atingiu o máximo?

(a) Calculamos $h(8) = 1762.61$ milhares de toneladas.

(b) Como o fator da potência quadrática é negativo, temos que o valor máximo será atingido na ordenada do vértice:

$$-\frac{b}{2\,a} = 15.$$

Logo, o máximo de poluição será atingido no ano de 2015.



Funções Trigonométricas

A palavra **trigonometria** é formada por três radicais gregos: tri(três), gono(ângulos) e metron(medida); significando assim **“medida dos triângulos”.**

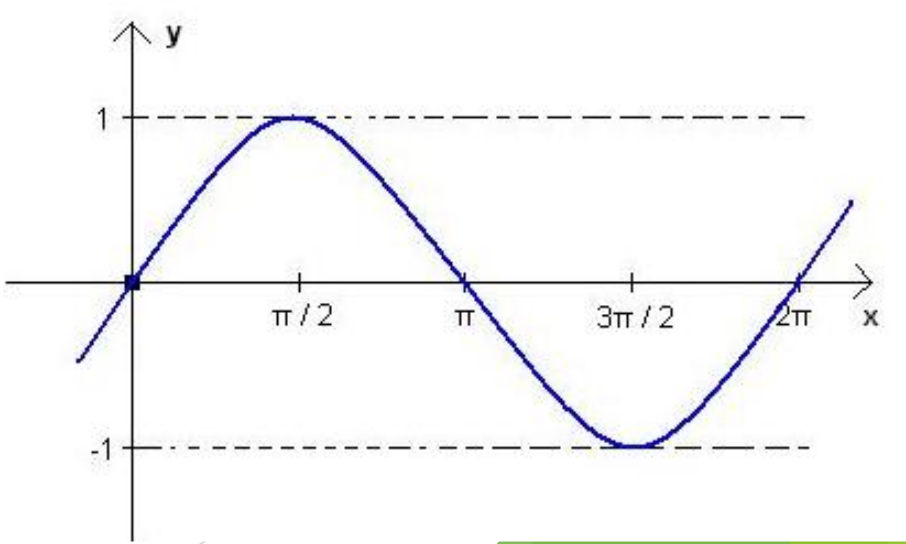
Função seno

Chamamos de função seno a função **f(x) = sen x**

O domínio dessa função é R e a imagem é Im [-1,1] ; visto que, na circunferência trigonométrica o raio é unitário e, pela definição do seno, –1 £ sen x £ 1, ou seja:

<ins>Domínio de f(x)</ins> = sen x; D(sen x) = R.

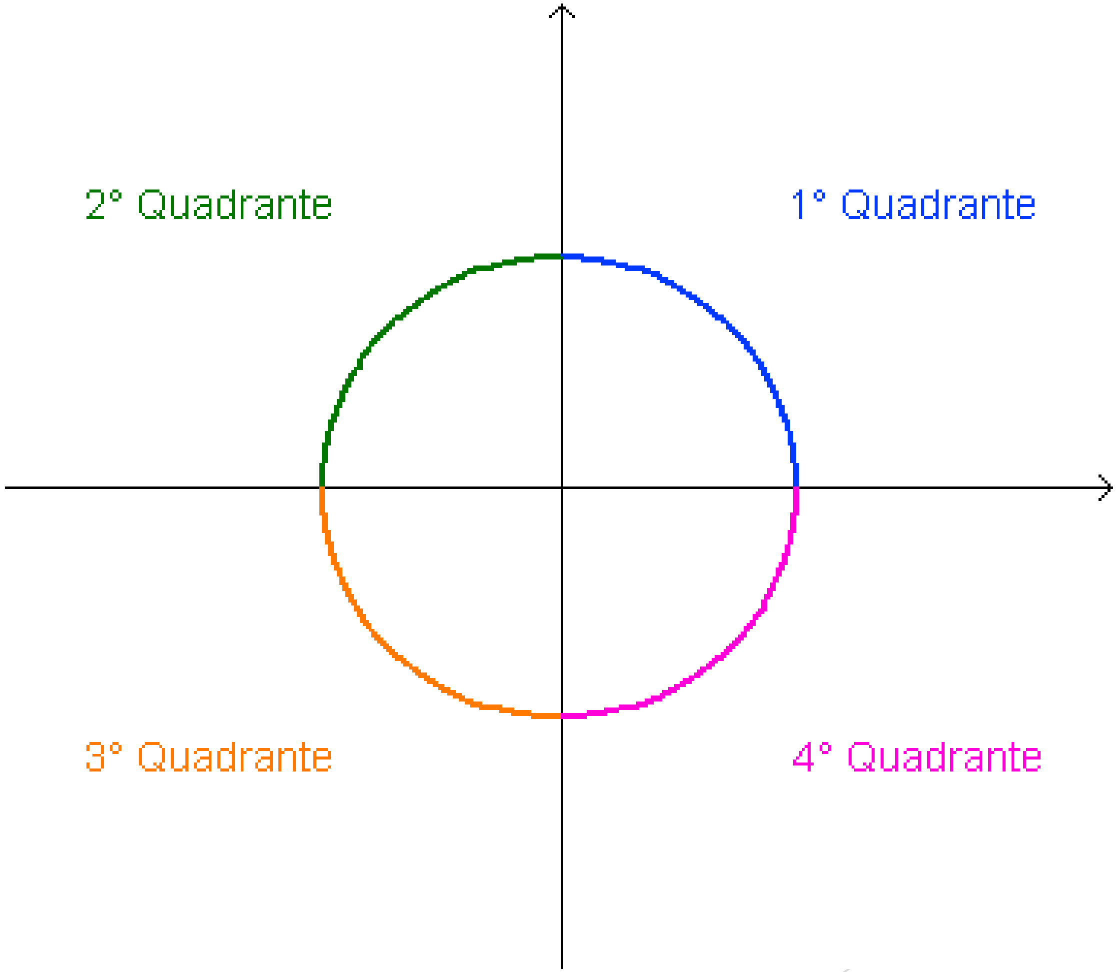
<ins>Imagem de f(x)</ins> = sen x; Im(sen x) = [-1,1] .



Sinal da Função: Como seno x é a ordenada do ponto-extremidade do arco:1

f(x) = sen x é positiva no 1° e 2° quadrantes (ordenada positiva)

f(x) = sen x é negativa no 3° e 4° qua drantes (ordenada negativa)



Observe que esse gráfico é razoável, Pois:

Quando $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 1° quadrante, o valor de sen x cresce de 0 a 1.

Quando $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 2° quadrante, o valor de sen x decresce de 1 a 0.

Quando $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 3° quadrante, o valor de sen x decresce de 0 a -1.

Quando $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, 4° quadrante, o valor de sen x cresce de -1 a 0.]

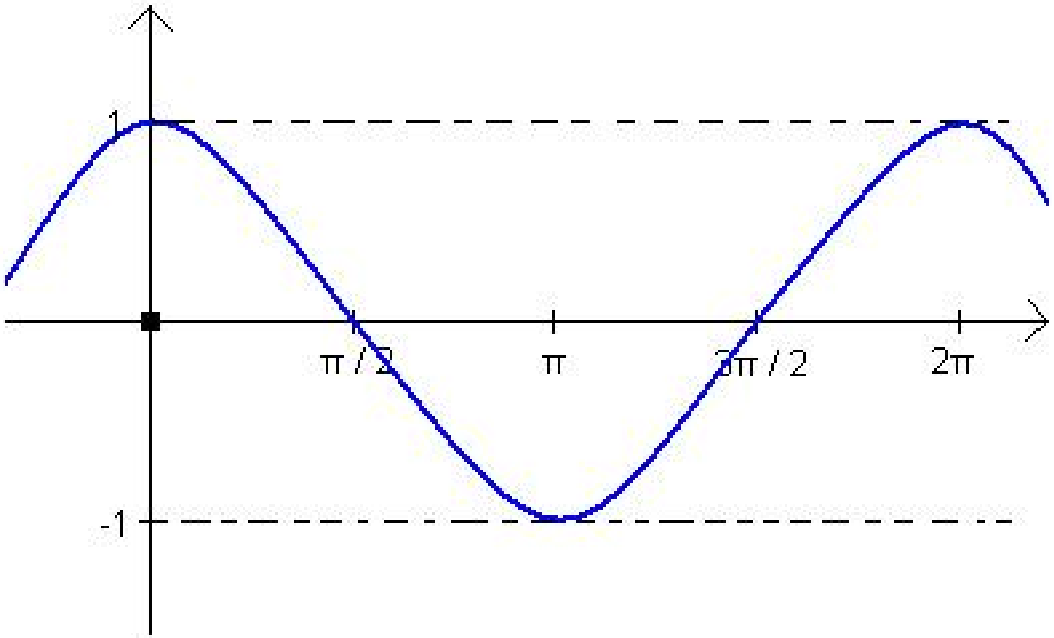
Função cosseno

Chamamos de função cosseno a função **f(x) = cos x.**

O domínio dessa função é R e a imagem é Im [-1,1] ; visto que, na circunferência trigonométrica o raio é unitário e, pela definição do cosseno, –1 £ cos x £ 1, ou seja:

<u>Domínio de f(x)</u> = cos x; D(cos x) = R.

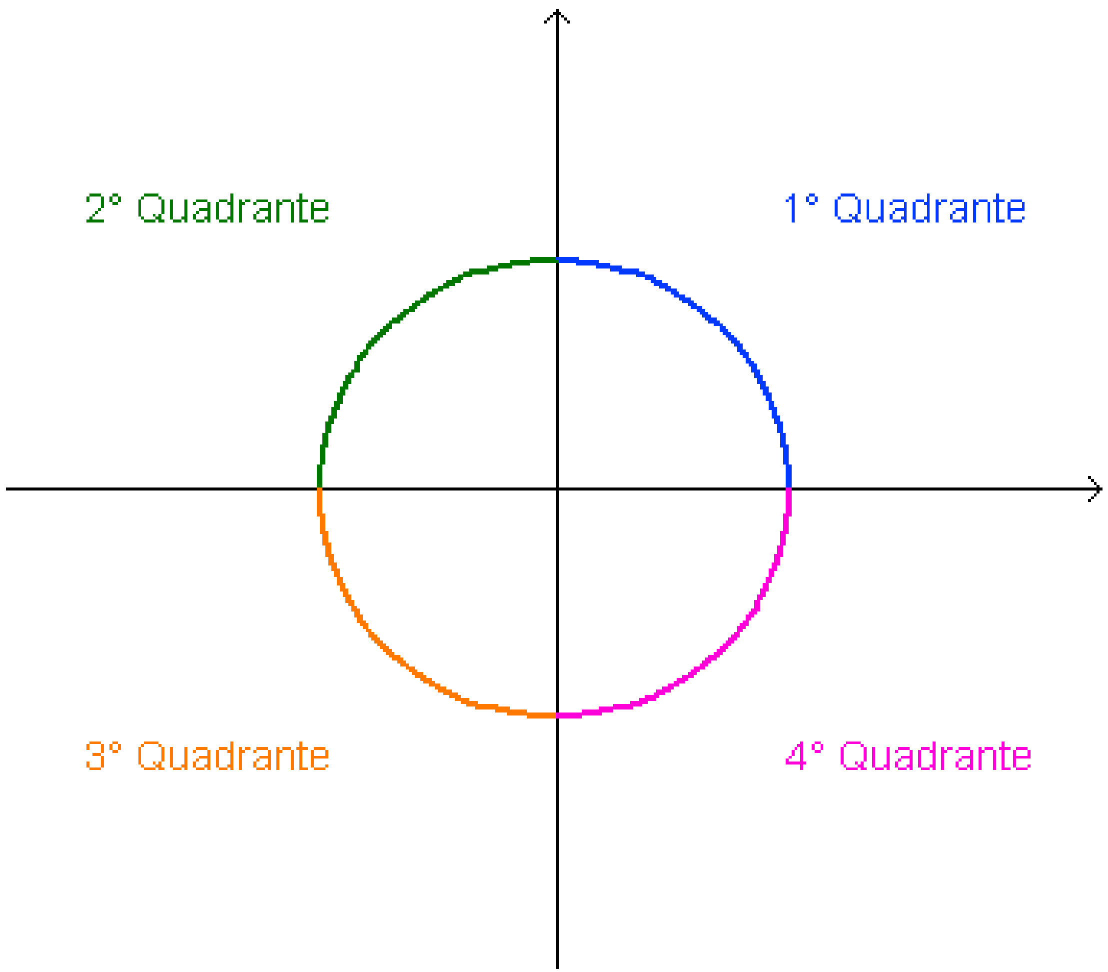
<u>Imagem de f(x)</u> = cos x; Im(cos x) = [-1,1] .



Sinal da Função: Como cosseno x é a abscissa do ponto-extremidade do arco:

f(x) = cos x é positiva no 1° e 4° quadrantes (abscissa positiva)

f(x) = cos x é negativa no 2° e 3° quadrantes (abscissa negativa)



Observe que esse gráfico é razoável, Pois:

Quando $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 1° quadrante, o valor do cos x decresce de 1 a 0.

Quando $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 2° quadrante, o valor do cos x decresce de 0 a -1

Quando $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 3° quadrante, o valor do cos x cresce de -1 a 0.

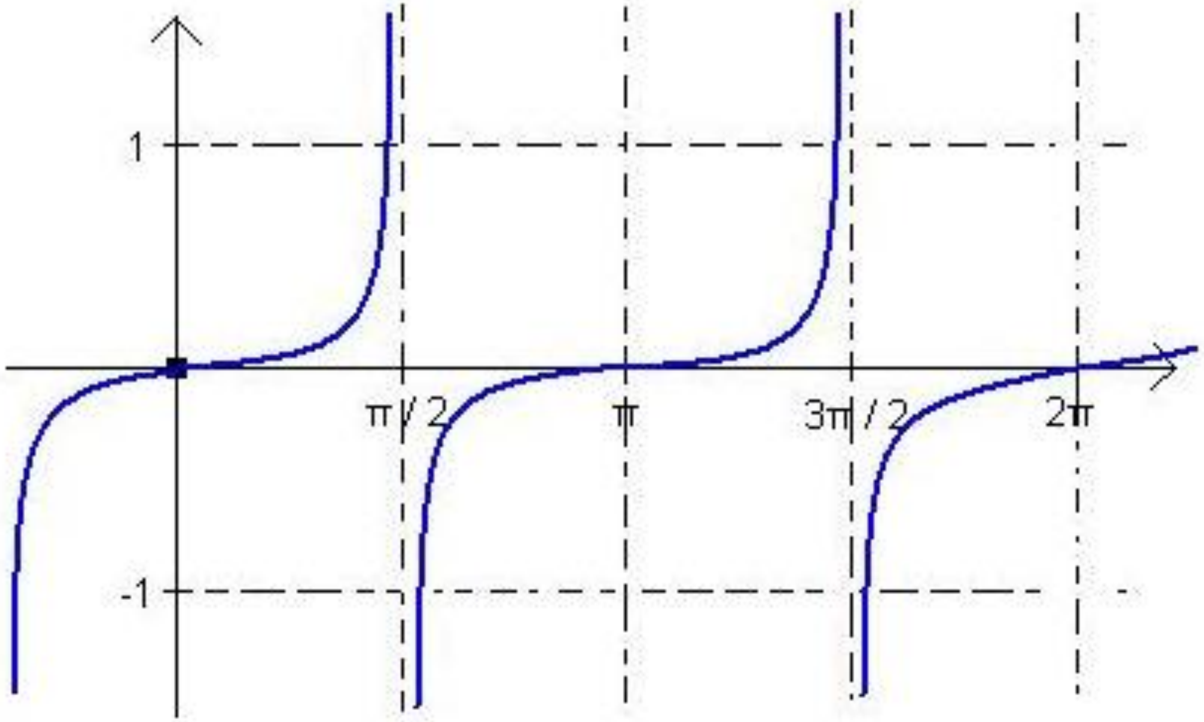
Quando , $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 4° quadrante, o valor do cos x cresce de 0 a 1.

Função tangente

Chamamos de função tangente a função **f(x) = tg x.**

Domínio de f(x) = O domínio dessa função são todos os números reais, exceto os que zeram o cosseno pois não existe cosx = 0

Imagem de f(x) = tg x; Im(tg x) = R ou $\mathrm{Im} =]-\infty, \infty[$.



Sinal da Função: Como tangente x é a ordenada do ponto T interseção da reta que passa pelo centro de uma circunferência trigonométrica e o ponto-extremidade do arco, com o eixo das tangentes então:

f(x) = tg x é positiva no 1° e 3° quadrantes (produto da ordenada pela abscissa positiva)

f(x) = tg x é negativa no 2° e 4° quadrantes (produto da ordenada pela abscissa negativa)

Função secante

Denomina-se função secante a função **f(x) = 1/cos x.**

Sinal da função: Como a função secante é a inversa da função cosseno, então os sinais da função secante são os mesmos da função cosseno.

Definição: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Logo, o domínio da função secante é $\{x \in R \,/\, \cos x \neq 0\} = \left\{x \in R \,/\, x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$.

Função cossecante

Denomina-se função cossecante a função **f(x) = 1/sen x.**

Sinal da função: Como a função cossecante é a inversa da função seno, então os sinais da função cossecante são os mesmos da função seno.

Definição: $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Logo, o domínio da função cossecante é $\{x \in R \,/\, \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in R \,/\, x \neq k\pi, k \in Z\}$

Função cotangente

Denomina-se função cossecante a função **f(x) = 1/sen x.**

Sinal da função: Como a função cossecante é a inversa da função tangente, então os sinais da função cotangente é a razão entre o cosseno e o seno.

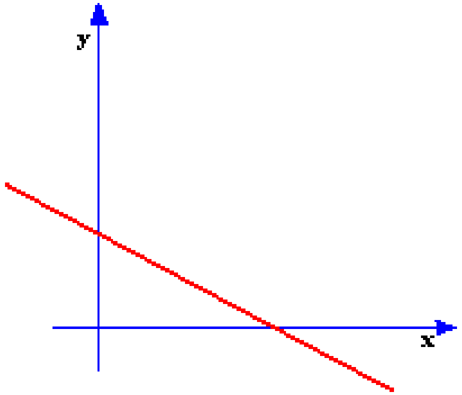
- $cot(\theta) = \dfrac{1}{tan(\theta)}$
- $cot(\theta) = \dfrac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$

Exercícios

01. (UNIFOR) A função f, do 1° grau, é definida por $f(x) = 3x + k$. O valor de k para que o gráfico de f corte o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5 é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

02. (EDSON QUEIROZ – CE) O gráfico abaixo representa a função de ? em ? dada por $f(x) = ax + b$ (a, b Î?). De acordo com o gráfico conclui-se que:



a) $a < 0$ e $b > 0$
b) $a < 0$ e $b < 0$
c) $a > 0$ e $b > 0$
d) $a > 0$ e $b < 0$
e) $a >$ o e $b = 0$

01. (UNIFORM) O gráfico da função f, de R em R, definida por $f(x) = x^2 + 3x - 10$, intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A distância AB é igual a:

a) 3

b) 5

c) 7

d) 8

e) 9

02. (CEFET – BA) O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ tem uma só intersecção com o eixo Ox e corta o eixo Oy em (0, 1). Então, os valores de a e b obedecem à relação:

a) $b^2 = 4a$

b) $-b^2 = 4a$

c) $b = 2a$

d) $a^2 = -4a$

e) $a^2 = 4b$

03. (ULBRA) Assinale a equação que representa uma parábola voltada para baixo, tangente ao eixo das abscissas:

a) y = x2

b) y = x2 – 4x + 4

c) y = -x2 + 4x – 4

d) y = -x2 + 5x – 6

e) y = x – 3

20. Determine a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

(c) $f(x) = x^4$, $x > 0$

(d) $f(x) = x^2 - 2x$, $x > 1$

(e) $f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$

(f) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(h) $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$

(i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x > 0$

(j) $f(x) = \frac{3x+5}{4-3x}$

(k) $f(x) = 1 + log_a(x)$

(l) $f(x) = \frac{1}{2} log_a(\frac{x+1}{x-1})$

18. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = x^4 + x^3 - x^2$

(b) $y = 2 + (x-1)^3$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

(d) $y = x^3 - x^2$

11. Determine $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g, se:

(a) $f(x) = 2\,x, \quad g(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = |x+2|$

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2 - 1$

(d) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x+3}$

(e) $f(x) = x^4, \quad g(x) = (\frac{1}{x})^4$

(f) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2$

(g) $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = (\frac{1}{x^2})^4$

(h) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = x^2$

12. Seja $f = g \circ h$. Calcule h se:

(a) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x + 1$

(b) $f(x) = b\,x + a,\ g(x) = x + a$

(c) $f(x) = |x^2 - 3\,x + 5|,\ g(x) = |x|$

(d) $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^3$