Analiticamente falando, 30/03/2016
O zero (0), não é natural
Só para a Álgebra é natural

Bibliografia Básica

. Bondy, J. A.; Murty, U.S.R. Graph Theory. Springer, 2008.

. Feofiloff, P., Kohayakawa, Y., Wakabayashi, Y. Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. 2004

. Pereira, J. M. S. Simões Matemática Discreta. Grafos Redes Aplicações. Ed. Luz da vida (Portugal), 2003.

Propriedade de Conjuntos

Definição: Um conjunto A é maximal (minimal) em relação a uma propriedade P se e somente se A verifica P, mas nenhum $B \supset A$ (nenhum) $(B \subset A)$ verifica P.

Exemplo:

$\mathbb{N}^*$ podemos contar os números racionais.

$P: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *conjunto finito

$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
$\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\},$
$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,4\}$

FORONI

20/03/2016

Seg Ter ~~Qua~~ Qui Sex Sáb Dom

$\{0,2,3\}, \{0,2,4\}, \{0,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{0,1,2,3\},$
$\{0,1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4, \{0,1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}$.

Grafos: para qualquer conjunto ~~de todos os pares~~ V, denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V. Se V tem n elementos então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ elementos.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Exemplos. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1$

Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de V que têm cardinalidade 2. Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá forma $\{v, w\}$, sendo v e w dois elementos distintos de V.

Definição: Um grafo é um par $(V, E) = G$ em que V é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $V^{(2)}$. Os elementos de V são chamados de vértices e os de E são chamados de arestas.

FORONI

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

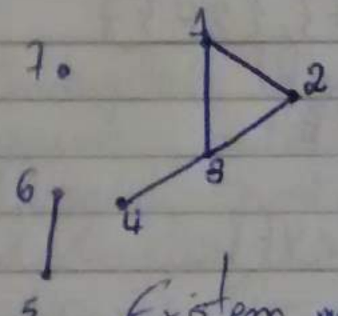
30/09/2016

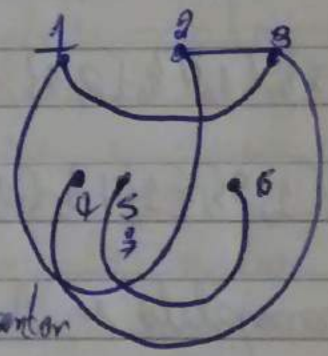
Uma aresta como {v w} será denotada simplesmente por vw ou wv. Diremos que a aresta vw são os pontos da aresta. Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são vizinhos ou adjacentes.

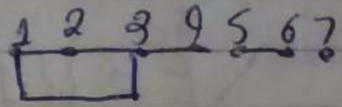
Exemplo 2:

$G = (\{1,2,3,4,5,6,7\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5,6\}\})$

$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$ G é um grafo.





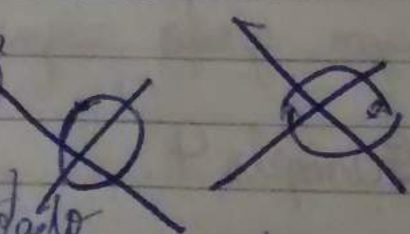


Existem muitas maneiras de se representar um grafo.

* NÃO PODEMOS TER DUAS ARESTAS SE ENCONTRANDO, DIGO, DIFERENTES COM O MESMO PAR DE PONTOS TAMBÉM NÃO PODE TER UMA ARESTA COM PONTOS COINCIDENTES.

Muitas vezes, é conveniente dar um nome ao grafo como um todo.

Se o nome do grafo for G, o conjunto dos seus vértices será denotado por V(G) e o conjunto das suas arestas por A(G).



O número de vértices de G é denotado por n(G) e o número de arestas por m(G); portanto $n(G) = |V(G)|$ e $m(G) = |A(G)|$.

O complemento de um grafo (V,E) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus E)$
O complemento de um grafo G será denotado por $\overline{G}$

Exemplo 3.

$G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\} \{3,4\}\})$
$V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$V^{(2)} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \underline{\{3,4\}}\}$

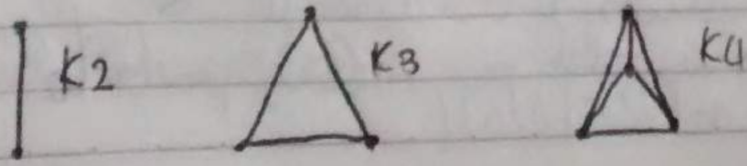
$V^{(2)} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \underline{\{3,4\}}\}$

$V^{(2)} \setminus E = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$

$\overline{G} = \{\{1,2,3,4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$.

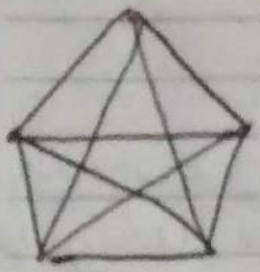
Um grafo G é completo se $A(G) = V(G)^{(2)}$, ou seja quando as arestas estão ligadas a todo mundo, e vazio se $A(G) = \emptyset$
"G é um K_n" é uma abreviatura de "G é um grafo completo com n vértices". A expressão "G é um $\overline{K_n}$" é uma abreviatura de "G é um grafo vazio com n vértices".

Exemplo 4:

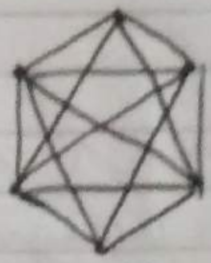


FORONI

30 / 03 / 2016



K_5



K_6

Exemplo 5:

$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\})$

$A(G) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\} = V(G)^2$

Exemplo 6: O grafo das palavras é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rabo e rato são adjacentes enquanto rabo e rota não são.

Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras a seguir

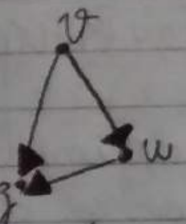
Caiado, cavalo, cavado, girafa, girava, rabo, ramo, rata, rato, remo, rita, rito, rota, vaiado, varado, verado, virado, virava.

26/04/2016

1º Prova 18/05/2016
2º Prova 13/07/2016

Um grafo pode ser dirigido ou não dirigido (orientados ou não-orientados).

Em um grafo dirigido a ordem entre os vertices de uma aresta (v, w) é importante. Esta aresta é diferente da aresta (w, v) e é representada com uma flecha de v para w.



$V = \{v, w, z\}$
$E = \{\{v, w\}, \{v, z\}, \{w, z\}\}$

Em um grafo não dirigido, $(v, w) = (w, v)$

. Um caminho é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ conectados por arestas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$

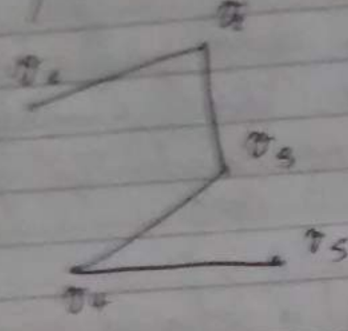
As arestas são também considerados como parte do caminho.

Exemplo:

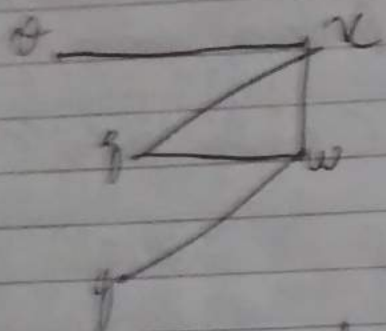
FORONI

06/04/2016

Exemplo:

a) 

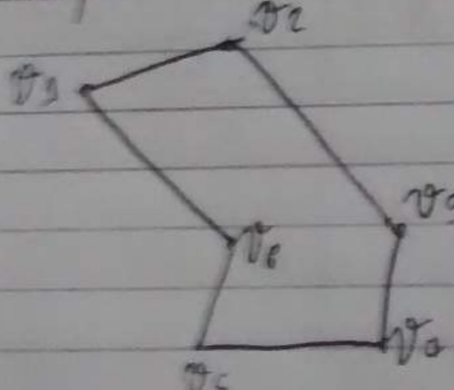
Caminho
v_1, v_2, v_3, v_4, v_5



Caminhos
v, x, w, y
v, x
v, x, z, w

. Um circuito é um Caminho onde $v_1 = v_n$,

Exemplo



Circuito.

Definição: Dígrafo é um grafo dirigido

Definição: O grau de ~~uma~~ um vértice é o número de arestas adjacentes a ele

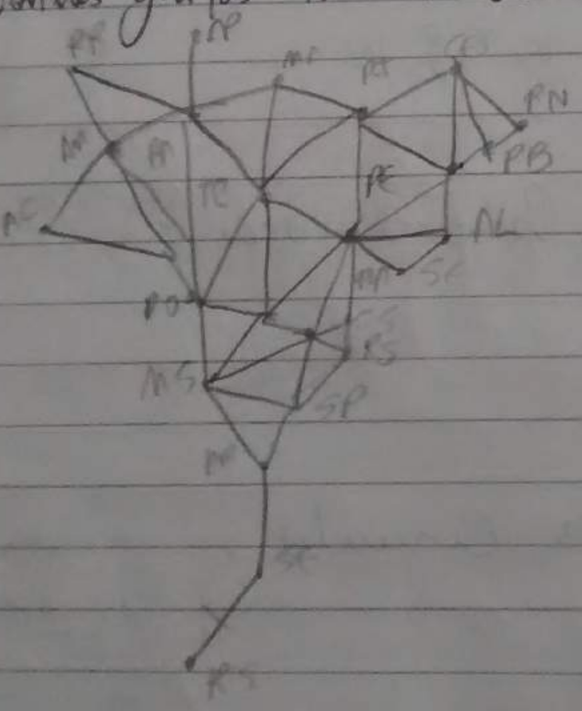
05/04/2016

Definição

Uma fonte é uma vértice com grau de entrada ou grau de saída ≥ 1. Um sumidouro é um vértice com grau de saída 0 e grau de entrada ≥ 1.

Exemplo: O grafo dos Estados do Brasil é definido assim: Cada vértice é um dos estados da república federativa do Brasil, dois Estados são adjacentes se têm uma fronteira comum.

Quantos grafos tem o vértice? E quantas arestas?



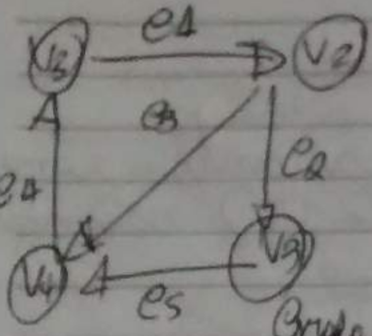
Resp: 26 vértices
Resp: 49 arestas.

Grafo Parcial.

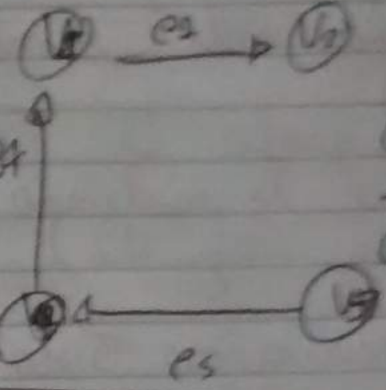
Um grafo $G_1 = (V, E_1)$ é parcial de $G = (V, E)$ se $E_1 \subset E$.

FORONI

06/05/2016



Grafo $G=(V,E)$



Grafo parcial $G_1(V,E_1)$

$e_1=\{V_1,V_2\}$
$e_2=\{V_2,V_3\}$
$e_3=\{V_2,V_4\}$
$e_4=\{V_4,V_1\}$
$e_5=\{V_3,V_4\}$
$V=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$
$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$
$E_1=\{e_1,e_4,e_5\}$

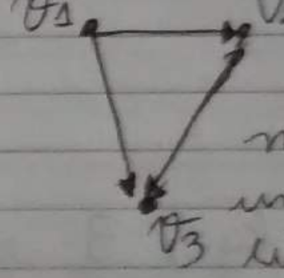
e = aresta
v = vértice

$e_1=\{V_1,V_2\}$
e_2 $\{V_2,V_3\}$
e_3 $\{V_2,V_4\}$
e_4 $\{V_1,V_4\}$
e_5 $\{V_4\ V_3\}$

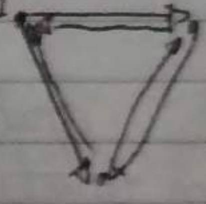
Grafo Simétrico

O grafo $G=(V,E)$ diz-se simétrico se existindo o arco(aresta) $\{v_i,v_j\}$ existe o arco $\{v_j,v_i\}$.

Exemplo:

a) 

não é um grafo simétrico

b) 

é um grafo simétrico

06/05/2016

Grafo anti-simétrico.

O grafo G = (V,E) diz-se anti-simétrico se existindo o arco (v_i, v_j) não existe o arco (v_j, v_i)

Observação: Todo gráfico dirigido é simétrico

• Grafo regular é aquele q cujo vértices tem todos o mesmo grau. Caso haja necessidade, digo, necessidade de explicitar o grau comum, g, dizemos então que G é g regular

Exemplo:

a)  G é 2-regular

G

b)  K4 é 3-regular

K4

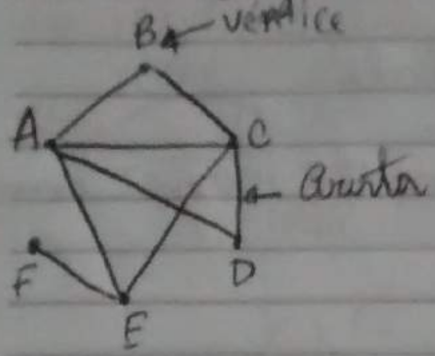
Obs: Sendo um ~~gráfico~~ grafo completo o grau dele sempre será a quantidade de vértices menos um.

Ex: O grau de um grafo completo com 1000 vért

FORONI

06/04/2016

as tem o grau 999.



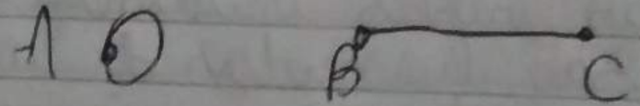
Um grafo G consiste de dois conjuntos finitos

1. vértices V(6)
2. arestas E(6)

Em geral, um grafo G é representado como:
G = (V, E)

Terminologia

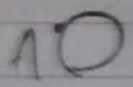
- Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, chamamos nos terminais



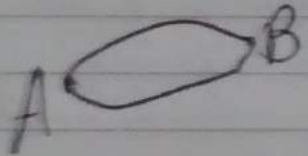
- Extremidade de uma aresta: vértice da aresta.

20/04/2016

- Extremidade de uma aresta:
vértice da aresta
- Função aresta extremidade
associa aresta a vértices.
- Laço (Loop) arestas somente com um nó terminal.



Arestas paralelas:
arestas associadas ao mesmo conjunto de vértices

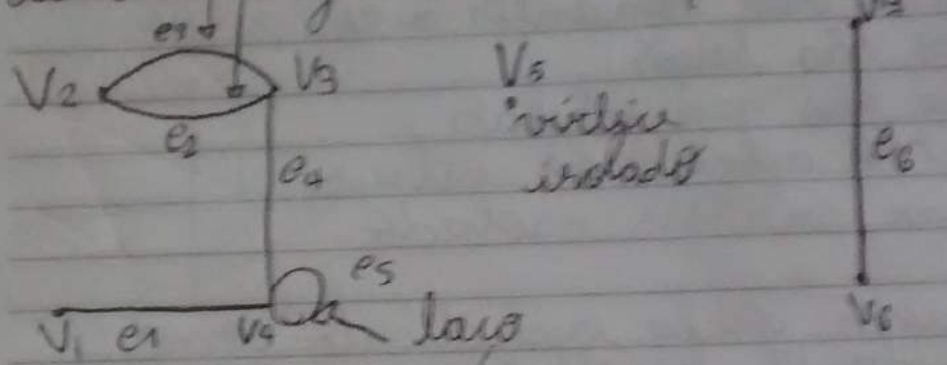


- Uma aresta conecta seus nós terminais.
- Dois vértices que são conectados por uma aresta são chamados de adjacentes.
- Um vértice que é nó terminal de um laço é dito ser adjacente a si próprio.

- Uma aresta é dita ser incidente a cada um de seus nós terminais.
- Duas arestas incidentes ao mesmo vértice são chamadas de adjacentes.
- Um vértice que não possui nenhuma aresta incidente é chamado de isolado.

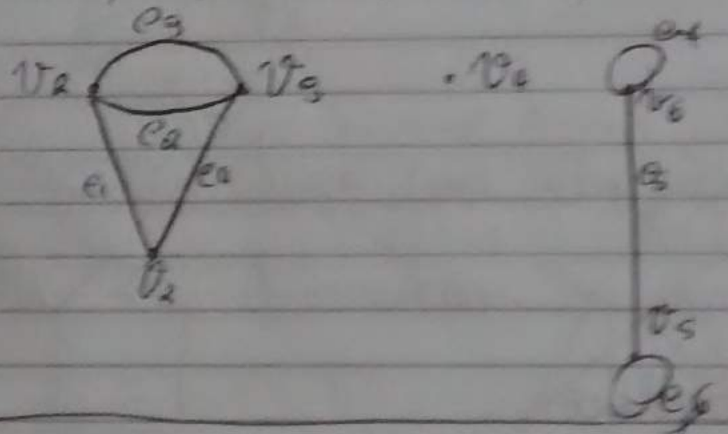
20/04/2016

— Um grafo com nenhum vértice é chamado de Vazio arestas paralelas



Conjunto de vértices

$\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$



. Conjunto de arestas

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Função aresta-vértice

Função Aresta-vértice

arestas	vértices
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_3\}$
e_4	$\{v_1, v_3\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	$\{v_5\}$
e_7	$\{v_6\}$

FORONI

20/04/2016

- e_1, e_2, e_3 são incidentes a v_1.
- v_2, v_3 são adjacentes a v_1.
- e_2, e_3 e e_4 são adjacentes a e_1.
- e_6 e e_7 são laços.
- e_2 e e_3 são paralelas.

v_5 e v_6 são adjacentes entre si

- v_4 é um vértice isolado.

Seja um grafo especificado como:

- Conjunto de vértices

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

- Conjunto de arestas.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

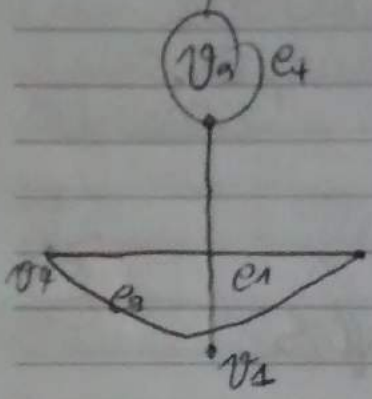
Função aresta vértice

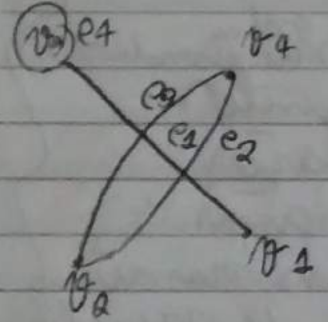
Aresta	vértice
e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_2, v_4\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3\}$

Seg Ter ~~Qua~~ Qui Sex Sáb Dom

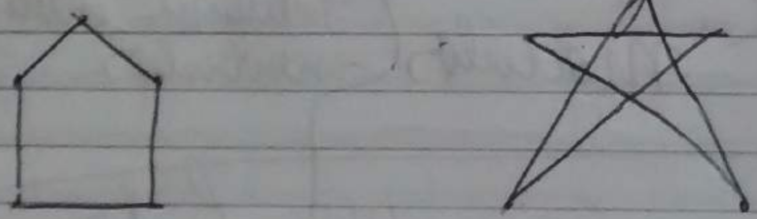
20/09/2018

Duas possíveis representações deste gráfico.



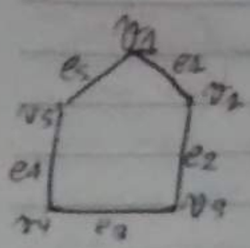


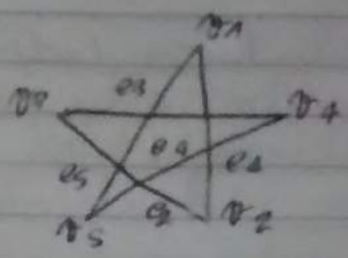
Considere os dois diagramas abaixo:



Rotule os vértices e as arestas de tal forma que os dois diagramas representem o mesmo grafo.

20/09/2016





Modelo usando grafos

Grafo	Vértice	Aresta
Comunicação	Centrais telefônicas, computadores, satélite	Cabos, fibra óptica, enlaces de microondas
Circuitos	Portas lógicas, registradores, processadores	Filamentos
Hidráulicos	Reservatórios, estações de bombeamento.	Tubulações
Financeiro	Ações, moedas	Transações
Transporte	Cidades, aeroportos	Rodovias, vias aéreas
Escalonamento	Tabelas	Restrições de precedência

Arquitetura funcional de software	Módulos	Interações entre os módulos
Internet	Página Web	Links
Jogos de tabuleiro	Posições no tabuleiro	Movimentos permitidos
Relações sociais	Pessoas, atores.	Amizades, trabalho conjunto em filmes.

FORONI

20/04/2016

Dado o grafo completo, K_n temos que vértice está conectado aos seus vizinhos através de arestas (não conectados ainda)

v_1	$v_2, v_3, \dots, v_n$	$n-1$
v_2	$v_3, v_4, \dots, v_n$	$n-2$
v_3	$v_4, \dots, v_n$	$n-3$
		$\vdots$
v_{n-1}	v_n	1
v_n	$-$	0

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = 1+2+\dots+(n-2)+(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \left(\frac{|V|^2-|V|}{2}\right)$$

. Quantidade de grafos distintos com n vértices.

O número total de grafos distintos com n vértices é: $(\mathcal{N}(V_n)) = 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{|V|^2-|V|}{2}}$

que representa a quantidade de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de

$$\frac{n^2-n}{2} = \frac{|V|^2 - |V|^2}{2}$$

possíveis arestas de um grafo com n vértices.

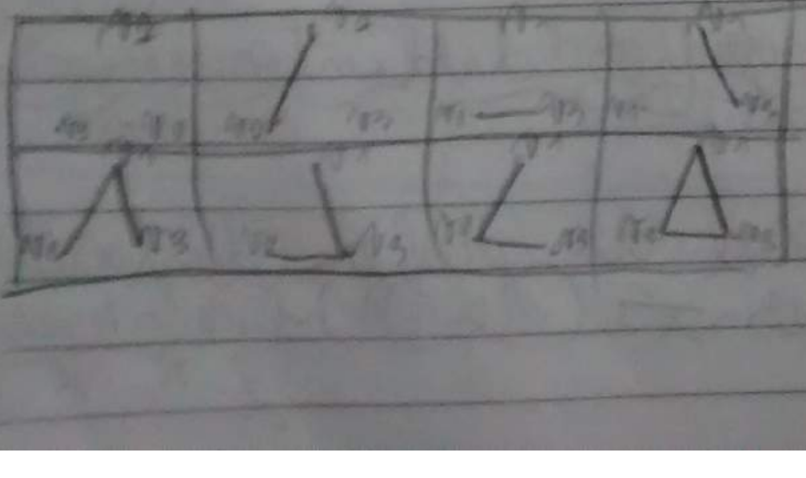
Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?

Resp: Temos oito grafos distintos com 3 vértices

$$2^{\frac{3^2-3}{2}} = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

$$= \frac{9-3}{2} \qquad \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

$$\frac{6}{2} = \boxed{3} \qquad \frac{|3|^2 - |3|}{2} = \frac{9-3}{2} = \boxed{3}$$



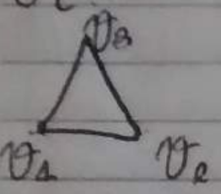
$2^{\frac{n-3}{2}}$

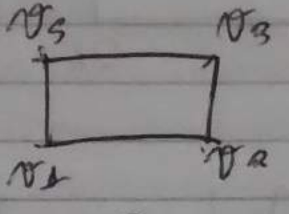
2^3

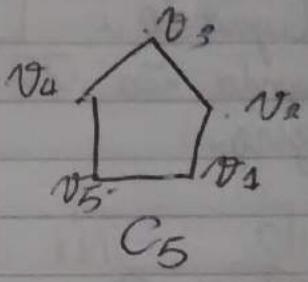
Grafo Ciclo

Definição Um grafo Ciclo de n vértices denominado C_n, $n \geq 3$ é um grafo simples com n vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ e arestas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$

Ex







Grafo Cubo - n

Definição Um Cubo - n de 2^n vértices, denominado Q_n, é um grafo simples que representa os 2^n strings de n bits. Dois vértices são adjacentes se e somente se, os strings que eles representam diferem em exatamente uma posição.

O grafo Q_{n+1} pode ser obtido a partir do grafo Q_n usando o seguinte algoritmo

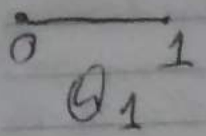
1 - Faça duas cópias de Q_n;

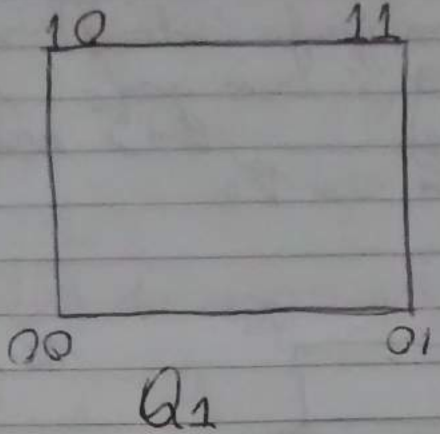
2 - Prefixe uma das cópias de Q_n com zero 0 e a outra com 1;

3 - acrescente uma aresta conectando os vértices que só diferem no primeiro bit

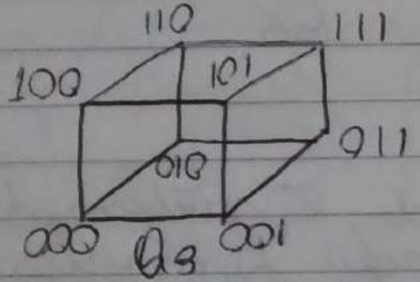
27/04/2016

Exemplo: Grafos Q_n $n = 1, 2, 3$ vértices.





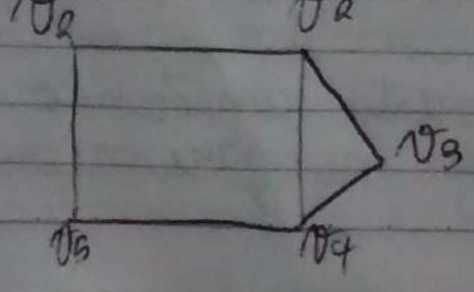
Quando tem aresta ligando é um. Quando não tem é zero.



· MATRIZ DE ADJACÊNCIA: DADO UMA, DIGO, UM GRAFO $G = (V, E)$ a matriz de adjacência M é uma matriz de ordem $|V| \times |V|$ tal que:

$|V|$ = NÚMERO DE VÉRTICES
$M[i, j]$, se existir arestas i a j.
$M[i, j] = 0$, se não existir aresta de i a j.

Exemplo: Qual a matriz de adjacência do grafo a seguir?



FORONI

27/04/2016

R.

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

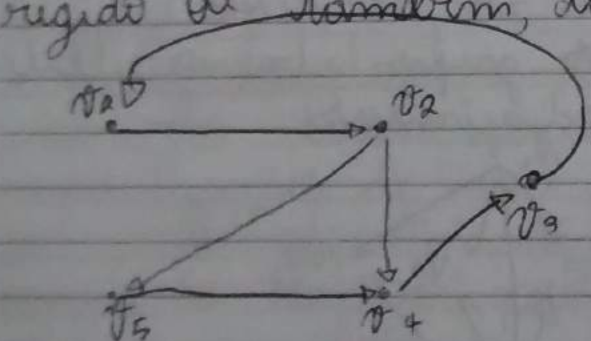
Matriz de adjacência.

M é uma matriz simétrica.

$A_{ij} = {}_{ji}$

- SE O GRAFO FOR DIRECIONADO $M[i,j]$ DEVE INDICAR OU NÃO A PRESENÇA DE UMA ARESTA DIVERGENTE DE i E CONVERGENTE EM j, OU $M_{n \times m}(i,j)$ SEJA, $i \to j$

Qual a matriz de adjacência do grafo dirigido ou ~~também~~, do digrafo a seguir?



*CASO A MATRIZ TIVESSE VALORES ATRIBUÍDOS, TERÍAMOS QUE ATRIBUIR TAIS VALORES NO MESMO.

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Matriz de adjacência

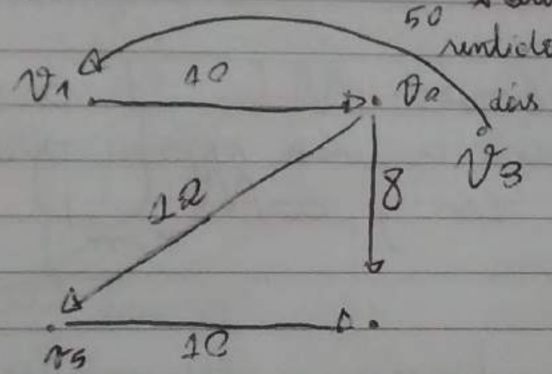
M matriz assimétrica.

27/04/2016

- Se o grafo for valorado
- M [i, j] deve conter o peso associado com a aresta
- Se não existir uma aresta entre i e j, então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como peso (com o valor zero ou peso negativo, por exemplo)

* Quando não for direcionado será simétrica

Qual a matriz de adjacência do grafo direcionado e valorado a seguir? Suponha que o grafo represente a distância em Km entre cidades



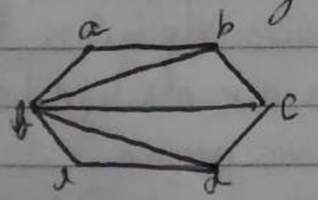
* Quando a flecha não possui sentido ela indica dois valores.

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 12 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

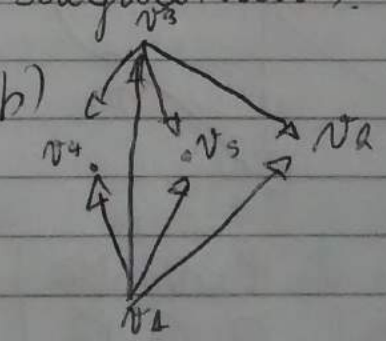
* Se for direcionado pode ser simétrica ou não

Exercício: Represente os grafos abaixo utilizando matrizes de adjacências.

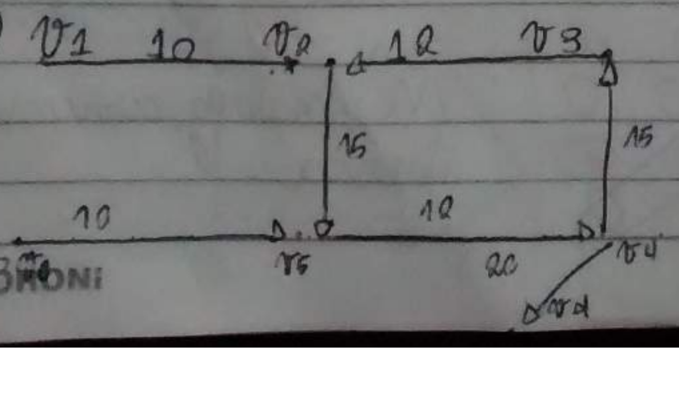
a)



b)



c)



27/04/2016

1

e e), então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como peso (como o valor 0 ou negativo, por exemplo).

$V(G) \rightleftarrows V(H)$

Isomorfismo

Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção de f de V(G) em V(H) tal que dois vértices v, w são adjacentes em G se e somente se f(v) e f(w) são adjacentes em H.

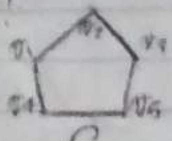
Dois grafos G e H são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.

Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar todas as ~~[illegible]~~ bijeções de V(G) em V(H) se cada um dos grafos tem n vértices esse algoritmo consome tempo proporcional a n! Como n! cresce explosivamente com esse algoritmo é decididamente insatisfatório na prática. Infelizmente não se conhece um algoritmo substancialmente melhor.

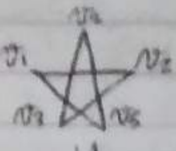
27/04/2016

Exemplo: Os grafos G e H abaixo são isomorfos?

a)



G



H

. Se reordenarmos os des mesmos grafos, veremos que os mesmos são iguais. Mesmo he vendo uma intersecção no grafo H.

$f(v_1) = w_1$
$f(v_2) = w_2$
$f(v_3) = w_3$
$f(v_4) = w_4$
$f(v_5) = w_5$

Se f desses vértices é adjacente em G se a F é adjacente em H.

f é um isomorfismo de G em H. G e H são isomorfos.

Subgrafo:

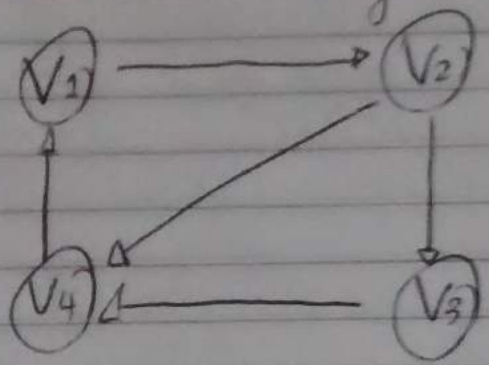
O que é?
R: Um grafo tirado de um grafo maior, em outras palavras, tira-se uma estrutura de um grafo maior, como se fosse um subconjunto do mesmo.

Definição Formal de Subgrafo?
- Subgrafo
Um grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ é subgrafo de $G = (V, E)$ se $V_1 \subset V$ e E_1 é o conjunto de todos os arcos de G com extremos nos

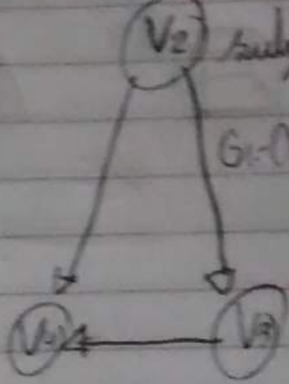
FORONI

27/04/2016

vertices do conjunto V_1



Grafo $G=(V,E)$



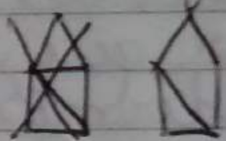
subgrafo

$G_1=(V_1,E_1)$

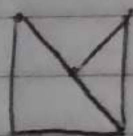
Exercícios:

① Qual dos grafos não são isomorfos aos outros e por quê?

a) 

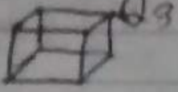
b) 

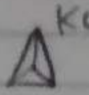
c) 

d) 

27/04/2016

2) ENCONTRE A MATRIZ DE ADJACÊNCIA DE Q_3 E K_4

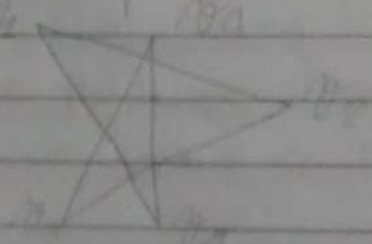


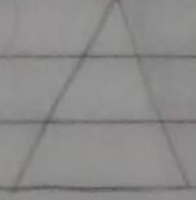


Grafo euleriano:

Um grafo G é Euleriano se existe um caminho fechado que passa por todos os vértices e arestas de G. Informalmente, podemos dizer que um grafo G é euleriano se pudermos desenhar uma representação gráfica de G sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

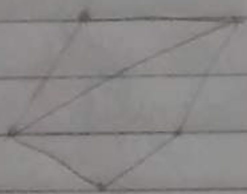
Exemplo: Os grafos abaixo são eulerianos





[illegible]

[illegible]

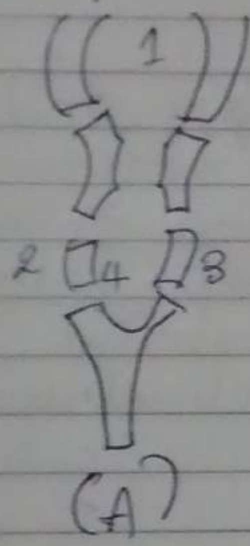


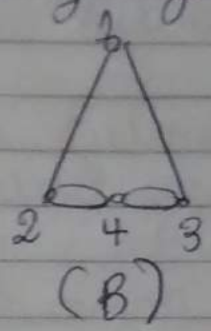
[illegible]

04/05/2016

O problema das pontes de Konigsberg

O primeiro documento sobre teoria dos grafos data de 1736, sendo autor Leonard Euler. Neste documento é feita a apresentação geral da teoria e incluída a ~~discussão~~ discussão do desconhecido, digo, conhecido problema das pontes de Konigsberg





A figura "A" representa o rio pregel com duas ilhas ligadas entre si as margens por um conjunto de 7 pontes.

No grafo (figura B) os vértices representam as ilhas e duas margens, as arestas representam as pontes referidas.

O velho problema analisado por Euler era o seguinte:

"será possível iniciar um percurso

04/05/2016

em qualquer das margens ou ilhas, atra vessar todas as pontes uma única vez e regressar ao ponto de partida?

Em teoria dos grafos trata-se de calcular um ciclo simples que inclua todas as arestas e vértices denominado "ciclo de Euler". Para demonstrar que cada percurso não era possível, Euler começou por admiti-lo como possível dizendo que para atingir qualquer vértice utiliza-se uma aresta (ponte) e para continuar o percurso era necessário utilizar ou aresta (ponte) diferente da anterior, resultando assim que a passagem em qualquer dos vértices implica o uso de um número par de arestas (pontes) diferentes.

O vértice nº 1 do grafo (ver figura) tem grau 3, pelo que quando atingido e abandonado ficaria uma ponte não atravessada. O que contradiz a hipótese inicialmente avançada

Aliás o mesmo se passa com todos os vértices pois tem grau ímpar

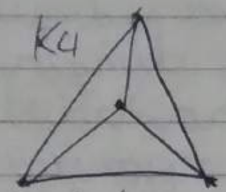
Obs: Um grafo completo com "n" vértice tem Ciclo de Euler, se e somente se, "n é impar"

09/05/2016

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sab | Dom

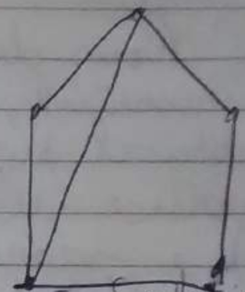
Se o grafo for completo, deve-se analisar a quantidade de vértices, se a quantidade de vértices for par ele não é euleriano, mas tem grau ímpar. Se a quantidade de vértices for ímpar, devido ao seu grau par, ele é euleriano. Podemos repetir vértice, mas não aresta.

Exemplo:

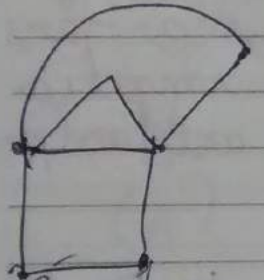


NÃO É EULERIANO

É EULERIANO



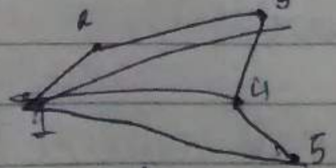
NÃO É EULERIANO.



É EULERIANO.

GRAFOS HAMILTONIANO.

É um grafo que possui caminho ou ciclo hamiltoniano. Um caminho hamiltoniano é aquele que contém cada nó do grafo exatamente uma vez. A figura



apresenta o exemplo de grafo hamiltoniano, pois o mesmo que tem o ciclo 1, 2, 3, 4, 5, 1.

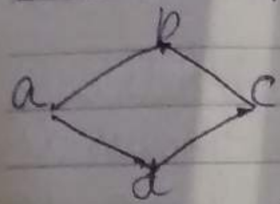
FORONI

04/05/2010

Distâncias e caminhos mínimos: Em diversas situações, deseja-se calcular a distância ou o comprimento do caminho entre dois nós. O cômputo de distância deve respeitar algumas restrições, como por exemplo, ser associada a números não negativos, além de satisfazer as propriedades

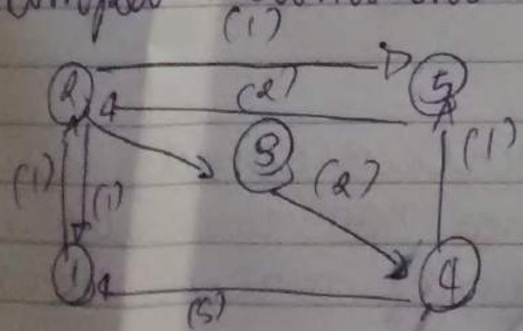
a) $d(u,v) \geq 0$ e $d(u,v) = 0 \Rightarrow u = v$
b) $d(u,v) = d(v,u)$
c) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
onde u, v, w são nós de um grafo.

Exemplo: A FIGURA ABAIXO



$$\text{Dist} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo: Caminho de custo mínimo



O caminho mínimo de 1 a 5 tem custo 2, levando a um caminho
$1 \to 2 \to 5$

04/05/2016

Algoritmo de Dykstra

• Um algoritmo eficiente para a obtenção do caminho mínimo em grafos com pesos não negativos, é o chamado algoritmo de Dijkstra
. O chamado, dito, algoritmo pode ser usado, em particular para encontrar um caminho de custo mínimo de um dado vértice a outro, ou a todos os outros vértices.
. O algoritmo de Dykstra, funciona de forma iterativa, passo a passo, como mostrado a seguir.
A entrada é a matriz de adjacência do grafo.

1- Como o primeiro passo é atribuída uma distância para todos os pares de vértices. De início é atribuída uma distância infinita para todos, menos para o vértice de origem

2- marque todos os vértices como visitados e defina os vértices como não visitados e defina o vértice inicial como vértice corrente.

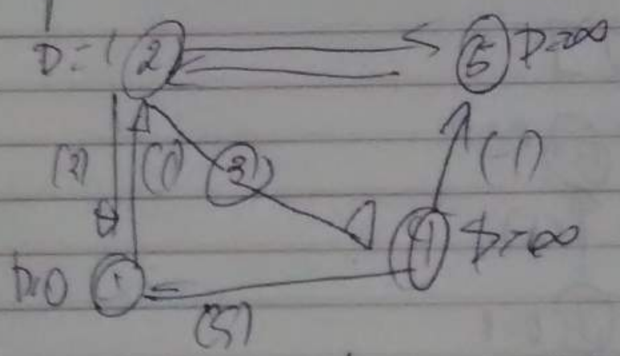
3- Para este vértice, considere todos os vértices vizinhos não visitados e calcule a distância a partir do vértice. Se a distância for menor do que a definida anteriormente, substituir a distância

04/05/2016

4. Quando todos os vizinhos do vértice corrente forem visitados, marque o visitado, o que fará com que ele não seja mais analisado (sua distância é mínima final)

5 - Eleja o vértice não visitado com a menor distância (a partir do vértice inicial) como vértice corrente e continue a partir do passo 3.

Exemplo:

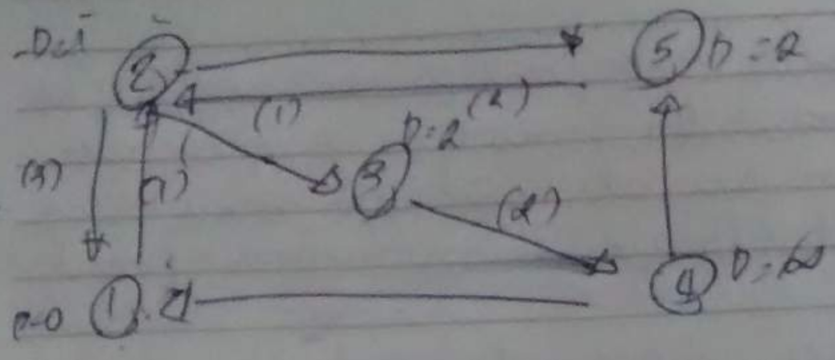


Para o exemplo: o vértice 1 é o vértice origem e o vértice corrente do início do algoritmo.

A distância para seu vizinho (vértice 2) é igual a 1.

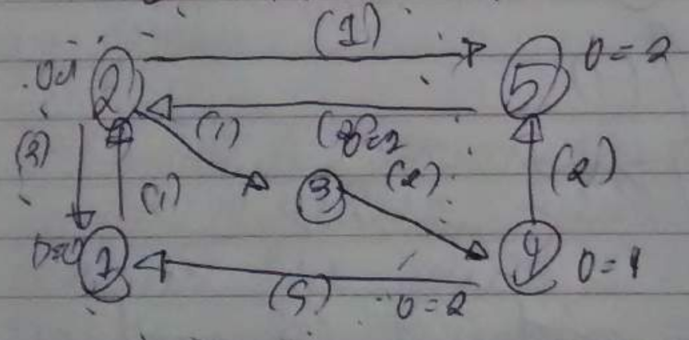
O vértice 2 passa a ser o vértice corrente. A partir dele atinge os vértices 3 e 5, sendo as respectivas distâncias calculadas para 2 (ao invés de infinito) é 2.

04/05/2016



. O vértice 3 é o vértice corrente. A partir dele alcança-se o vértice 4, com distância 4. Neste ponto todos os vértices foram visitados e o vetor de distâncias mínimas a partir do vetor 1 é:

D= [0, 1, 2, 4, 2]



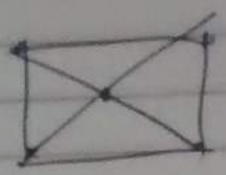
Grafos Planares não possuem intersecções entre as arestas, somente no vértice.

DEFINIÇÃO FORMAL: Um grafo G=(V,E) é planar quando puder ser desenhado em um plano, sem que ocorra o cruzamento de arestas, ou seja, duas ou mais arestas não se interceptam geometricamente exceto nos vértices em que são incidentes.

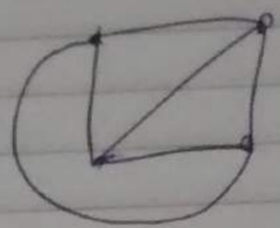
FORONI

08/05/2016

Exemplo.



NÃO É PLANAR



É PLANAR

grafo planar.