UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná
Campus Apucarana

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ – UNESPAR.
Professor Maurício Barbosa

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO

TEORIA ELEMENTAR DA PROBABILIDADE

1. Introdução

O termo probabilidade é usado de modo muito amplo na conversação diária para sugerir um certo grau de incerteza no qual ocorreu no passado, o que ocorrerá no futuro ou o que está ocorrendo no presente.

A idéia de probabilidade desempenha papel importante em muitas situações que envolvam uma tomada de decisão. Suponhamos que um empresário deseja lançar um novo produto no mercado. Ele precisará de informações sobre a probabilidade de sucesso para seu novo produto. Os modelos probabilísticos podem ser úteis em diversas áreas do conhecimento humano, tais como: Administração de Empresas, Economia, Psicologia, Biologia e outros ramos da ciência.

2. Conceitos Básicos

2.1 Experimento Aleatório

Considere os seguintes experimentos:

- E_1. Jogar uma moeda e observar se dá cara ou coroa;
- E_2. Jogar um dado e observar a face voltada para cima;
- E_3. Inspecionar uma lâmpada, buscando determinar se está boa ou se tem defeito;
- E_4. Retirar uma carta de um baralho com 52 cartas e observar o seu naipe;

A análise desses experimentos revela:

a) Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições;
b) Não se conhece um particular valor do experimento "a priori", porém pode-se descrever todos os possíveis resultados – as possibilidades;

2.2 Espaço Amostral

Definição: para cada experimento aleatório E, define-se Espaço Amostral S o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento.

Exemplos:

a) E = jogar um dado e observar o nº da face de cima, então:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, }.
b) E = jogar duas moedas e observar o resultado, então:
S = { (c,c), (c,k), (K,c), (k,k) } em que c = cara e k = coroa.

Observe que sendo S um conjunto, poderá ser finito ou infinito, trataremos apenas dos conjuntos finitos.

2.3 Evento

Definição: evento é um conjunto de resultados do experimento; em termos de conjunto, é um subconjunto de S. Em particular, S e ∅ (conjunto vazio) são eventos; S é dito o evento certo e ∅ o evento impossível. Exemplo:

Seja o experimento E ; jogar um dado e observar o resultado. Então
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Cada subconjunto de S constitui um evento.

A_1 = {ponto 1} ou {1}
A_2 = {ponto menor que 3} ou {1,2}
A_3 = {ponto par} ou {2, 4, 6}
A_4 = {ponto impar} ou {1 ,3, 5}
A_5 = {divisores de 6} ou {1, 2, 3, 6}
A_6 = {dos múltiplos de 1} ou {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A_7 = {dos pares múltiplos de 5} ou ∅

Observação: Se o numero de elementos do espaço amostral for n, então o número de eventos a ele associados é 2^n.

I. Evento Reunião

Chama-se evento reunião de dois eventos A e B, o evento $A \cup B$, formado pelos elementos comuns e não comuns aos eventos A e B. Exemplos:

$A_1 \cup A_2 = \{1,2\}$,
$A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 4, 6\}$,
$A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

II. Evento Intersecção

Chama-se evento intersecção de dois eventos a e B, o evento $A \cap B$ formado pelos elementos comuns aos eventos A e B. Exemplos:

$A_1 \cap A_2 = \{1\}$; $A_3 \cap A_5 = \{2, 6\}$; $A_1 \cap A_3 = \varnothing$

III. Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos, se eles não puderem ocorrer simultaneamente, isto é, $A \cap B = \varnothing$. Exemplos;

A_1 e A_3 são mutuamente exclusivos,
A_3 e A_4 são mutuamente exclusivos,
A_2 e A_3 não são mutuamente exclusivos.

IV. Evento Complementar

Chama-se evento complementar de um evento A, o conjunto $\overline{A}$, constituído pelos elementos de S que não pertencem ao conjunto A. Exemplos:

$\overline{A}_1$ = {2, 3, 4, 5, 6,}
$\overline{A}_3$ = {1, 3, 5}

3. Definição Matemática de Probabilidade

A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis de ocorrer, sendo todos igualmente prováveis. A notação é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$ onde,

$P(A) =$ probabilidade do evento A;

$n(A) =$ número de elementos do evento A;

$n(S) =$ número de elementos do espaço amostral S;

Observação: A probabilidade pode ser representada na forma de fração, número decimal ou em porcentagem.

Exemplos

01) No lançamento de um dado, determine a probabilidade de se obter:
a) o nº 2;
b) um nº par
c) um nº múltiplo de 3

02) Lançando-se simultaneamente duas moedas, qual a probabilidade de ocorrência de duas caras? K = cara e c = coroa

03) Qual a probabilidade de se obter um rei retirado ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas?

04) Qual a probabilidade de sair uma dama ou uma carta de copas, quando retiramos uma carta de um baralho?

05) Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de:
a) a soma ser menor que 4;
b) a soma ser 9;
c) o primeiro resultado ser maior do que o segundo;
d) os pontos obtidos sejam iguais.

06) Um número inteiro é escolhido aleatoriamente entre os números 1, 2, 3, ... , 30. Qual a probabilidade de:
a) o número ser divisível por 5;
b) terminar em 3;
c) ser primo;
d) ser divisível por 6 ou 8.

PRINCIPAIS TEOREMAS

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(S) = 1$
3) $P(\varnothing) = 0$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$ sendo $A \cap B = \varnothing$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
7) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exemplos

01) Seja E: Lançar um Dado.
A= { sair um número 3}
B = { sair um nº par }
C = { sair um nº impar}
Calcular:
a) P (A)
b) P (B)
c) P (C)
d) P $(A \cup B)$
e) P $(A \cap C)$
f) P $(A \cup C)$
g) P $(\bar{A})$

02) Lance um dado e uma moeda.
a) construa o espaço amostral

b) Enumere os seguintes eventos:
A = {coroa, marcado por nº par}
B = {cara, marcado por nº ímpar }
C = {múltiplos de 3}

c) Expresse os seguintes eventos
I) $\overline{B}$
II) A ou B ocorrem
III) B e C ocorrem
IV) $\overline{A \cup B}$

d) Quais dos eventos A, B e C são mutuamente exclusivos?

03) Se P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{3}{5}$ e A e B são mutuamente exclusivos, calcular:

a) P $(\overline{A})$
b) P $(\overline{B})$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A \cup B)$
e) $P(\overline{A \cap B})$

04) Se P(A) = $\frac{4}{7}$, P(B) = $\frac{3}{4}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, calcule $P(A \cup B)$.

05) Se P(A) = $\frac{1}{2}$, P(B) = $\frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcule:

a) $P(A \cup B)$
b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

06) Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Economia e 10 estudam Engenharia e Economia. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) ele estude Economia e Engenharia?
b) Ele estude somente Engenharia?
c) Ele estude somente Economia?
d) Ele não estude Engenharia, nem Economia?
e) Ele estude Engenharia ou Economia?

EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE

01) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos e P(A) = 0,25 e P(B) = 0,5, determinar:

a) $P(A \cup B)$ b) $P\,\overline{(A \cup B)}$ c) $P(\overline{A})$ d) $P\,(\overline{B})$

R: a) 0,75 b) 0,25 c) 0,75 d) 0,5

02) Suponhamos que A e B sejam eventos de um mesmo espaço amostral e que P(A) = 0,4, P(B)= 0,3, e $P(A \cap B)$= 0,1. Determine a probabilidade de cada um dos eventos:

a) $P(A \cup B)$ e) $P\overline{(A \cap B)}$
b) $P\overline{(A \cup B)}$ f) P(A, mas não B)
c) $P(\overline{A})$ g) P(B, mas não A)
d) $P(\overline{B})$ h) P(nem A, nem B)

R: a) 60% b) 40% c) 60% d) 70% e) 90% f) 30% g) 20% h) 40%

03) Se $P(A)$=0,5, $P(A \cap B)$=0,2 e $P(A \cup B)$=0,9, determine $P(B)$. R: 60%

04) Se $P(A \cup B)$=0,8, $P(A)$=0,6 e $P(B)$=0,5, determine $P(A \cap B)$. R: 30%

05) De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de cada um dos eventos abaixo?

a) ocorre dama de copas. R: 1,92%
b) ocorre dama. R: 7,69%
c) ocorre carta de naipe “paus”. R: 25%
d) ocorre dama ou rei ou valete. R: 23,08%
e) ocorre uma carta que não é um rei. R: 92,31%

06) Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade do número escolhido:

a) ser par? R:50%
b) ser primo? R: 40%

07) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade:

a) de a bola ser amarela? R: 55,55%
b) de a bola ser branca ou preta? R: 44,44%
c) da bola não ser branca, nem amarela? R: 33,33%

08) Dois dados são lançados e observados os números das faces de cima. Qual a probabilidade:

a) de ocorrerem números iguais? R: 16,67%
b) de ocorrerem números diferentes? R: 83,33%
c) da soma dos números ser 7? R: 16,67%
d) da soma dos números ser menor ou igual a 12? R: 100%
e) de aparecer número 3 em ao menos um dado? R: 30,56%

09) Numa cidade, 30% dos homens são casados, 40% são solteiros, 20% são desquitados e 10% são viúvos. Um homem é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade;

a) de ele ser solteiro? R: 40%
b) dele não ser casado? R: 70%
c) de ele ser solteiro ou desquitado? R: 60%

10) Um colégio tem 1000 alunos. Destes: 200 estudam matemática, 180 estudam física, 200 estudam química, 20 estudam matemática, física e química50 estudam matemática e física, 50 estudam física e química e 70 estudam somente química. Um aluno do colégio é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de;

a) ele estudar só matemática? R: 7%
b) ele estudar só física? R: 10%
c) ele estudar matemática e química? R: 10%

11) Na parte de higiene de um supermercado, possui uma prateleira de Pasta Dental. A tabela abaixo mostra a disponibilidade nesta prateleira:

	Quantia de pasta dental por tamanho		
Marca	75 g	90 g	120 g
Close-Up	12	10	8
Sorriso	18	12	11
Colgate	22	14	7
Phillips	8	12	6
Total	60	48	32

Um comprador pega uma destas embalagens totalmente ao acaso. Ache a probabilidade de que o produto comprado:

a) Seja Colgate ou Phillips; R:49,29%
b) Seja Close-Up ou de 120 g; R: 38,57%
c) Não seja Phillips; R: 81,43%
d) Não seja de 75g, nem Close-Up.R: 44,29%

12) Um empresário supersticioso, quando necessita viajar, escolhe o modelo de transporte através do lançamento de uma moeda: se sair cara viaja de ônibus, se sair coroa, viaja de avião. Numa semana em que tiver de fazer exatamente 4 viagens, ache a probabilidade de que ele faça:

a) Nenhuma de avião; R: 6,25%
b) Duas de ônibus; R:37,5%

c) Pelo menos uma de avião. R: 93,75%

13) Um trabalhador possui 4 calças (azul, preta, marrom, cinza) e 3 camisas (branca, azul, cinza) que podem ser utilizadas no trabalho. Este trabalhador se veste de forma aleatória. Ache a probabilidade de em um dia utilizar:

a) calça e camisa de mesma cor; R: 16,67%
b) não usar calça marrom; R: 75%
c) usar calça ou camisa azul. R: 50%

14) Para fazer escolha do dia da semana (6 dias úteis) de folga de um funcionário o Diretor de uma empresa joga um dado e a face voltada para cima indicará o dia de folga. Sendo que nesta empresas trabalha um casal (Esposo/Esposa). Em uma semana ache a probabilidade de que, para este casal ocorra a seguinte folga:

a) esposo e esposa no mesmo dia; r: 16,67%
b) esposa antes do esposo; r: 41,67%
c) esposo e esposa em dias seqüenciais. r: 27,78%

15) Para conduzir o destino de um empresa, existem 4 pessoas disponíveis a saber: Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel. Os cargos existentes são: Presidente e Tesoureiro. Se a escolha for feita através de sorteio, ache a probabilidade de que:

a) presidente seja o Alfredo ou a Beatriz; R: 50%
b) tesoureiro não seja mulher; R: 75%
c) Carlos ou o Daniel fique de fora. R: 16,67%

4. PROBABILIDADE CONDICIONAL

4.1 Definição: Probabilidade Condicional é a probabilidade de ocorrer determinado evento sob dada condição, ou seja, para dois eventos quaisquer A e B, sendo P(B) > 0, definimos a *probabilidade condicional de* A, dado que o evento B ocorreu, P(A/B), como sendo:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou ainda,}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B}{n(B)}$$

Exemplos:

1. Um dado é lançado para cima. Qual a probabilidade de sair o número 3, sabendo-se ter ocorrido um número ímpar?

2. Temos 200 alunos matriculados em uma universidade, sendo que 10 homens e 20 mulheres fazem estatística. Calcular a probabilidade de ser mulher dado que é do curso de estatística.

3. Uma família planeja ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 rapazes, dado que a primeira criança que nasceu é rapaz?

4. Dois dados perfeitos são lançados. Qual é a probabilidade de sair soma 8, sendo que ocorreu o 3 no primeiro dado?

5. Um grupo de pessoas está classificado da seguinte maneira:

	Professor	Advogado	Dentista
Homem	60	80	50
Mulher	90	40	30

Considerando: H = { a pessoa é homem }; M = { a pessoa é mulher }; P = { a pessoa é professor}; A = { a pessoa é advogado}; D = { a pessoa é dentista}. Calcule cada uma das probabilidades:

a) P(A/H) =
b) P(P/M) =
c) P(D/H) =
d) P(A/M) =

06. Se A e B são eventos com : $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{1}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, calcule:

a) P(A/B)
b) $P(A/A \cup B)$
c) P(B/A)
d) $P(A \cup B/A)$

07. Se E e F são eventos com $P(E \cap F) = \frac{1}{10}$ e $P(E/F) = \frac{1}{10}$, determine P(F) .

4.2 Teorema do Produto
4.3

Uma conseqüência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Isto é, a probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos [$P(A \cap B)$] é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.

Exemplos:

01. Uma urna (1) contém duas bolas vermelhas e 3 bolas brancas, a urna (2) contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos urna (1) e bola vermelha?

02. Um lote contém 50 peças boas (B) e 10 defeituosas (D). Uma peça é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra peça é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de ambas serem defeituosa?

03. Uma urna contém 7 bolas brancas e 5 pretas. Retiramos 2 bolas da urna sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam brancas?

04. Consideremos um conjunto de 10 frutas, das quais 3 estão estragadas. Escolhendo-se aleatoriamente 2 frutas desse conjunto, determinar a probabilidade de:

a) ambas serem estragadas;
b) pelo menos uma seja estragada.

5. Independência Estatística

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, dizemos que A independe de B se:

P(A/B) = P(A), isto é, A independe de B se a ocorrência de B não interfere a probabilidade de A.

Exemplo:

Seja o experimento lançar dois dados. Seja:

A : sair o número 6 no primeiro dado;
B : sair o número 3 no segundo dado.
Então S = { (1,1);(1,3); . . . ;(6,6)}

B =
A =
A∩B =

Então P(A/B) = P(A), ou seja, a probabilidade de sair 3 no segundo dado não foi interferida pelo fato de sair 6 no primeiro dado, ou ainda, a probabilidade de ocorrer A não dependeu da ocorrência de B.

- Vimos que se P(A/B) = P(A), então também é verdade que P(B/A) = P(B), ou seja, se A independe de B, então B independe de A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = P(B)$$

Assim, se A independe de B, logo B independe de A, então:

P(A∩B) = P(B).P(A/B)
P(A∩B) = P(B).P(A)

Exemplos:

01. Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos:

A : ocorrem pelo menos duas caras;
B : ocorrem resultados iguais nos 3 lançamentos.

Verificar se os eventos são independentes.

02. Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a primeira atingir ao alvo é P(A) = $\frac{1}{3}$ e a probabilidade da segunda atingir o alvo é P(B)= $\frac{2}{3}$. Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo; b) ao menos um atingir o alvo.

03. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Sejam os eventos:

A : a carta é de copas;
B : a carta é um rei;
C : a carta é um rei ou uma dama.

Quais dos pares de eventos são independentes?

a) A e B;
b) A e C;
c) B e C.

04. As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são,
P(A) = $\frac{1}{3}$ e P(B) = $\frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) Ambos resolvam o problema?
b) Ao menos um resolva o problema?
c) Nenhum resolva o problema?
d) A resolva o problema mas B não?
e) B resolva o problema mas A não?

05. A probabilidade de um certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de uma certa data é 0,4 e de sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de :

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?
b) Ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

<u>Exercícios Propostos:</u>

01. Considere uma urna contendo 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. Retire duas bolas da urna, sem reposição.

a) Obtenha os resultados possíveis e as respectivas probabilidades;
b) Mesmo problema, para extrações com reposição.

02. No problema anterior, calcule as probabilidades dos eventos:

a) bola preta na primeira e segunda extração;
b) bola preta na segunda extração;
c) bola vermelha na primeira extração.

03. A probabilidade de que A resolva um problema é de 2/3 e a probabilidade de que B resolva é de ¾. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade do problema ser resolvido? (91,67%)

04. Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada; 30% das mulheres escolhem carne; 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H : freguês é homem   A : freguês prefere salada
M : freguês é mulher   B : freguês prefere carne.

Calcular:

a) P(H), P(A/H), P(B/M); (0,75; 0,2; 0,3)
b) P(A∩H), P(A∪H); (0,15; 0925)
c) P(M/A) (0,5385)

05. Se A e B são eventos com $P(A)=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{1}{2}$ e $\mathrm{P(A\cap B)}=\frac{3}{10}$, determine:

a) a probabilidade de A dado B; (0,6)
b) a probabilidade de B dado A; (0,5)
c) a probabilidade de A dado A ∪ B; (0,75)
d) a probabilidade de A ∪ B dado A. (1)

06. Um levantamento revela as seguintes informações sobre um grupo de pessoas:

	Gosta de música	Gosta de TV	Gosta de cinema
Homem	50	40	30
Mulher	30	60	40

Considerando: H: a pessoa é homem; M: a pessoa é mulher; A: a pessoa gosta de música; B: a pessoa gosta de TV e C: a pessoa gosta de cinema, determine:

a) P(M/C); (57,14%)
b) P(B/M); (46,15%)
c) P(H/A); (62,5%)
d) P(A/H); (41,67%)
e) P(C/H); (25%)

07. Uma família planeja ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha exatamente 2 meninas, dado que a primeira criança que nasceu é menina? (0,5)

08. Numa cidade, 20% da população são mulheres que não podem votar (menores de 18 anos). Se 60% da população são mulheres, qual é a probabilidade de que uma mulher selecionada ao acaso não possa votar? (33,33%)

09. Se A e B são eventos independentes com P(A) = 0,2 e P(B) = 0,4 , determine:

a) $P(A \cap B)$; (0,08)   b) $P(A \cup B)$; (0,52)

10. Se A e B são eventos independentes com P(A) = 0,5 e $P(A \cap B) = 0,3$, determine P(B). (60%)

11. Se A e B são eventos independentes com P(B) = 0,3 e $P(A \cup B) = 0,6$, determine P(A). (42,86%)

12. Se P(A) = 0,3 , P(B) = 0,2 e $P(A \cup B) = 0,4$, determine P(A/B). (50%)

13. Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 pretas. Outra urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola também no acaso. Qual a probabilidade de observarmos:

a) urna I e bola vermelha? (21,43%)
b) urna I e bola preta? (28,57%)
c) urna II e bola vermelha? (37,5%)
d) urna II e bola preta? (12,5%)

14. Uma urna tem 8 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra é escolhida, também ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a 1ª bola ser vermelha e a 2ª branca? (11,43%)
b) a 1ª bola ser branca e a 2ª vermelha? (11,43%)
c) a 1ª e a 2ª serem vermelhas? (26,07%)

15. A urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 2 bolas vermelhas e 6 brancas e a urna III tem 5 bolas vermelhas, 2 brancas e 3 amarelas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola, também ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser:

a) vermelha? (39,29%)
b) branca? (50,72%)
c) amarela? (10%)

16. Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola, também ao acaso.

a) Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha? (21,43%)
b) Qual a probabilidade de observarmos bola vermelha? (58,93%)
c) Se a bola observada foi vermelha, qual a probabilidade que tenha vindo da urna I? (36,37%)

PARTE 03
VARIÁVEL ALEATÓRIA

1. INTRODUÇÃO

Existem experimentos aleatórios pelas quais o espaço amostral não se caracteriza pôr números, e em muitas vezes deseja-se trabalhar com dados numéricos. Para que isto se torne possível, existem as variáveis aleatórias (v.a.).

2. DEFINIÇÃO

Sejam E um experimento e S o espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real X(s) é denominado variável aleatória.

3. ESPAÇO AMOSTRAL DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

É o conjunto formado por todos os valores possíveis desta variável aleatória.

EXEMPLOS:

01. No experimento "jogar uma moeda 3 vezes consecutivas" tem-se que o seu espaço amostral é:

S = { ccc ; cck ; ckc ; kcc ; ckk ; kck ; kkc ; kkk } que não é numérico.

a) Seja X_1 a v.a.: associada ao experimento:
   X_1: número de caras ocorridas.
   $X_1 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

b) Seja X_2 a v.a.: diferença entre o número de caras e de coroas;
   $X_2 = \{ -3, -1, 1, 3 \}$

c) Seja X_3 a v.a.: o tempo decorrido entre 0 1º e o 3º lançamento;
   $X_3 = \{ x \in \Re \,/\, x > 0 \}$

4. TIPOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

DISCRETA: seu espaço amostral contém uma quantidade enumerável de resultados, isto é, se existe uma relação com o conjunto dos inteiros, como nos exemplos X_1 e X_2.

CONTÍNUA: quando o seu espaço amostral é representado dentro de um intervalo de valores, como no exemplo X_3.

4.1 Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta

Exemplo .01 No lançamento de uma moeda 3 vezes consecutivas, seja X a v.a. "número de coroas ocorridas". Determine as seguintes probabilidades:(c=cara; k=coroa)

S = { ccc ; cck ; ckc ; kcc ; ckk ; kck ; kkc ; kkk }

a) P(x = 2) ; A = { ckk ; kck ; kkc } $\therefore$ P(x = 2) = 3/8
b) P(x = 0) ; B = { ccc } $\therefore$ P(x = 0) = 1/8
c) P(x $\leq$ 2) ; C = { ccc ; cck ; ckc ; kcc ; ckk ; kck ; kkc } $\therefore$ P(x $\leq$ 2) = 7/8.

4.2 Distribuição de Probabilidade Discreta

Definição: é o conjunto formado por todos os pares (x_i ; $p(x_i)$), onde x_i representa cada valor desta variável e p (x_i) a sua respectiva probabilidade; ao qual pode ser apresentada sob a forma de uma tabela.

Exemplos:

Ex.01. Encontre a distribuição de probabilidade da v.a. X igual ao número de caras obtidas no experimento lançar duas moedas.

S	X (nº de caras)	P(X)
(k,k)	0	¼
(c,k)	1	1/4
(k,c)	1	1/4
(c,c)	2	¼
		ΣP(X) = 1

Ex.02 Na seção de eletrodomésticos de um supermercado tem 6 lâmpadas perfeitas e 4 defeituosas. Um freguês ao comprar uma lâmpada testa uma a uma até encontrar uma perfeita. Se X é a v.a. (nº de testes efetuados) e o experimento E testar lâmpada até obter uma perfeita.

a) Construa a distribuição de probabilidade de X;
b) Calcule a probabilidade do número de teste ser inferior a 3;
c) Calcule a probabilidade do número de teste ser maior ou igual a 2 e menor ou gual a 3.

a)

S	X (Nº de testes)	P(X)
B	1	0,6
DB	2	0,2667
DDB	3	0,1
DDDB	4	0,0286
DDDDB	5	0,0048
		ΣP(X) = 1

b) $P(X < 3) = P(1) + P(2) = 0,6 + 0,2667 = 0,8667$

c) $P(2 \leq X \leq 3) = P(2) + P(3) = 0,2667 + 0,1 = 0,3667$

4.3 Medidas de uma Variável Aleatória Discreta

Tal qual em Estatística Descritiva, quando sem tem uma variável aleatória se faz necessário encontrar parâmetros representativos desta variável aleatória.

As principais medidas são:

a) Média:

Seja X uma variável aleatória discreta cuja distribuição de probabilidade é dada pela tabela:

X_i	X_1	X_2	...	X_n
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$

Denomina-se média de X ao número:

$\mu_x = X_1 P(x_1) + X_2 P(x_2) + ... + X_n P(x_n)$ ou

$\mu_x = \Sigma X_i P(x_i)$

Tendo em vista que uma v.a. envolve probabilidade, a média é denominada valor esperado de X, e é representado por:

$$\boxed{\mu_x = E(X), \text{ então } \mathbf{E(X) = \Sigma X_i P(x_i)}}$$

b) Variância:

A variância da variável aleatória X é o número dado por:

$$\sigma_x^2 = \Sigma \left[X_i - E(X)\right]^2 .P(X_i)$$

c) Desvio Padrão:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Ex.01 A tabela abaixo mostra o número de acidentes (X) de um mesmo veículo e suas probabilidades de ocorrência, por ano:

X_i	0	1	2	3
$P(X_i)$	0,7	0,18	0,08	0,04

Encontre:

a) O número médio de acidentes em um ano por veículo:
b) A variância do número de acidentes em um ano por veículo;
c) O desvio padrão;

Ex.02 O número de ligações recebidas na empresa está na razão de 1 interurbano para 4 urbanos. Em um intervalo de tempo que receber 3 ligações, seja X a v.a. “nº de ligações urbanas”. Pede-se:

a) construa a distribuição de probabilidade X;
b) ache a média de X;
c) ache a variância e o desvio padrão de X;

Resolução:
Considerando U = ligação urbana e I = ligação interurbana, temos:

P(U) = 4/5 e P(I) = 1/5

E = receber 3 ligações telefônicas

(a)

S	X(nº de ligações urbanas)	P(X)
I I I	0	1/125
U I I	1	4/125
I U I	1	4/125
I I U	1	4/125
U U I	2	16/125
U I U	2	16/125
I U U	2	16/125
U U U	3	64/125
		ΣP(X) = 1

Ou ainda simplificando, temos a seguinte distribuição de probabilidade:

X_i	0	1	2	3
$P(X_i)$	0,008	0,096	0,334	0,512

(b) $E(X) = \Sigma X_i P(x_i)$

E(X) = 0.0,008 + 1.0,096 + 2.0,384 + 3.0,512
E(X) = 2,4 ligações urbanas.

(c) $\sigma_x^2 = \Sigma\left[X_i - E(X)\right]^2 .P(X_i)$

= 0,48 ligações urbanas ao quadrado

D.P. = 0,69 ligações urbanas

Ex. 03 Um digitador de computação comete erros em 30% das páginas digitadas. Em um concurso ele é aprovado se digita um folha inteira sem cometer erros, sendo permitido no máximo 3 tentativas. Se X é a variável aleatória: nº de tentativas por um candidato. Ache:

a) A distribuição de probabilidade de X;

b) A média de X;
c) A variância de X.

Resolução:

E = { digitar o texto sem erros }
X = { número de tentativas }
A = digitar sem erros, logo P(A) = 0,7
B = cometer erros, logo P(B) = 0,3
X = 1 (primeira tentativa)

(a) P(1) = A = 0,7
X = 2 (segunda tentativa)
P (2) = BA = 0,3 . 0,7 = 0,21
X = 3 (terceira tentativa)
P(3) = BBA + BBB = 0,3 . 0,3 . 0,7 + 0,3 . 0,3 . 0,3 = 0,09

X_i	1	2	3
$P(X_i)$	0,7	0,21	0,09

(b) $E(X) = \Sigma X_i P(x_i)$
$E(X) = 1 . 0,7 + 2 . 0,21 + 3 . 0,09 = 1,39$ tentativas

(c) Var. = 0,4179 tentativas ao quadrado.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Ao jogar uma moeda 4 vezes consecutivas, seja X a v.a. "número de caras ocorridas". Determine:

a) A distribuição de probabilidade de X;
b) A média de X;
c) A variância e o desvio padrão de X.

02. Em uma classe há 6 homens e 3 mulheres. Sorteados 3 alunos ao acaso e sem reposição, considerando X uma variável aleatória que representa o número de homens sorteados. Pede-se:

a) A distribuição de probabilidade;
b) A média;
c) O desvio padrão.

03. No lançamento simultâneo de dois dados, considere as seguintes variáveis aleatórias:

X = número de pontos obtidos no primeiro dado.
Y = número de pontos obtidos no segundo dado.
Construir a distribuição de probabilidade através de uma tabela das seguintes variáveis:

I) W = X – Y

II) A = 2Y
III) Z = XY
IV) B = máximo de (X,Y)

04. Determine a função de probabilidade de meninos e meninas em famílias com três filhos, admitindo iguais as probabilidades de menino e menina.

05. Em uma população sabe-se que 30% das pessoas apresentam uma certa doença. Três pessoas são escolhidas ao acaso. Seja X a v.a. definida como o número de pessoas doentes que aparecem na amostra. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X, identificando o espaço amostral do experimento.

06. Uma urna contém 5 bolas brancas e 7 azuis. Ao retirar três bolas desta urna, seja Y a v.a. "número de bolas brancas ocorridas". Determine as probabilidades:

a) P(y = 1) b) P(y = 2) c) P(y $>$ 1)

5. MODELO DE DISTRIBUIÇÂO DISCRETA DE PROBABILIDADE

5.1 Distribuição Binomial

A distribuição binomial é utilizada para determinar a probabilidade de certo número de sucessos num conjunto de observações. Se p é a probabilidade de um evento ocorrer em uma única tentativa (denominada probabilidade de um sucesso) e q = 1 – p é a probabilidade de que o evento não ocorra em qualquer tentativa única (denominada probabilidade de um insucesso), então a probabilidade do evento ocorrer exatamente x vezes, em n tentativas (isto é, de que haja x sucessos e n – x insucessos), é dada por:

$P(x) = \binom{n}{x} p^x . q^{n-x}$, em que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ e p=1 – q ,

onde x = 0, 1, 2, ..., n e n! = n.(n – 1) (n – 2) , ... , 3.2.1

Exemplos:

01. Lançando 5 vezes uma moeda, qual a probabilidade de se obter "cara" 4 vezes?

n = 5 ; x = 4 ; p = ½; q = 1 – ½ = ½

$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$; $P(x=4) = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32} = 15{,}63\%$

Concluímos que ao lançarmos uma moeda 5 vezes, a probabilidade de se obter cara 4 vezes é de 15,63%.

02. Uma máquina produz 20% de parafusos defeituosos. Qual a probabilidade de, em 4 parafusos, sorteados ao acaso, haver um defeituoso?

n = 4 ; x = 1 ; p = 0,2; q = 1 – 0,2 = 0,8

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4\,; \quad P(x=1) = 4.0{,}2^{1}0{,}8^{3} = 0{,}4096 = 40{,}96\%$$

Conclui-se que em 4 parafusos a probabilidade de se obter um defeituoso é de 40,96%.

03. Um teste é constituído de 10 questões com 4 alternativas cada, das quais apenas uma é a correta. Um aluno responde aleatoriamente ao teste. Qual a probabilidade de acertar 6 questões?

n = 10 ; x = 6 ; p = 1/4; q = 1 – 1/4 = ¾

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210\;;\quad P(x=6) = 210.\left(\frac{1}{4}\right)^{.6}.\left(\frac{3}{4}\right)^{10-6} = 0{,}01622 = 1{,}62\%$$

04. Qual a probabilidade de numa família com 5 filhos haver 3 meninas?
n = 5 ; x = 3 ; p = 1/2; q = 1 – 1/2 = 1/2

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10\;;\quad P(x=3) = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$$

Algumas Propriedades da Distribuição Binomial:

Média	μ= n.p
Variância	$\sigma^2 = n.p.q$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{n.p.q}$

Exemplo:

Uma máquina produz parafusos defeituosos. A probabilidade de parafusos defeituosos é de 1%. Qual é a média e o desvio padrão de parafusos defeituosos, sendo que a produção diária é de 400 parafusos?
N = 400; p = 1% = 0,01 ; q = 0,99
μ= n.p $\Rightarrow$ μ= 400 . 0,01 = 4 parafusos

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{400.0{,}01.0{,}99} = 1{,}9$$ Parafusos
$\Rightarrow$

A média de parafusos defeituosos diários é de 4 parafusos, com desvio padrão de 1,9 parafusos.

Exercícios Propostos:

01. Por um longo período de tempo, observou-se que um atirador podia alcançar um alvo com uma única tentativa, com probabilidade de 0,8. Se ele atirar 4 vezes nesse alvo, qual é a probabilidade de ele atingir o alvo precisamente duas vezes ?(15,36)

02. Uma prova de estatística é constituída de 5 testes com 5 alternativas cada, das quais apenas uma é a correta. Qual a probabilidade de um aluno, respondendo aleatoriamente ao teste, acertar 3 questões?(5,12)

03. Numa família de 4 filhos, qual a probabilidade de 3 meninos?(25)

04. Um time A tem 2/3 de probabilidade de vitória sempre que joga. Se A jogar 5 partidas, qual a probabilidade de a vencer ao menos uma partida?(99,59)

05. A probabilidade de um atirador acertar um alvo é de 0,6. Qual a probabilidade de acertar 2 em 3 tiros?(43,2)

06. Em um grande lote, sabe-se que 10% das peças são defeituosas. Qual é a probabilidade de, ao se retirarem 6 peças ao acaso:

a) uma ser defeituosa? (0,3543)
b) no máximo uma ser defeituosa? (0,8857)
c) Pelo menos duas serem defeituosas? (0,1143)

07. Os produtos de uma empresa sofrem inspeção de qualidade, através de uma mostra com 12 peças, antes de serem enviados aos consumidores, podendo ser classificados em A (de ótima qualidade), B (bons) e C (de 2ª categoria). Se 70% de um grande lote forem do tipo A, 20% forem do tipo B e o restante for do tipo C, qual a probabilidade de que a amostra apresente no máximo 3 peças do tipo B ou C? (0,4925)

08. Sabe-se que 1% dos produtos fabricados por uma empresa apresentam problemas de qualidade. Dois clientes encomendam um grande lote cada um, mas as remessas têm que passar pela inspeção de qualidade no recebimento. O cliente A seleciona ao acaso 10 produtos e o lote é aceito se não existir nenhuma peça com problema de qualidade. O cliente B toma uma amostra com 20 produtos e aceita o lote se no máximo 1 peça apresentar problemas de qualidade. Qual a probabilidade dos dois lotes serem aceitos pelos clientes? (0,8891)

09. Para este mês, está prevista a chegada de 3 navios em um determinado porto. Dados históricos mostram que 60% dos navios costumam atrasar. Construir a distribuição de probabilidade para a variável aleatória X = número de navios atrasados neste mês.

10. Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 10 funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:
a) exatamente 7 funcionários aumentarem a produtividade;(0,201326)
b) não mais do que 8 funcionários aumentarem a produtividade.(0,625)

11. Na manufatura de certo artigo, é sabido que 1 entre 10 dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho 4 contenha:

a) nenhum defeituoso? (0,6561)
b) Exatamente um defeituoso? (0,2916)
c) Exatamente dois defeituosos? (0,0486)
d) Não mais do que dois defeituosos? (0,9963)

12. Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, 2 defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia? (94,18%)

13. Qual a média e o desvio padrão do número de caras em 250 lançamentos de uma moeda? (125; 7,9057)

PARTE 04

Modelos De Distribuição Contínua

01. Definição

As variáveis aleatórias contínuas são aquelas que podem assumir infinitos valores num intervalo finito. Seja, por exemplo, a variável altura de pessoas. No intervalo 1,60m a 1,90m existe uma infinidade de valores da variável, isto é, o conjunto universo da variável possui infinitos elementos.

Desta forma, não se pode associar uma probabilidade a cada valor da variável, pois se aplicar à fórmula Matemática de probabilidade a determinado valor da variável, essa probabilidade será nula.

Se A é o evento que representa a ocorrência de determinado valor da variável, então: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

Como $n(S) = \infty \Longrightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{\infty} = 0$

Neste caso utiliza-se de uma função matemática que mede o grau de concentração de resultados ao executar este experimento, e esta função recebe o nome de Função de Densidade de Probabilidade. Qualquer resultado que se deseja obter, aqui se utiliza um operador matemático denominado integral. Assim sendo os resultados aqui obtidos não serão demonstrados.

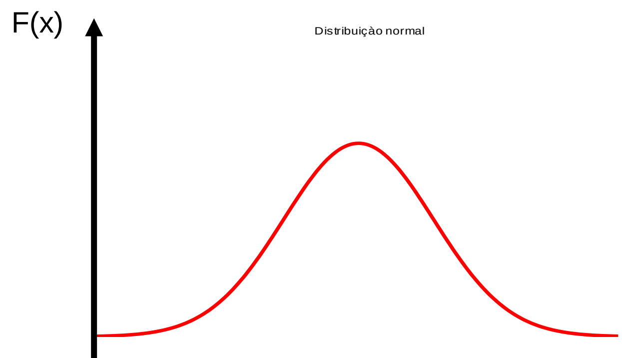
2. DISTRIBUIÇÃO NORMAL

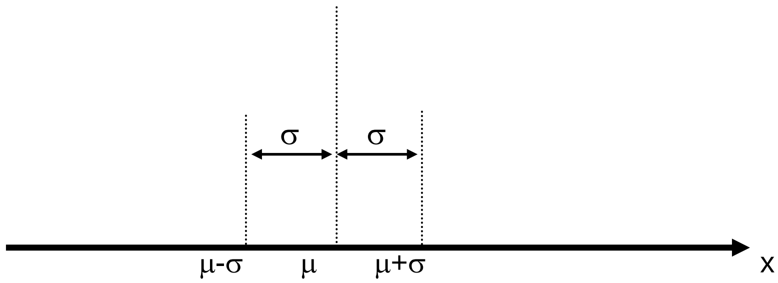
É uma das mais importantes distribuições de probabilidade, sendo aplicada em inúmeros fenômenos e constantemente utilizada para o desenvolvimento teórico da inferência estatística. É também conhecida como distribuição de Gauss, Laplace ou Laplace-Gauss.

Seja X uma variável contínua. X terá distribuição normal se:

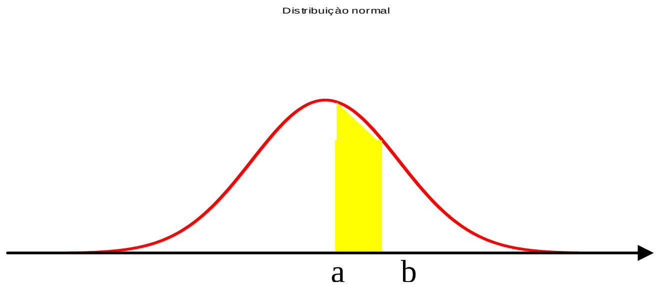
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ,. -\infty < x < \infty$$

em que os parâmetros μ e σ^2 são respectivamente sua média e variância.

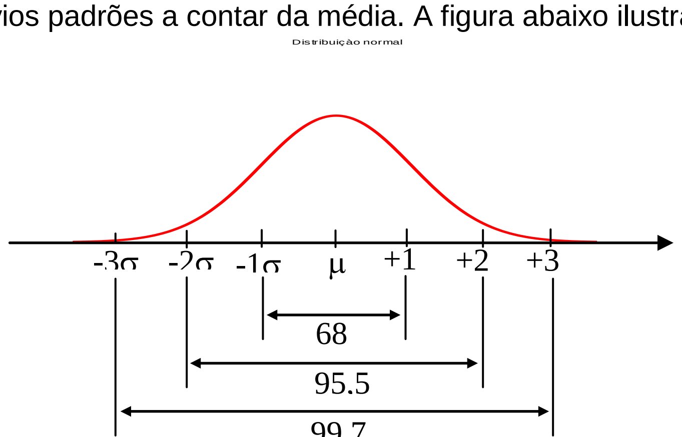




A probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir um valor no intervalo de a e b é igual à área sob a curva da sua função de densidade de probabilidade entre esses pontos a e b.



Se uma variável aleatória tem distribuição normal, cerca de 68% de seus valores cairá no intervalo de um desvio padrão a contar de cada lado da média; cerca de 95,5% no intervalo de dois desvios padrões a contar da média, e cerca de 99,7% dentro de três desvios padrões a contar da média. A figura abaixo ilustra a idéia.



Em resumo, eis as características das curvas normais:

1. A curva normal tem forma de sino.
2. É simétrica em relação à média.
3. Prolonga-se de -∞ a +∞.
4. Cada distribuição normal fica completamente especificada por sua média e seu desvio padrão; há uma distribuição normal distinta para cada combinação de média e desvio padrão.
5. A área total sob a curva normal é considerada como 100%.
6. A área sob a curva entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre esses dois pontos.
7. Como há um número ilimitado de valores no intervalo de -∞ a +∞, a probabilidade de uma variável aleatória distribuída normalmente tomar exatamente determinado valor é aproximadamente zero. Assim, as probabilidades se referem sempre a intervalos de valores.

8. A área sob a curva entre a média e um ponto arbitrário é função do número de desvios padrão entre a média e aquele ponto.

Para o cálculo das probabilidades, surgem dois grandes problemas: primeiro, para a integração de f(x), pois para o cálculo é necessário o desenvolvimento em séries, segundo, seria a elaboração de uma tabela de probabilidade, pois f(x) depende de dois parâmetros, fato este que acarretaria um grande trabalho para tabelar essas probabilidade considerando-se as várias combinações de as várias combinações de μ e σ^2.

Os problemas foram solucionados por meio de uma mudança de variável obtendo-se, assim, a distribuição normal padronizada ou reduzida.

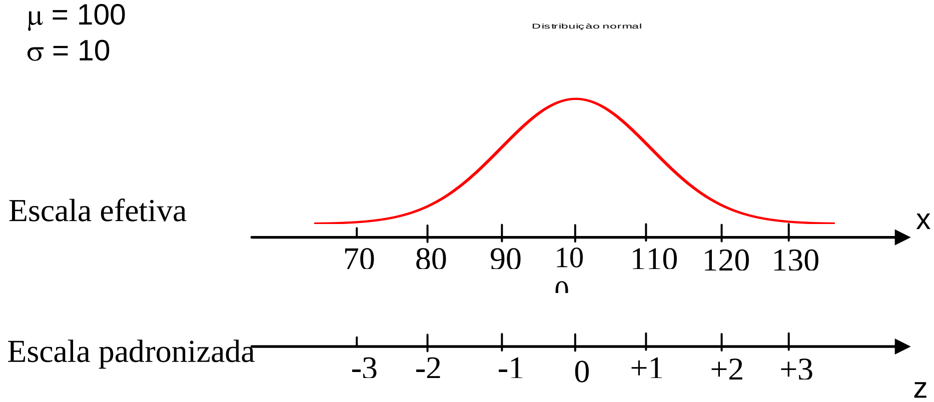
VARIÁVEL NORMAL PADRONIZADA

Com o objetivo de facilitar a obtenção de determinadas áreas sob uma curva normal, podemos fazer uma transformação na variável, levando-a para uma distribuição normal com média 0(zero) e desvio padrão 1(um), também conhecida como distribuição normal padrão.

Para que um dado valor x, de uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, se transforme num valor z da distribuição normal padrão, basta fazer a seguinte operação:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

* Comparação entre a escala efetiva e a padronizada
μ = 100
σ = 10

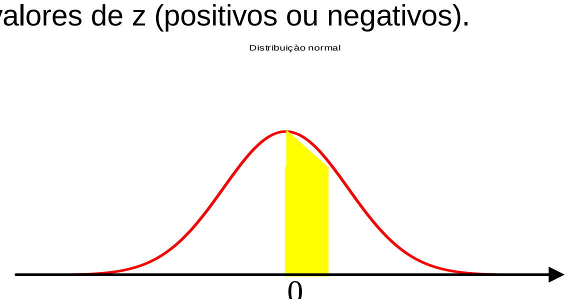


O valor Z é conhecido como valor padronizado. Ele fornece uma medida relativa do valor x, em termos da distribuição da variável aleatória em estudo.

<u>Uso da tabela de Distribuição Normal Padronizada</u>

Há vários tipos de tabelas que oferecem as áreas (probabilidades) sob a curva normal padrão. O tipo mais freqüente é a tabela de Faixa Central.

A tabela de Faixa Central dá a área sob a curva normal padrão entre z = 0 e qualquer valor positivo de z. A simetria em torno de z = 0 permite obter a área entre quaisquer valores de z (positivos ou negativos).



z

A tabela oferece a área entre 0 e z_0 ou $P(0 \leq z \leq z_0)$

Exemplos:

Determine a probabilidade quando se conhece Z.

01) Se Z~N(0,1), determine as seguintes probabilidades.
a) $P(0 \leq z \leq 1{,}23)$
b) $P(z > 1{,}47)$
c) $P(-0{,}83 \leq z < 1{,}23)$
d) $P(z \leq -1{,}36$ ou $z > 1{,}16)$
e) $P(0{,}81 < z < 1{,}94)$
f) $P(z > -1{,}6)$
g) $P(z < 0{,}9)$

Exemplos de Aplicações:
01) As alturas dos alunos de uma determinada escola são normalmente distribuídas com média 1,60m e desvio padrão 0,30 m. Encontre a probabilidade de um aluno sorteado ao acaso medir:
a) mais de 1,75 m;
b) entre 1,50 m e 1,80 m
c) menos de 1,48m

02) Considerando o enunciado anterior, determine qual deve ser a medida mínima para escolhermos 10% dos mais altos?

03) As vendas diárias de uma farmácia têm distribuição normal com média de R$ 600,00 e desvio padrão de R$ 180,00. Ache a probabilidade de amanhã haver uma venda:
a) superior a R$ 700,00.
b) entre R$ 450,00 e R$ 580,00.

04) A experiência tem mostrado que a duração média de lâmpadas de retroprojetores é 70 horas com desvio padrão de 8 horas. Qual a probabilidade de determinada lâmpada durar mais de 82 horas?

05) Uma máquina produz eixos com diâmetro médio de 20 mm, e desvio padrão 0,02 mm. Um eixo é considerado defeituoso se seu diâmetro é maior que 20,05 mm, ou menor que 19,95 mm. Qual a porcentagem de eixos defeituosos?

06) Numa prova final de matemática, as notas dos alunos tiveram uma distribuição normal com média 6 e desvio padrão 1,5. Sendo 5 a nota mínima de aprovação, qual a proporção de alunos reprovados?

Exercícios

01) A duração de um certo componente eletrônico tem média de 850 dias e desvio padrão 45 dias. Calcular a probabilidade desse componente durar mais que 800 dias.(86,65%)

02) Os salários semanais dos operários industriais são distribuídos normalmente em torno de uma média de R$ 80,00 com desvio padrão de R$ 5,00. Qual a probabilidade de um operário ter salário semanal maior que R$ 72,00?(94,52%)

03) Se os diâmetros das 400 peças produzidas por uma máquina, num dia, tem distribuição normal com média 50,2 mm e desvio-padrão 0,15 mm, qual o número provável de peças com mais de 50,5 mm?(9)

04) A altura média dos alunos de uma Faculdade é 1,72m e o desvio-padrão 0,07m, qual a probabilidade de um aluno, sorteado ao acaso, ter uma altura entre 1,60m e 1,70m?(34,23%)

05) O peso médio dos alunos de uma escola de 1º grau é 32 kg, e o desvio-padrão é 4 kg. Qual a porcentagem de alunos com mais de 30 kg ?(69,15%)

06) Numa prova final de matemática, as notas dos alunos tiveram uma distribuição normal com média 6 e o desvio-padrão 1,5 . Sendo 5 a nota mínima de aprovação, qual a proporção de alunos reprovados ?
R = 25,14%

07) O diâmetro médio dos parafusos produzidos por uma fábrica é de 0,25 polegadas, e o desvio-padrão 0,02 polegadas. Um parafuso é considerado defeituoso se seu diâmetro é maior que 0,28 polegadas ou menor que 0,20 polegadas. Encontre a porcentagem de parafusos defeituosos.(7,3%)

08) Se as alturas de 300 estudantes são normalmente distribuídas com média 172,72 cm e desvio-padrão 7,62 cm, quantos estudantes têm altura superior a 182,88 cm ?
R = 27

09) Uma fábrica de pneumáticos fez um teste para medir o desgaste de seus pneus e verificou que ele obedecia a uma distribuição normal, de média 48.000 km e desvio-padrão 2.000 km. Qual a probabilidade de um pneu escolhido ao acaso durar entre 45.000 km e 50.000 km?(77,45%)

10) A média dos diâmetros internos de uma amostra de 200 arruelas produzidas por uma certa máquina é 0,502 polegadas e o desvio padrão é 0,005 polegadas. A finalidade para qual essas arruelas são fabricadas permite a tolerância máxima, para o diâmetro, de 0,496 polegadas a 0,508 polegadas, se isso não se verificar, as arruelas serão consideradas defeituosas. Admitindo-se que os diâmetros são distribuídos normalmente, determine o número esperado de arruelas defeituosas.(46)

11) Os salários semanal dos operários industriais são distribuídos normalmente em torno de uma média de R$180,00 com desvio padrão de R$25,00. Pede-se:
a) encontre a probabilidade de um operário ter salário semanal situado entre R$ 150,00 e R$ 178,00; (35; 3%)
b) encontre a probabilidade de um operário ter salário semanal maior do que R$ 180,00. (50%)

12) Os pesos de 1000 estudantes são normalmente distribuídos com média 63,8 kg e desvio padrão 5,8 kg. Encontre a probabilidade de um aluno pesar:

a) entre 60kg e 70 kg; (60,31%)
b) menos do que 65 kg; (58,32%)
c) mais do que 68 kg; (23,58%)
d) entre 66,5 kg e 69 kg. (13,51%)

13) Suponha que o índice pluviométrico em uma cidade tenha distribuição normal com média 40 e desvio padrão 5. Qual é a porcentagem de a cidade ter menos de 33 polegadas de chuva no próximo ano? Qual é a probabilidade de a cidade ter mais de 38 polegadas de chuva? (8,08%; 65,54%)

14) Suponha que o escore de um estudante no vestibular seja uma variável aleatória selecionada de uma distribuição normal com média 550 e variância 900. Se a admissão em certa faculdade exige um escore de 575, qual é probabilidade de ser admitido? E se o escore mínimo for 540? (0,2033 e 0,6293)

PARTE 05

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

1. Introdução à Inferência Estatística

Inferência Estatística é poder fazer afirmações sobre características de uma população, baseando-se em resultados de uma amostra. O uso de informações da amostra para concluir sobre o todo faz parte da atividade diária da maioria das pessoas. Basta observar como uma cozinheira verifica se o prato tem ou não a quantia adequada de sal. Ou ainda, quando uma dona de casa, após experimentar um pedaço de laranja numa banca de feira, decide se as compras ou não. Essas são decisões baseadas em procedimentos amostrais. O objetivo de nosso estudo é conhecer algumas técnicas de inferência aplicada em situações científicas.

2. Estimação

Estudaremos o problema de avaliar certas características dos elementos da população, a partir de operações com os dados de uma amostra. É um raciocínio tipicamente indutivo, em que se generalizam resultados da parte (amostra) para o todo (população). Este procedimento é denominado estimação de parâmetros.

Vamos relembrar alguns conceitos:

Parâmetro: alguma característica descritiva dos elementos de uma população (média, proporção, variância, ...)

Estatística: alguma informação determinada a partir de dados amostrais

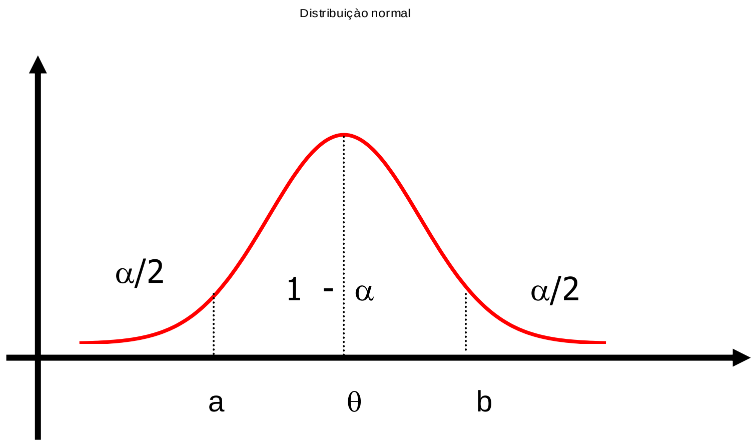
3. Técnicas para Inferência Estatística

3.1 Intervalos de Confiança

Trata-se de uma técnica para se fazer inferência estatística. Ou seja, a partir de um intervalo de confiança, construído com os elementos amostrais, pode-se inferir sobre um parâmetro populacional.

Intervalo de confiança é um intervalo de valores, limitado por um valor mínimo e um valor máximo, usado para estimar um parâmetro desconhecido da população, de forma que permita afirmar que o verdadeiro valor do parâmetro estará contido nesse intervalo.

Vamos então considerar o intervalo de valores [a, b], simétricos em torno da média do parâmetro θ, tal que a probabilidade de θ pertencer ao intervalo seja igual a 1 - α, isto é:



Esta probabilidade 1 - α é chamada de nível de confiança (ou grau de certeza), é preestabelecido pelo pesquisador e significa que, retiradas todas as amostras da população e construídos todos os intervalos de confiança, poderemos dizer que (1 - α)% destes intervalos conterão o parâmetro θ. Da mesma forma, podemos afirmar que para cada intervalo, teremos α% de probabilidade de que o mesmos não contenha θ. Este é o erro que estaremos cometendo e é chamado nível de significância.

Note que, quanto maior for o nível de confiança, maior será a amplitude do intervalo. Sendo conveniente, o nível de confiança pode ser aumentado até tão próximo de 100% quanto se queira, mas isso resultará em intervalos de amplitude cada vez maiores, o que significa perda de previsão na estimação. Para amostras de tamanho n fixo, confiança e precisão variam em sentidos opostos, quanto mais confiança se deseja, menor a precisão encontrada.

Para encontrarmos um intervalo de confiança para um determinado parâmetro θ , devemos obter um intervalo [a, b], centrado em θ, tal que: $P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$.

3.1.1 Intervalo de Confiança para a Média Populacional (μ)

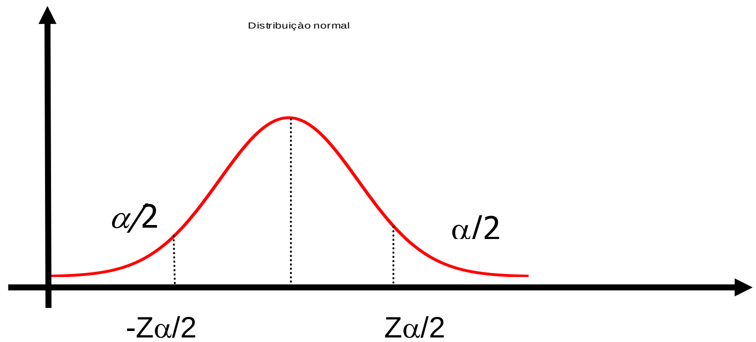
a) Com Variância (σ^2) conhecida:

Como se sabe, o estimador de μ é $\overline{X}$, assim tem-se o intervalo de confiança para a média populacional quando a variância é conhecida:

$$\boxed{P\left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha}$$

$$\text{ou simplismente } I.C.(\mu,\ 1\text{-}\alpha) = \overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Fixando-se um nível de confiança 1 - α., tem-se:



$$\text{Ou seja}: P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Exemplo:

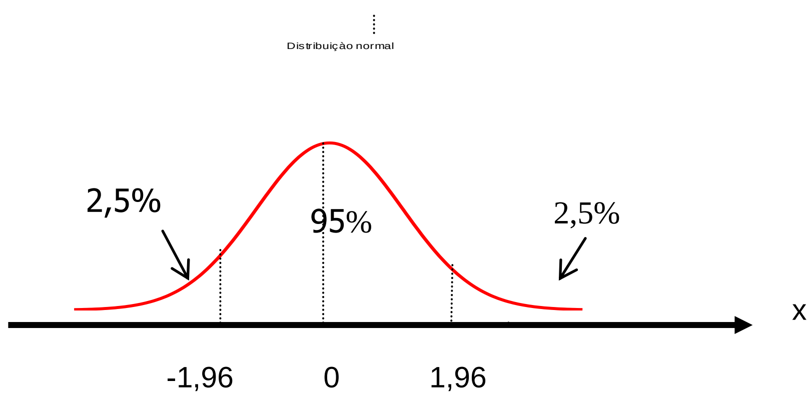
A duração da vida de uma peça de equipamento é tal que σ = 5 horas. Foram amostradas 100 dessas peças obtendo-se a média de 500 horas. Deseja-se construir um intervalo de confiança para a verdadeira duração média da peça com nível de 95% de confiança.

Solução:

Do problema se tem:

σ = 5; n = 100; $\overline{X}$ = 500 (1 - α).100 = 95%

O gráfico da distribuição normal padrão será:



Lembre-se que para descobrir a abscissa 1,96, entrou-se na tabela com 0,475 = 47,5%, já que a tabela é de faixa central.

Substituindo-se os dados na fórmula, o intervalo encontrado é:

P(499,02 ≤ μ ≤ 500,98) = 95%

A interpretação desse resultado é dada por:

“ O intervalo [499,02 ; 500,98] contém a verdadeira duração média da peça com 95% de confiança”.

Exercícios (Intervalos para a média sendo conhecida a variância populacional)

01) Foram retiradas 25 peças da produção diária de uma máquina, encontrando-se para uma certa medida uma média de 5,2 mm. Sabendo-se que as medidas têm distribuição normal com desvio padrão 1,2 mm, construir intervalos de confiança para a média aos níveis de:

a) 90% (5,2 ± 0,3936)
b) 95%;(5,2 ± 0,4704)
c) 99%;(5,2 ± 0,6192)

02) De uma distribuição normal com σ^2 = 1,96,obteve-se a seguinte amostra: 25,2; 26,0: 26,4; 27,1; 28,2; 28,4. Determinar o intervalo de confiança para a média da população, sendo o nível de significância de:

a) α = 0,05; (26,88 ± 1,12)
b) α = 0,10; (26,88 ± 0,94)

03) Suponha que as alturas dos alunos de nossa faculdade tenham distribuição normal com σ = 15 cm. Foi retirada uma amostra aleatória de 100 alunos obtendo-se $\overline{x}$=175 cm. Construir, ao nível de confiança de 95% o intervalo para a verdadeira altura média dos alunos. (175 ± 2,94)

04) Dados n = 10, $\overline{x}$ = 110 e σ = 10, determinar os intervalos de confiança para μ aos níveis de 90% e 95%.(110 ± 5,19 e 110 ± 6,2)

05) Feito um ensaio de corrosão com 64 peças de um lote de produção, verificou-se que o tempo que a peça suportou nesse teste apresentou uma média de 200 horas. Sabe-se que o desvio padrão populacional vale 16 horas, construir um intervalo de confiança para a média populacional com 95% de confiança. (1,96,08h; 203,92h)

06) Suponha que o faturamento bruto mensal da Empresa Santos & Cia Ltda, tenha distribuição normal com desvio padrão de R$ 4.949.00. Para se fazer uma estimativa sobre o faturamento bruto da empresa, colheu-se uma amostra de 12 meses obtendo-se um faturamento bruto médio de R$ 15.600.000. Determine o intervalo com 95% de confiança para o verdadeiro faturamento médio.(15600 ± 2800,16)

07) Suponha que o recolhimento mensal de ICMS da Empresa Santos & Cia Ltda, tenha distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de R$ 3.406,70. Para se fazer uma estimativa sobre os tributos pagos pela empresa em u determinado período, colheu-se uma amostra de 8 meses obtendo-se um recolhimento médio de R$ 9.434,50 de ICMS.Encontre o erro da estimativa e o intervalo com 98% de confiança. (9434,5 ± 2806,37)

08) A tabela abaixo representa o tempo de uso de três terminais de computadores (em minutos). Calcule o intervalo de confiança para a média em cada um dos casos abaixo:

Média (min) ($\overline{x}$)	Desvio padrão (σ)	Tamanho(n)	Nível de confiança (1 - α)
165	20	120	95%
205	30	150	90%
280	55	80	99%

(165 ± 3,57; 205 ± 4,01 e 280 ± 15,87)

09) Uma máquina de empacotar café, o faz seguindo uma distribuição normal com desvio padrão de 10 gramas. Tomando-se uma amostra aleatória de 15 pacotes encontramos uma média de 495 gramas. Estimar o intervalo de confiança que contenha o verdadeiro peso médio dos pacotes de café desta máquina ao nível de 99% de confiança. (495 ± 6,66)

10) O tempo de duração de um equipamento nos Estados Unidos tem desvio padrão de 6 meses. Ao importa-lo para o Brasil, devido a problemas climáticos, colocou 42 destes equipamentos em funcionamento que forneceu uma duração média de 34 meses. Construa o intervalo de confiança de sua duração média no Brasil. Considere o nível de significância de 5%. (32,18 ; 35,81)

11) Calcule o intervalo de confiança para a média em cada um dos casos abaixo:

Média Amostra	Desvio padrão da população	Tamanho da amostra	Coeficiente de confiança
170 cm	15 cm	100	95%
165 cm	30 cm	184	85%
180 cm	30 cm	225	70%

(170 ± 2,94 ; 165 ± 3,18 e 180 ± 2,08)

Com Variância (σ^2) desconhecida:

O processo para se obter o intervalo de confiança é semelhante àquele mostrado no item anterior. Como não se conhece σ, porém, é preciso substitui-lo por S (desvio-padrão amostral), isto não acarretará maiores dificuldades, pois a variância amostral dá boa aproximação do verdadeiro valor, na maioria das vezes.

Quando σ^2 não é conhecido, a distribuição de probabilidade correta a ser usada é a distribuição "t" de Student, com n – 1 graus de liberdade.

Esta distribuição é bastante parecida com a normal. A principal diferença entre as duas é que a "t" tem maior área nas caudas. Isto significa que para um dado nível de confiança, o valor "t" será um pouco maior que o correspondente valor Z.

Para uma amostra de tamanho pequeno, a distribuição "t" é mais sensível ao tamanho da amostra, embora para grandes amostras essa sensibilidade diminua. Na verdade, para grandes amostras, é razoável usar valores Z para aproximar valores t, muito embora a distribuição "t" seja sempre teoricamente correta quando não se conhece o desvio-padrão da população. Sendo assim, se n > 30 podemos usar a distribuição normal, mesmo quando σ não é conhecido.

O Intervalo de Confiança para a Média Populacional (μ) quando σ é desconhecido é dado por:

$$\boxed{P\left(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha}$$

Ou simplesmente:

$$\boxed{I.C.(\mu,\ 1-\alpha) = \overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Exemplo:

A amostra: 9, 8, 12, 8, 9, 6, 11, 6, 10, 9 foi extraída de um população normal. Construir um intervalo de confiança para a média populacional ao nível de 95%.

Solução:

Calculando-se a média e o desvio-padrão da amostra obtém-se:

$\overline{X}$ = 8,7 e S = 2, como (1 - α).100 = 95% e g.l. = n – 1 = 10 – 1 = 9, usando a tabela da distribuição “t”, $t_{0,025}$ = 2,2622, substituindo na fórmula, temos que o intervalo é:

P(7,27 $\leq\ \mu\ \leq$ 10,13) = 95%

A interpretação desse resultado é dada por:

“ O intervalo [7,27 ; 10,13] contém a verdadeira média com 95% de confiança”.

<u>**Exercícios**</u> (Intervalos para a média sendo desconhecida a variância populacional)

01) Em quatro leituras experimentais de um comercial de 30 segundos, um locutor levou em média 29,2 segundos com uma S^2 = 5,76.Construir os limites de confiança para a média. Dado α = 10% (26,38 ; 32,02)

02) Em uma fábrica, colhida uma amostra de certa peça, obtiveram-se as seguintes medidas para os diâmetros:

10	11	11	11	12	12	12	12	13	13
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	15	15	15	16	16

a) Estimar a média e a variância; (13,13 ; 2,05)

b) Construir um intervalo de confiança para a média sendo α = 5%; (12,60 ; 13,66)

03) Colhida uma amostra de 30 peças, forneceu-se os seguintes pesos:

250	265	267	269	271	275	277	281	283	284
287	289	291	293	293	298	301	303	306	307
307	309	311	315	319	322	324	328	335	339

Por meio da construção do intervalo de confiança, responder se esta amostra satisfaz a especificação pela qual o peso médio deve ser 300 kg. Adote α = 2,5% e α= 5%

R = Satisfaz, pois com 1 - α = 95% o intervalo é [288,33 ; 304,93]

04) Numa tentativa de melhorar o esquema de atendimento, um médico procurou estimar o tempo médio que gasta com cada paciente. Uma amostra aleatória de 49 pacientes, colhida num período de três semanas, acusou uma média de 30 minutos, com desvio padrão de 7 minutos. Construa um intervalo de 95% de confiança para o verdadeiro tempo médio de consulta. (30 $\pm$ 1,96)

05) A polícia rodoviária fez recentemente uma pesquisa secreta sobre as velocidades desenvolvidas na rodovia no período de 2 às 4 horas da madrugada. No período de observações, 100 carros passaram por uma parelho de radar a uma velocidade média de 7^a km/h, com desvio padrão de 15 km/h. Construa um intervalo de 98% de confiança para a média da população. R = 70 $\pm$ 3,50

06) Uma amostra aleatória de 40 contas não comerciais na filial de um banco acusou saldo médio diário de 140 dólares com desvio padrão de 30 dólares.

a) Construa um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira média. (140 $\pm$ 9,59)

b) Construa um intervalo de 99% de confiança para a verdadeira média. (140 $\pm$ 12,86)

07) Para avaliar a precisão na embalagem de arroz, a fiscalização pesou 28 unidades da marca A, que forneceu os seguintes valores: $\bar{x}$ = 4962g e S = 48g. Se o peso médio exigido é de 5000g, construa um intervalo de confiança para a média embalada pela Marca A, com um nível de significância de 5% e responda se a marca deve ser penalizada?

R = [4943,39 ; 4980,61]

08) Um pesquisador está estudando a resistência de um determinado chip sob determinadas condições. Utilizando os seguintes valores obtidos de uma amostra de tamanho 9, determine o intervalo de confiança para a resistência média com um nível de significância de 5%.

4,9	7,0	8,1	4,5	5,6	6,8	7,2	5,7	6,2

R = [5,33 ; 7,11]

09) Uma amostra é composta pelos seguintes elementos:

7	7	8	9	9	9	10	11
11	11	12	13	13	14	15	15

Construir os intervalos de confiança para a média admitindo-se os seguintes coeficientes de confiança:

a) 90% R = [9,73 ; 12,14]

b) 95% R = [9,48 ; 12,40]

10) Na tabela abaixo tem-se a distribuição dos salários da Secretaria A:

Nº de Salários	Freq. Relativa
4,5 |------ 7,5	0,1
7,5 |------ 10,5	0,2
10,5 |------ 13,5	0,4
13,5 |------ 16,5	0,2
16,5 |------ 19,5	0,1
Total	1,0

Suponha que n = 60, construa um intervalo de confiança para a média, com 95% de confiança. R = [11,16 ; 12,83]

3.1.2 Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional (p)

Como não conhecemos o valor de p (populacional) usamos f (proporção amostral) como estimador de p. Assim o intervalo de confiança fica:

$$\boxed{P\left(f - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \le p \le f + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right) = 1 - \alpha}$$

$$\text{ou simplismente } \text{I.C.}\left(p,\ 1\text{-}\alpha\right) = f \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n}}$$

Exemplo:

Examinamos 500 peças de uma grande produção encontrou-se 260 defeituosas, No nível de 90% construir um intervalo de confiança para a verdadeira proporção de peças defeituosas.

Solução:

Tem-se n = 500, x = 260, (1 - α).100 = 90%, logo f = x/n = 269/500 = 0,52.
Substituindo na fórmula o intervalo de confiança será:

P(0,488 $\leq$ p $\leq$ 0,552) = 90%, ou ainda P(48,8% $\leq$ p $\leq$ 55,2%) = 90%

A interpretação desse resultado é dada por:

“ O intervalo [48,8%;55,2%] contém a verdadeira porcentagem (ou proporção) de peças defeituosa com 90% de confiança”.

<u>Exercícios</u> (Intervalos para a proporção populacional)

01) Um grupo de pesquisa governamental constatou que 25% das 200 grandes empresas do Estado não pagam em dia os tributos estaduais. Supondo que foi tomada uma amostra aleatória, estime através de um intervalo com 90% de confiança a proporção de empresas que não pagam os tributos em dia. R = [0,2 : 0,3]

02) Uma amostra aleatória de 400 domicílios mostra-nos que 25% deles são casas de aluguel. Qual é o intervalo de confiança que podemos, razoavelmente supor que seja o da proporção de casas de aluguel? Considere α = 2%. R = [0,1996 ; 0,3004]

03) Em 50 lances de uma moeda, foram obtidas 30 caras. A partir de um intervalo de confiança de 96%, pode-se dizer que a moeda é honesta? R = Sim [0,46 ; 0,74]

04) Para verificar se um dado era viciado, jogou-se o mesmo 120 vezes, obtendo-se 25 vezes o número cinco. Calcular um intervalo de confiança para a proporção: α = 1%. Pode-se dizer que o dado é viciado? R = não [0,11 ; 0,31]

05) Em recente pesquisa levada a efeito junto a 200 habitantes de uma grande cidade, 40 se mostraram favoráveis ao restabelecimento da pena de morte. Construa um intervalo de 99% de confiança para a verdadeira proporção dos habitantes daquela cidade à pena de morte.
R = [0,13 ; 0,28]

06) Uma amostra aleatória de 100 fregueses da parte da manhã de um supermercado revelou que apenas 10 não incluem leite em suas compras.
a) Qual seria a estimativa pontual da percentagem dos que compram leite? R = 0,9
b) Construa um intervalo de 90% de confiança para a verdadeira proporção dos que compram leite. R = 0,90 $\pm$ 0,0495

07) Um grupo de pesquisa de mercado contatou que 25% dos 200 fregueses recentemente entrevistados num grande shopping center suburbano residem a mais de 15 km do local. Suponha que foi tomado uma amostra aleatória. Construa um intervalo de 95% de confiança para a percentagem efetiva de fregueses que moram a mias de 15 km do shopping center. R = [0,19 ; 0,32]

08) Uma amostra aleatória de 40 homens trabalhando num grande projeto de construção revelou que 6 não estavam usando capacetes protetores.
a) Construa um intervalo de 98% de confiança para a verdadeira proporção dos que não estão usando capacetes nesse projeto. R = 0,15 $\pm$ 0,13
b) Se há 1000 operários trabalhando no projeto, converta o intervalo de confiança de percentagens para números de operários. R = 150 $\pm$ 130

09) Uma amostra aleatória de 628 donas-de-casa revela que 70% delas preferem a marca x de detergente. Construir um intervalo de confiança para a proporção das donas-de-casa que preferem X com 90% de confiança. R = [0,68 ; 0,73]

10) Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de um certo produto. Se uma amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine o intervalo de confiança para a proporção com 95% de confiança.
R = [0,27 ; 0,39]

11) Dada a distribuição a seguir, calcular os intervalos de confiança ao nível de 90%, para as proporções de valores:
a) menores que 21 anos; R = [20,7% ; 41,1%]
b) maiores ou iguais a 24 anos. R = [36,2% ; 58,4%]

Anos	Nº de pessoas
15 |------ 18	8
18 |------ 21	9
21 |------ 24	12
24 |------ 27	15
27 |------30	7
30 |------ 33	4

12) Uma centena de componentes foi ensaiada e 93 deles funcionaram mais 500 horas. Determinar um intervalo de confiança de 95% para a proporção. R = [0,88 ; 0,98]

13) Uma amostra de 300 habitantes de uma cidade mostrou que 180 desejavam a água fluorada. Encontrar os limites de confiança de 90% e 95% para a proporção da população favorável a fluoração. R = [0,55 ; 0,65] [0,54 ; 0,66]

PARTE 06
1- TAMANHO DAS AMOSTRAS

Na apostila anterior vimos como construir intervalos para os principais parâmetros populacionais. Em todos os casos, supusemos dado o nível de confiança desses intervalos. Evidentemente, o nível de confiança deve ser fixado de acordo com a probabilidade de acerto que se deseja ter na estimação por intervalo. Sendo conveniente, o nível de confiança pode ser aumentado até tão próximo de 100% quanto se queira, mas isso resultará em intervalo de amplitude cada vez maiores, o que significa perda de precisão na estimação. É claro que seria desejável termos intervalos com alto nível de confiança e pequena amplitude, o que corresponderia a estimarmos o parâmetro em questão com pequena probabilidade de erro e grande precisão. Isso, porém, requer uma amostra suficientemente grande, pois, para n fixo, confiança e precisão variam em sentidos opostos.

Veremos a seguir como determinar o tamanho das amostras necessárias nos casos de estimação da média ou de uma proporção populacional.

1.1- TAMANHO DAS AMOSTRA DE UMA POPULAÇÃO INFINITA OU COM REPOSIÇÃO

1.1.1 – Tamanho da amostra para a média populacional com variância conhecida.

Sabemos que o intervalo para a média populacional é:

$$\overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{X} \pm e \quad \Longrightarrow \quad e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{Z}_{\alpha/2} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{e}} \right)^2$$

1.1.2 – Tamanho da amostra para a média populacional com variância desconhecida.

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{t}_{\alpha/2} \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{e}} \right)^2$$

Com gl = n’- 1 , sendo n’ = tamanho da amostra conhecida (amostra piloto)

1.1.3 – Tamanho da amostra para a proporção de sucesso da população

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e} \right)^2 f\ (1 - f)$$

Onde f = X/n

Caso, desconhecemos a proporção de sucesso da amostra (f), utilizamos f = 0,5 ou 50%. Então o tamanho da amostra será:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2e} \right)^2$$

1.2- TAMANHO DAS AMOSTRAS DE POPULAÇÕES FINITAS

1.2.1 – Tamanho da amostra para a média populacional com variância conhecida.

$$e = \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

$$n = \frac{N\, Z^2_{\alpha/s} \cdot \sigma^2}{(N - 1)e^2 + Z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2}$$

1.2.2 – Tamanho da amostra para a média populacional com variância desconhecida.

$$n = \frac{N\, t^2_{\alpha/2}\, S^2}{(N-1)e^2 + t^2_{\alpha/2}\, S^2}$$

Onde gl = n’- 1 (tamanho da amostra piloto)

1.1.3 – Tamanho da amostra para a proporção de sucesso da população

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\, f\, (1-f)\, N}{e^2 (N-1) + Z^2_{\alpha/2}\, f\, (1-f)}$$

EXEMPLOS

01) Qual o tamanho da amostra necessário para se estimar a média de uma população infinita cujo desvio padrão é 4mm, com 95% de confiança e erro de 0,5 mm?

02) Foram feitas 20 medidas do tempo gasto(em minutos) para se resolver um determinado problema matemático, obtendo-se:

13	15	12	14	17	15	16	15	14	16
17	14	16	15	15	13	14	15	16	15

Esse dados são suficientes para estimar o tempo médio gasto nessa operação, com precisão de 30 segundos e 95% de certeza? Caso, negativo, qual o tamanho da amostra adicional necessária?

03) Numa pesquisa de mercado bem conduzida, 57 das 150 pessoas entrevistadas afirmaram que seriam compradores de certo produto a ser lançado. Essa amostra é suficiente para estimar a proporção real de futuros compradores, com uma precisão de 0,08 e confiança de 95%?

04) Para se estimar a proporção de pessoas interessadas em água fluorada, qual o tamanho da amostra para se estar confiante em 99% de que o erro seja de no máximo 3% ?

05) De uma distribuição normal com σ^2 = 2,25 obteve-se a seguinte mostra:
27 5 25 6 28 2 26 1 25 27 4 26 9 25 8 28 5 27 25 5 26 7

a) Qual o tamanho da amostra suficiente para estimar a média populacional com precisão de 0,5 e 90% de confiança.
b) Suponha que o tamanho da população seja de 500 elementos, qual o tamanho da amostra suficiente para estimar a média populacional com precisão de 0,5 e 90% de confiança.

06) No exemplo 2, suponha que o tamanho da população seja de 800 elementos, qual o tamanho da amostra.

07) No exemplo 3, suponha que o tamanho da população seja de 2000 pessoas, qual o tamanho da amostra.

EXERCÍCIOS:

01) Antes da eleição, um determinado partido está interessado em estimar a proporção de eleitores favoráveis ao seu candidato. Uma amostra de tamanho 500 revelou que 60% dos eleitores eram favoráveis ao candidato em questão.

a) Determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de, no máximo, 0,02 com probabilidade de 95% de confiança. R = 2305

b) Se, uma outra amostra de tamanho 1000, observou-se que 55% dos eleitores eram favoráveis ao candidato em questão, construa um intervalo com 95% de confiança. [0,52 ; 0,58]

02) Da experiência passada, sabe-se que o desvio padrão da altura de crianças de 5ª série do 1º grau é 15 cm.

a) Colhendo uma amostra de 60 crianças destas, observou-se a média de 150 cm. Qual o intervalo de confiança para a média populacional. R = $150 \pm 3{,}8$

b) Que tamanho deve ter uma amostra para que o intervalo 150 ± 5 tenha 95% de confiança? R = 35

c) Suponha que o tamanho da população seja 2000 crianças, qual o tamanho da amostra para que o erro em estimar a média seja igual a 3,5 cm, com 95% de confiança ? R = 68

03) Suponhamos que se pretenda estimar a renda média por família numa grande cidade. Com base em informações passadas. Admite-se que o desvio padrão das rendas das famílias é igual a R$ 2000,00. Qual deve ser o tamanho da amostra, a fim de que o erro da estimativa da renda média seja no máximo de R$ 100,00 com probabilidade igual a 0,96? R = 1681

04) Um estudo será feito numa população para se estimar a proporção de mulheres possuidoras de veículos. Qual o tamanho da amostra se desejarmos estar confiante em 99% de que, nossa estimativa não difira da verdadeira proporção em mais do que 1%. R = 16.641

05) Para se estimar a proporção de pessoas interessadas em água fluorada, qual a amostra para se estar confiante em 95% de que o erro será no máximo 1%. R = 9.604

06) Em uma fabrica de válvulas um engenheiro de produção pretende fazer uma inspeção e retira uma amostra de 400 válvulas, e obtém-se a vida média de 800 horas e o desvio padrão de 100 horas.

a) Qual o intervalo de confiança de 99% para a vida média da população? [787,1 ; 812,9]

b) Com que confiança dir-se-ia que a vida média é $800 \pm 0{,}98$? R $\cong$ 15,86%

c) Que tamanho deve ter a amostra para que seja de 95% a confiança na estimativa $800 \pm 7{,}84$? R = 625

07) Antes de uma eleição, um determinado partido está interessado em estimar a proporção de eleitores favoráveis ao seu candidato. Uma amostra piloto de tamanho 100 revelou que 60% dos eleitores eram favoráveis ao candidato em questão.

a) Determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de, no máximo, 0,01 com probabilidade de 80%. R = 3932

b) Se na amostra final, com tamanho igual ao obtido em (a), observou-se que 55%, dos eleitores eram favoráveis ao candidato em questão, construa um intervalo de confiança para a proporção. Utilize o nível de significância de 5%. R = [0,53 ; 0,57]

08) Determine o número de observações necessário para estimar o tempo médio de serviço de atendimento a chamadas de um bombeiro hidráulico, se o erro máximo deve ser de 0,6 hora para um nível de confiança de 95%, sabendo-se que o tempo de atendimento tem um desvio padrão de 1 hora. Suponha a normalidade dos dados. R = 11

09) Como seria a resposta do exercício anterior se o erro máximo fosse de apenas 0,3 hora? R = 43

10) Qual o tamanho da amostra necessária para estimar o tempo médio que um vendedor de uma loja de móveis gasta com cada cliente, para obter um nível de confiança de 99% e uma precisão de 2 minutos. Suponha σ = 12 minutos. R = 240

11) Uma biblioteca pública deseja estimar a porcentagem de livros de seu acervo publicados até 1980. Qual deve ser o tamanho da amostra aleatória para se ter 90% de confiança de ficar a menos de 5% da verdadeira proporção? R = 269

12) Um fabricante de flashes deseja estimar a probabilidade de um flash funcionar. Como se trata de um teste destrutivo, ele deseja manter o tamanho da amostra o menor possível. Determine o número de observações que devem ser feitas para estimar a probabilidade a menos de 0,04 com 95% de confiança, se:
a) Ele não tem idéia de percentagem de defeituosos. R = 600
b) Ele crê que a percentagem de defeituosos não supere 6%. R = 135

13) Para verificar a eficácia de um programa de prevenção de acidentes de trabalho, fez-se um estudo experimental, implementando este programa em dez empresas da construção civil, escolhidas ao acaso, numa certa região. Os dados abaixo referem-se aos percentuais de redução de acidentes de trabalho, na amostra destas dez empresas em que o programa foi implementado.

Amostra	Estatísticas
20 15 23 11 29 5 20 22 18 17	Média: $\overline{X} = 18$ D.Padrão S = 6,65

a) Construa um intervalo de confiança para a média com nível de significância de 5%.
R = 18 $\pm$ 4,76
b) Considerando que o número de empresas na região seja de 400 empresas, qual o tamanho da amostra, considerando um erro máximo de 2,5 pontos percentuais, com 95% de confiança.
R = 33

14) Numa pesquisa epidemiológica, deseja-se estimar, com 90% de confiança, a proporção de pessoas infectadas, com erro amostral máximo de 1%. Qual deve ser o tamanho de uma amostra aleatória simples, admitindo que, na população em estudo, não devam existir mais que 20% de indivíduos infectados? R = 4303

15) Com o objetivo de estimar o tempo médio de um caixa eletrônico para atender um cliente, planeja-se fazer um levantamento por amostragem. Qual deve ser o tamanho de uma amostra aleatória simples de clientes, para garantir uma estimativa com erro não

superior a 2 segundos, ao nível de 95% de confiança? Admita que, em estudos anteriores, verificou-se que o desvio padrão não ultrapassa 8 segundos. R = 61

16) Deseja-se estudar as percentagens de ocorrências de diversos atributos das famílias de uma comunidade de 600 famílias. Qual deve ser o tamanho de uma amostra aleatória simples, considerando em cada estimativa um erro máximo de 4% e nível de 95% de confiança? R = 300

17) Um máquina de empacotar café, o faz seguindo uma distribuição normal com desvio padrão de 10 gramas. Tomando-se uma amostra aleatória de 15 pacotes encontramos uma média de 495 gramas.
a) Estimar o intervalo de confiança que contenha o verdadeiro peso médio dos pacotes de café desta máquina ao nível de 99% de confiança. R = 495 $\pm$ 6,66
b) Qual o tamanho mínimo da amostra para que a precisão não difira da média populacional por mais de 5gramas, ao nível de 95% de confiança. R = 15

18) O setor de produção de certa empresa, procurando dimensionar o tempo médio à realização de uma tarefa, selecionou aleatoriamente 75 de seus funcionários e observou que gastaram em média 35,7 minutos, com desvio padrão de 7,8 minutos.
a) Estimar um intervalo de confiança para o tempo médio necessário à realização daquela tarefa, a um nível de confiança de 99%. R = 35,7 $\pm$ 2,32
b) Que tamanho deve ter uma amostra para que o intervalo 35,7 $\pm$ 2 tenha 95% de confiança?
R = 58
c) Suponha que o tamanho da população seja de 500 funcionários, qual o tamanho da amostra para que o erro em estimar a média seja igual a 2 minutos, com 95% de confiança? R = 52

19) Numa pesquisa no setor comercial e industrial de uma cidade, entre 600 empresas, 240 responderam que possuem equipamentos de primeiros socorros de alta qualidade.
a) Determinar o intervalo de confiança para a proporção populacional dos que possuem equipamentos, ao nível de 95%. R = 36% < p < 44%
b) Suponha que o tamanho da população seja de 5000 empresas, determine o tamanho mínimo para que o erro na estimação da proporção populacional seja de 4%, com 99% de confiança.
R = 832

20) Uma empresa de pesquisa eleitoral consulta 10.000 eleitores numa eleição para governador de um dado estado e encontra 5472 votos a favor de um dado candidato.
a) Construa um intervalo de confiança para a proporção populacional desse candidato com 95% de confiança.
b) Qual o tamanho da amostra necessária para que o erro na estimativa da proporção populacional seja no máximo de 2%, ao nível de 95%.(2376,99)
c) Suponha que o tamanho da população seja de 10.000 eleitores, qual o tamanho da amostra necessária para que o erro na estimativa da proporção populacional seja no máximo de 2%, com confiança de 99%.(2917,37)