RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Definições	
1. $\sec(a) = \dfrac{1}{\cos(a)}$	**2.** $\operatorname{cosec}(a) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(a)}$

Fórmulas Trigonométricas	
1. $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$	
2. $1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$	**3.** $1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$
4. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$	**5.** $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
6. $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$	**7.** $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
8. $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$	**9.** $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
10. $\operatorname{tg}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$	**11.** $\operatorname{cotg}^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$
12. $\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$	**13.** $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
14. $\operatorname{cotg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} b \pm \operatorname{cotg} a}$	**15.** $\operatorname{cotg} 2a = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}$
16. $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$	**17.** $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$
18. $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$	**19.** $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$
20. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \Leftrightarrow$ $x = a + 2k\pi \vee x = (\pi - a) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	**21.** $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
22. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow x = a + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}$	**23.** $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a \Leftrightarrow x = a + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}$

Fórmulas Hiperbólicas	
1. $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$	
2. $1 - \operatorname{th}^2 a = \operatorname{sech}^2 a$	**3.** $\operatorname{coth}^2 a - 1 = \operatorname{cosech}^2 a$
4. $\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$	**5.** $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$
6. $\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$	**7.** $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$
8. $\operatorname{ch}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}$	**9.** $\operatorname{sh}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$

DERIVAÇÃO

Resultados fundamentais

Sejam f e g duas funções reais de variável real, com f invertível	
1. $\left[\left(f^{-1}\right)(y)\right]' = \left.\dfrac{1}{f'(x)}\right\vert_{x=f^{-1}(y)}$	**2.** $(f o g)'(x) = \left[f'(y)\right]_{y=g(x)} g'(x)$

Regras

Sejam f e g duas funções reais de variável real	
1. $c' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$	**2.** $x' = 1$
3. $(cf)' = cf', \quad c \in \mathbb{R}$	**4.** $(f+g)' = f' + g'$
5. $(fg)' = f'g + fg'$	**6.** $\left(f/g\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
7. $(f^p)' = pf^{p-1}f'$, $p \in \mathbb{Q}$	**8** $\left(a^f\right)' = a^f f' \ln a$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
9. $\left(e^f\right)' = e^f f'$	**10.** $(f^g)' = gf^{g-1}f' + f^g g' \ln f$
11. $(\log_a \lvert f \rvert)' = \dfrac{f'}{f \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	**12.** $(\ln\lvert f \rvert)' = \dfrac{f'}{f}$
13. $(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	**14.** $(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
15. $(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f$	**16.** $\left(\operatorname{cotg} f\right)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f$
17. $(\sec f)' = f' \sec f \operatorname{tg} f$	**18.** $\left(\operatorname{cosec} f\right)' = -f' \operatorname{cosec} f \operatorname{cotg} f$
19. $\left(\operatorname{arcsen} f\right)' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	**20.** $(\arccos f)' = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
21. $\left(\operatorname{arc\,tg} f\right)' = \dfrac{f'}{1+f^2}$	**22.** $(\operatorname{arccotg} f)' = \dfrac{-f'}{1+f^2}$
23. $(\operatorname{sh} f)' = f' \operatorname{ch} f$	**24.** $\left(\operatorname{ch} f\right)' = f' \operatorname{sh} f$
27. $\left(\operatorname{th} f\right)' = f' \operatorname{sech}^2 f$	**28.** $(\coth f)' = -f' \operatorname{cosech}^2 f$

PRIMITIVAÇÃO

Primitivas Imediatas

Sejam f e g funções reais de variável real, tais que f é diferenciável e g é primitivável e seja C uma constante real. Seja $G(x) = Pg(x) = \int g(x)dx$.

	Função: $g(x)$	**Primitiva:** $G(x) + C$
1.	$a,\ a \in \mathbb{R}$	$ax + C$
2.	$f^p f'$	$\dfrac{f^{p+1}}{p+1} + C\,,\ p \in \mathbb{R} \setminus \{\text{-}1\}$
3.	$e^f f'$	$e^f + C$
4.	$a^f f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C$
5.	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\|f\| + C$
6.	$f' \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
7.	$f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
8.	$f' \sec^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
9.	$f' \operatorname{cosec}^2 f$	$-\operatorname{cotg} f + C$
10.	$f' \sec f \operatorname{tg} f$	$\sec f + C$
11.	$f' \operatorname{cosec} f \operatorname{cotg} f$	$-\operatorname{cosec} f + C$
12.	$f' \sec f$	$\ln\|\sec f + \operatorname{tg} f\| + C$
13.	$f' \operatorname{cosec} f$	$\ln\|\operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f\| + C$
14.	$f' \operatorname{sh} f$	$\operatorname{ch} f + C$
15.	$f' \operatorname{ch} f$	$\operatorname{sh} f + C$
16.	$f' \operatorname{sech}^2 f$	$\operatorname{th} f + C$
17.	$f' \operatorname{cosech}^2 f$	$-\coth f + C$
18.	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} f + C$ ou $-\arccos f + C$
19.	$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cotg} f + C$

Resultados fundamentais

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções primitiváveis e c_1 e c_2 constantes reais.

$$\int c_1 f(x) + c_2 g(x)\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx$$

Técnicas de Primitivação

1. Primitivação por Partes

Seja $u(x)$ uma função primitivável e $v(x)$ uma função derivável:

$$\int u(x)v(x)dx = \left(\int u(x)\,dx\right)v(x) - \int\left(\int u(x)dx\right)v'(x)\ dx$$

2. Primitivação por Substituição

Seja $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ uma função derivável e injectiva e seja $f(x)$ uma função primitivável em $[c,d]$:

$$\int f(x)dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Sejam a, b, c e d constantes reais. A notação $R(...)$ indica que se trata de uma função que envolve apenas somas, diferenças, produtos e quocientes das funções que se encontram entre parêntesis.

	Tipo de Função	Substituição
1.	$R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b}\cos t$ ou $x = \frac{a}{b}\operatorname{th} t$
2.	$R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b}\operatorname{sh} t$
3.	$R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\sec t$ ou $x = \frac{a}{b}\operatorname{ch} t$
4.	$R\left(x, x^{p/q}, x^{r/s}, ...\right)$	$x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, ...)$
5.	$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, ...\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, ...)$
6.	$R(a^{rx}, a^{sx}, ...)$	$a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c(r, s, ...)$

7.	$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	se $a>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t$ se $c>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} \pm tx$ se $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_2)t,\ \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
8.	$x^m(a+bx^n)^{p/q}$	se $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = t^q$ se $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = x^n t^q$
9.	$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	Universal: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ caso em que é então: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
Se:		
a)	$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\cos x = t$
b)	$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{sen} x = t$
c)	$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$ caso em que é então: $x \in \left]0, \pi/2\right[$ $\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
10.	$R(\operatorname{sen} mx, \cos mx)$	$mx = t$
11.	$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	Universal: $\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = t$ caso em que é então: $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
Se:		
a)	$R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$\operatorname{ch} x = t$
b)	$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$\operatorname{sh} x = t$
c)	$R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$\operatorname{tgh} x = t$; caso em que é então $\operatorname{sh} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
12.	$R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$	$mx = t$

3. Primitivação de Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

I - Potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

1. Potências ímpares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

Destaca-se uma unidade à potência e à potência de expoente par aplica-se uma das fórmulas fundamentais:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

2. Potências pares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

Passam-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$$

3. Potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{cotg}^2 x$, $\operatorname{th}^2 x$, $\operatorname{coth}^2 x$ e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \operatorname{th}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 \qquad \operatorname{coth}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$$

4. Potências pares de $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{cosech} x$

Destaca-se $\sec^2 x$, $\operatorname{sech}^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\operatorname{cosech}^2 x$ e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad \operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x \qquad \operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1$$

5. Potências ímpares de $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{cosech} x$

Destaca-se $\sec^2 x$, $\operatorname{sech}^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\operatorname{cosech}^2 x$ e primitiva-se por partes começando por esse factor.

II - Produtos de potências das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ ou $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$

1. Potência ímpar em $\operatorname{sen} x$ **ou** $\operatorname{sh} x$ **por qualquer potência em** $\cos x$ **ou** $\operatorname{ch} x$

Destaca-se $\operatorname{sen} x$ ou $\operatorname{sh} x$ e o factor resultante passa-se para a

co-função através da fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$$

2. Potência ímpar em $\cos x$ **ou** $\operatorname{ch} x$ **por qualquer potência de** $\operatorname{sen} x$ **ou** $\operatorname{sh} x$

Destaca-se $\cos x$ ou $\operatorname{ch} x$ e o factor resultante passa-se para a

co-função através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$$

3. Potência par em $\operatorname{sen} x$ **ou** $\operatorname{sh} x$ **por potência par em** $\cos x$ **ou** $\operatorname{ch} x$

Aplicam-se as fórmulas:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

III – Produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{sen}(mx)$ **e** $\cos(nx)$ **ou_factores do tipo** $\operatorname{sh}(mx)$ **e** $\operatorname{ch}(nx)$

Aplicam-se as fórmulas:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)] \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \qquad \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$$

4. Primitivação de Fracções Racionais

- Se a fracção $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ for imprópria (grau do polinómio $N(x) \geq$ grau do polinómio $D(x)$) efectua-se a divisão do $N(x)$ por $D(x)$: $\dfrac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$, sendo $Q(x)$ um polinómio e $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ uma fracção própria.

- Seja $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ uma fracção racional própria (grau do polinómio $R(x) <$ grau do polinómio $D(x)$)

Decompõe-se o **denominador** da fracção própria em factores e decompõe-se a fracção própria numa **soma de elementos simples** de acordo com os factores obtidos:

---

a) cada raiz real simples a contribui para a decomposição com um termo do tipo:

$$\frac{A}{x-a}$$

com A uma constante a determinar;

b) cada raiz real a de multiplicidade k contribui para a decomposição com a soma:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

com $A_1, A_2, ..., A_k$ constantes a determinar;

c) cada raiz par de raízes complexas $p \pm qi$ simples contribui para a decomposição com um termo do tipo:

$$\frac{Ax + B}{(x-p)^2 + q^2}$$

com A, B constantes a determinar.

d) cada raiz par de raízes complexas $p \pm qi$ de multiplicidade k contribui para a decomposição com uma soma do tipo::

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x-p)^2 + q^2} + \frac{A_2 x + B_2}{\left[(x-p)^2 + q^2\right]^2} + ... + \frac{A_k x + B_k}{\left[(x-p)^2 + q^2\right]^k}$$

com $A_1, B_1, ..., A_k, B_k$ constantes a determinar.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
4.	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
5.	$\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{s^2 - b^2}, \quad s > \lvert b \rvert$
6.	$\operatorname{ch} bt$	$\frac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > \lvert b \rvert$
7.	$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
8.	$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
9.	$t \operatorname{sen} bt$	$\frac{2bs}{\left(s^2 + b^2\right)^2}, \quad s > 0$
10.	$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{\left(s^2 + b^2\right)^2}, \quad s > 0$
11.	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
12.	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
13.	$\mu_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
14.	$\mu_a(t)\, g(t-a)$	$e^{-as} G(s)$, com $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

FUNÇÕES ELEMENTARES

<table>
<tr><th>Função</th><th>Função Inversa</th></tr>
<tr><td>

1. Função Exponencial

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x\,,\ \ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{aligned}$$

</td><td>

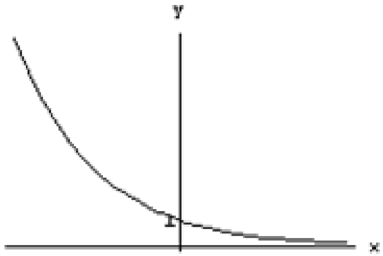
2. Função Logarítmica

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x\,,\ \ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{aligned}$$

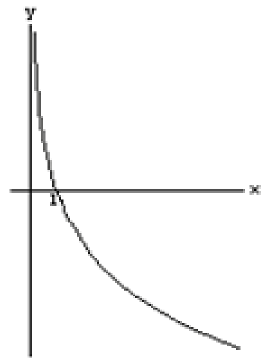
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$0 < a < 1$$

</td></tr>
<tr><td>



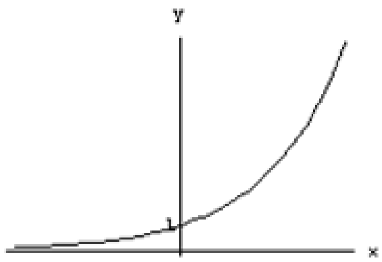
</td><td>



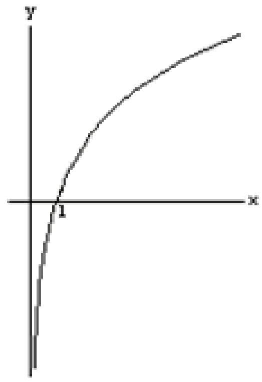
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$a > 1$$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>



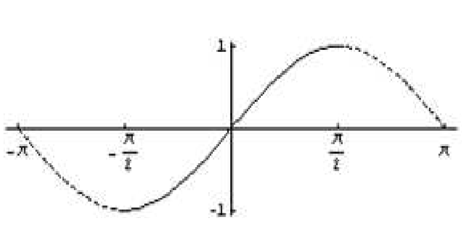
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Funções Trigonométricas

</td></tr>
<tr><td>

3. Seno

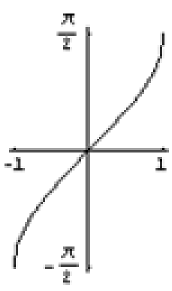
$$\begin{aligned} f : \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right] &\to [-1,\ 1] \\ x &\mapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$



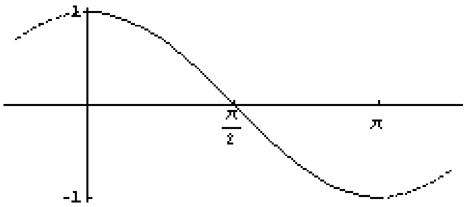
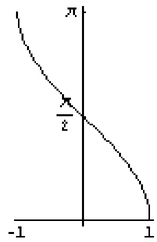
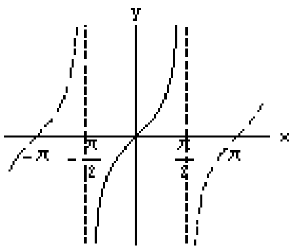
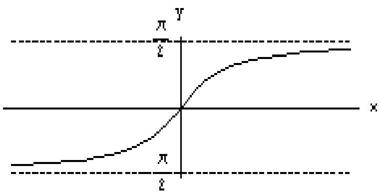
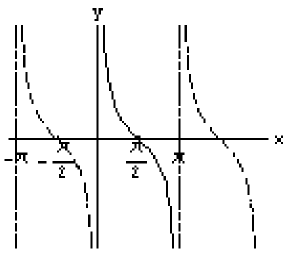
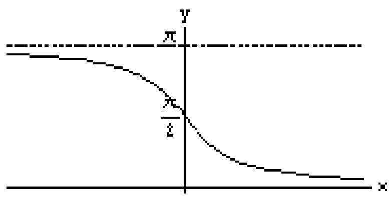
</td><td>

4. Arco Seno

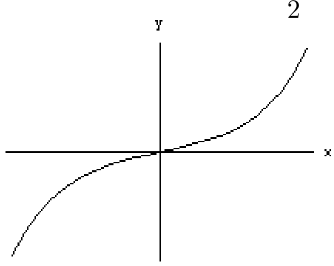
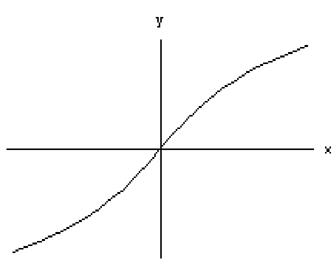
$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1{,}1] &\to \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

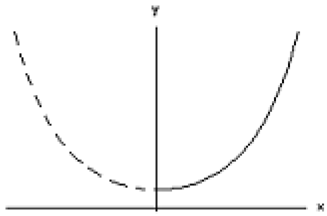
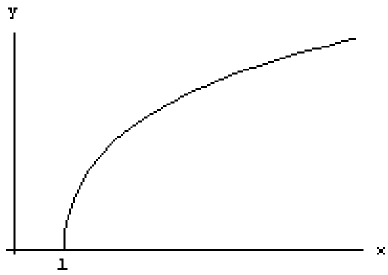
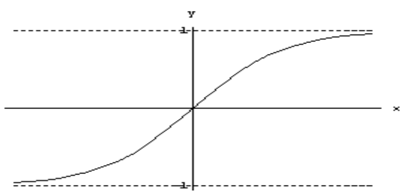
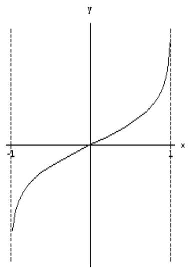
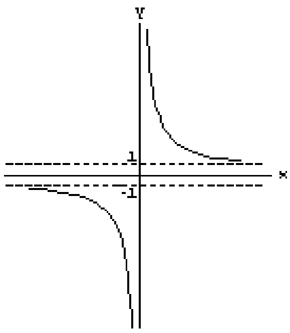
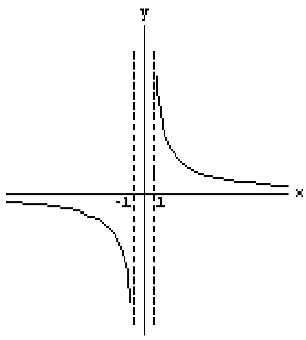


</td></tr>
</table>

Função	**Função Inversa**
5. Cosseno $f : [0,\pi] \to \left[-1{,}1\right]$ $x \mapsto \cos x$ 	**6. Arco Cosseno** $f^{-1} : [-1{,}1] \to [0,\pi]$ $x \mapsto \arccos x$ 
7. Tangente $f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ 	**8. Arco Tangente** $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ 
9. Cotangente $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ 	**10. Arco Cotangente** $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ $x \mapsto \operatorname{arcotg} x$ 

Funções Hiperbólicas

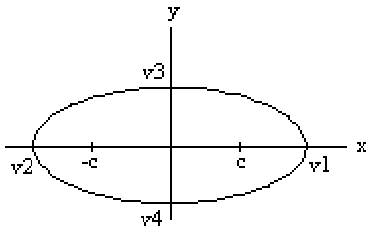
11. Seno Hiperbólico $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 	**12. Argumento Seno Hiperbólico** $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \operatorname{argsh} x$ 

Função	Função Inversa
13. Cosseno Hiperbólico $f : \mathbb{R}_0^+ \to [1,+\infty[$ $x \mapsto \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 	**14. Argumento Cosseno Hiperbólico** $f^{-1} : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ $x \mapsto \operatorname{argch} x$ 
15. Tangente Hiperbólica $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ $x \mapsto \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ 	**16. Argumento Tangente Hiperbólica** $f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto \operatorname{argth} x$ 
17. Cotangente Hiperbólica $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $x \mapsto \coth x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ 	**18. Argumento Cotangente Hiperbólica** $f^{-1} :]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $x \mapsto \operatorname{argcoth} x$ 

Cónicas

Elipse é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$2a$ = comprimento do eixo maior

$2b$ = comprimento do eixo menor

$2c$ = distância entre os focos

$c^2 = a^2 - b^2$

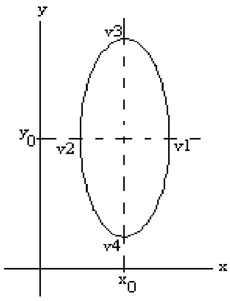
Focos: $F_1 = (c,0)$ e $F_2 = (-c,0)$

Vértices: $v_1 = (a,0)$, $v_2 = (-a,0)$

$v_3 = (0,b)$, $v_4 = (0,-b)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$2a$ = comprimento do eixo menor

$2b$ = comprimento do eixo maior

$2c$ = distância entre os focos

$c^2 = b^2 - a^2$

Focos: $F_1 = (x_0, y_0 + c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 - c)$

Vértices: $v_1 = (x_0 + a, y_0)$, $v_2 = (x_0 - a, y_0)$

$v_3 = (x_0, y_0 + b)$, $v_4 = (x_0, y_0 - b)$

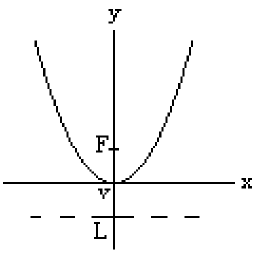
Excentricidade: $e = \dfrac{c}{b}$

Obs. A **circunferência** é um caso particular da elipse, em que $a = b = r$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Parábola é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma recta fixa L (directriz).

Excentricidade: $e = 1$; p = distância do foco à directriz

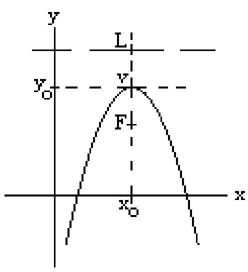


$x^2 = 2py$

Foco: $F = \left(0, {}^{p}\!/_{2}\right)$

Directriz: $y = -{}^{p}\!/_{2}$

Vértice: $v = (0,0)$

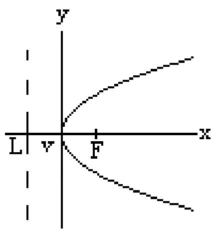


$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$

Foco: $F = \left(x_0, y_0 - {}^{p}\!/_{2}\right)$

Directriz: $y = y_0 + {}^{p}\!/_{2}$

Vértice: $v = (x_0, y_0)$

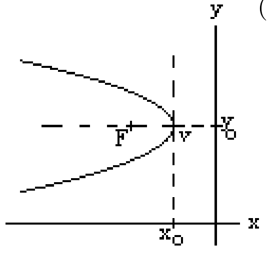


$y^2 = 2px$

Foco: $F = \left({}^{p}\!/_{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -{}^{p}\!/_{2}$

Vértice: $v = (0,0)$



$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$

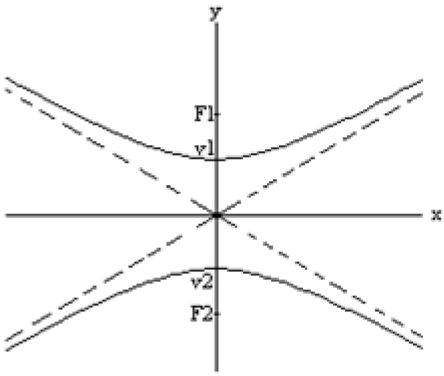
Foco: $F = \left(x_0 - {}^{p}\!/_{2}, y_0\right)$

Directriz: $x = x_0 + {}^{p}\!/_{2}$

Vértice: $v = (x_0, y_0)$

Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e menor que a distância entre eles.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



$2a =$ comprimento do eixo não transverso

$2b =$ comprimento do eixo transverso

$2c =$ distância entre os focos

$$c^2 = a^2 + b^2$$

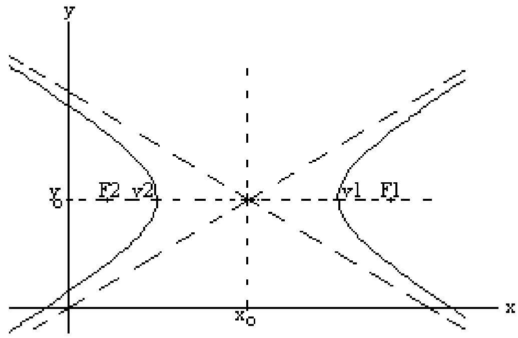
Focos: $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$

Vértices: $v_1 = (0, b)$, $v_2 = (0, -b)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{b}$

Assímptotas: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



$2b =$ comprimento do eixo não transverso

$2a =$ comprimento do eixo transverso

$2c =$ distância entre os focos

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Focos: $F_1 = (x_0 + c, y_0)$, $F_2 = (x_0 - c, y_0)$

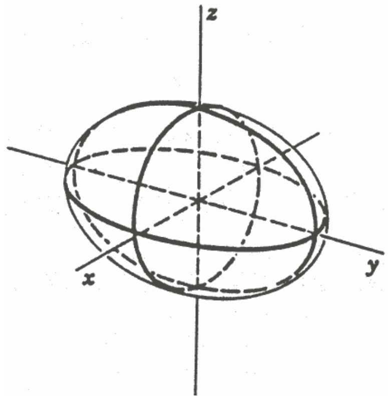
Vértices: $v_1 = (x_0 + a, y_0)$, $v_2 = (x_0 - a, y_0)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{b}$

Assímptotas: $y - y_0 = \pm \dfrac{b}{a}(x - x_0)$

Superfícies Quádricas

Elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

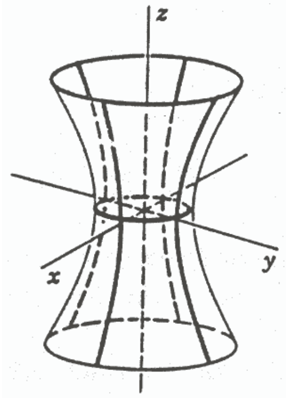


Intersecção com os planos coordenados:

$z=0$	elipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$x=0$	elipse	$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
$y=0$	elipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Obs. A **superficíe esferica** de centro na origem é um caso particular de elipsóide com $a=b=c$

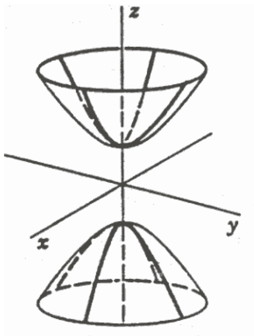
Hiperbolóide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



Intersecção com os planos coordenados:

$z=0$	elipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$x=0$	hipérbole	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
$y=0$	hipérbole	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

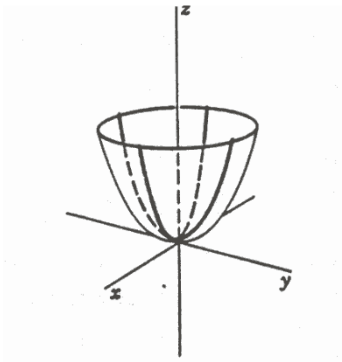
Hiperbolóide de duas folhas $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



Intersecção com os planos coordenados:

$z=0$	a intersecção é vazia	
$x=0$	hipérbole	$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$y=0$	hipérbole	$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$

Parabolóide Elíptico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-z=0$



Intersecção com os planos coordenados:

$z=0$	origem	$(0,0,0)$
$x=0$	parábola	$z=\dfrac{y^2}{b^2}$
$y=0$	parábola	$z=\dfrac{x^2}{a^2}$

Intersecção com um plano pararelo ao plano xoy

$z=z_0>0$	elipse	$z_0=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

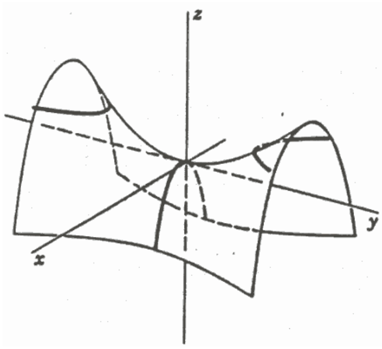
Parabolóide Hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - z = 0$

Intersecção com os planos coordenados:

$x = 0$	parábola	$z = \frac{y^2}{b^2}$
$y = 0$	parábola	$z = -\frac{x^2}{a^2}$
$z = 0$	rectas	$y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

Intersecção com um plano pararelo ao plano xoy :

$z = z_0$	hipérbole	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z_0$



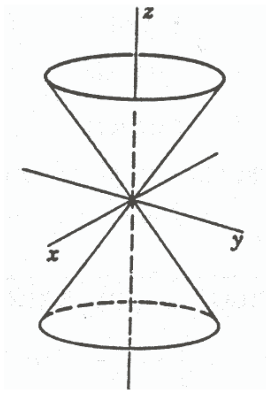
Cone Elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Intersecção com os planos coordenados:

$z = 0$	A intersecção é a origem	
$x = 0$	rectas	$z = \frac{c}{b}y$ e $z = -\frac{c}{b}y$
$y = 0$	rectas	$z = \frac{c}{a}x$ e $z = \frac{c}{a}x$

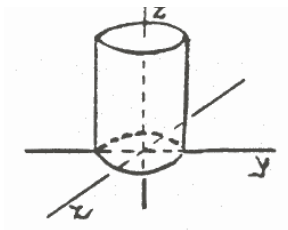
Intersecção com um plano pararelo ao plano xoy :

$z = z_o$	elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}$



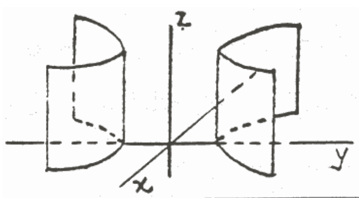
Cilindro Elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro Hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro Parabólico

$$y^2 = ax$$