Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática 2020/2021**

1. Funções reais de variável real — Aulas TP+P: Folha 1

Curvas de referência, transformações gráficas, domínios, função inversa e resolução de equações

---

1. Faça um esboço das seguintes curvas e confirme a sua resposta recorrendo ao Geogebra:

a) $y = x$; b) $y = x - 1$; c) $y = 2x - 2$;

d) $y = x^2$; e) $y = x^2 - 1$; f) $y = x^2 - 2x + 1$;

g) $x = y^2 + 1$; h) $x^2 + y^2 = 1$; i) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$;

j) $y = \cos(x)$; k) $y = \cos(x) - 1$; l) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

m) $y = 2\cos(x)$; n) $y = -\cos(x)$; o) $y = \sin(x)$;

p) $y = e^x$; q) $y = e^x - 1$; r) $y = e^{x-1}$;

s) $y = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$; t) $y = |x|$; u) $y = |x - 1|$.

Transformações gráficas ($a > 0$), a partir de uma função de referência $y = f(x)$:

$y = f(x \pm a)$	translação horizontal	$\rightarrow$ se $-a$, $\leftarrow$ se $+a$
$y = f(x) \pm a$	translação vertical	$\uparrow$ se $+a$, $\downarrow$ se $-a$
$y = f(a\,x)$	contração/dilatação horizontal	dilatação se $0 < a < 1$, contração se $a > 1$
$y = a\,f(x)$	contração/dilatação vertical	contração se $0 < a < 1$, dilatação se $a > 1$
$y = f(-x)$	reflexão relativamente ao eixo Ox	
$y = -f(x)$	reflexão relativamente ao eixo Oy	

Comandos **Geogebra:**

- Definir uma função $y = f(x)$: `f(x):= <expressão em x>`
- Definir uma curva $f(x,y) = 0$: `<condição (igualdade) em x e y>`
- Módulo: `abs( <expressão> )`
- Função por ramos $y = \begin{cases} f(x), & \text{condição} \\ g(x), & \text{c.c.} \end{cases}$: `Se( <condição para f(x)>, <f(x)>, <g(x)> )`

2. Determine, analiticamente, o domínio das seguintes funções e confirme a sua resposta recorrendo ao Geogebra:

a) $f(x) = x - 1$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = \sin(x)$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$;

g) $f(x) = \sqrt{x - 1}$; h) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Domínios de referência:

$f(x) = \dfrac{\bullet}{\blacksquare}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{\blacksquare}$, com n par	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \geq 0\}$
$f(x) = \log_a(\blacksquare)$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare > 0\}$
funções trigonométricas inversas	ver tabelas de Matemática

Comandos **Geogebra:**

- Resolver equações ou inequações: `Resolver( <Equação ou inequação>, <Variável> )`
- Raiz quadrada: `sqrt( <expressão> )`
- Raiz de índice n: `( <expressão> )`$\wedge(1/n)$
- Separador entre equações, inequações ou condições: `&&`
- Representar a região plana $a \leq x \leq b$: `a<= x <= b`
- Representar uma região plana $f(x) \leq y \leq g(x)$: `f(x)<= y <= g(x)`

3. Determine a função inversa de cada uma das seguintes funções, numa restrição conveniente.

a) $f(x) = x - 1\,;$ b) $f(x) = \sqrt{x}\,;$ c) $f(x) = x^2\,;$
d) $f(x) = \sin(x)\,;$ e) $f(x) = \cos(2x) + 1\,;$ f) $f(x) = \arcsin(x-1) + \pi\,;$
g) $f(x) = e^x\,;$ h) $f(x) = e^{2x} - 1\,;$ i) $f(x) = \ln(-x) + 1\,.$

Sugestões para realizar a análise no **Geogebra:**

i) represente o gráfico da função $f(x)$;
ii) determine, analiticamente, a restrição principal do domínio da função $f(x)$ (contradomínio de $f^{-1}(x)$);
iii) defina a restrição da função: `Função( <expressão>, <`x` inicial>, <`x` final> )`
iv) determine a expressão analítica da função inversa: `Resolver( <y=f(x)>, <`x`> )`
v) determine, analiticamente, a restrição principal do domínio da função inversa $f^{-1}(x)$;
vi) represente o gráfico da função inversa $f^{-1}(x)$;
vii) confirme que os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são simétricos relativamente à reta $y = x$.

4. Determine os domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln(x+1)\,;$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}\,;$ c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}\,.$
d) $f(x) = \sin(2x)\,;$ e) $f(x) = \arcsin(2x)\,;$ f) $f(x) = \operatorname{tg}(x)\,.$

5. Calcule o valor das seguintes expressões numéricas:

a) $\sqrt{3^2+4^2}\,;$ b) $\sqrt{e^6}\,;$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}}\,;$
d) $\log(100)\,;$ e) $\ln(e^4)\,;$ f) $e^{2\ln(4)}\,;$
g) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right);$ h) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right);$ i) $\sin\left(\dfrac{13\pi}{3}\right);$
j) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right);$ k) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\right);$ l) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{10\pi}{3}\right);$
m) $\arcsin(-1)\,;$ n) $\arccos(-1)\,;$ o) $\cos\big(\arcsin(0)\big)\,;$
p) $\arccos\big(\sin(\pi)\big)\,;$ q) $\arccos\left(\cos(\tfrac{\pi}{5})\right);$ r) $\arccos(e^0)\,;$

Comandos **Geogebra:**

- Usar a folha CAS
- Para calcular ou simplificar basta inserir a expressão em causa

- Simplificação de expressões: `Simplificar( <expressão> )`
- símbolo π: `pi`
- exponencial e^x: `exp( <expressão> )`

6. Simplifique a seguinte expressão:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x-\pi)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

7. Considere a função $\quad f(x)=3\sin(2x)\,.$

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

   (b) Faça um esboço do gráfico da função $f(x)$ e confirme a resposta da alínea (a).

   (c) Determine o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   (d) Resolva a equação $f(x)=-3\,.$

   (e) Interprete graficamente a alínea (d) e confirme a solução recorrendo o Geogebra.

   (f) Defina uma restrição de injectividade de f e caracterize a função inversa, nessa restrição.

Comandos **Geogebra:**

- Calcular o valor de $f(a)$, estando a função $f(x)$ já definida: `f( <valor> )`
- Representar o ponto $\big(a,\ f(a)\big)$: `( <valor>, <f(valor)> )`

8. Considere a função $\quad f(x)=-\frac{\pi}{3}+\arccos(3x-1)\,.$

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

   (b) Determine os zeros da função $f(x)$.

   (c) Calcule $f\left(\frac{1}{6}\right)$.

   (d) Caracterize a função inversa de $f(x)$, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

9. Considere a função $\quad f(x)=3+2\ln(x-1)\,.$

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

   (b) Calcule $f(2)$.

   (c) Caracterize a função inversa de $f(x)$, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

10. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações:

    a) $x^2-2x+1=0\,;$ b) $x^3-2x^2+x=0\,;$ c) $x^3-3x^2+3x-1=0\,.$

    d) $e^x-1=0\,;$ e) $e^{2x}-e^x=0\,;$ f) $e^{2x}-3e^x+2=0\,;$

    g) $-3+\log(x)=0\,;$ h) $\ln(x+1)=0\,;$ i) $\ln(x^2)-4=0\,;$

    j) $\sin(3x-\pi)=\frac{1}{2}\,;$ k) $\sin(3x-\pi)=\sin(x)\,;$ l) $1-2\cos(2x)=2\,;$

    m) $\arcsin(3x)=\frac{\pi}{4}\,;$ n) $\arcsin(3x)=\pi\,;$ o) $\arccos(3x)=\pi\,.$

11. Verifique que as seguintes equações têm uma única solução e aproxime-a, com uma casa decimal correcta.

    a) $x+e^x=0\,;$ b) $\sin(x)-x+2=0\,;$ c) $x+\ln(x)=0\,.$

Sugestões para realizar a análise e cálculo no **Geogebra:**

i) localize e separe todas as soluções da equação, recorrendo ao gráfico da função $f(x)$;

ii) defina um intervalo que contenha a solução pretendida e onde sejam válidas as condições de convergência do método numérico a utilizar (bisseção ou Newton);

iii) recorrendo à folha CAS, itere até obter a aproximação pretendida.

- bisseção: calcular o ponto médio x_n e escolher o sub-intervalo com extremos de sinal diferente
- Newton: calcular o valor de $x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Formulário

Objectivo: determinar a solução x da equação $f(x) = 0$ que pertence ao intervalo $[a, b]$

Método da bisseção: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ com $\Delta x_n \leq |x_n - x_{n-1}|$

Método de Newton: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $n = 1, 2, \ldots$ com $\Delta x_n \approx |x_n - x_{n-1}|$

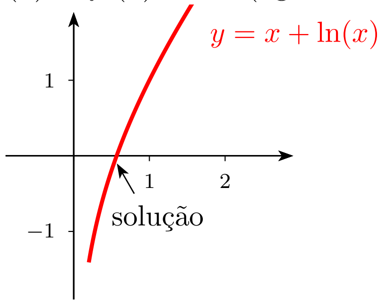
x	$\sqrt{x}$	x^2	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
−1.00	–	1.00	0.37	–	−1.00	−0.84	0.54
−0.90	–	0.81	0.41	–	−1.11	−0.78	0.62
−0.80	–	0.64	0.45	–	−1.25	−0.72	0.70
−0.75	–	0.56	0.47	–	−1.33	−0.68	0.73
−0.70	–	0.49	0.50	–	−1.43	−0.64	0.76
−0.60	–	0.36	0.55	–	−1.67	−0.56	0.83
−0.50	–	0.25	0.61	–	−2.00	−0.48	0.88
−0.40	–	0.16	0.67	–	−2.50	−0.39	0.92
−0.30	–	0.09	0.74	–	−3.33	−0.30	0.96
−0.25	–	0.06	0.78	–	−4.00	−0.25	0.97
−0.20	–	0.04	0.82	–	−5.00	−0.20	0.98
−0.10	–	0.01	0.90	–	−10.00	−0.10	1.00
0.00	0.00	0.00	1.00	–	–	0.00	1.00
0.10	0.32	0.01	1.11	−2.30	10.00	0.10	1.00
0.20	0.45	0.04	1.22	−1.61	5.00	0.20	0.98
0.25	0.50	0.06	1.28	−1.39	4.00	0.25	0.97
0.30	0.55	0.09	1.35	−1.20	3.33	0.30	0.96
0.40	0.63	0.16	1.49	−0.92	2.50	0.39	0.92
0.50	0.71	0.25	1.65	−0.69	2.00	0.48	0.88
0.60	0.77	0.36	1.82	−0.51	1.67	0.56	0.83
0.70	0.84	0.49	2.01	−0.36	1.43	0.64	0.76
0.75	0.87	0.56	2.12	−0.29	1.33	0.68	0.73
0.80	0.89	0.64	2.23	−0.22	1.25	0.72	0.70
0.90	0.95	0.81	2.46	−0.11	1.11	0.78	0.62
1.00	1.00	1.00	2.72	0.00	1.00	0.84	0.54

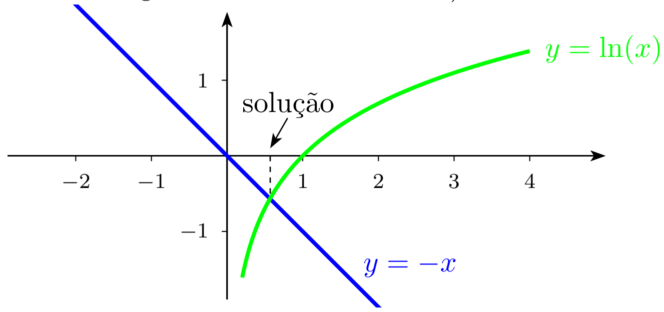
Exercício 11 (c): sugestão de resolução

Comecemos por localizar e separar as soluções da equação, recorrendo ao método gráfico. Atendendo a que

$$\underbrace{x+\ln(x)}_{f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\ln(x)}_{f_1(x)} = \underbrace{-x}_{f_2(x)},$$

então as soluções da equação correspondem aos zeros da função $f(x)$ (figura da esquerda - método gráfico na forma simplificada) ou, equivalentemente, às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x)=\ln(x)$ e $f_2(x)=-x$ (figura da direita - método gráfico na forma clássica).





De qualquer dos gráficos anteriores, verifica-se que a equação tem uma única solução e que essa solução pertence ao intervalo $[0.1, 1]$ (note-se que o domínio $]0, +\infty[$ da equação não inclui o valor $x=0$!).

Vamos determinar aproximações, para essa solução, recorrendo aos métodos da bisseção e de Newton. De acordo com o enunciado, pretende-se que as aproximações sejam tais que $\Delta x \leq 0.05$ (1 casa decimal correta).

MÉTODO DA BISSEÇÃO:

Resolução com utilização de calculadora: $f(x)=x+\ln(x)$

n	$[a,b]$	x_n	$f(a)$	$f(x)$	$f(b)$	Δx_n
1	$[0.1,\ 1]$	$x_1 = 0.55$	$f(0.1) \simeq -2.2$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(1)=1$	$\lvert 0.55-0.1\rvert = 0.45$
2	$[0.55,\ 1]$	$x_2 = 0.775$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(0.775) \simeq 0.52$	$f(1)=1$	$\lvert 0.775-0.55\rvert = 0.225$
3	$[0.55,\ 0.775]$	$x_3 = 0.6625$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(0.6625) \simeq 0.25$	$f(0.775) \simeq 0.52$	$\lvert 0.6625-0.55\rvert = 0.1125$
4	$[0.55,\ 0.6625]$	$x_4 = 0.60625$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(0.60625) \simeq 0.11$	$f(0.6625) \simeq 0.25$	$\lvert 0.60625-0.55\rvert = 0.05625$
5	$[0.55,\ 0.60625]$	$x_5 = 0.578125$				$\lvert 0.578125-0.55\rvert = 0.028125$

Neste caso, tem-se $\overline{x}=0.57$, com $\Delta x \leq 0.05$.

Resolução sem utilização de calculadora: neste caso, todos os cálculos terão que ser efectuados com recurso à tabela dada no formulário, pelo que é necessário efectuar algumas adaptações ao método. Uma vez que a tabela só tem uma quantidade finita de valores (na sua maioria apenas com 1 casa decimal), sempre que o valor de x_n tiver mais casas decimais que os valores apresentados na tabela, teremos que arredondar o valor obtido. Nessas condições, o ponto calculado não será exactamente o ponto médio do intervalo, pelo que o majorante para o erro também não será metade da amplitude do intervalo, mas sim a amplitude do último semi-intervalo que contém a solução.

n	$[a,\ b]$	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$	Δx_n
1	$[0.1,\ 1]$	$x_1 = 0.55 \simeq 0.6$	$f(0.1)=0.1+\ln(0.1) \simeq -2.20$	$f(0.6)=0.6+\ln(0.6) \simeq 0.09$	$f(1)=1$	$\lvert 0.6-0.1\rvert = 0.5$
2	$[0.1,\ 0.6]$	$x_2 = 0.35 \simeq 0.4$	$f(0.1) \simeq -2.20$	$f(0.4)=0.4+\ln(0.4) \simeq -0.52$	$f(0.6) \simeq 0.09$	$\lvert 0.6-0.4\rvert = 0.2$
3	$[0.4,\ 0.6]$	$x_3 = 0.5$	$f(0.4) \simeq -0.52$	$f(0.5)=0.5+\ln(0.5) \simeq -0.19$	$f(0.6) \simeq 0.09$	$\lvert 0.5-0.4\rvert = 0.1$
4	$[0.5,\ 0.6]$	$x_4 = 0.55$				$\lvert 0.55-0.5\rvert = 0.05$

Neste caso, tem-se $\overline{x}=0.55$, com $\Delta x \leq 0.05$.

Método de Newton:

Resolução com utilização de calculadora: $f(x) = x + \ln(x)$ e $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

n	x_n	Δx_n
0	$x_0 = 0.1$	–
1	$x_1 = 0.1 - \frac{f(0.1)}{f'(0.1)} \simeq 0.3$	$\lvert 0.3 - 0.1 \rvert = 0.2$
2	$x_2 = 0.3 - \frac{f(0.3)}{f'(0.3)} \simeq 0.51$	$\lvert 0.51 - 0.3 \rvert = 0.21$
3	$x_3 = 0.51 - \frac{f(0.51)}{f'(0.51)} \simeq 0.57$	$\lvert 0.57 - 0.51 \rvert = 0.06$
3	$x_4 = 0.57 - \frac{f(0.57)}{f'(0.57)} \simeq 0.57$	$\lvert 0.57 - 0.57 \rvert = 0.00*$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.57$, tal que $\Delta x \simeq 0.05$.

Resolução sem utilização de calculadora: tal como no método da bissecção, poderá ser necessário efectuar arredondamentos nas aproximações calculadas, sempre que os valores obtidos não constarem da tabela.

n	x_n	Δx_n
0	0.1	–
1	$x_1 = 0.1 - \frac{f(0.1)}{f'(0.1)} = 0.1 - \frac{0.1+\ln(0.1)}{1+\frac{1}{0.1}} \simeq 0.1 - \frac{-2.2}{11} = 0.3$	$\lvert 0.3 - 0.1 \rvert = 0.2$
2	$x_2 = 0.3 - \frac{f(0.3)}{f'(0.3)} = 0.3 - \frac{0.3+\ln(0.3)}{1+\frac{1}{0.3}} \simeq 0.3 - \frac{-0.9}{4.33} \simeq 0.51$	$\lvert 0.51 - 0.3 \rvert = 0.21$
2	$x_3 \simeq 0.5 - \frac{0.5+\ln(0.5)}{1+\frac{1}{0.5}} \simeq 0.5 - \frac{-0.19}{3} \simeq 0.56$	$\lvert 0.56 - 0.51 \rvert = 0.05$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.56$, tal que $\Delta x \simeq 0.05$.