Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Exercícios de Revisão sobre Números Complexos

No que se segue, representaremos por i a unidade imaginária: $i = \sqrt{-1}$. Usaremos ainda a fórmula de Euler para representar os números complexos na chamada forma polar (ou trigonométrica): $\rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

1. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem:
   (a) $(2 + xi)(3 - 2i) = 12 + 5i$;
   (b) $(2 + xi)^2 = 4$.

2. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma algébrica $a + bi$:
   (a) $(3 - 2i)(1 + i) + |3 + 4i|$;
   (b) $\frac{3-2i}{1-i} - \frac{3-7i}{2-3i}$.

3. Determine $z \in \mathbb{C}$ por forma a que:
   (a) $z^2 = 3 - 4i$;
   (b) $z(2 - i) = (\overline{z} + 1)(1 + i)$.

4. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma polar $\rho e^{i\theta}$. Represente no plano d'Argand.
   (a) $z = 3 - 3i$;
   (b) $z = -6i$;
   (c) $z = \sqrt{3} + i$.

5. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma algébrica $a + bi$. Represente no plano d'Argand.
   (a) $z = e^{7i\pi/3}$;
   (b) $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$;
   (c) $z = 2\sqrt{3}e^{-2i\pi/6}$.

6. Determine as raízes das seguintes equações:
   (a) $x^2 - x + (1 - i) = 0$;
   Sugestão:
   - Use a fórmula resolvente para obter $x = \frac{1 \pm w}{2}$, onde $w = \sqrt{-3 + 4i}$ (e, consequentemente, $w^2 = -3 + 4i$);
   - Faça $w = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), substitua na igualdade $w^2 = -3+4i$, e obtenha o sistema $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$;
   - Resolva o sistema anterior e conclua que as suas únicas soluções reais são $b = 2 \wedge a = 1$ ou $b = -2 \wedge a = -1$;
   - Conclua que $x = 1 + i$ ou $x = -i$.

   (b) $x^2 - 3(1 - i)x - 5i = 0$;
   (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
   (d) $x^2 + 9 = 0$;
   (e) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

7. Utilize as fórmulas de De Moivre para calcular:
   (a) $(2 + 2i)^4$; **Sugestão:** Repare que $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$...
   (b) $(1 - i)^3$;
   (c) $\sqrt[3]{1 + i}$;
   (d) $\sqrt[4]{-1}$. **Sugestão:** Repare que $-1 = e^{i\pi}$...