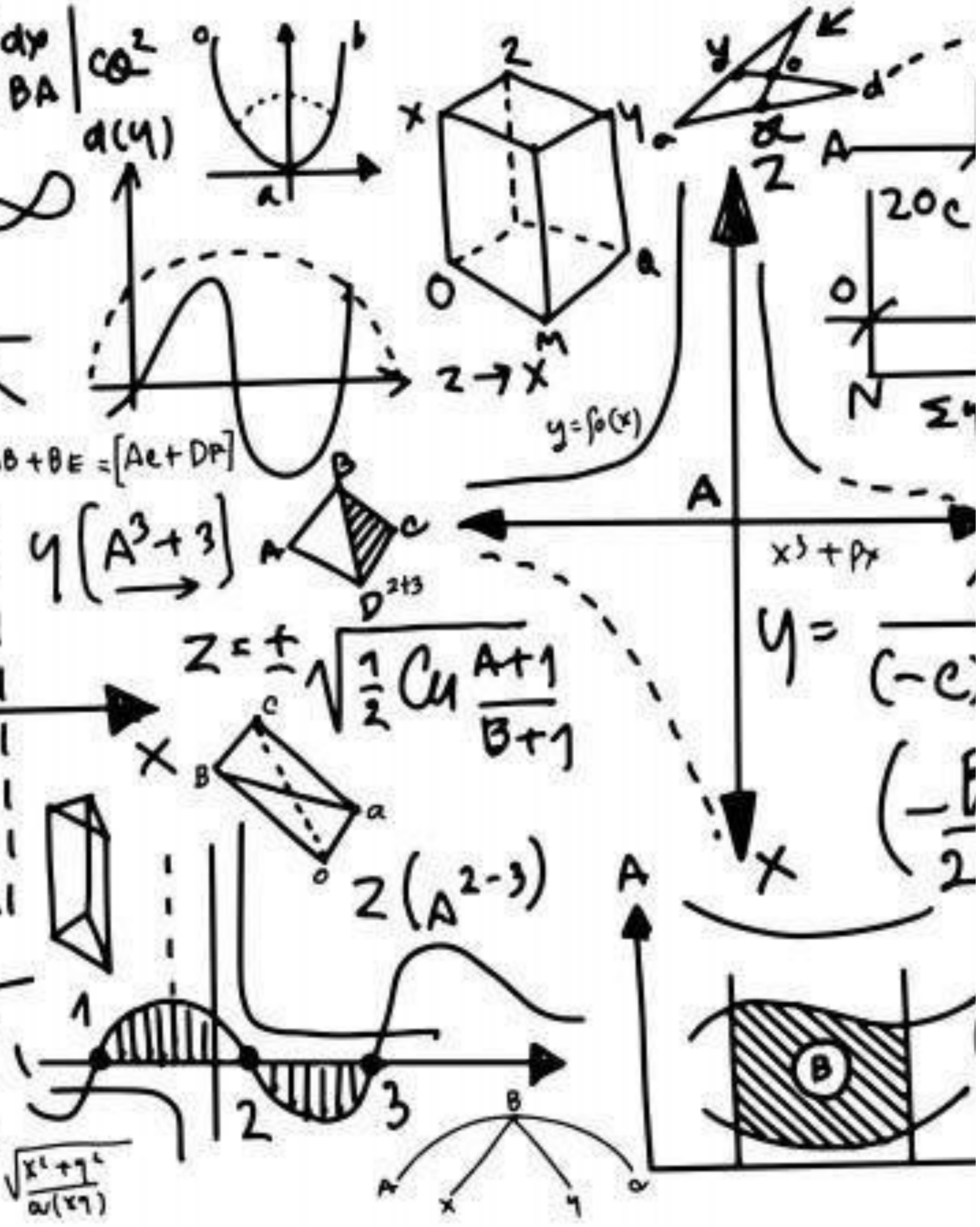


EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Profª Tatiane Reis

MOTIVAÇÃO

A busca por zeros de funções:

em diversas áreas da ciência, surgem modelos matemáticos definidos por uma equação do tipo f(x) = 0.

Algumas funções podem ter suas raízes calculadas analiticamente, porém outras são de difícil solução ou de solução desconhecida (polinômios de ordem maior que 3, por exemplo), sendo necessário a solução por métodos numéricos

Desejamos portanto encontrar um valor ξ para x tal que $f(\xi) = 0$

Iremos discutir métodos numéricos de implementação computacionalmente viável para encontrar um valor para ξ dentro de um intervalo com uma precisão razoável.

INTRODUÇÃO

Localizar ou isolar uma região que contenha a raiz e definir um valor aproximado inicial (Analise Gráfica, estudo do sinal, ...)

Refinamento ou seja melhorar sucessivamente a aproximação inicial obtida na fase anterior, até se obter uma aproximação para a raiz real dentro de uma precisão ε prefixada

ALGORITMO: BUSCA INCREMENTAL

REFINAMENTO

Há vários métodos para refinamento da raiz:

i) Método da Bissecção

ii) Método da Posição Falsa

iii) Método do Ponto Fixo

iv) Método de Newton-Rapson

v) Método da Secante

Todos pertencem a classe dos métodos iterativos. Eles fornecem uma aproximação da raiz.

CRITÉRIOS DE PARADA

Existem vários tipo de critérios de parada

- Analise do valor da função: $\left|f(x)\right| < \delta$
- Erro absoluto: $\left|x_i - x_{i-i}\right| < \delta$
- Erro relativo: $\left|\dfrac{x_i - x_{i-i}}{x_i}\right| < \delta$
- Limites do intervalo: $\dfrac{b-a}{2} < \delta$

PSEUDO-CÓDIGO

```
Ler dados iniciais
Realizar cálculos e aproximação iniciais
k = 1
Enquanto o critérioSatisfeito e k < limMax
   criterioSatisfeito = calcularNovaAproximacao
     k = k + 1
Fim enquanto
ExibirResultados
```

FASE 1

FASE 2

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Supondo uma aproximação x_0 para a raiz de f(x), no ponto (x_0, f(x_0)) passa apenas uma única reta tangente, que é a derivada de f(x) em x_0. Esta reta tangente corta o eixo x na coordenada x_1,definindo por sua vez, o ponto (x_1, f(x_1))

Por este novo ponto também passa uma única reta tangente que corta o eixo x em x_2. Esta nova coordenada define outro ponto (x_2, f(x_2)) que repete todo o processo

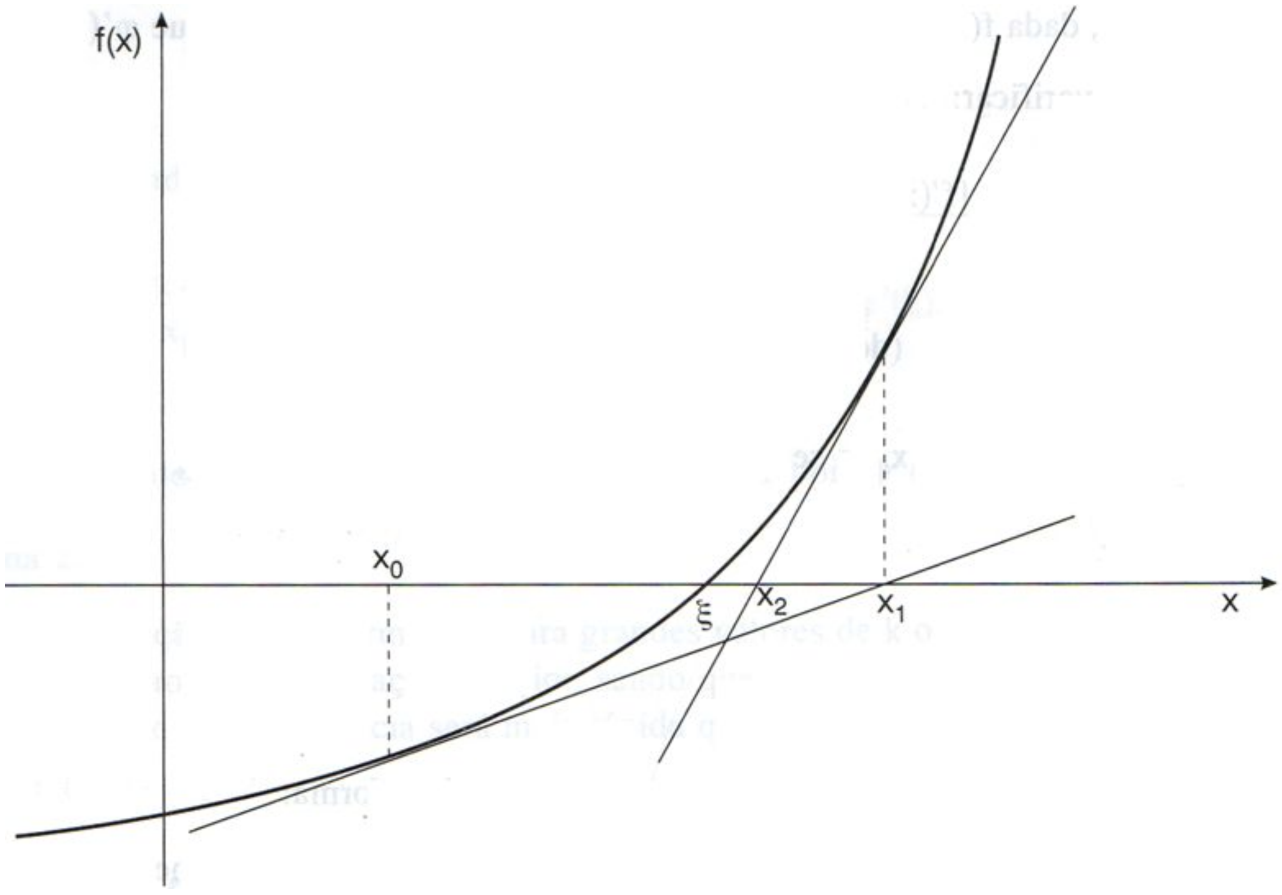
x_0,x_1,... são aproximações cada vez melhores para a raiz da função, o X_{k+1} pode ser obtido a partir do X_k através da função:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Entrada: Valor da aproximação, x_0 para a raiz r e o limite de erro, δ.
Saída: Valor aproximado da raiz da função, $\tilde{r}$, ou mensagem de erro
for $n = 0$ até N_{max} **do**
  Calcular $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
  if $\left|\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \delta$ **then**
    Apresente x_{n+1} como raiz; FIM
  end if
  Fazer $x_n = x_{n+1}$
end for
Método falhou em n iterações; FIM

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (FORMULAÇÃO E ANÁLISE GRÁFICA)



Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Convergência

- Caso se escolha x_0 de forma que x_1 saia do intervalo [a,b] o método poderá não convergir.

Ex: Ache a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln(x)$

para o erro relativo $\delta = 0,01 \ e \ [0,5; \ 1]$, ou seja:

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < \delta$$

Se

$$f(x) = x^2 + \ln(x)$$

Então

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

x_0=0,5

$$x1 = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}44}{3} = 0{,}65$$

$$x2 = 0{,}65 - \frac{f(0{,}65)}{f'(0{,}65)} = 0{,}65 \longrightarrow \left|\frac{0{,}65 - 0{,}65}{0{,}65}\right| < 0{,}01$$

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Vantagens:

- Simples
- Rápida convergência

Desvantagens:

- Nem sempre converge
- Necessidade de se conhecer a derivada da função
- Muito sensível à estimativa inicial
- Se a derivada for nula o método falha

SISTEMAS NÃO LINEARES

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

A solução de um sistema não-linear consiste em determinar pontos no subespaço do problema que solucione o conjunto de equações. Os pontos de solução estão na intersecção das curvas que representam as equações.

O processo de solução a ser visto é uma generalização do Método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares.

Na solução de sistemas lineares viu-se que tem-se apenas três tipos de solução: solução única, infinitas soluções e não existe solução. No caso de sistemas não lineares a leque de respostas é maior, no qual pode-se ter de zero a infinitas soluções.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0
\end{aligned}$$

O sistema pode ser representado de forma vetorial:

$$F(\underline{x}) = \underline{0}$$

onde: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$

O processo é semelhante ao caso escalar, no qual utiliza-se da expansão em Série de Taylor vetorial no ponto $\underline{x}^{(0)}$.

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)})$$

onde:

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}
\end{bmatrix}$$

é chamada de matriz Jacobiana.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Igualando-se a zero, chega-se ao processo iterativo para sistemas de equações não-lineares:

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$$

que de forma genérica torna-se:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \left[J(\underline{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\underline{x}^{(k)})$$

Fazendo $\underline{\Delta x}^{(k)} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$, tem-se:

$$\underline{\Delta x}^{(k)} = -\left[J(\underline{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\underline{x}^{(k)})$$

Pré multiplicando a equação vetorial por $\left[J(\underline{x}^{(0)})\right]$, tem-se:

$$J(\underline{x}^{(k)})\underline{\Delta x}^{(k)} = -F(\underline{x}^{(k)})$$

A solução é obtida quando o critério de convergência for satisfeito:

$$\Delta x_i < \varepsilon$$

Observe que tem-se um sistema de equações lineares. Em cada iteração do Método de Newton para sistemas de equações resolve-se um sistema de equações lineares.

EXEMPLO:

Resolver o sistema de equações não-lineares utilizando o Método de Newton-Raphson para um vetor inicial

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^T .$$

$$\begin{cases} x_1^{\;2} + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ 2x_1^{\;2} + x_2^2 - 4x_3 \; = 0 \\ 3x_1^{\;2} - 4x_2 + x_3^2 \; = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO:

O processo iterativo é dado por:

$$J(\underline{x}^{(k)})\underline{\Delta x}^{(k)} = -F(\underline{x}^{(k)})$$

A matriz Jacobiana $J(\underline{x}^{(k)})$ é dada por:

$$J(\underline{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} & 2x_3^{(k)} \\ 4x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} & -4 \\ 6x_1^{(k)} & -4 & 2x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(0)} = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]^T$, tem-se:

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

Para

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}^T$$

$F(\underline{x}^{(0)})$ é calculado por:

$$0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 - 1 = -0{,}25$$

$$2 \times 0{,}5^2 + 0{,}5^2 - 4 \times 0{,}5 \quad = -1{,}25$$

$$3 \times 0{,}5^2 - 4 \times 0{,}5 + 0{,}5^2 \ = -1{,}00$$

$$F(\underline{x}^{(0)}) = [-0{,}25 \quad -1{,}25 \quad -1{,}00]^T$$

Tem-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1{}^{(0)} \\ \Delta x_2{}^{(0)} \\ \Delta x_3{}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 1{,}25 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Resultando em $\underline{\Delta x}^{(o)} = \begin{bmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}125 \end{bmatrix}^T$**.**

Os novos valores do vetor $\underline{x}$ são dados por:

$$\underline{x}^{(1)} = \underline{x}^{(0)} + \underline{\Delta x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}375 \\ 0 \\ -0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}875 \\ 0{,}5 \\ 0{,}375 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

Seguindo o mesmo procedimento, chega-se a:

$$\underline{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}7852 \\ 0{,}4966 \\ 0{,}3699 \end{bmatrix}$$

O processo convergiu para uma tolerância de 10^{-4} em quatro iterações.

SCILAB:

F e JF são funções do Scilab que recebem respectivamente o Sistema e a matriz Jacobiana.

```
function [x]=newton(x0, TOL, N)
x = x0
k = 1
//iteracoes
      while (k <= N) //iteracao de
Newton
      delta = -JF(x)\F(x)
       x = x + delta t=norm(delta,'inf')
      //criterio de parada
      if t<=TOL then
      // Exibir a solução
      disp("Solução encontrada:");
      disp(x);
      disp(k);
      break
      end
       k = k+1
       end
endfunction
```