

Rafael Lima Curi

“Jogos de Roteamento”

CAMPINAS
2013

Abstract

In this work, we study Routing Games. This subclass of games is one of the most studied in the literature and allows us to model several realistic scenarios, in a relatively simple way. For instance, road traffic, freight transportation, telephone networks, computer networks like the Internet, etc. We analyze the main variants of routing games, emphasizing their differences. We compare atomic games versus nonatomic games, unsplittable flow games versus splittable flow games, unweighted games versus weighted games and specific network games versus generic network games. We focus our study on the existence, uniqueness and quantification of the inefficiency of equilibria that emerge from the independent and selfish behaviour of the players.

We study the Wardrop equilibrium for nonatomic games and the Nash equilibrium for atomic games. In the literature, we note that the existence and uniqueness of an equilibrium depends basically on three factors: assumptions on the functions that define the costs of the segments of a route, type of the players (atomic or nonatomic, with equal or different demands), and network topology. We present the main results of inefficiency obtained for the metrics Price of Anarchy (PoA) and Bicriteria Limit. In the results we have considered, we noticed that nonatomic games have lower PoA than the atomic ones, splittable flow games have lower PoA than the unsplittable flow ones, and unweighted games have lower PoA than the weighted ones.

Resumo

Neste trabalho estudamos Jogos de Roteamento. Esta subclasse de jogos é uma das mais estudadas na literatura e permite modelar de forma relativamente simples vários cenários realistas. Por exemplo, tráfego de veículos em rodovias, transporte de mercadorias, redes de telefonia, redes de computadores como a Internet, etc. Analisamos as principais variantes de jogos de roteamento, destacando suas diferenças. Comparamos jogos atômicos *versus* jogos não-atômicos, jogos com fluxo divisível *versus* jogos com fluxo indivisível, jogos com demanda uniforme *versus* jogos com demanda genérica e jogos com redes específicas *versus* jogos com redes genéricas. Focamos nosso estudo na existência, unicidade e quantificação da ineficiência de equilíbrios que emergem do comportamento independente e egoísta dos jogadores.

Estudamos o equilíbrio de Wardrop para jogos não-atômicos e o equilíbrio de Nash para jogos atômicos. Na literatura, notamos que a existência e unicidade de um equilíbrio depende basicamente de três fatores: pressupostos nas funções que definem os custos dos segmentos de uma rota, tipo dos jogadores (atômicos ou não-atômicos, com demandas iguais ou diferentes) e topologia da rede. Apresentamos também os principais resultados de ineficiência obtidos para as métricas Preço da Anarquia (PoA) e Limite de Bicritério. Nos resultados que vimos, observamos que jogos não-atômicos possuem um PoA menor que o de jogos atômicos, jogos com fluxo divisível possuem um PoA menor que o de jogos com fluxo indivisível e jogos com demanda uniforme um PoA menor que o de jogos com demanda genérica.

Sumário

Abstract	ix
Resumo	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
2 Conceitos Gerais de Teoria dos Jogos e Otimização	5
2.1 Jogos e equilíbrio de Nash	5
2.1.1 Modelo de jogos na forma normal	6
2.1.2 Equilíbrio de Nash puro	8
2.1.3 Equilíbrio de Nash misto	9
2.2 Problemas de otimização	12
2.3 Desigualdades variacionais	15
2.4 Função potencial	17
3 Jogos de Roteamento	19
3.1 Modelo	19
3.2 Equilíbrio e ineficiência do equilíbrio	21
3.2.1 Equilíbrio	21
3.2.2 Custo social	26
3.2.3 Preço da Anarquia e Limites de Bicritério	29
4 Jogos Não-atômicos	33
4.1 Equivalência entre jogos não-atômicos com fluxo divisível e fluxo indivisível	33
4.2 Equivalência entre jogos não-atômicos com estratégias puras e mistas	34
4.3 Caracterização de equilíbrio de Wardrop por desigualdades variacionais	34
4.4 Caracterização de um fluxo ótimo em função de um equilíbrio de Wardrop	35
4.5 Existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop	36
4.5.1 Função potencial	36
4.5.2 Prova da existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop	37
4.6 Ineficiência de um equilíbrio de Wardrop	38
4.6.1 Limitante superior para o PoA por função potencial	39
4.6.2 Valor de anarquia β	39
4.6.3 Limites de Bicritério	43
4.6.4 Outros resultados	45
4.7 Jogos capacitados	46

5	Jogos Atômicos com Fluxo Indivisível	47
5.1	Modelo e equilíbrio de Nash puro	47
5.2	Existência e unicidade de um equilíbrio de Nash puro	48
5.2.1	Função potencial para instâncias com demanda uniforme	49
5.2.2	Função potencial para instâncias com demanda genérica e funções de latência afins	50
5.3	Ineficiência de um equilíbrio de Nash	51
5.3.1	Outros resultados	53
5.4	Jogos de congestionamento suaves	54
5.4.1	Jogos de congestionamento	54
5.4.2	Arcabouço da suavidade	55
5.4.3	Exatidão do PoA Robusto	57
5.4.4	Cálculo do PoA Robusto	64
6	Jogos Atômicos com Fluxo Divisível	67
6.1	Existência e unicidade de um equilíbrio de Nash puro	67
6.1.1	Função potencial para instâncias com funções de latência afins	68
6.1.2	Função potencial para instâncias com um único par OD e demanda uniforme	69
6.2	Ineficiência de um equilíbrio de Nash	71
6.2.1	Contraexemplos para resultados de jogos não-atômicos	72
6.2.2	Valor de anarquia β^n	75
6.2.3	Limites de Bicritério	79
6.3	Jogos de congestionamento localmente suaves	81
6.3.1	Suavidade local	82
6.3.2	Exatidão do PoA	83
6.3.3	Cálculo do valor de anarquia $\gamma_l(\mathcal{L}_d)$	85
7	Conclusão	87
A	Resumo dos Resultados	91
A.1	Existência e Unicidade	91
A.2	Preço da Anarquia	92
B	Outros Custos Sociais	93
C	Outras Métricas de Ineficiência	95
C.1	Preço da Estabilidade	95
C.2	Injustiça	95
D	Algoritmos e Complexidade	97
D.1	Jogos não-atômicos	97
D.2	Jogos atômicos com fluxo indivisível	98
D.3	Jogos atômicos com fluxo divisível	99
E	Outros Modelos	101
	Referências Bibliográficas	107

Lista de Tabelas

2.1	Matriz de valores de utilidade para o jogo <i>Dilema do Prisioneiro</i>	7
2.2	Matriz de valores de utilidade para o jogo <i>Par ou Ímpar</i>	9
3.1	Exemplo de fluxo $f = (f^1, \dots, f^n)$, onde cada fluxo f^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por \mathcal{P}_i , e $m_i = \mathcal{P}_i $	20
3.2	Exemplo de fluxo $f = (f^1, \dots, f^n)$, onde cada fluxo f^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por E	20
5.1	Exemplo de vetor $x = (x_{e_1}, \dots, x_{e_m})$, representando o quanto cada recurso está recebendo de carga.	54
5.2	Exemplo de matriz $x = (x^1, \dots, x^n)$ associada a um perfil $s \in \mathcal{S}$, onde cada fluxo x^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por E	54
7.1	Preço da Anarquia Exato para jogos de congestionamento/roteamento com funções de latência polinomiais. Temos que $k = \lfloor \Phi_d \rfloor$	88

Lista de Figuras

2.1	(a) Uma região convexa, onde para quaisquer dois pontos x e y pertencentes à região, o segmento de reta unindo os dois pontos pertence à região. (b) Uma região não-convexa, onde podemos observar dois pontos x e y tais que o segmento de reta que os une contém pontos que não pertencem à região.	14
2.2	(Scutari et al. [99]) (a) Uma função convexa. (b) Uma função estritamente convexa. (c) Uma função fortemente convexa. (d) Uma função monótona. (e) Uma função estritamente monótona. (f) Uma função fortemente monótona.	14
2.3	(Scutari et al. [99]) (a) Um ponto x^* que é uma solução para o problema $DV(\mathcal{K}, F)$. (b) Um ponto x que não é uma solução para o problema $DV(\mathcal{K}, F)$. (c) O ponto x^* é tal que $x^* = \prod_{\mathcal{K}}(x^* - F(x^*))$. (d) Qualquer ponto x , que não é uma solução, é tal que $x \neq \prod_{\mathcal{K}}(x - F(x))$	15
3.1	Instância de um jogo de roteamento.	21
3.2	Instância com dois jogadores atômicos.	25
3.3	Instância atômica com funções de latência afins e dois equilíbrios.	26
3.4	Instância não-atômica com dois equilíbrios.	27
3.5	Instância de Pigou.	29
3.6	Instância de Pigou Não-linear.	30
4.1	O valor $\beta(f_e^{\text{EW}}, l_e)$ corresponde à maior razão entre a área da região cinza, $f_e \cdot (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))$, obtida variando-se f_e , e a área $f_e^{\text{EW}} \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})$	40
4.2	O valor $\beta(f_e^{\text{EW}}, l_e)$ corresponde à maior razão entre a área da região cinza, $f_e \cdot (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))$, obtida variando-se f_e , e a área $f_e^{\text{EW}} \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})$	40
5.1	Instância atômica que não possui um equilíbrio de Nash puro.	48
5.2	Instância atômica com fluxo indivisível e razão de coordenação ilimitada.	53
5.3	(Roughgarden [93]) Os semiplanos que definem a região $\mathcal{A}(\mathcal{L}_x, 2)$ (de cor cinza), onde \mathcal{L}_x é a classe que contém somente a função $l(x) = x$. Aqui, $\gamma(\mathcal{L}_x, 2) = \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\mu}} = \frac{5}{2}$, onde $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ é o ponto de intersecção entre as retas $\lambda + \mu = 2$ e $\lambda + 4\mu = 3$	59
5.4	(a) Instância (G, r, l) de um jogo de roteamento com 3 jogadores e demanda uniforme. Os arcos sem rótulo possuem latência 0. Os rótulos das arestas correspondem ao nome do recurso que representam. Cada aresta possui função de latência $l(x) = \frac{x}{2}$. O nó de cor cinza de nome i corresponde à origem do jogador i , e o nó com a borda grossa de nome i corresponde ao destino do jogador i . (b) Cada aresta da instância em (a) é, na verdade, um subgrafo com 4 nós e 5 arcos, portanto pode ser percorrida em ambos os sentidos. . .	63
6.1	Instância atômica com funções de latência afins onde a razão de coordenação é maior que $\frac{4}{3}$	73
6.2	Instância atômica onde o limite de bicritério para a instância com demandas duplicadas não é válido.	74

Capítulo 1

Introdução

Jogos de roteamento modelam situações onde vários jogadores competem por recursos em uma rede modelada por um grafo orientado. Cada jogador está associado a um par origem-destino (OD), que corresponde a um par de nós do grafo. O objetivo de cada jogador é enviar uma certa quantidade de fluxo da sua origem até o seu destino. Essa quantidade de fluxo é comumente referenciada como a demanda de um jogador. Para o envio dessa demanda, cada jogador deve escolher um ou mais caminhos ligando seu par OD e enviar seu fluxo através dele(s). Cada jogador “paga” pelos custos dos arcos em seu(s) caminho(s). A competição surge do fato de que a quantia que um jogador paga em um arco depende não apenas do seu fluxo neste arco, mas do fluxo total levando em conta todos os jogadores (por exemplo, este arco pode pertencer a caminhos escolhidos por diferentes jogadores). Do ponto de vista econômico, os arcos da rede podem ser vistos como recursos disputados pelos jogadores, que desejam usá-los de modo a pagar o menos possível.

Descrevemos a seguir duas situações que podem ser modeladas como um jogo de roteamento: um cenário de transporte de mercadorias e um cenário envolvendo tráfego de veículos.

No problema de transporte de mercadorias, os jogadores são clientes solicitando os serviços de transportadoras. Essas transportadoras podem fazer o transporte via caminhões, trens, aviões ou navios. Neste caso, os nós da rede correspondem a pontos de parada de uma transportadora, tais como balcões, estações ferroviárias, aeroportos ou portos. Um arco da rede representa um trajeto que uma determinada transportadora faz entre dois pontos (ao escolher um arco, o jogador escolhe uma transportadora e seu meio de transporte associado). Um caminho escolhido por um jogador corresponde a uma sequência de trajetos ligando seu par OD. Cada trajeto possui um custo distinto, que consideramos como sendo o preço cobrado por unidade de mercadoria. Esse custo depende de vários fatores, tais como o meio de transporte utilizado e a distância a ser percorrida. Conforme a lei de oferta e procura, se há um aumento no número de clientes solicitando um determinado trajeto (arco), isto acarreta um aumento no preço cobrado (custo) por unidade de mercadoria.

Para o problema de tráfego de veículos, os jogadores são pessoas (cada uma com seu carro) que desejam minimizar o seu tempo de viagem da sua cidade origem à sua cidade destino. Neste exemplo, os nós da rede podem representar cidades ou interseções de vias. Um arco da rede representa uma via ou trecho viário. O custo de um arco reflete a quantidade de tráfego naquele trecho (se há muitos carros, o tráfego é mais lento e, assim, cada jogador “paga” mais). Este tipo de modelo é útil para simular o comportamento do tráfego de uma malha viária considerando-se possíveis modificações na rede: alargamento de pistas, novas sinalizações, bloqueios de vias, chuvas, etc.

Os dois exemplos possuem uma característica em comum que é muito importante: o custo que um jogador terá de arcar pela escolha de um conjunto de caminhos depende das escolhas dos demais jogadores. Essa dependência entre os jogadores promove uma dinâmica na escolha dos caminhos. Assim, um perfil de escolhas (o conjunto das escolhas adotadas por todos os jogadores) pode fazer com que um certo caminho

fique muito “caro”, o que incentiva os jogadores que estão utilizando tal caminho a desviarem para um caminho alternativo. Um perfil de escolhas onde nenhum dos jogadores possui interesse em alterar sua escolha é chamado de equilíbrio ou perfil estável. É importante observar que nem toda instância possui um equilíbrio. Quando um equilíbrio existe, é interessante saber se ele é único ou se existe um outro perfil que também é um equilíbrio.

Equilíbrios em jogos de roteamento começaram a ser estudados no início do século passado por matemáticos e economistas. Desde então, a literatura sobre o assunto cresceu significativamente, e várias formas de modelagem do problema foram propostas e vários resultados foram obtidos. Dois resultados clássicos referem-se à existência de um equilíbrio. John Glen Wardrop apresentou, no artigo *Some theoretical aspects of road traffic research* (Wardrop [101]), um conceito de equilíbrio que ficou conhecido como equilíbrio de Wardrop. John Nash demonstrou, no artigo *Non-cooperative games* (Nash [73]), um resultado fundamental sobre a existência de outro tipo de equilíbrio. Em função da importância desse resultado, o conceito de equilíbrio utilizado nesse artigo ficou posteriormente conhecido como equilíbrio de Nash. Nessa dissertação, analisamos os principais resultados obtidos para esses dois conceitos de equilíbrio.

Em 1999, a partir do artigo *Worst-case Equilibria* [66], de Elias Koutsoupias e Christos Papadimitriou, os jogos de roteamento passaram a atrair a atenção da comunidade de Ciência da Computação. Nesse artigo, os autores introduziram uma métrica para medir a qualidade de um fluxo. Essa métrica é chamada de custo social e o fluxo que possui o menor custo social é chamado de fluxo ótimo. Com esse conceito em mãos, é possível quantificar a ineficiência dos equilíbrios obtidos para certas instâncias de jogos de roteamento, bastando para isso comparar os custos sociais deles com o custo social de um fluxo ótimo. Esse tipo de análise é útil para se quantificar a ineficiência resultante de dois fatores: falta de um controlador central e comportamento egoísta dos jogadores (cada jogador deseja minimizar o seu custo e não há cooperação entre eles). Tais fatores são bastante comuns em redes de comunicação de larga escala, como a Internet, a rede de telefonia, rodovias, etc., onde a falta de um controlador central é consequência direta do tamanho da rede (o que torna um gerenciamento central muito custoso) ou da necessidade de se permitir a liberdade de decisões individuais por parte dos jogadores. Pretende-se, com esses estudos, averiguar a necessidade de desenvolvimento de mecanismos de roteamento para tais sistemas, mesmo que sejam mecanismos distribuídos. Exemplos de tais mecanismos são os de orientação de rotas (*route guidance mechanisms*) para tráfego de veículos, como os *Intelligent transportation systems* (Cominetti, Correa e Stier-Moses [21], Seção 6.1). Adicionalmente, é possível valer-se desses mesmos conceitos para averiguar a qualidade de um mecanismo.

A partir do artigo de Elias Koutsoupias e Christos Papadimitriou, outras métricas foram propostas, tanto para medir a qualidade de um equilíbrio quanto para quantificar a sua ineficiência. Estas últimas são definidas em função da definição de equilíbrio, que por sua vez depende do modelo do jogo. Além disso, temos que ambos, modelo e equilíbrio, dependem de certas características que o jogo pode ter, visto que a literatura da área produziu material que permite classificar o jogo sob ao menos quatro critérios: jogos atômicos *versus* jogos não-atômicos; jogos com fluxo divisível *versus* jogos com fluxo indivisível; jogos com demanda uniforme *versus* jogos com demanda genérica¹; e jogos com redes específicas *versus* jogos com redes genéricas.

A atomicidade de um jogo refere-se ao tipo dos jogadores presentes nele. Um jogador é dito atômico quando possui poder de mercado. Por poder de mercado, entende-se a capacidade de influência que um jogador tem sobre o custo total de um recurso. Por exemplo, uma fábrica *A*, que é responsável por 50% do tráfego de mercadorias de uma cidade *X* até uma cidade *Y*, tem maior influência no congestionamento causado em rodovias, em função do tráfego de caminhões, do que uma outra fábrica *B* concorrente, responsável por apenas 10% do tráfego de mercadorias. Além disso, a influência de *A* sobre o preço cobrado pela transportadora, para o transporte de mercadorias entre *X* e *Y*, também é maior, visto que, hipoteticamente, 50% do lucro dessa advém dos produtos de *A*. Um jogador é dito não-atômico quando

¹Em inglês, utiliza-se os termos *unweighted demands* e *weighted demands*.

não possui poder de mercado. Assim, a escolha de um jogador não-atômico por um determinado caminho não altera o custo deste, pois o seu fluxo é insignificante em comparação ao fluxo total no caminho. Exemplos de jogadores não-atômicos são aqueles participando de um jogo de tráfego de veículos, visto que cada veículo, individualmente, não possui influência no congestionamento total de uma rodovia. Em jogos não-atômicos, todos os jogadores são não-atômicos e utilizamos o equilíbrio de Wardrop como conceito de equilíbrio. Em jogos atômicos, ao menos um dos jogadores é atômico e utilizamos o equilíbrio de Nash como conceito de equilíbrio.

Em jogos com fluxo divisível os jogadores podem dividir a sua demanda entre os caminhos disponíveis. Por exemplo, um cliente pode achar vantajoso transportar uma parte de sua mercadoria por trem e outra parte por caminhão. Em jogos com fluxo indivisível, pelo contrário, todos os jogadores são obrigados a escolher apenas um dos caminhos entre o seu par origem-destino. Este é claramente o caso do jogo de tráfego de veículos.

Diz-se que um jogo de roteamento possui demanda uniforme quando as demandas de todos os jogadores são iguais. Para exemplificar, considere o caso em que há dez jogadores em um jogo de transporte de mercadorias, cada um controlando 10% da quantidade total de mercadorias presente no jogo. O caso em que as demandas dos jogadores são genéricas corresponde a um jogo com demanda genérica.

Por último, é importante notar que vários resultados de existência e unicidade do equilíbrio estão relacionados à topologia da rede. Por exemplo, temos que para jogos não-atômicos a unicidade de um equilíbrio é independente da topologia da rede, ao passo que para jogos atômicos não é. Mais resultados e detalhes são vistos ao longo dessa dissertação.

Nosso objetivo principal nessa dissertação é apresentar um estado da arte comparativo entre os principais resultados de existência, unicidade e ineficiência dos equilíbrios, obtidos para os jogos de roteamento com as características introduzidas acima. Além disso, apresentamos interpretações para os resultados, condizentes com os objetivos de investigação dos modelos propostos.

Organizamos essa dissertação da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos os conceitos gerais de teoria dos jogos e as ferramentas de otimização usadas na resolução dos problemas. No Capítulo 3, apresentamos a modelagem de um jogo de roteamento, a definição do equilíbrio de Nash para jogos atômicos e do equilíbrio de Wardrop para jogos não-atômicos, a métrica latência total usada para medir o custo social, e duas métricas usadas para se quantificar a ineficiência de um equilíbrio: Preço da Anarquia e Limite de Bicritério. No Capítulo 4, apresentamos os principais resultados para os jogos não-atômicos. No Capítulo 5, apresentamos os principais resultados para os jogos atômicos com fluxo indivisível. Além disso, apresentamos o modelo e o equilíbrio de Nash para jogos de congestionamento - que é uma superclasse dos jogos de roteamento -, visto que resultados importantes foram derivados dessa classe de jogos. No Capítulo 6, apresentamos os principais resultados para os jogos atômicos com fluxo divisível. No Capítulo 7, apresentamos uma conclusão acerca dos principais resultados apresentados e alguns problemas em aberto. No Apêndice A, apresentamos um resumo dos principais resultados. No Apêndice B, apresentamos outras métricas de medição da qualidade de um equilíbrio. No Apêndice C, apresentamos outras métricas de quantificação da sua ineficiência. No apêndice D, apresentamos um breve resumo da análise de complexidade dos problemas de calcular um equilíbrio e um fluxo ótimo, além dos principais algoritmos desenvolvidos. No Apêndice E, apresentamos outros modelos de jogos de roteamento.

Capítulo 2

Conceitos Gerais de Teoria dos Jogos e Otimização

Teoria dos Jogos é uma área do conhecimento que visa a modelagem matemática de situações onde vários agentes independentes competem entre si, visando maximizar os seus ganhos individuais. A definição de tais ganhos depende da situação e do objetivo de cada agente envolvido. Formalmente, a modelagem dessa situação é chamada de jogo. Num jogo são definidos os agentes, as estratégias que eles podem adotar e o ganho de cada um em função das estratégias adotadas por todos. A competição surge do fato de que o ganho de cada agente não depende unicamente de sua estratégia, mas sim do conjunto das estratégias adotadas por todos os envolvidos. Como consequência, um agente racional deve se decidir por qual estratégia adotar com base na sua racionalização sobre o comportamento dos outros agentes.

Alguns jogos podem ser resolvidos utilizando-se técnicas de otimização contínua. Problemas de otimização contínua visam maximizar ou minimizar uma função objetivo. Por exemplo, dada uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos querer encontrar um $x \in \mathcal{D}$ tal que $f(x)$ é máximo ($f(x) \geq f(y)$, para todo $y \in \mathcal{D}$), ou tal que $f(x)$ é mínimo ($f(x) \leq f(y)$, para todo $y \in \mathcal{D}$). Num problema de otimização convexa, \mathcal{D} é uma região convexa e f é uma função convexa em \mathcal{D} . Como será visto ao longo dessa dissertação, muitos modelos de jogos podem ser resolvidos utilizando-se o arcabouço da otimização contínua, principalmente a otimização convexa.

Na Seção 2.1, apresentamos os principais conceitos de teoria dos jogos e os resultados mais relevantes. Na Seção 2.2, apresentamos as definições formais de um problema de otimização e de um problema de otimização convexa, assim como os resultados mais relevantes para jogos de roteamento. Na Seção 2.3, apresentamos o problema de desigualdades variacionais, também bastante utilizado na resolução dos jogos que estudamos. Na Seção 2.4, apresentamos o conceito de função potencial, amplamente utilizado para se encontrar equilíbrios. As provas de alguns teoremas e proposições são omitidas por fugirem ao escopo dessa dissertação, sendo entretanto referenciado o artigo ou livro onde elas podem ser encontradas.

2.1 Jogos e equilíbrio de Nash

Em teoria dos jogos, um jogo pode ser representado na forma normal (*normal form games*), ou na forma extensiva (*extensive form games*). Um jogo na forma normal (também chamado de jogo na forma estratégica ou jogo estático) modela situações onde a adoção das estratégias, pelos agentes, se dá no mesmo instante. Por exemplo, um jogo de par ou ímpar. Um jogo na forma extensiva, pelo contrário, modela situações onde os agentes adotam suas estratégias de forma interativa, um após o outro. Por exemplo, um jogo de xadrez. Os jogos estudados nessa dissertação são da forma normal e, portanto, apresentamos apenas a definição formal desse tipo de jogo. Ao leitor interessado, sugerimos a leitura de

Osborne e Rubinstein [77] para a definição formal de jogos na forma extensiva.

Na Subseção 2.1.1, apresentamos a definição formal de um jogo na forma normal e, com o exemplo do jogo *Dilema do Prisioneiro*, aproveitamos também para apresentar os conceitos de jogos simétricos, estratégias dominantes e jogos finitos. Na Subseção 2.1.2, apresentamos o equilíbrio de Nash puro. Na Subseção 2.1.3, apresentamos a definição formal de estratégia mista e o equilíbrio de Nash misto, exemplificando-o com o jogo *Par ou Ímpar*.

2.1.1 Modelo de jogos na forma normal

Definição 2.1.1 (Jogos na Forma Normal). Um jogo na forma normal é definido por uma tupla $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$, onde

- $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ representa o conjunto de n jogadores,
- \mathcal{S}_i é o conjunto das estratégias disponíveis para o jogador i , e
- $u_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de utilidade do jogador i , onde $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_n$.

O conjunto \mathcal{S} representa o conjunto de **perfis de estratégias** do jogo, onde um perfil de estratégias corresponde à “união” das estratégias $s_i \in \mathcal{S}_i$ adotadas por cada jogador. Por exemplo, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathcal{S}$ é o perfil obtido quando o jogador 1 seleciona a estratégia s_1 , o jogador 2 seleciona a estratégia s_2 , e assim em diante. Daqui para frente, chamaremos o conjunto \mathcal{S} de **espaço de estratégias**. Definimos $\mathcal{S}_{-i} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_{i-1} \times \mathcal{S}_{i+1} \times \dots \times \mathcal{S}_n$ como o espaço de estratégias de todos os jogadores exceto i .

O objetivo de cada jogador é alcançar um perfil de estratégias onde sua função de utilidade é maximizada. Mais especificamente, o jogador i gostaria de alcançar um perfil de estratégias s tal que $u_i(s)$ é o maior possível. O valor $u_i(s)$ é usualmente chamado **ganho** (ou **valor de utilidade**), com respeito a s , do jogador i . Além disso, pressupõe-se que todos os jogadores são cientes do ganho obtido por cada um dos jogadores, para todos os perfis $s \in \mathcal{S}$.

Em vários jogos, o objetivo de cada jogador é minimizar o seu custo, ao invés de maximizar o seu ganho, como ocorre nos jogos de roteamento. Neste caso, o valor de utilidade de cada jogador, em cada perfil, representa um custo a ser minimizado, e não um ganho. Em jogos de minimização, temos uma **função de custo** C_i em vez de uma **função de utilidade** u_i . Formalmente, definimos um jogo de minimização de custos da seguinte forma.

Definição 2.1.2 (Jogos de Minimização de Custos na Forma Normal). Um jogo de minimização de custos na forma normal é definido por uma tupla $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$, onde

- $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ representa o conjunto de n jogadores,
- \mathcal{S}_i é o conjunto das estratégias disponíveis para o jogador i , e
- $C_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de custo do jogador i .

O objetivo de cada jogador i é alcançar um perfil de estratégias s tal que $C_i(s)$ é o menor possível.

Em função dos exemplos que são apresentados, nessa seção consideramos jogos onde o objetivo de cada jogador é a maximização do seu ganho. Assim, os teoremas, proposições e definições apresentados referem-se aos jogos da Definição 2.1.1. Para tornar as Definições 2.1.3, 2.1.5, 2.1.8 e 2.1.9, apresentadas adiante, válidas para jogos de minimização de custos, basta inverter as desigualdades e substituir a função de utilidade u_i pela função de custo C_i .

Um conceito fundamental em teoria dos jogos é o de **equilíbrio**. Diz-se que um perfil atende a (ou, é estável de acordo com) determinado critério de equilíbrio quando nenhum dos jogadores possui incentivo para alterar sua estratégia. Na literatura, diferentes critérios de equilíbrio foram considerados para vários tipos de jogos. O critério mais conhecido (e mais usado) é o equilíbrio de Nash. Outros critérios usuais

são o equilíbrio correlacionado, o equilíbrio correlacionado não-refinado¹ e o equilíbrio dominante. Nessa dissertação, nosso foco é o equilíbrio de Nash.

Para a ilustração de um jogo na forma normal, apresentamos o clássico *Dilema do Prisioneiro*. Nele, dois prisioneiros estão sendo interrogados, em salas separadas, sobre a participação em um mesmo crime. Sem saber qual será a ação tomada pelo outro, eles devem decidir se confessam ou negam a participação. Se ambos confessam, então ambos pegam dois anos de prisão; se um confessa e o outro nega, então o que confessou é solto e o que negou pega quatro anos de prisão; se ambos negam, então ambos pegam apenas um ano de prisão por um crime menor. Essa situação pode ser modelada pelo seguinte jogo: um conjunto $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ de jogadores ($n = 2$), um conjunto de estratégias $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \{C, N\}$, onde C representa Confessa e N representa Nega, e funções de utilidade $u_i : \{(C, C), (C, N), (N, C), (N, N)\} \rightarrow \mathbb{R}$, para $i \in \mathcal{I}$, onde o primeiro elemento de um perfil corresponde à estratégia adotada pelo jogador 1 e o segundo à estratégia adotada pelo jogador 2. Para o jogador 1, temos: $u_1(C, C) = -2$, $u_1(C, N) = 0$, $u_1(N, C) = -4$ e $u_1(N, N) = -1$; e para o jogador 2, temos: $u_2(C, C) = -2$, $u_2(C, N) = -4$, $u_2(N, C) = 0$ e $u_2(N, N) = -1$. Esse jogo pode ser representado graficamente pela matriz de valores de utilidade (*payoff matrix*) apresentada na Tabela 2.1. Nela, as linhas representam as estratégias do jogador 1 e as colunas as estratégias do jogador 2. Cada célula representa um perfil do jogo. O primeiro valor de uma célula corresponde ao ganho do jogador 1 naquele perfil e o segundo valor ao ganho do jogador 2.

1 \ 2	C	N
C	-2, -2	0, -4
N	-4, 0	-1, -1

Tabela 2.1: Matriz de valores de utilidade para o jogo *Dilema do Prisioneiro*.

O equilíbrio de Nash desse jogo é apresentado na próxima subseção, quando esse conceito é definido formalmente. Mas antes, um ponto importante de ser discutido sobre esse jogo é a sua propriedade simétrica: primeiro, temos que ambos os jogadores possuem o mesmo conjunto de estratégias; segundo, o ganho obtido pelo jogador 1 ao escolher C quando o jogador 2 escolhe N é o mesmo obtido pelo jogador 2 ao escolher C quando o jogador 1 escolhe N . Isto é, $u_1(C, N) = u_2(N, C)$. Do mesmo modo, $u_1(N, C) = u_2(C, N)$. Claramente, nesse jogo a identidade dos jogadores não importa, sendo que o jogador 2 poderia ser o jogador linha e o jogador 1 o jogador coluna pois, do ponto de vista de cada um, eles ainda estariam diante das mesmas opções de perfis e da consequente racionalização sobre as mesmas. Jogos onde a identidade dos jogadores não importa, o que implica necessariamente em conjuntos de estratégias idênticos para todos os jogadores, são chamados de **jogos simétricos**.

Outro ponto interessante do jogo *Dilema do Prisioneiro* é que ele possui uma **estratégia dominante**. Repare que C é uma melhor resposta do jogador 1 para qualquer estratégia adotada pelo jogador 2: quando o jogador 2 escolhe N , o jogador 1 ganha 0 escolhendo C , ao invés de -1 se escolhesse N ; e quando o jogador 2 escolhe C , o jogador 1 ganha -2 escolhendo C , ao invés de -4 se escolhesse N . Como o jogo é simétrico, esse mesmo raciocínio se aplica ao jogador 2. Uma estratégia, de um determinado jogador, que é uma melhor resposta para qualquer conjunto de estratégias dos adversários é chamada de estratégia dominante. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.3 (Estratégia Dominante). Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo. Uma estratégia $s_i^* \in \mathcal{S}_i$ é dominante para o jogador i se

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_i \in \mathcal{S}_i \text{ e para todo } s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}. \quad (2.1)$$

¹Em inglês: *coarse correlated equilibrium*

Para finalizar, repare que há um número finito de estratégias disponíveis para cada jogador. Isso caracteriza um jogo finito, cuja definição, dada a importância que tem nos jogos que estudamos, é apresentada formalmente a seguir.

Definição 2.1.4 (Jogos Finitos). Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo. Diz-se que esse jogo é finito quando todos os conjuntos de estratégias \mathcal{S}_i , para $i \in \mathcal{I}$, são finitos.

Um jogo é infinito quando o conjunto de estratégias de um ou mais jogadores é infinito. Por exemplo, podemos considerar um jogo cujo conjunto de estratégias de um jogador corresponda à escolha de um número real $x \in [0, 1]$.

2.1.2 Equilíbrio de Nash puro

A definição formal de um equilíbrio de Nash puro é apresentada a seguir.

Definição 2.1.5 (Equilíbrio de Nash Puro). Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo com estratégias puras. Diz-se que um determinado perfil $s^* \in \mathcal{S}$ é um equilíbrio de Nash puro se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \text{ para todo } s_i \in \mathcal{S}_i. \quad (2.2)$$

Informalmente, a Definição 2.1.5 nos diz que num equilíbrio de Nash puro nenhum jogador obterá vantagem se mudar de estratégia, supondo que os demais jogadores permanecerão com suas estratégias atuais.

Há um único equilíbrio de Nash puro para o jogo *Dilema do Prisioneiro* apresentado na subseção anterior: o perfil (C, C) . Para ver isso, observe que no perfil (C, C) , se um dos jogadores mudar para N , então ele passará a ter um valor de utilidade menor. Portanto, não é vantajoso fazê-lo. Por exemplo, suponha que, no perfil (C, C) , o jogador 1 decida mudar sua estratégia para N , então o jogo vai para o perfil (N, C) , onde o jogador 1 passará a ganhar -4 em vez de -2 , ou seja, ele terá diminuído seu valor de utilidade. Para verificar que os demais perfis não são um equilíbrio de Nash puro, basta ver que em todos eles cada jogador pode aumentar seu valor de utilidade caso opte por mudar de estratégia, dado que o outro jogador permanecerá com a mesma. Por exemplo, quando ambos escolhem N (perfil (N, N)), se o jogador 1 mudar de estratégia, então o jogo vai para o perfil (C, N) , onde o jogador 1 passará a ganhar 0 em vez de -1 . Ou seja, no perfil (N, N) o jogador 1 possui incentivo para alterar sua estratégia para C . Como o jogo é simétrico, o mesmo vale para o jogador 2.

Repare que o perfil (N, N) não é um equilíbrio de Nash puro, apesar de render um ganho maior para ambos os jogadores em relação ao perfil (C, C) . Esse paradoxo ajuda a ilustrar porque é interessante estudar teoria dos jogos. Mesmo que haja a possibilidade de obter uma pena mais leve caso ambos os jogadores neguem participação no crime, dificilmente um deles optaria por fazê-lo, visto a sua incerteza sobre qual ação será tomada pelo outro. Nesse caso, um jogador raciocina que se ele nega, mas o outro confessa, então ele irá pegar 4 anos de prisão, em vez de no máximo 2, e consequentemente opta pela confissão. Esse tipo de situação surge em vários cenários. Outro exemplo clássico é a situação conhecida como *corrida armamentista*, onde dois Estados adversários devem decidir se irão desenvolver armamento nuclear ou não. Claramente, é mais vantajoso para ambos não o desenvolverem, pois assim eliminam as chances de um conflito nuclear. Todavia, ambos raciocinam que, caso o outro Estado adquira armamento nuclear, enquanto ele não, então as chances de defesa em caso de tentativa de invasão pelo oponente tornam-se drasticamente reduzidas.

Um jogo nem sempre possui um equilíbrio de Nash puro, como é visto em maiores detalhes na próxima subseção. No entanto, existem certas condições, sobre o conjunto de estratégias ou sobre as funções de utilidade dos jogadores, suficientes para garantir a existência de ao menos um equilíbrio de Nash puro. Um resultado importante nesse sentido é o Teorema de Debreu, Glicksberg e Fan, que fornece condições suficientes para que um jogo infinito possua ao menos um equilíbrio de Nash puro.

Proposição 2.1.6 (Debreu [32], Glicksberg [52], Fan [39]). Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo infinito. Se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

- \mathcal{S}_i é um conjunto compacto (limitado e fechado) e convexo,
- $u_i(s_i, \cdot) : \mathcal{S}_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em s_{-i} , e
- $u_i(\cdot, s_{-i}) : \mathcal{S}_i \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e quase-côncava em s_i ,

então existe um equilíbrio de Nash puro.

Ao leitor interessado, a prova desse teorema pode ser encontrada em Fudenberg e Tirole [45] (Teorema 1.2). Esse resultado é muito útil para a análise da existência de equilíbrio de Nash puro para alguns dos jogos de roteamento que analisamos.

2.1.3 Equilíbrio de Nash misto

Para a ilustração de um equilíbrio de Nash misto, considere o jogo *Par ou Ímpar*, cuja matriz de valores de utilidade é apresentada na Tabela 2.2. Nele, há dois jogadores e o conjunto de estratégias de ambos é $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \{P, M\}$, onde P representa *Par*, isto é, o jogador exibe um número par de dedos, e M representa *Ímpar*, isto é, o jogador exibe um número ímpar de dedos. O jogador 1 é aquele que ganha quando o número total de dedos exibidos pelos dois jogadores é par. Portanto, ele tem ganho 1 quando escolhe a mesma estratégia do jogador 2 (perfis (P, P) e (M, M)) e ganho -1 quando escolhe uma estratégia diferente (perfis (P, M) e (M, P)). Por outro lado, o jogador 2 tem ganho 1 quando escolhe uma estratégia diferente da escolhida pelo jogador 1 e ganho -1 quando escolhe a mesma. Formalmente, o jogo é definido pela tupla $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$, onde $\mathcal{I} = \{1, 2\}$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \{P, M\}$ e as funções de utilidade são tais que: $u_1(P, P) = 1$, $u_1(P, M) = -1$, $u_1(M, P) = -1$ e $u_1(M, M) = 1$; e $u_2(P, P) = -1$, $u_2(P, M) = 1$, $u_2(M, P) = 1$ e $u_2(M, M) = -1$.

1 \ 2	P	M
P	1, -1	-1, 1
M	-1, 1	1, -1

Tabela 2.2: Matriz de valores de utilidade para o jogo *Par ou Ímpar*.

Não há equilíbrio de Nash puro para esse jogo. No perfil (P, P) o jogador 2 ganha -1 , portanto é vantajoso para ele mudar para a estratégia M , resultando no perfil (P, M) onde ele ganha 1. Por sua vez, no perfil (P, M) o jogador 1 ganha -1 , portanto é vantajoso para ele mudar para a estratégia M , resultando no perfil (M, M) onde ele ganha 1. Com uma análise análoga, é possível verificar que no perfil (M, M) o jogador 2 possui incentivo para alterar sua estratégia, resultando no perfil (M, P) onde, por sua vez, o jogador 1 possui incentivo para alterar sua estratégia.

Pelo fato de nem todo jogo possuir equilíbrio de Nash puro, um dos resultados mais importantes em teoria dos jogos é a existência de equilíbrio de Nash misto em jogos finitos (ver Definição 2.1.4). A prova desse resultado foi primeiramente apresentada no artigo *Non-cooperative games* (Nash [73]), escrito por John Nash. Essa é, aliás, a razão pela qual esse critério de equilíbrio ficou conhecido como equilíbrio de Nash. Ao leitor interessado nessa demonstração, indicamos o livro de Fudenberg e Tirole [45] (Teorema 1.1). Ilustramos esse resultado no jogo *Par ou Ímpar* apresentado acima. Porém, antes apresentamos algumas definições pertencentes ao arcabouço da Teoria da Probabilidade, usadas nas definições das estratégias mistas para jogos finitos e do equilíbrio de Nash misto.

Em Teoria da Probabilidade, define-se um **espaço amostral** discreto como sendo um conjunto finito Ω contendo todos os possíveis resultados de um experimento. Por exemplo, se o experimento é lançar uma

moeda, então o espaço amostral é $\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$. Um subconjunto $E \subseteq \Omega$ é chamado de **evento** do espaço amostral Ω . Por exemplo, $E_1 = \emptyset$, $E_2 = \{\text{Cara}\}$, $E_3 = \{\text{Coroa}\}$ e $E_4 = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$ são os eventos do espaço amostral $\{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$. Uma **distribuição de probabilidades** em Ω é uma função $\sigma : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que $\sum_{e \in \Omega} \sigma(e) = 1$. A probabilidade de um evento $E \subseteq \Omega$ ocorrer, conforme uma distribuição de probabilidades σ , é dada por $P_\sigma(E) = \sum_{e \in E} \sigma(e)$. Em nosso exemplo, onde $\sigma(\text{Cara}) = \frac{1}{2}$ e $\sigma(\text{Coroa}) = \frac{1}{2}$, temos que $P_\sigma(E_1) = 0$, $P_\sigma(E_2) = \frac{1}{2}$, $P_\sigma(E_3) = \frac{1}{2}$ e $P_\sigma(E_4) = 1$. Um **espaço probabilístico discreto** é um par (Ω, σ) .

Uma **variável aleatória** (v.a.) sobre um espaço amostral Ω é uma função $X : \Omega \rightarrow T$, onde $T \subset \mathbb{R}$. Uma variável aleatória é usada para definir uma métrica sobre os elementos do espaço amostral. Por exemplo, suponha que Ω_Y é o espaço amostral que representa a população de uma cidade Y e $\sigma_Y : \Omega_Y \rightarrow [0, 1]$ é uma distribuição de probabilidades uniforme (isto é, $\sigma_Y(\omega) = 1/|\Omega_Y|$ para todo $\omega \in \Omega_Y$). Considere a variável aleatória $X_Y : \Omega_Y \rightarrow \{1, 2, \dots, 130\}$ para indicar a idade de um indivíduo $\omega \in \Omega_Y$, ou seja, $X_Y(\omega)$ é a idade, em anos, do indivíduo ω . Além disso, para $E \subseteq T$ denotamos o evento $X^{-1}(E)$ por $[X \in E]$. A probabilidade de $[X \in E]$ ocorrer, conforme uma distribuição de probabilidades σ , é dada por $\Pr[X \in E] = P_\sigma(X^{-1}(E))$. Por exemplo, a probabilidade de um indivíduo da cidade Y ter idade maior ou igual a 18 anos é dada por $\Pr[X_Y \geq 18] = P_{\sigma_Y}(\{\omega \in \Omega_Y : X_Y(\omega) \geq 18\}) = \sum_{\omega \in \Omega_Y : X_Y(\omega) \geq 18} \sigma_Y(\omega)$. Essa probabilidade representa a porcentagem, ou fração, da população de Y que possui idade maior ou igual a 18 anos.

A **esperança** de uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow T$ é dada por

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \sigma(\omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ou, equivalentemente,

$$E[X] = \sum_{t \in T} t \cdot \Pr[X = t]. \quad (2.4)$$

Por exemplo, a idade média da população de Y no exemplo acima é dada por

$$E[X_Y] = \sum_{j=1}^{130} j \cdot \Pr[X = j].$$

Uma propriedade importante da esperança é a **linearidade da esperança**.

Proposição 2.1.7 (Linearidade da Esperança). Sejam $X : \Omega \rightarrow T$ e $Y : \Omega \rightarrow T$ duas variáveis aleatórias, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$E[X + \alpha Y] = E[X] + \alpha E[Y]. \quad (2.5)$$

Com esse arcabouço da probabilidade, podemos agora definir as estratégias mistas de um jogo. Para isso, consideramos que cada jogador $i \in \mathcal{I}$ possui um conjunto \mathcal{A}_i de ações disponíveis. Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades $\sigma_i : \mathcal{A}_i \rightarrow [0, 1]$. O conjunto de todas as estratégias mistas de um jogador i é denotado por Σ_i . Chamamos o conjunto $\mathcal{A} = \times_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ de **espaço de ações** e cada elemento $a \in \mathcal{A}$ de **perfil de ações**. Considere a função $f_\sigma : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$f_\sigma(a) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(a_i), \text{ para todo } a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}.$$

É fácil verificar que a função f_σ é uma distribuição de probabilidades² sobre \mathcal{A} . Assim, podemos pensar em \mathcal{A} como um espaço amostral com distribuição de probabilidades f_σ .

²Usamos o símbolo f aqui porque reservamos o símbolo σ para denotar um elemento de Σ .

O espaço de estratégias mistas é o conjunto $\Sigma = \times_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_i$. Associamos a cada jogador $i \in \mathcal{I}$ uma variável aleatória $u_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, dado um perfil de estratégias mistas $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$, a utilidade de um jogador i é dada por:

$$E_\sigma[u_i] = \sum_{a \in \mathcal{A}} u_i(a) \cdot \prod_{j=1}^n \sigma_j(a_j). \quad (2.6)$$

Adicionalmente, definimos também $\mathcal{A}_{-i} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_{i-1} \times \mathcal{A}_{i+1} \times \dots \times \mathcal{A}_n$ como o espaço de ações de todos os jogadores exceto i , e $\Sigma_{-i} = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_{i-1} \times \Sigma_{i+1} \times \dots \times \Sigma_n$ como o espaço de estratégias mistas de todos os jogadores exceto i .

Um jogo com estratégias mistas é representado pela tupla $(\mathcal{I}, \{\Sigma_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{u_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ e o equilíbrio de Nash misto é definido da seguinte forma.

Definição 2.1.8 (Equilíbrio de Nash Misto). Seja $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo com estratégias mistas. Diz-se que um perfil $\sigma^* \in \Sigma$ é um equilíbrio de Nash misto se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$E_{\sigma^*}[u_i] \geq E_{\sigma_i, \sigma_{-i}^*}[u_i], \text{ para todo } \sigma_i \in \Sigma_i. \quad (2.7)$$

Intuitivamente, a função de utilidade $E_{\sigma^*}[u_i]$ é o ganho esperado do jogador i no perfil σ^* . O perfil σ^* é um equilíbrio de Nash misto se nenhum jogador possui incentivo para mudar sua estratégia, considerando-se que os demais jogadores não irão mudar.

Note que

$$\begin{aligned} E_{\sigma_i, \sigma_{-i}^*}[u_i] &= \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \sigma_i(a_i) \cdot E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)] \\ &= \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \sigma_i(a_i) \cdot \sum_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot \prod_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \sigma_j^*(a_j) \\ &= \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \sum_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot \sigma_i(a_i) \cdot \prod_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \sigma_j^*(a_j) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} u_i(a) \cdot \sigma_i(a_i) \cdot \prod_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \sigma_j^*(a_j). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para i fixo e $a_i \in \mathcal{A}_i$ fixo, temos que $u_i(a_i, \cdot) : \mathcal{A}_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde a uma variável aleatória. Agora, repare que Σ_i engloba as estratégias σ'_i tais que $\sigma'_i(a'_i) = 1$ para algum $a'_i \in \mathcal{A}_i$ e $\sigma'_i(a_i) = 0$ para todo $a_i \in \mathcal{A}_i$ com $a_i \neq a'_i$. Abusando de notação, dizemos que $a_i \in \Sigma_i$ para todo $a_i \in \mathcal{A}_i$. Seja $E_i = \max_{a_i \in \mathcal{A}_i} E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)]$. Da equação (2.8), conclui-se que $E_{\sigma_i, \sigma_{-i}^*}[u_i] \leq E_i$ para todo $\sigma_i \in \Sigma_i$. Além disso, como $a_i \in \Sigma_i$, temos que um perfil σ^* é um equilíbrio de Nash misto se $E_{\sigma^*}[u_i] \geq E_i$, para todo jogador i . Em outras palavras, o ganho esperado do jogador i em um equilíbrio de Nash misto σ^* deve ser maior que o ganho esperado do jogador i no perfil $(\sigma'_i, \sigma_{-i}^*)$, onde $\sigma'_i(a'_i) = 1$ para $a'_i = \arg \max_{a_i \in \mathcal{A}_i} E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)]$. Daqui, temos a seguinte definição alternativa.

Definição 2.1.9 (Equilíbrio de Nash Misto). Seja $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo com estratégias mistas. Diz-se que um perfil $\sigma^* \in \Sigma$ é um equilíbrio de Nash misto se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$E_{\sigma^*}[u_i] \geq E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)], \text{ para todo } a_i \in \mathcal{A}_i, \quad (2.9)$$

onde

$$E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)] = \sum_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot \prod_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \sigma_j^*(a_j). \quad (2.10)$$

Definimos o suporte de σ_i como sendo o conjunto $\text{suporte}(\sigma_i) = \{a_i \in \mathcal{A}_i : \sigma_i(a_i) > 0\}$, ou seja, o conjunto de todas as ações com probabilidade não nula em σ_i . Definimos também uma **melhor resposta** do jogador i para o perfil de estratégias σ_{-i} como sendo uma estratégia σ'_i que maximize $E_{\sigma'_i, \sigma_{-i}}[u_i]$.

Formalizando, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.10 (Correspondência de Melhor Resposta). Uma correspondência de melhor resposta do jogador i para a estratégia σ_{-i} , definida como $\mathcal{B}_i(\sigma_{-i})$, é o conjunto de estratégias dado por

$$\mathcal{B}_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{\sigma'_i \in \Sigma_i} E_{\sigma'_i, \sigma_{-i}}[u_i]. \quad (2.11)$$

Utilizando o conceito de correspondência de melhor resposta e de suporte, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.11 (Equilíbrio de Nash Misto). Seja $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo com estratégias mistas. Diz-se que um determinado perfil $\sigma^* \in \Sigma$ é um equilíbrio de Nash misto se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que as ações no suporte de σ_i^* estão contidas na correspondência de melhor resposta para σ_{-i}^* , isto é, $a_i \in \mathcal{B}_i(\sigma_{-i}^*)$ para todo $a_i \in \mathcal{A}_i$ com $\sigma_i^*(a_i) > 0$.

Isso implica que toda ação no suporte de σ_i^* , para um σ^* que é um equilíbrio de Nash misto, resulta no mesmo valor de esperança, ou seja, $E_{\sigma_{-i}^*}[u_i(a_i, \cdot)]$ é igual para todo $a_i \in \mathcal{A}_i$ com $\sigma_i^*(a_i) > 0$. Omitimos a prova dessa proposição. Intuitivamente, ela nos diz que se uma determinada ação pudesse nos dar uma esperança de ganho maior, então faria sentido que ela recebesse uma probabilidade maior de ser escolhida.

Voltando ao jogo *Par ou Ímpar*, o equilíbrio de Nash misto pode ser computado da seguinte forma. Seja $q = \sigma_2(P) < 1$, isto é, q é a probabilidade do jogador 2 escolher *Par* (exibir um número par de dedos), e seja $p = \sigma_1(P) < 1$ a probabilidade do jogador 1 escolher *Par*. Temos que σ é um equilíbrio de Nash misto se $E_{\sigma_2}[u_1(P, \cdot)] = E_{\sigma_2}[u_1(M, \cdot)]$ e $E_{\sigma_1}[u_2(\cdot, P)] = E_{\sigma_1}[u_2(\cdot, M)]$. Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} E_{\sigma_2}[u_1(P, \cdot)] &= E_{\sigma_2}[u_1(M, \cdot)] \Rightarrow \\ u_1(P, P) \cdot q + u_1(P, M) \cdot (1 - q) &= u_1(M, P) \cdot q + u_1(M, M) \cdot (1 - q) \Rightarrow \\ 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) &= (-1) \cdot q + 1 \cdot (1 - q) \Rightarrow \\ q &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De forma análoga, achamos que $p = \frac{1}{2}$. Assim, obtemos que o equilíbrio de Nash misto para esse jogo é $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = ((\sigma_1^*(P), \sigma_1^*(M)), (\sigma_2^*(P), \sigma_2^*(M))) = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Isto é, cada jogador escolhe par ou ímpar com igual probabilidade.

2.2 Problemas de otimização

Formalmente, define-se um problema de otimização contínua por um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, ou o problema é dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ou é dado por

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para um conjunto \mathcal{D} que é um polítopo, se f é uma função linear, então os problemas (2.12) e (2.13) são problemas de programação linear; caso contrário, se f é uma função não-linear, então são problemas de programação não-linear.

Um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ pode ser definido por um conjunto $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ de restrições $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g_k(x) \leq 0$ para todo $k \in \mathcal{K}$, e um conjunto $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ de restrições $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $h_j(x) = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}$. Assim, $y \in \mathcal{D}$ se e somente se $g_k(y) \leq 0$ para todo $k \in \mathcal{K}$ e $h_j(y) = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}$.

Dois resultados fundamentais na área de otimização são o **Teorema de Weierstrass** (Keisler [64], Capítulo 3.8) e as **Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker** (Kuhn e Tucker [67]). Estes são apresentados a seguir, porém as provas são omitidas por fugirem ao escopo desta dissertação.

Teorema 2.2.1 (Weierstrass). Seja \mathcal{D} um subconjunto compacto não vazio de um espaço Euclidiano finito, e seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em \mathcal{D} . Então existe solução ótima para o problema (2.12).

As condições de *Karush-Kuhn-Tucker*, também conhecidas como condições KKT, são condições necessárias para que um ponto x^* seja uma solução ótima para o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g_k(x) \leq 0, \text{ para todo } k \in \mathcal{K}, \\ &&& h_j(x) = 0, \text{ para todo } j \in \mathcal{J}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para que as condições KKT sejam válidas, x^* deve satisfazer certas condições de regularidade. Aqui, apresentamos apenas a versão que utilizamos.

Teorema 2.2.2 (Condições KKT). Considere o problema (2.14), onde g_k é uma função afim para todo $k \in \mathcal{K}$ e h_j é uma função afim para todo $j \in \mathcal{J}$. Seja x^* um mínimo local tal que $g_k(x^*)$ é continuamente diferenciável, para todo $k \in \mathcal{K}$, e $h_j(x^*)$ é continuamente diferenciável, para todo $j \in \mathcal{J}$. Então existem constantes μ_k , para $k \in \mathcal{K}$, e λ_j , para $j \in \mathcal{J}$, tais que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^K \mu_k \nabla g_k(x^*) + \sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ g_k(x^*) &\leq 0, \text{ para todo } k \in \mathcal{K}, \\ h_j(x^*) &= 0, \text{ para todo } j \in \mathcal{J}, \\ \mu_k &\geq 0, \text{ para todo } k \in \mathcal{K}, \\ \mu_k \cdot g_k(x^*) &= 0, \text{ para todo } k \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Se toda função h_j é linear, toda função g_k é convexa e a função f é convexa, então as condições KKT são também suficientes para a existência de um mínimo local.

Um problema de otimização convexa é um problema do tipo (2.12) onde \mathcal{D} é um conjunto convexo e f é uma função convexa em \mathcal{D} . A seguir, definimos formalmente um conjunto convexo e uma função convexa.

Definição 2.2.3 (Conjunto convexo). Um conjunto \mathcal{D} é convexo se, para todo $x, y \in \mathcal{D}$, temos que

$$\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in \mathcal{D}, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \tag{2.16}$$

Em outras palavras, um conjunto \mathcal{D} é convexo se para quaisquer dois pontos $x, y \in \mathcal{D}$, o segmento que liga x a y está contido em \mathcal{D} . A Figura 2.1 ilustra um conjunto convexo e um conjunto não-convexo.

Definição 2.2.4 (Função convexa). Uma função f é convexa em \mathcal{D} se, para todo $x, y \in \mathcal{D}$, temos que

$$f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y), \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \tag{2.17}$$

A ilustração de uma função convexa é apresentada na Figura 2.2(a), extraída de Scutari, Palomar, Facchinei e Pang [99]. Nela, observamos que $\alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y)$, para $\alpha \in [0, 1]$ e algum par x, y específico, define um segmento de reta. Fica então fácil verificar que, numa função convexa f , para

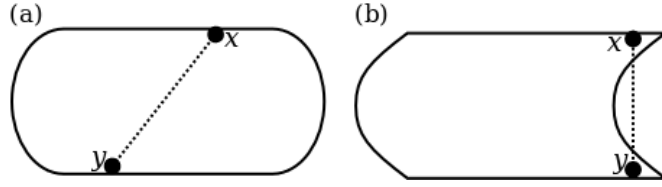


Figura 2.1: (a) Uma região convexa, onde para quaisquer dois pontos x e y pertencentes à região, o segmento de reta unindo os dois pontos pertence à região. (b) Uma região não-convexa, onde podemos observar dois pontos x e y tais que o segmento de reta que os une contém pontos que não pertencem à região.

qualquer $x, y \in \mathcal{D}$ tal que $y > x$, nenhum ponto $z \in [x, y]$ do segmento unindo $f(x)$ a $f(y)$ está abaixo de $f(z)$.

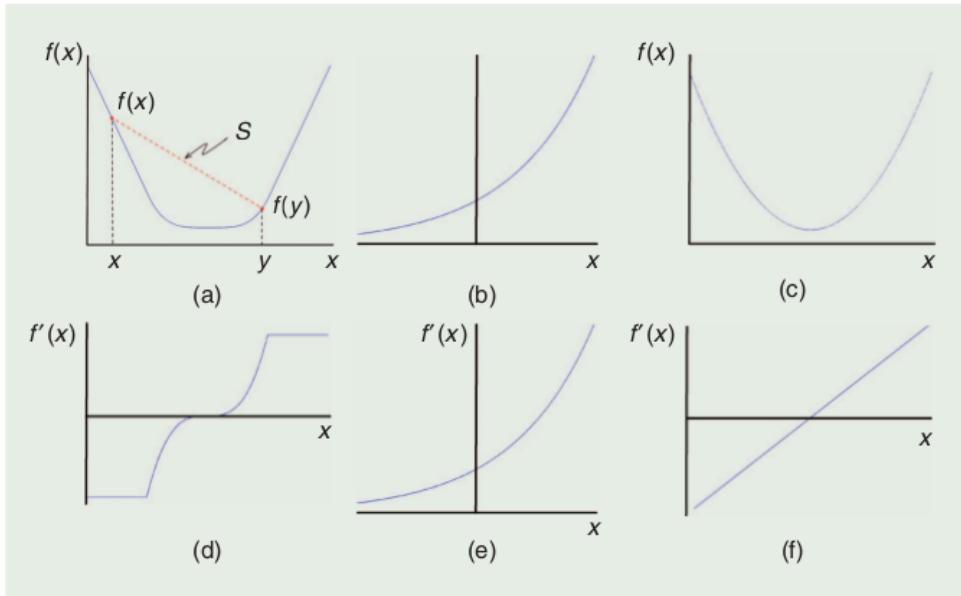


Figura 2.2: (Scutari et al. [99]) (a) Uma função convexa. (b) Uma função estritamente convexa. (c) Uma função fortemente convexa. (d) Uma função monótona. (e) Uma função estritamente monótona. (f) Uma função fortemente monótona.

Diz-se que uma função é estritamente convexa em \mathcal{D} (Figura 2.2(b)) se a desigualdade em (2.17) é estrita (por exemplo, $f(x) = e^x$), e é fortemente convexa em \mathcal{D} (Figura 2.2(c)) se, para todo $x, y \in \mathcal{D}$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \frac{c}{2}\alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2. \quad (2.18)$$

Por exemplo, $f(x) = x^2$ é uma função fortemente convexa. Além disso, temos a seguinte relação:

$$\text{Fortemente Convexo} \Rightarrow \text{Estritamente Convexo} \Rightarrow \text{Convexo}. \quad (2.19)$$

Um resultado importante para problemas de otimização convexa é o Teorema do Princípio Mínimo (Bertsekas, Nedić e Ozdaglar [13]).

Teorema 2.2.5 (Princípio Mínimo). Considere o problema de otimização convexa: problema (2.12)

onde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e a função f é convexa em \mathcal{D} . Um ponto $x^* \in \mathcal{D}$ é uma solução ótima se e somente se

$$(y - x^*)^T \nabla f(x^*) \geq 0, \text{ para todo } y \in \mathcal{D}, \quad (2.20)$$

onde $\nabla f(x) = (\partial f(x)/\partial x_1, \dots, \partial f(x)/\partial x_n)$.

A expressão $(y - x^*)^T \nabla f(x^*)$ é a *derivada direcional* de f no ponto x^* e na direção apontada pelo vetor $(y - x^*)$. A *derivada direcional* de uma função f , num ponto x^* , representa a taxa de variação instantânea de f ao longo de uma determinada direção, movendo-se a partir de x^* . Intuitivamente, o Teorema do Princípio Mínimo nos diz que, num mínimo local x^* , para qualquer direção que se mova a partir dele, mesmo que seja um movimento infinitesimalmente pequeno, o valor de f no ponto alcançado não é menor que $f(x^*)$. Em outras palavras, os vizinhos de x^* estão, em f , ou no mesmo nível ou acima de x^* .

2.3 Desigualdades variacionais

Um problema de desigualdades variacionais consiste em, dada uma função $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e fechado, encontrar $x^* \in \mathcal{D}$ tal que:

$$(y - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \text{ para todo } y \in \mathcal{D}. \quad (2.21)$$

Se existe um único $x \in \mathcal{D}$ que satisfaz (2.21), então dizemos que a solução é única. Utilizamos a notação $DV(\mathcal{D}, F)$ para nos referirmos ao problema de desigualdades variacionais cujo domínio é \mathcal{D} e a função é F .

Uma interpretação geométrica do problema $DV(\mathcal{D}, F)$ pode ser vista na Figura 2.3, extraída de Scutari et al. [99]. Nela, observamos que um problema de desigualdades variacionais $DV(\mathcal{D}, F)$ possui como solução um ponto $x^* \in \mathcal{D}$ (o conjunto \mathcal{K} da figura é o nosso conjunto \mathcal{D}) tal que $F(x^*)$ forma um ângulo agudo com todo vetor $y - x^*$, para qualquer $y \in \mathcal{D}$. Além disso, $x^* = \Pi_{\mathcal{D}}(x^* - F(x^*))$, onde $\Pi_{\mathcal{D}}(x^* - F(x^*))$ é a projeção euclidiana do vetor $x^* - F(x^*)$ na região convexa \mathcal{D} , ou seja, o único ponto em \mathcal{D} que é o mais próximo, na norma euclidiana, de $x^* - F(x^*)$. Repare que $x - F(x)$ nos fornece um vetor com a mesma direção de $F(x)$, porém em sentido oposto, como pode ser visto nas Figuras 2.3(c) e 2.3(d).

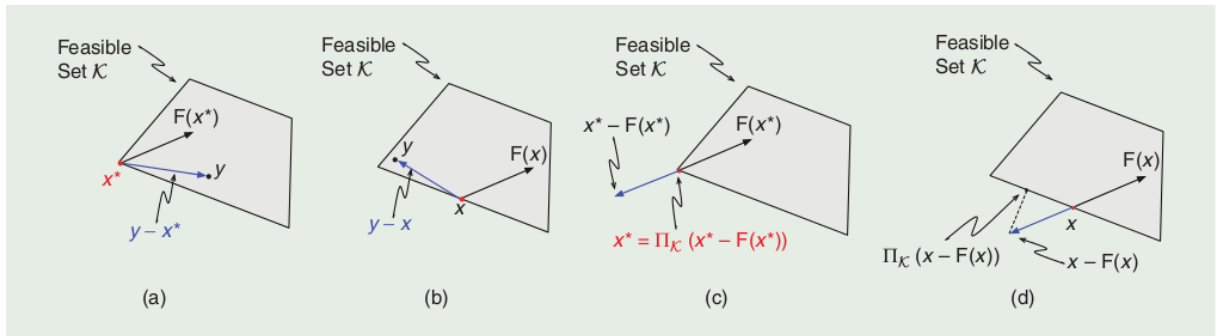


Figura 2.3: (Scutari et al. [99]) (a) Um ponto x^* que é uma solução para o problema $DV(\mathcal{K}, F)$. (b) Um ponto x que não é uma solução para o problema $DV(\mathcal{K}, F)$. (c) O ponto x^* é tal que $x^* = \Pi_{\mathcal{K}}(x^* - F(x^*))$. (d) Qualquer ponto x , que não é uma solução, é tal que $x \neq \Pi_{\mathcal{K}}(x - F(x))$.

Resultados importantes para os jogos que analisamos referem-se à existência e unicidade de soluções em problemas de desigualdades variacionais. A seguinte proposição nos fornece condições suficientes para a existência de ao menos uma solução.

Proposição 2.3.1 (Existência de solução para $DV(\mathcal{D}, F)$ (Scutari et al. [99])). Suponha que $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto (limitado e fechado) e convexo, e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo em \mathcal{D} . Então o conjunto de soluções de $DV(\mathcal{D}, F)$ é não vazio e compacto.

Adicionalmente, Scutari et al. [99] expuseram que

- F é monótona em \mathcal{D} se

$$(F(x) - F(y))^T(x - y) \geq 0, \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D}; \quad (2.22)$$

- F é estritamente monótona em \mathcal{D} se

$$(F(x) - F(y))^T(x - y) > 0, \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D} \text{ com } x \neq y; \quad (2.23)$$

- F é fortemente monótona em \mathcal{D} se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$(F(x) - F(y))^T(x - y) \geq c\|x - y\|^2, \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D}. \quad (2.24)$$

As Figuras 2.2(d,e,f) ilustram os três casos, respectivamente. Aqui, novamente, temos a seguinte relação:

$$\text{Fortemente Monótono} \Rightarrow \text{Estritamente Monótono} \Rightarrow \text{Monótono}. \quad (2.25)$$

Os resultados de unicidade são apresentados na proposição abaixo.

Proposição 2.3.2 (Conjunto das soluções do problema $DV(\mathcal{D}, F)$ (Scutari et al. [99])). O conjunto de soluções do problema $DV(\mathcal{D}, F)$, para um \mathcal{D} fechado e convexo satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) se F é monótona em \mathcal{D} , então o conjunto de soluções de $DV(\mathcal{D}, F)$ é fechado e convexo,
- (ii) se F é estritamente monótona em \mathcal{D} , então $DV(\mathcal{D}, F)$ admite no máximo uma solução,
- (iii) se F é fortemente monótona em \mathcal{D} , então $DV(\mathcal{D}, F)$ possui uma única solução.

Repare que a condição de otimalidade de um problema de otimização convexa (Teorema 2.2.5) corresponde a um problema de desigualdades variacionais onde $F = \nabla f$, para algum f convexo em \mathcal{D} . Assim, um problema de otimização convexa pode ser representado pelo problema $DV(\mathcal{D}, \nabla f)$. Além disso, as propriedades de convexidade discutidas na subseção anterior se relacionam com as propriedades de monotonicidade da seguinte forma.

Proposição 2.3.3 (Scutari et al. [99]). Seja f uma função contínua e diferenciável em \mathcal{D} , então temos que

- (i) f é convexa se e somente se ∇f é monótono,
- (ii) f é estritamente convexa se e somente se ∇f é estritamente monótono,
- (iii) f é fortemente convexa se e somente se ∇f é fortemente monótono.

Podemos então utilizar os resultados da Proposição 2.3.2 para problemas de otimização convexa, cuja condição de otimalidade corresponda ao problema $DV(\mathcal{D}, \nabla f)$. Scutari et al. [99] fizeram a ressalva de que nem toda função F pode ser representada como o gradiente de alguma função f . Portanto, o problema de desigualdades variacionais é mais geral do que o problema de otimização convexa.

2.4 Função potencial

O conceito de função potencial foi introduzido por Monderer e Shapley [72]. Funções potenciais são usadas como funções objetivo de problemas de programação cujas soluções ótimas correspondem a equilíbrios de um jogo. Aqui, apresentamos a versão para jogos de minimização de custos (Definição 2.1.2). Usamos o conceito de função potencial nas Subseções 4.5.1, 5.2.1, 5.2.2, 6.1.1 e 6.1.2.

Formalmente, temos a seguinte definição de uma função potencial ordinal.

Definição 2.4.1 (Função Potencial Ordinal). Uma função $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial ordinal para um jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$, temos que

$$C_i(s_i, s_{-i}) - C_i(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \Leftrightarrow \Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s'_i, s_{-i}) \geq 0, \text{ para todo } s_i, s'_i \in \mathcal{S}_i. \quad (2.26)$$

Em outras palavras, a diferença de custo do jogador i ao migrar da estratégia s'_i para s_i é positiva se e somente se a variação de potencial nos pontos correspondentes é positiva. Disso, segue o próximo resultado.

Proposição 2.4.2. Se s^* é um equilíbrio de Nash puro para o jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$, então para todo $i \in \mathcal{I}$ temos que

$$\Phi(s_i, s_{-i}^*) - \Phi(s_i^*, s_{-i}^*) \geq 0, \text{ para todo } s_i \in \mathcal{S}_i. \quad (2.27)$$

Assim, um perfil s^* é um equilíbrio de Nash puro para o jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ se e somente se é um mínimo global da função Φ .

Para concluir, temos a seguinte definição de uma função potencial exata.

Definição 2.4.3 (Função Potencial Exata). A função $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial exata para um jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$, temos que

$$C_i(s_i, s_{-i}) - C_i(s'_i, s_{-i}) = \Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s'_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_i, s'_i \in \mathcal{S}_i. \quad (2.28)$$

Um jogo que possui uma função potencial ordinal ou exata é chamado de jogo potencial. Note que a Proposição 2.4.2 continua válida para funções potenciais exatas.

Capítulo 3

Jogos de Roteamento

Nesse capítulo, apresentamos formalmente o modelo de jogos de roteamento. Em seguida, apresentamos os conceitos de equilíbrio para jogos atômicos e não-atômicos, e os conceitos de Custo Social, Preço da Anarquia e Limites de Bicritério, utilizados na análise da ineficiência de um equilíbrio.

Na Seção 3.1, apresentamos o modelo para jogos de roteamento, com as notações que são utilizadas no decorrer dessa dissertação. Na Seção 3.2, apresentamos o equilíbrio de Nash puro para jogos atômicos e o equilíbrio de Wardrop para jogos não-atômicos, além das definições formais de Custo Social, Preço da Anarquia e Limites de Bicritério.

3.1 Modelo

Em jogos de roteamento, cada jogador está associado a um par origem-destino que corresponde a dois nós em uma rede. Cada jogador deseja transmitir uma certa demanda (de mercadorias, por exemplo) da sua origem até o seu destino. Para modelar isso, considere um grafo orientado $G = (V, E)$ e o conjunto $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ dos jogadores. Cada jogador $i \in \mathcal{I}$ está associado a um par origem-destino (OD) denotado por s_i - t_i ¹, onde $s_i, t_i \in V$. Diz-se que o grafo G , juntamente com os pares origem-destino, constituem uma **rede de tráfego**. Cada estratégia disponível a um jogador corresponde a um caminho entre a sua origem e o seu destino. Usamos \mathcal{P}_i para denotar o conjunto de todos os caminhos de s_i a t_i em G , que chamamos de conjunto de caminhos disponíveis para o jogador i . Definimos $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{P}_i$ como o conjunto de todos os caminhos disponíveis no jogo. As demandas dos jogadores são descritas por um vetor² $r = (r_1, \dots, r_n)$, onde $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ indica a demanda de cada jogador $i \in \mathcal{I}$.

Cada arco $e \in E$ possui uma função de latência $l_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, que mapeia a quantidade de fluxo passando por ele para um valor real. Entende-se, por latência, o custo que um determinado arco tem em função da quantidade de fluxo que recebe³. Definimos também o vetor $l = (l_{e_1}, \dots, l_{e_m})$ de funções de latência dos arcos, onde $m = |E|$.

Para um jogador i , um fluxo é uma função $f^i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Informalmente, para $P \in \mathcal{P}_i$, o valor $f_P^i := f^i(P)$ é a quantidade de fluxo que o jogador i transmite por P . Um fluxo f^i é viável para o jogador i se $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = r_i$, ou seja, transmite toda a demanda r_i de s_i a t_i . Um perfil de escolhas do jogo origina um fluxo $f = (f^1, \dots, f^n)$. Dizemos que f é um fluxo viável se f^i é viável para todo $i \in \mathcal{I}$. Abusando da notação, definimos também o vetor $(f_e)_{e \in E}$, onde f_e é a quantidade de fluxo que passa pelo arco e , isto é, $f_e = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{P \in \mathcal{P}_i: e \in P} f_P^i$. Além disso, definimos $f_e^i = \sum_{P \in \mathcal{P}_i: e \in P} f_P^i$ como a quantidade

¹ s_i e t_i remetem a termos em inglês: *source* e *target*, respectivamente.

² r refere-se à palavra *rate*, que significa taxa. Muitos artigos utilizam esse termo para se referir à demanda de um jogador como sendo a taxa de uso desse nos recursos que ele utiliza.

³Esse custo pode corresponder a uma medida de tempo, por exemplo, o tempo médio da transmissão de dados de um computador a outro numa rede de computadores; um valor monetário, por exemplo, o frete cobrado por uma transportadora para determinado trajeto; etc.

de fluxo do jogador i passando pelo arco e . Neste caso, f corresponde a uma matriz $n \times m$ e a quantidade de fluxo passando pelo arco e é dada por $f_e = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i$. O uso da variável f^i para simbolizar um vetor de tamanho m ou um vetor de tamanho $|\mathcal{P}_i|$ ocorre de acordo com a conveniência da situação. Às vezes, como na definição de f_e^i acima, as duas notações ocorrem na mesma equação. É importante esclarecer que esse abuso de notação é comum na literatura da área. Para ajudar no entendimento, ilustramos graficamente, nas Tabelas 3.1 e 3.2, as duas definições de um fluxo f .

\mathcal{I}	Vetor f^i , para $i \in \mathcal{I}$						
1	$f_{P_1}^1$	$f_{P_2}^1$	$f_{P_3}^1$	\cdots		$f_{P_{m_1}}^1$	f^1
2	$f_{P_1}^2$	$f_{P_2}^2$	$f_{P_3}^2$	\cdots	$f_{P_{m_2}}^2$		f^2
\vdots	\cdots						
n	$f_{P_1}^n$	$f_{P_2}^n$	$f_{P_3}^n$	\cdots		$f_{P_{m_n}}^n$	f^n

Tabela 3.1: Exemplo de fluxo $f = (f^1, \dots, f^n)$, onde cada fluxo f^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por \mathcal{P}_i , e $m_i = |\mathcal{P}_i|$.

\mathcal{I}	E	Vetor f^i , para $i \in \mathcal{I}$									
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	\cdots	e_m	
1		$f_{e_1}^1$	$f_{e_2}^1$	$f_{e_3}^1$	$f_{e_4}^1$	$f_{e_5}^1$	$f_{e_6}^1$	$f_{e_7}^1$	\cdots	$f_{e_m}^1$	f^1
2		$f_{e_1}^2$	$f_{e_2}^2$	$f_{e_3}^2$	$f_{e_4}^2$	$f_{e_5}^2$	$f_{e_6}^2$	$f_{e_7}^2$	\cdots	$f_{e_m}^2$	f^2
\vdots		\cdots									
n		$f_{e_1}^n$	$f_{e_2}^n$	$f_{e_3}^n$	$f_{e_4}^n$	$f_{e_5}^n$	$f_{e_6}^n$	$f_{e_7}^n$	\cdots	$f_{e_m}^n$	f^n

Tabela 3.2: Exemplo de fluxo $f = (f^1, \dots, f^n)$, onde cada fluxo f^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por E .

A latência de um caminho $P \in \mathcal{P}_i$, com respeito a um fluxo f , é dada por $l_P(f) = \sum_{e \in P} l_e(f_e)$. O custo individual $C_i(f)$ do jogador atômico i , com respeito a um fluxo f , é dado por

$$C_i(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l_P(f) f_P^i, \quad (3.1)$$

onde f^i é um vetor de tamanho $|\mathcal{P}_i|$. Ou, equivalentemente,

$$C_i(f) = \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e^i, \quad (3.2)$$

onde f^i é um vetor de tamanho m .

Repare que para jogos não-atômicos, como o fluxo de um jogador é infinitesimalmente pequeno, os valores retornados pelas equações (3.1) e (3.2) tendem a 0, de modo que essas definições são inadequadas para esse caso. Assim, definimos o custo individual de um jogador não-atômico como sendo a latência do caminho que ele percorre.

Geralmente, define-se uma instância de um jogo de roteamento pela tupla (G, r, l) , ficando os demais elementos do jogo subentendidos. Isso ocorre porque esses são os elementos mais importantes na análise da ineficiência de um equilíbrio.

Para a ilustração do modelo apresentado, considere a instância da Figura 3.1. Nela, consideramos um conjunto $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ de jogadores, com vetor de demandas $r = (r_1, r_2)$. Os arcos com rótulo 0 possuem função de latência constante 0. Os demais arcos são definidos como $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (w, x)$ e $e_3 = (y, z)$, e possuem, respectivamente, funções de latência l_{e_1} , l_{e_2} e l_{e_3} . O par OD do jogador 1, $s_1 - t_1$, corresponde

ao par de vértices $u - v$, e o par OD do jogador 2, $s_2 - t_2$, corresponde ao par de vértices $y - z$. Um exemplo de fluxo $f = (f^1, f^2)$, viável com respeito a r , é o fluxo onde o jogador 1 envia toda a sua demanda pelo arco e_1 e o jogador 2 envia toda a sua demanda pelo arco e_2 . Ou seja, ignorando-se os arcos com latência 0, $f^1 = (f_{e_1}^1, f_{e_2}^1, f_{e_3}^1) = (r_1, 0, 0)$ e $f^2 = (0, 0, r_2)$. O custo de f para o jogador 1 é $C_1(f) = r_1 \cdot l_{e_1}(f_{e_1}) = r_1 \cdot l_{e_1}(r_1)$, e para o jogador 2 é $C_2(f) = r_2 \cdot l_{e_3}(r_2)$.

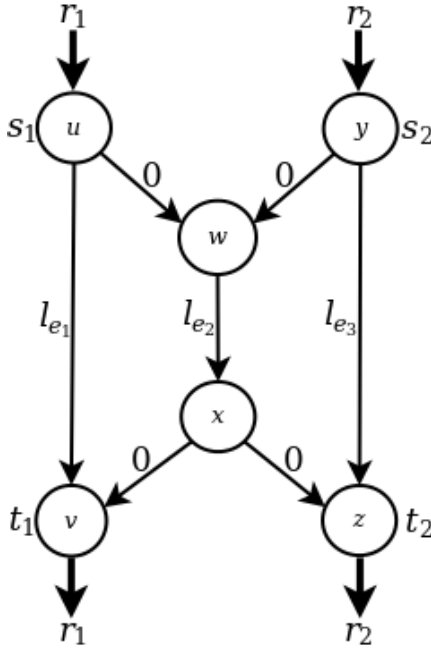


Figura 3.1: Instância de um jogo de roteamento.

3.2 Equilíbrio e ineficiência do equilíbrio

3.2.1 Equilíbrio

Jogos de roteamento podem ser atômicos ou não-atômicos. Em um jogo não-atômico, cada par OD corresponde ao aglomerado de um número infinito de jogadores não-atômicos, onde, por definição, cada um deles possui demanda infinitesimalmente pequena. Diz-se que esses jogadores não possuem poder de mercado, ou seja, a demanda de cada jogador é, individualmente, insignificante em comparação ao fluxo total presente num arco. Num jogo atômico, pelo contrário, ao menos um jogador possui poder de mercado e, portanto, sua demanda tem, individualmente, peso determinante no cálculo da latência de um arco. Os equilíbrios obtidos para jogos atômicos e não-atômicos possuem características distintas entre si. Formalmente, definimos o equilíbrio de Nash para jogos atômicos e o equilíbrio de Wardrop para jogos não-atômicos.

A seguir, apresentamos esses dois conceitos de equilíbrio.

Equilíbrio de Nash puro

Para jogos de minimização, o equilíbrio de Nash puro pode ser definido de forma similar à Definição 2.1.5, bastando para isso inverter a desigualdade em (2.2) e considerar a função de custo C_i , em vez da função de utilidade u_i . Em particular, para jogos de roteamento, um equilíbrio de Nash puro é

um fluxo f^{EN} tal que, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos

$$C_i(f^{\text{EN},i}, f^{\text{EN},-i}) \leq C_i(f^i, f^{\text{EN},-i}), \text{ para todo } f^i \in \mathcal{F}^i, \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{F}^i = \{f^i \mid \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = r_i\}$ é o conjunto dos fluxos viáveis para o jogador i .

Podemos encontrar um fluxo f^{EN} que atende a todas as desigualdades em (3.3), para todo $i \in \mathcal{I}$, resolvendo n problemas. Descrevemos como na definição a seguir.

Definição 3.2.1 (Cominetti, Correa e Stier-Moses [21]). Seja $(G = (V, E), r, l)$ uma instância atômica de um jogo de roteamento. Considere que para cada par OD há um arco reverso (t_i, s_i) com latência $l_{(t_i, s_i)}(x) = 0$. Um fluxo f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro se, para todo $i \in \mathcal{I}$, considerando-se $f^{\text{EN},-i}$ fixo, o vetor f^i é uma solução ótima do programa (EN^i) .

$$(\text{EN}^i) \quad \text{Minimize} \quad C_i(f^{\text{EN},1}, \dots, f^{\text{EN},i-1}, f^i, f^{\text{EN},i+1}, \dots, f^{\text{EN},n}) \quad (3.4a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{(u,v) \in E} f_{(u,v)}^i - \sum_{(v,w) \in E} f_{(v,w)}^i = 0, \text{ para todo } v \in V, \quad (3.4b)$$

$$f_{(t_i, s_i)}^i = r_i, \quad (3.4c)$$

$$f_e^i \geq 0, \text{ para todo } e \in E. \quad (3.4d)$$

A restrição (3.4b) diz respeito à conservação de fluxo, ou seja, todo fluxo que chega a um determinado nó, deve sair dele. A restrição (3.4c) diz que a demanda do jogador i deve voltar ao nó s_i de origem pelo arco (t_i, s_i) . Isso implica que a demanda chegou ao nó t_i , ou seja, foi atendida. A restrição (3.4d) assegura que o fluxo de qualquer jogador em qualquer arco não seja negativo.

Cominetti et al. [21] consideraram instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas (a função $x \cdot l(x)$ é convexa, para todo $l \in \mathcal{L}_s$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) (ver Definição 2.2.4). Nessas condições, (EN^i) é um problema de programação convexa, cuja condição de otimalidade é dada pela Teorema 2.2.5. Assim, pelas Proposições 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, podemos caracterizar o equilíbrio de Nash puro por um problema de desigualdades variacionais. Formalmente, temos que um fluxo f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro se e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$, $f^{\text{EN},i}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \nabla_{f^{\text{EN},i}} C_i(f^{\text{EN}})^T (f^i - f^{\text{EN},i}) &= \left(\frac{\partial C_i(f^{\text{EN}})}{\partial f_{e_1}^{\text{EN},i}}, \dots, \frac{\partial C_i(f^{\text{EN}})}{\partial f_{e_m}^{\text{EN},i}} \right)^T (f^i - f^{\text{EN},i}) \\ &= \sum_{e \in E} l_e^i(\vec{f}_e^{\text{EN}}) (f_e^i - f_e^{\text{EN},i}) \geq 0, \text{ para todo } f^i \in \mathcal{F}^i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\vec{f}_e = (f_e^1, \dots, f_e^n)$ é um vetor. A função $l_e^i(\vec{f}_e)$ é a latência marginal⁴ para o jogador i da variação de seu fluxo no arco e , dada por

$$l_e^i(\vec{f}_e) = \frac{\partial [l_e(f_e) \cdot f_e^i]}{\partial f_e^i} = l_e(f_e) + f_e^i \cdot l'_e(f_e). \quad (3.6)$$

Agora, considere a função $l_P^i(f)$ como a latência marginal para o jogador i da variação de seu fluxo no caminho $P \in \mathcal{P}_i$, dada por

$$l_P^i(f) = \frac{\partial [l_P(f) \cdot f_P^i]}{\partial f_P^i} = l_P(f) + f_P^i \cdot l'_P(f). \quad (3.7)$$

⁴A função $l_e^i(\vec{f}_e)$ é a latência marginal para o jogador i da variação de seu fluxo no arco e . Nela, podemos entender o primeiro termo, $l_e(f_e)$, como a latência por unidade resultante do fluxo adicional, e o segundo termo, $f_e^i \cdot l'_e(f_e)$, como o acréscimo na latência experimentado pelo jogador i . (Roughgarden e Tardos [95])

Equivalentemente, temos que

$$l_P^i(f) = \sum_{e \in P} l_e^i(\vec{f}_e) = \sum_{e \in P} [l_e(f_e) + f_e^i \cdot l'_e(f_e)]. \quad (3.8)$$

Utilizando as latências marginais dos caminhos, podemos caracterizar o equilíbrio de Nash puro de uma forma alternativa.

Lema 3.2.2. Seja $(G = (V, E), r, l)$ uma instância atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s . Um fluxo $f^{\text{EN}} = (f^{\text{EN},1}, \dots, f^{\text{EN},n})$, viável com respeito a r , é um equilíbrio de Nash puro se e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^{\text{EN},i} > 0$, vale que

$$l_P^i(f^{\text{EN}}) \leq l_{\tilde{P}}^i(f^{\text{EN}}). \quad (3.9)$$

Prova. Primeiro, provamos que se f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro, então a condição (3.9) é satisfeita (Bertsekas [12]). Para isso, repare que o problema (EN^i) pode ser escrito, equivalentemente, da seguinte forma.

$$\text{Minimize } C_i(f^{\text{EN},1}, \dots, f^{\text{EN},i-1}, f^i, f^{\text{EN},i+1}, \dots, f^{\text{EN},n}) \quad (3.10a)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = r_i, \quad (3.10b)$$

$$f_P^i \geq 0, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_i. \quad (3.10c)$$

Nesse caso, a convexidade da função $x \cdot l(x)$, para todo $l \in \mathcal{L}_s$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, implica que a função objetivo (3.10a) é convexa. Além disso, como $x \cdot l(x)$ é diferenciável, temos que a condição de otimalidade do problema (3.10) é dada pelo Teorema 2.2.5. Formalmente, temos que, para todo $i \in \mathcal{I}$, $f^{\text{EN},i}$ é solução ótima do problema (3.10) se a seguinte condição de desigualdades variacionais é satisfeita:

$$\begin{aligned} \nabla_{f^{\text{EN},i}} C_i(f^{\text{EN}})^T (f^i - f^{\text{EN},i}) &= \left(\frac{\partial C_i(f^{\text{EN}})}{\partial f_{P_1}^{\text{EN},i}}, \dots, \frac{\partial C_i(f^{\text{EN}})}{\partial f_{P_{m_i}}^{\text{EN},i}} \right)^T (f^i - f^{\text{EN},i}) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l_P^i(f^{\text{EN}}) (f_P^i - f_P^{\text{EN},i}) \geq 0, \text{ para todo } f^i \in \mathcal{F}^i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considere $f^{\text{EN},i} = (f_{P_1}^{\text{EN},i}, \dots, f_{P_{m_i}}^{\text{EN},i})$, onde $m_i = |\mathcal{P}_i|$. Adicionalmente, para qualquer par $k, j \in \{1, \dots, m_i\}$ com $f_{P_k}^{\text{EN},i} > 0$, considere o fluxo

$$f^i = (f_{P_1}^{\text{EN},i}, \dots, f_{P_k}^i = 0, \dots, f_{P_j}^i = f_{P_j}^{\text{EN},i} + f_{P_k}^{\text{EN},i}, \dots, f_{P_{m_i}}^{\text{EN},i}).$$

É fácil verificar que f^i é um fluxo viável para (3.10). O fato da condição (3.11) valer para $f^{\text{EN},i}$ e f^i implica que

$$(l_{P_j}^i(f^{\text{EN}}) - l_{P_k}^i(f^{\text{EN}})) f_{P_k}^{\text{EN},i} \geq 0.$$

Como $f_{P_k}^{\text{EN},i} > 0$, então $l_{P_k}^i(f^{\text{EN}}) \leq l_{P_j}^i(f^{\text{EN}})$. Portanto, a condição (3.9) é satisfeita para um fluxo f^{EN} que é um equilíbrio de Nash puro.

Agora temos que provar que se a condição (3.9) é satisfeita para um fluxo viável \tilde{f} , para todo $i \in \mathcal{I}$, então \tilde{f} é um equilíbrio de Nash puro. Para isso, basta demonstrar que a condição (3.11) é satisfeita quando (3.9) é satisfeita. Repare que, se (3.9) é satisfeita, então para todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $\tilde{f}_P^i > 0$ e $\tilde{f}_{\tilde{P}}^i = 0$, temos que $l_{\tilde{P}}^i(\tilde{f}) \geq l_P^i(\tilde{f})$. Além disso, para todo par $P, P' \in \mathcal{P}_i$ com $\tilde{f}_P^i > 0$ e $\tilde{f}_{P'}^i > 0$, temos que $l_P^i(\tilde{f}) = l_{P'}^i(\tilde{f})$, ou seja, todos os caminhos usados pelo jogador i , no fluxo \tilde{f} , possuem a mesma

latência marginal. Sejam \mathcal{P}'_i o conjunto dos caminhos usados pelo jogador i no fluxo \tilde{f} e $\beta = l'_P(\tilde{f})$, onde $P \in \mathcal{P}'_i$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l'_P(\tilde{f})(f_P^i - \tilde{f}_P^i) &\geq \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} \beta \cdot (f_P^i - \tilde{f}_P^i) \\ &= \beta \cdot \left[\sum_{P \in \mathcal{P}'_i} f_P^i - \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} \tilde{f}_P^i \right] \\ &= \beta \cdot (r_i - r_i) = 0, \text{ para todo } f^i \in \mathcal{F}^i. \end{aligned}$$

□

O Lema 3.2.2 implica que as desigualdades em (3.5) são satisfeitas se e somente se as latências marginais de todos os caminhos usados pelo jogador i , com respeito a seu fluxo, são iguais. Intuitivamente, isso nos diz que as taxas de variação instantânea dos custos dos caminhos usados pelo jogador i , com respeito a seu fluxo em um equilíbrio de Nash puro, devem ser iguais e menores que as dos caminhos não usados por ele, pois se um dos caminhos possuísse uma taxa de variação instantânea menor, então o jogador i teria incentivo para desviar uma fração de sua demanda para esse caminho. Basicamente, cada jogador i deve observar a variação no custo de um caminho, com a adição do seu fluxo, antes de se decidir por usá-lo ou não: o acréscimo que ele experimenta no custo de um caminho ao injetar mais fluxo deve ser menor que o decréscimo que ele experimenta no custo do caminho do qual está retirando fluxo.

O exemplo 3.2.3 nos permite uma melhor intuição sobre o equilíbrio de Nash puro para jogos de roteamento.

Exemplo 3.2.3 (Cominetti et al. [21]). Considere a instância (G, r, l) ilustrada na Figura 3.2. Nela, há dois jogadores atômicos, 1 e 2 ($\mathcal{I} = \{1, 2\}$), com demandas $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, respectivamente. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. Os arcos com latência não nula são definidos como $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (w, x)$ e $e_3 = (y, z)$, e possuem, respectivamente, funções de latência $l_{e_1}(f_{e_1}) = f_{e_1}$, $l_{e_2}(f_{e_2}) = f_{e_2}$ e $l_{e_3}(f_{e_3}) = 2f_{e_3}$. O par OD $s_1 - t_1$ corresponde ao par de vértices $u - v$, e o par OD $s_2 - t_2$ corresponde ao par de vértices $y - z$. O equilíbrio de Nash puro é encontrado utilizando-se as desigualdades em (3.9). Para isso, observe que as funções de latência marginais para o jogador 1 são: $l_{e_1}^1(f_{e_1}) = f_{e_1} + f_{e_1}^1 = 2f_{e_1}^1$ ($f_{e_1} = f_{e_1}^1$) e $l_{e_2}^1(f_{e_2}) = f_{e_2} + f_{e_2}^1$; e para o jogador 2 são: $l_{e_2}^2(f_{e_2}) = f_{e_2} + f_{e_2}^2$ e $l_{e_3}^2(f_{e_3}) = 2(f_{e_3} + f_{e_3}^2) = 4f_{e_3}^2$ ($f_{e_3} = f_{e_3}^2$). O equilíbrio de Nash puro f^{EN} é a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} l_{e_1}^1(f_{e_1}) = l_{e_2}^1(f_{e_2}) \\ l_{e_2}^2(f_{e_2}) = l_{e_3}^2(f_{e_3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f_{e_1}^1 = f_{e_2} + f_{e_2}^1 \\ f_{e_2} + f_{e_2}^2 = 4f_{e_3}^2. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos que $f_{e_1}^{\text{EN}} = f_{e_1}^{\text{EN},1} = 1,48$, $f_{e_2}^{\text{EN},1} = 0,52$, $f_{e_2}^{\text{EN},2} = 1,91$, $f_{e_2}^{\text{EN}} = 0,52 + 1,91 = 2,43$ e $f_{e_3}^{\text{EN}} = f_{e_3}^{\text{EN},2} = 1,09$. O custo para o jogador 1 é $C_1(f^{\text{EN}}) = (f_{e_1}^{\text{EN}})^2 + f_{e_2}^{\text{EN},1} \cdot f_{e_2}^{\text{EN}} = 1,48^2 + 0,52 \cdot 2,43 = 3,454$, e o custo para o jogador 2 é $C_2(f^{\text{EN}}) = f_{e_2}^{\text{EN},2} \cdot f_{e_2}^{\text{EN}} + 2 \cdot (f_{e_3}^{\text{EN},2})^2 = 1,91 \cdot 2,43 + 2 \cdot 1,09^2 = 7,0175$.

Equilíbrio de Wardrop

Para jogos não-atômicos, abusamos novamente da notação e consideramos \mathcal{I} como sendo o conjunto dos pares origem-destino, em vez do conjunto dos jogadores. Nesse caso, cada conjunto \mathcal{P}_i é disjuncto e, portanto, é usual a representação de um fluxo viável f como sendo um vetor $(f_P)_{P \in \mathcal{P}}$, onde $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{P}_i$. A seguir, apresentamos a definição formal de um equilíbrio de Wardrop.

Definição 3.2.4 (Equilíbrio de Wardrop). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento. O fluxo f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop se, para todo par OD $s_i - t_i$, para $i \in \mathcal{I}$, e para todo

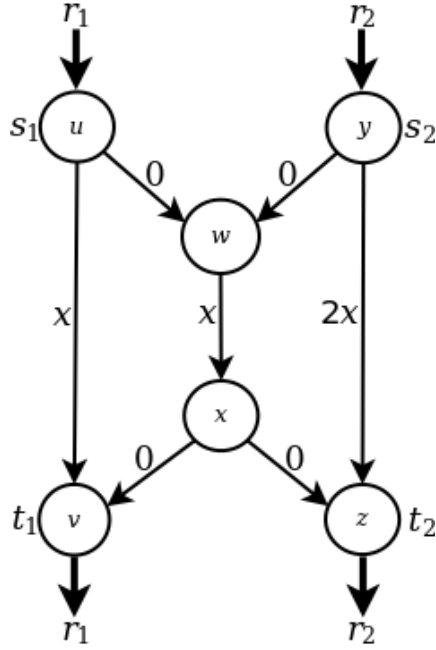


Figura 3.2: Instância com dois jogadores atômicos.

par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^{\text{EW}} > 0$, vale que

$$l_P(f^{\text{EW}}) \leq l_{\tilde{P}}(f^{\text{EW}}). \quad (3.12)$$

A principal diferença entre a escolha de um jogador atômico e a de um jogador não-atômico é que o jogador atômico deve, ao se decidir por um caminho, calcular a latência do caminho com a adição de seu fluxo. Os jogadores não-atômicos, ao contrário, não precisam fazê-lo, visto que a influência de seu fluxo no valor total da latência de um arco é insignificante. Assim, o jogador não-atômico observa a latência dos caminhos como sendo fixas. Explicando em palavras as desigualdades em (3.12), elas nos dizem que todos os caminhos usados pelos jogadores de um determinado par OD possuem a mesma latência, que é menor ou igual que a latência que eles experimentariam em qualquer um dos caminhos não usados.

Correa e Stier-Moses [26] forneceram uma intuição interessante sobre a origem de um equilíbrio de Wardrop. Em tradução livre:

Um equilíbrio de Wardrop é efetivamente pensado como um estado estável, desenvolvido após uma fase de transição onde os jogadores ajustam, sucessivamente, a escolha de seus caminhos até uma situação onde um fluxo estável e latências de caminhos estáveis são alcançados.

Um fluxo f e latências de caminhos estáveis são aqueles onde nenhum dos jogadores deseja alterar o caminho de sua escolha, para qualquer par OD.

Para exemplificar um equilíbrio de Wardrop, considere a instância do Exemplo 3.2.3. A satisfazibilidade das desigualdades em (3.12) implica o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} l_{e_1}(f_{e_1}) = l_{e_2}(f_{e_2}) \\ l_{e_2}(f_{e_2}) = l_{e_3}(f_{e_3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{e_1}^1 = f_{e_2}^1 + f_{e_2}^2 \\ f_{e_2}^1 + f_{e_2}^2 = 2f_{e_3}^2. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos que o equilíbrio de Wardrop é o fluxo f^{EW} tal que $f_{e_1}^{\text{EW},1} = 2$, $f_{e_2}^{\text{EW},2} = 2$ e $f_{e_3}^{\text{EW},2} = 1$, sendo que a latência resultante em todos os caminhos é 2.

Um equilíbrio de Wardrop é o equivalente natural de um equilíbrio de Nash puro para jogos não-atômicos. Isso porque, como os jogadores observam as latências dos caminhos disponíveis como sendo fixas, se um jogador estiver usando o caminho $P \in \mathcal{P}_i$ e há outro caminho $\tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $l_{\tilde{P}}(f) < l_P(f)$, então esse jogador possui incentivo para alterar para o caminho \tilde{P} . Logo, não pode haver tal situação em um fluxo que é um equilíbrio de Wardrop.

3.2.2 Custo social

Ambos, um equilíbrio de Nash puro para uma instância atômica e um equilíbrio de Wardrop para uma instância não-atômica, podem não ser únicos. O Exemplo 3.2.5 ilustra uma instância atômica com funções de latência afins e dois equilíbrios.

Exemplo 3.2.5 (Awerbuch, Azar e Epstein [5]). Considere a instância atômica ilustrada na Figura 3.3. Seja $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$, onde o jogador 1 possui par OD $u - v$, o jogador 2 par OD $u - w$, o jogador 3 par OD $v - w$ e o jogador 4 par OD $w - v$. Todos os jogadores possuem demanda 1 e duas estratégias: escolher o caminho (s_i, t_i) , ou seja, o arco ligando a sua origem ao seu destino; ou escolher o caminho alternativo de tamanho 2, isto é, o caminho que possui dois arcos. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. O fluxo f em que todos os jogadores escolhem o caminho de tamanho 1 é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, note que o custo individual, com respeito a f , é 1 para qualquer um dos jogadores. Se qualquer jogador alterar para o caminho alternativo, então ele passará a ter custo individual 4, considerando-se a adição de sua 1 unidade de fluxo aos dois arcos do caminho. O fluxo \tilde{f} em que todos os jogadores escolhem o caminho de tamanho 2 também é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, note que o custo individual, com respeito a \tilde{f} , é 3 para os jogadores 1 e 2, e 2 para os jogadores 3 e 4. Se o jogador 1 ou o 2 alterar para o caminho de apenas um arco, então ele passará a ter custo individual 3, considerando-se a adição de sua 1 unidade de fluxo ao arco. Se o jogador 3 ou o 4 alterar para o caminho de apenas um arco, então ele passará a ter custo individual 2, considerando-se a adição de sua 1 unidade de fluxo ao arco.

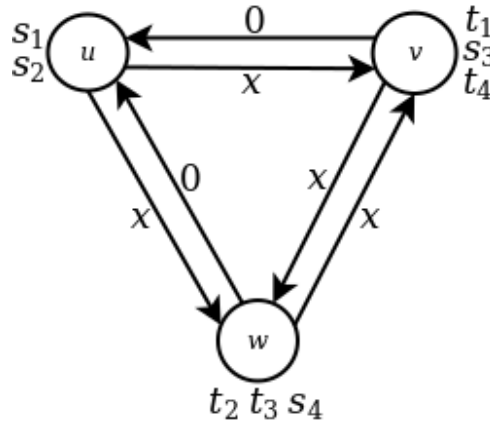


Figura 3.3: Instância atômica com funções de latência afins e dois equilíbrios.

O Exemplo 3.2.6 ilustra uma instância não-atômica com dois equilíbrios de Wardrop. Entretanto, na Subseção 4.5.2 é demonstrado que, sob certas condições nas funções de latência, o equilíbrio de Wardrop é essencialmente único.

Exemplo 3.2.6 (Roughgarden [90]). Considere a instância não-atômica ilustrada na Figura 3.4. Nela, há um único par OD, $s - t$, e a demanda total dos jogadores não-atômicos é 1. Sejam e_1 o arco superior, e_2 o arco do meio e e_3 o arco inferior. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. O fluxo f que envia $\frac{1}{2}$ da demanda total pelo arco e_1 e $\frac{1}{2}$ pelo arco e_2 é um equilíbrio de Wardrop. Para ver

isso, note que o custo individual para cada jogador, com respeito a f , é $l_{e_1}(\frac{1}{2}) = l_{e_2}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + 1 = 1$. Assim, um jogador que esteja enviando fluxo pelo arco e_1 não tem interesse em desviar para o arco e_2 , e vice-versa. Além disso, nenhum jogador possui interesse em desviar para o arco e_3 , que possui latência 2. Outro equilíbrio de Wardrop é o fluxo \tilde{f} que envia toda a demanda total pelo arco inferior. O custo individual para cada jogador, com respeito a \tilde{f} , é $l_{e_3}(1) = \max\{2 - 2 \cdot 1, 0\} = 0$. A latência dos dois arcos superiores é $(\frac{1}{2})^2 + 1 > 0$. Portanto, não é interessante para nenhum jogador alterar para algum deles.

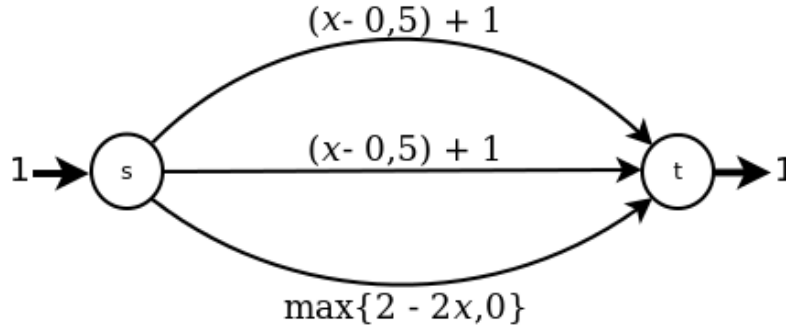


Figura 3.4: Instância não-atômica com dois equilíbrios.

Quando há dois ou mais equilíbrios para uma mesma instância, como saber qual deles é o melhor? Para responder essa pergunta, foram sugeridas algumas formas de se medir a qualidade de um fluxo. A mais utilizada é o custo social de um fluxo, que pode ser utilitário ou igualitário. O custo social utilitário mede o quão bom um fluxo é para todo o sistema, ou seja, o benefício geral, causado pelo fluxo, para todos os jogadores envolvidos. Para jogos de roteamento, em particular, pode-se entender o custo social utilitário como uma medida do congestionamento total na rede causado pelo fluxo. Assim, deseja-se diminuir o valor desse custo (causar menos congestionamento na rede). O custo social igualitário, por sua vez, é mais voltado à medição do quão justo um fluxo é para cada um dos jogadores individualmente, medindo o custo máximo que um determinado fluxo pode impor a um jogador, ou seja, o quão prejudicial esse fluxo pode ser para algum deles. Novamente, é desejável que esse custo seja o menor possível.

Nessa dissertação, nosso foco é o custo social utilitário conhecido como **latência total**, que para jogos atômicos corresponde à soma dos custos individuais de cada um dos jogadores:

$$C(f) = \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i(f) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e^i \\ &= \sum_{e \in E} l_e(f_e) \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i \\ &= \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para jogos não atômicos, definimos a latência total como

$$\begin{aligned}
C(f) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P(f) f_P \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{e \in P} l_e(f_e) \cdot f_P \\
&= \sum_{e \in E} l_e(f_e) \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P \\
&= \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Como se pode observar, ambas as definições são equivalentes. Para ilustrar a latência total, consideramos alguns exemplos. O equilíbrio de Nash puro f^{EN} , do Exemplo 3.2.3, possui latência total dada por $C(f^{\text{EN}}) = C_1(f^{\text{EN}}) + C_2(f^{\text{EN}}) = 10,4715$. A latência total do equilíbrio de Wardrop f^{EW} , para a mesma instância do Exemplo 3.2.3, é dada por $C(f^{\text{EW}}) = (f_{e_1}^{\text{EW}})^2 + (f_{e_2}^{\text{EW}})^2 + f_{e_3}^{\text{EW}} \cdot 2 \cdot f_{e_3}^{\text{EW}} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. Para a instância atômica do Exemplo 3.2.5, a latência total do fluxo f é $C(f) = C_1(f) + C_2(f) + C_3(f) + C_4(f) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = 3 + 3 + 2 + 2 = 10$. Para a instância não-atômica do Exemplo 3.2.6, a latência total do fluxo f é $C(f) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = 0 \cdot \frac{5}{4} + 0 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot 0 = 0$.

Repare que para a instância do Exemplo 3.2.3, a latência total do equilíbrio de Nash puro f^{EN} , de valor 10,47, é maior que a latência total do equilíbrio de Wardrop f^{EW} , de valor 10. Esse fenômeno é contraintuitivo, pois espera-se que jogadores atômicos sejam capazes de atribuir melhores fluxos, visto que são mais cientes do próprio peso na rede. Por outro lado, Cominetti et al. [21] explicaram que a degradação decorre do fato de ambos os jogadores darem menor importância para o fluxo do adversário e, consequentemente, sobrecarregarem o arco do meio. Para entender melhor esse raciocínio, observe que faz sentido que um jogador com 90% do fluxo total na rede dê menos importância para os 10% de fluxo transmitidos pelos demais jogadores, do que daria um jogador com 50% do fluxo total na rede para os 50% de fluxo dos demais jogadores. Esse fenômeno é conhecido em economia como externalidade negativa de congestionamento (*negative congestion externality*), e refere-se ao fato de cada jogador não dar importância ao congestionamento extra que impõe a outros jogadores com a adição de seu fluxo, exercendo assim um “efeito negativo” sobre os demais. A capacidade de um jogador atômico de exercer uma externalidade negativa de congestionamento é maior que a de um jogador não-atômico, e aumenta com o aumento do seu poder de mercado, isto é, com o aumento de sua parcela da demanda total presente no jogo.

Adicionalmente, consideramos a **esperança da latência total** como um custo social para jogos com estratégias mistas (maiores detalhes na Seção 5.4).

Outro tipo de custo social utilitário é a soma das latências (Gairing, Lücking, Mavronicolas e Monien [48]). Em relação aos custos sociais igualitários, temos a latência máxima (Koutsoupias e Papadimitriou [66]) e o custo individual máximo (Epstein, Feldman e Mansour [36]). Como eles não são utilizados para os resultados que analisamos, omitimos aqui as suas definições. Porém, ao leitor interessado, as definições desses custos encontram-se no Apêndice B.

O custo social de uma determinada instância é dito ótimo se corresponde ao menor custo social obtido para aquela instância, dentre todos os fluxos viáveis. O fluxo que induz esse custo é chamado de fluxo ótimo para a instância. Por exemplo, o fluxo \tilde{f} , da instância do Exemplo 3.2.6, é um fluxo ótimo se consideramos o custo social dado pela latência total. O mesmo vale para o fluxo f , da instância do Exemplo 3.2.5, e para o equilíbrio de Wardrop f^{EW} , da instância do Exemplo 3.2.3.

Formalmente, o fluxo ótimo para uma instância pode ser definido da seguinte forma.

Definição 3.2.7 (Roughgarden e Tardos [95]). Seja (G, r, l) uma instância de um jogo de roteamento. Um fluxo ótimo, f^{OPT} , para essa instância é uma solução ótima para o seguinte problema de programação

não-linear.

$$\text{Minimize } C(f) \quad (3.16a)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i, \text{ para todo } i \in \mathcal{I}, \quad (3.16b)$$

$$f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P, \text{ para todo } e \in E, \quad (3.16c)$$

$$f_P \geq 0, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}. \quad (3.16d)$$

Repare que o cálculo de um fluxo ótimo para uma instância independe do tipo dos jogadores (atômicos ou não-atômicos). Outro ponto importante é que um fluxo ótimo depende do custo social que está sendo usado como função objetivo em (3.16a). Desse ponto em diante, sempre que nos referimos a um fluxo ótimo estamos considerando o custo social dado pela latência total.

3.2.3 Preço da Anarquia e Limites de Bicritério

Em todos os exemplos apresentados até agora, o fluxo ótimo era também um equilíbrio. Entretanto, na maioria das vezes isso não ocorre. Para ver isso, considere a instância clássica de Pigou apresentada no Exemplo 3.2.8, que tem esse nome por ter sido discutida primeiramente pelo economista Arthur Cecil Pigou no seu livro *The Economics of Welfare*, de 1920.

Exemplo 3.2.8 (Instância de Pigou). Considere a instância não-atômica ilustrada na Figura 3.5. Nela, há um único par OD, $s - t$, e a demanda total dos jogadores não-atômicos é 1. Sejam e_1 o arco superior e e_2 o arco inferior. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. O equilíbrio de Wardrop f^{EW} é o fluxo que envia toda a demanda total pelo arco inferior, resultando em custo individual 1 para cada jogador. Repare que, no fluxo f^{EW} , nenhum jogador possui incentivo para desviar o seu fluxo $\epsilon \rightarrow 0$ para o arco superior, visto que o seu custo individual continuaria sendo 1. A latência total de f^{EW} é $C(f^{\text{EW}}) = 1$. O fluxo f^{EW} , entretanto, não é um fluxo ótimo, pois o fluxo ótimo para essa instância, f^{OPT} , é aquele que envia $\frac{1}{2}$ da demanda total por cada um dos arcos (ver Seção 4.4), resultando em latência total $C(f^{\text{OPT}}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Repare que o fluxo f^{OPT} não é um equilíbrio de Wardrop, visto que cada jogador enviando seu fluxo $\epsilon \rightarrow 0$ pelo arco superior, a um custo individual de 1, possui interesse em desviá-lo para o arco inferior, que possui latência $\frac{1}{2}$.

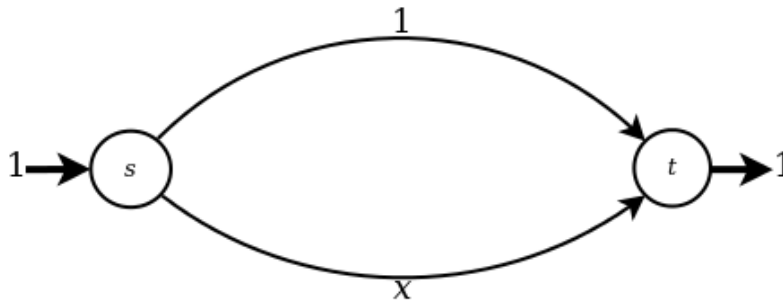


Figura 3.5: Instância de Pigou.

O Exemplo 3.2.8, da instância de Pigou, ilustra um fato importante em jogos de roteamento: quando existe um grupo de jogadores agindo de forma independente e egoísta, um equilíbrio pode diferir de um fluxo ótimo. Isso significa que a falta de coordenação entre os jogadores pode prejudicar o custo social de um fluxo, ou seja, o benefício geral que esse fluxo traz a todos os envolvidos. Apesar de estarmos

considerando aqui apenas a latência total, esse fenômeno ocorre também para os outros tipos de custos sociais. O exemplo a seguir, da instância de Pigou não-linear, demonstra o quanto a falta de coordenação entre os jogadores pode aumentar a latência total de um fluxo.

Exemplo 3.2.9 (Instância de Pigou Não-linear). Considere a instância não-atômica ilustrada na Figura 3.6. Nela, há um único par OD, $s - t$, e a demanda total dos jogadores não-atômicos é 1. Sejam e_1 o arco superior e e_2 o arco inferior. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência, onde $d > 0$. O equilíbrio de Wardrop f^{EW} é o fluxo que envia toda a demanda total pelo arco inferior. A latência total desse fluxo é $C(f^{\text{EW}}) = 1$. Entretanto, o fluxo ótimo, f^{OPT} , é aquele que envia uma pequena fração ϵ da demanda total pelo arco superior e $1 - \epsilon$ pelo arco inferior (ver Seção 4.4), resultando em latência total $C(f^{\text{OPT}}) = 1 \cdot \epsilon + (1 - \epsilon)^d \cdot (1 - \epsilon) = \epsilon + (1 - \epsilon)^{d+1}$. Quando d tende ao infinito, a latência total do fluxo ótimo tende a 0.

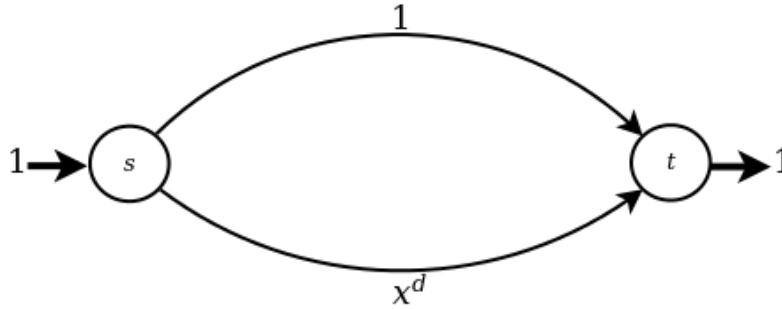


Figura 3.6: Instância de Pigou Não-linear.

Definimos $\rho(G, 1, l) = C(f^{\text{EW}})/C(f^{\text{OPT}})$ como a razão entre as latências totais do equilíbrio de Wardrop e do fluxo ótimo para essa instância. Essa razão tende ao infinito quando d tende ao infinito. Isso implica que, para essa instância, a latência total do equilíbrio de Wardrop é infinitamente pior que a latência total do fluxo ótimo quando d tende ao infinito.

Generalizando, definimos a **razão de coordenação**⁵ $\rho(G, r, l)$, como sendo a razão entre os custos sociais do equilíbrio de maior custo social (ou, pior equilíbrio, como passamos a chamar de agora em diante) e de um fluxo ótimo. Seja \mathcal{F}^{EQ} o conjunto de todos os equilíbrios para a instância (G, r, l) , e f^{OPT} um fluxo ótimo para essa instância. Então,

$$\rho(G, r, l) = \max_{f \in \mathcal{F}^{\text{EQ}}} \frac{C(f)}{C(f^{\text{OPT}})}. \quad (3.17)$$

Aqui, abusando novamente da notação, consideramos C como sendo um custo social genérico. Repare que a razão de coordenação depende do tipo de custo social e do conceito de equilíbrio que se está utilizando.

Preço da Anarquia

Uma das métricas mais utilizadas para se medir a ineficiência de um equilíbrio é o Preço da Anarquia (PoA, de *Price of Anarchy*). Ele foi introduzido por Koutsoupias e Papadimitriou [66], com o nome inicial de Equilíbrio de Pior Caso (*Worst-case Equilibria*), para quantificar a ineficiência dos equilíbrios obtidos para instâncias com um único par OD, arcos paralelos unindo os dois (em uma única direção) e custo social dado pela esperança da latência máxima (Apêndice B). Essa medida é a maior razão, dentre todas as instâncias permitidas, entre os custos sociais do pior equilíbrio e de um fluxo ótimo. Formalmente, definimos o Preço da Anarquia da seguinte forma.

⁵Do inglês, *coordination ratio*.

Definição 3.2.10 (Preço da Anarquia). Sejam uma classe de grafos \mathcal{G} , um vetor de demandas r e uma classe de funções de latência \mathcal{L} . Dizemos que $(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ se $G \in \mathcal{G}$ e $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$. O Preço da Anarquia para o conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias permitidas é dado por

$$\sup_{(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})} \rho(G, r, l). \quad (3.18)$$

Geralmente, limita-se um dos atributos no conjunto de instâncias permitidas, visto que, como ilustrado no Exemplo 3.2.9, para instâncias genéricas o PoA pode tender ao infinito. Por exemplo, a classe \mathcal{G} pode corresponder aos grafos com dois nós e m arcos paralelos os unindo, e a classe \mathcal{L} pode ser a classe das funções polinomiais de grau máximo d .

Para ilustrar, considere que o conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias permitidas contém apenas a instância do Exemplo 3.2.8. Nela, o equilíbrio de Wardrop f^{EW} tem latência total $C(f^{\text{EW}}) = 1$ e o fluxo ótimo f^{OPT} tem latência total $C(f^{\text{OPT}}) = \frac{3}{4}$. Logo, o Preço da Anarquia para o conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias permitidas, com respeito à latência total, é $C(f^{\text{EW}})/C(f^{\text{OPT}}) = 1/\frac{3}{4} = \frac{4}{3}$. De fato, o Preço da Anarquia, com respeito à latência total, para qualquer conjunto de instâncias não-atômicas com funções de latência afins ($l(x) = ax + b$, para $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) é $\frac{4}{3}$. A prova desse resultado é vista na Subseção 4.6.2.

A maioria das análises existentes sobre o Preço da Anarquia foi feita limitando-se as instâncias analisadas àquelas que possuem funções de latência pertencentes a uma certa classe \mathcal{L} de funções. Uma forma de se fazer isso é utilizando uma função $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de **valor de anarquia**, que associa um valor real a uma classe de funções. Esse valor é o supremo de uma expressão calculada em função de todo $l \in \mathcal{L}$ e todo par de fluxos que podem passar por l , e visa medir o grau de inclinação de uma classe de funções. Assim, quanto maior o grau de inclinação de uma classe de funções, maior o seu valor de anarquia. Por exemplo, quanto maior é o grau máximo d de um polinômio, maior é o valor de anarquia da classe de funções que contém apenas os polinômios de grau máximo d .

Foram criados diferentes valores de anarquia para jogos com características distintas, como é visto em maiores detalhes nas Subseções 4.6.2, 5.4.3, 6.2.2 e 6.3.2. Geralmente, o PoA é limitado superiormente por esse valor de anarquia ou por alguma expressão que contém esse valor de anarquia. Por exemplo, pode-se provar que $\text{PoA} \leq \gamma(\mathcal{L})$ para um conjunto de instâncias com funções de latência pertencentes a \mathcal{L} . Para achar o limitante inferior do PoA, para um conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias permitidas, é necessária a construção de uma instância $(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$. Assim, podemos saber com certeza que o maior valor de $\rho(G, r, l)$, dentre todas as instâncias $(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$, é ao menos tão grande quanto o da instância construída. Quando encontra-se um limitante inferior igual ao limitante superior, diz-se que o PoA é exato (ou justo, de *tight*). As classes de jogos $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ que possuem **PoA exato** são chamadas de **classes de jogos exatos** ou **classes de jogos justos**.

Limites de Bicritério

Para instâncias onde o Preço da Anarquia é ilimitado, ainda é possível analisar a eficiência de um equilíbrio f^{EQ} , para uma instância (G, r, l) , pela comparação entre o custo social deste com o custo social de um fluxo viável para a instância $(G, \alpha \cdot r, l)$, ou seja, a instância originada a partir de (G, r, l) pela multiplicação das demandas por um valor $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Por exemplo, seja (G, r, l) uma instância, podemos querer provar que qualquer equilíbrio f^{EQ} para essa instância é tal que $C(f^{\text{EQ}}) \leq C(\tilde{f}^{\text{OPT}})$, onde \tilde{f}^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, 2r, l)$, ou seja, um fluxo ótimo para a instância originada a partir de (G, r, l) pela duplicação das demandas.

Esse método de análise é chamado de **limites de bicritério** ou **resultados de pseudoaproximação**. Além de fornecer uma análise alternativa ao PoA, para os casos em que este é ilimitado, os limites de bicritério também são úteis para provar condições necessárias para a melhoria de uma rede. Por exemplo, um limite de bicritério é usado para provar que o desempenho ótimo pode ser superado apenas duplicando a capacidade de cada arco. Maiores detalhes na Subseção 4.6.3.

Capítulo 4

Jogos Não-atômicos

Nesse capítulo, apresentamos e demonstramos os principais resultados obtidos para jogos de roteamento não-atômicos. Mais especificamente, apresentamos resultados válidos para duas classes de funções de latência: a classe \mathcal{L} das funções positivas, contínuas e não-decrescentes; e a classe¹ \mathcal{L}_s das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas (a função $x \cdot l(x)$ é convexa, para todo $l \in \mathcal{L}_s$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). Repare que a diferenciabilidade de uma função em um domínio implica continuidade nesse domínio. Assim, temos que $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}$.

Na Seção 4.1, demonstramos a equivalência entre jogos não-atômicos com fluxo divisível e fluxo indivisível. Na Seção 4.2, demonstramos a equivalência entre jogos não-atômicos com estratégias puras e estratégias mistas. Na Seção 4.3, apresentamos a caracterização de um equilíbrio de Wardrop por desigualdades variacionais. Na Seção 4.4, apresentamos a caracterização de um fluxo ótimo em função de um equilíbrio de Wardrop. Na Seção 4.5, apresentamos os principais resultados em termos de existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop, obtidos para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} . Na Seção 4.6, apresentamos os principais resultados em termos de ineficiência de um equilíbrio de Wardrop, obtidos para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} . Na Seção 4.7, apresentamos uma breve descrição dos jogos capacitados e seus resultados, visto que equilíbrios capacitados implicam diferenças importantes nos resultados em comparação a equilíbrios de Wardrop.

4.1 Equivalência entre jogos não-atômicos com fluxo divisível e fluxo indivisível

Para jogos não-atômicos, fluxo divisível e fluxo indivisível são equivalentes. Para ver isso, lembre que num equilíbrio de Wardrop todos os caminhos usados por um determinado par OD possuem a mesma latência. Lembre também que a adição do fluxo de um único jogador não altera a latência de um caminho. Assim, para um único jogador com demanda $\epsilon \rightarrow 0$, é indiferente se ele coloca uma quantidade ϵ de fluxo em um único caminho ou se divide o seu fluxo em mais de um caminho, pois o seu custo individual é o mesmo em ambos os casos. Mais formalmente, suponha que o jogador j , associado ao par OD $s_i - t_i$, atribui ϵ_P de fluxo para cada caminho $P \in \mathcal{P}_i$. Sejam \mathcal{P}'_i os caminhos usados pelos jogadores do par OD $s_i - t_i$ no equilíbrio de Wardrop f^{EW} e $L_i(f^{\text{EW}})$ a latência comum desses caminhos. O custo individual de j , com respeito a f^{EW} , é dado por $C_j(f^{\text{EW}}) = \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} (\epsilon_P / \epsilon) \cdot l_P(f^{\text{EW}}) = \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} (\epsilon_P / \epsilon) \cdot L_i(f^{\text{EW}}) = L_i(f^{\text{EW}}) \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} (\epsilon_P / \epsilon) = L_i(f^{\text{EW}})$. Em outras palavras, o custo individual é independente de quanto de fluxo o jogador j coloca em cada caminho.

¹Essa classe foi definida no capítulo anterior. Porém, para facilitar a leitura, definimos aqui novamente.

4.2 Equivalência entre jogos não-atômicos com estratégias puras e mistas

Para jogos não-atômicos, estratégias puras e estratégias mistas são equivalentes. Para ver isso, note que, como um jogador não-atômico vê as latências dos caminhos como sendo fixas, ele pode sortear qual caminho irá percorrer, dentre todos os caminhos de menor latência, em vez de escolher um de forma determinística. Por exemplo, um jogador não-atômico que enxergue dois caminhos de latência mínima, dentre todos os caminhos disponíveis para ele, pode escolher um desses dois caminhos de acordo com uma distribuição de probabilidades que atribui probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada um deles.

A garantia de que a adoção de estratégias mistas, em uma sequência de jogos, induz a convergência para um equilíbrio de Wardrop é consequência do teorema apresentado por Haurie e Marcotte [55]. Eles provaram que, em uma sequência de jogos, o equilíbrio de Nash converge para o equilíbrio de Wardrop com o aumento do número de jogadores, desde que satisfeitas as condições para a existência de um equilíbrio de Nash puro (Proposição 2.1.6). Intuitivamente, isso nos diz que, como o espaço de estratégias é compacto, ou seja, há um limite máximo para a quantidade de demanda em cada par OD, a demanda individual de cada jogador vai ficando menor à medida que o número de jogadores vai aumentando. Quando o número de jogadores tende ao infinito, suas demandas individuais tornam-se infinitesimalmente pequenas e o equilíbrio resultante possui as características do equilíbrio de Wardrop, visto que o fluxo de um único jogador é insignificante para o cálculo da latência de um caminho.

4.3 Caracterização de equilíbrio de Wardrop por desigualdades variacionais

O problema de encontrar um equilíbrio de Wardrop para uma instância não-atômica (G, r, l) , onde $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$, é equivalente ao problema de desigualdades variacionais de encontrar um fluxo viável f^{EW} tal que

$$\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})(f_e - f_e^{\text{EW}}) \geq 0, \text{ para todo fluxo viável } f. \quad (4.1)$$

Para demonstrar isso, reescrevemos a desigualdade (4.1), gerando a seguinte proposição.

Proposição 4.3.1 (Roughgarden [91], Lema 3.7). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} . Se o fluxo f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para essa instância, então

$$\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} \leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e, \text{ para todo fluxo viável } f. \quad (4.2)$$

Prova. Sejam f^{EW} um equilíbrio de Wardrop de (G, r, l) e $L_i(f^{\text{EW}})$ a latência comum de todos os caminhos $P \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^{\text{EW}} > 0$. Então,

$$\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} = C(f^{\text{EW}}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}})r_i.$$

Lembre-se que, para jogos não-atômicos, \mathcal{I} é o conjunto dos pares OD e r_i é a demanda total do par OD $s_i - t_i$. Como f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop, temos que $l_P(f^{\text{EW}}) \geq L_i(f^{\text{EW}})$ para todo $P \in \mathcal{P}_i$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l_P(f^{\text{EW}}) f_P \\
&\geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} L_i(f^{\text{EW}}) f_P \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}}) \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}}) r_i.
\end{aligned}$$

□

4.4 Caracterização de um fluxo ótimo em função de um equilíbrio de Wardrop

Seja (G, r, l) uma instância de um jogo de roteamento não-atômico. Um fluxo ótimo para essa instância pode ser encontrado da seguinte forma: cria-se uma instância modificada (G, r, l^*) , onde $l_e^*(x) = \frac{\partial [l_e(x) \cdot x]}{\partial x} = l_e(x) + x \cdot l'_e(x)$ é a função de latência marginal do arco e , e calcula-se um equilíbrio de Wardrop para essa instância. Então, temos que um equilíbrio de Wardrop para (G, r, l^*) equivale a um fluxo ótimo para (G, r, l) . Demonstramos esse resultado na proposição a seguir.

Proposição 4.4.1. Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s . Se l_e^* é a função de latência marginal para o arco e , então f^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância (G, r, l) se e somente se, para todo par OD $s_i - t_i$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^{\text{OPT}} > 0$, vale que

$$l_P^*(f^{\text{OPT}}) \leq l_{\tilde{P}}^*(f^{\text{OPT}}). \quad (4.3)$$

Prova. Primeiro, provamos que se f^{OPT} é um fluxo ótimo, então a condição (4.3) é satisfeita. Repare que as desigualdades em (4.3) correspondem à condição de um equilíbrio de Wardrop para a instância modificada (G, r, l^*) . A prova dessa proposição é similar à apresentada para o Lema 3.2.2. Porém, aqui deseja-se encontrar a solução do problema de se calcular o fluxo ótimo (problema (3.16)). Para isso, considere a função objetivo $C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P(f) f_P$. Note que

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P(f) f_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{e \in P} l_e(f_e) f_P = \sum_{e \in E} \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P \cdot l_e(f_e) = \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e. \quad (4.4)$$

Da mesma forma que no problema (ENⁱ), encontrar o mínimo global de $C(f)$, dentre todos os fluxos viáveis $f \in \mathcal{F}$, corresponde a um problema de programação convexa com condição de otimalidade dada pelo Teorema 2.2.5. Assim, pelas Proposições 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, podemos caracterizar um fluxo ótimo f^{OPT} pelo seguinte problema de desigualdades variacionais:

$$\begin{aligned}
\nabla_{f^{\text{OPT}}} C(f^{\text{OPT}})^T (f - f^{\text{OPT}}) &= \left(\frac{\partial C(f^{\text{OPT}})}{\partial f_{P_1}^{\text{OPT}}}, \dots, \frac{\partial C(f^{\text{OPT}})}{\partial f_{P_{|\mathcal{P}|}}^{\text{OPT}}} \right)^T (f - f^{\text{OPT}}) \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P^*(f^{\text{OPT}}) (f_P - f_P^{\text{OPT}}) \geq 0, \text{ para todo fluxo viável } f.
\end{aligned} \quad (4.5)$$

Além disso, o conjunto de restrições (3.16b) corresponde ao produto cartesiano das restrições (3.10b). Assim, por um processo similar ao da demonstração do Lema 3.2.2, obtemos que, para um $P \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^{\text{OPT}} > 0$, a condição (4.3) é válida para qualquer $\tilde{P} \in \mathcal{P}_i$. Mais especificamente, considere $f^{\text{OPT}} = (f_{P_1}^{\text{OPT}}, \dots, f_{P_{|\mathcal{P}|}}^{\text{OPT}})$. Adicionalmente, para qualquer $P_k, P_j \in \mathcal{P}_i$ com $f_{P_k}^{\text{OPT}} > 0$, considere o

fluxo

$$f = (f_{P_1}^{\text{OPT}}, \dots, f_{P_k} = 0, \dots, f_{P_j} = f_{P_j}^{\text{OPT}} + f_{P_k}^{\text{OPT}}, \dots, f_{P_{|\mathcal{P}|}}^{\text{OPT}}).$$

É fácil verificar que f é um fluxo viável. Como a condição (4.5) deve valer para f^{OPT} e f , temos que

$$(l_{P_j}^*(f^{\text{OPT}}) - l_{P_k}^*(f^{\text{OPT}})) \cdot f_{P_k}^{\text{OPT}} \geq 0.$$

Como $f_{P_k}^{\text{OPT}} > 0$, então $l_{P_k}^*(f^{\text{OPT}}) \leq l_{P_j}^*(f^{\text{OPT}})$. Portanto, a condição (4.3) é satisfeita para um fluxo f^{OPT} que é ótimo.

Agora, temos que provar que se a condição (4.3) é satisfeita para um fluxo viável \tilde{f} , então \tilde{f} é um fluxo ótimo. Para isso, basta demonstrar que a condição (4.5) é satisfeita quando (4.3) é satisfeita. Repare que, se (4.3) é satisfeita, então para todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $\tilde{f}_P > 0$ e $\tilde{f}_{\tilde{P}} = 0$, temos que $l_{\tilde{P}}^*(\tilde{f}) \geq l_P^*(\tilde{f})$. Além disso, para todo par $P, P' \in \mathcal{P}_i$ com $\tilde{f}_P > 0$ e $\tilde{f}_{P'} > 0$, temos que $l_P^*(\tilde{f}) = l_{P'}^*(\tilde{f})$, ou seja, todos os caminhos usados pelo par OD $s_i - t_i$, no fluxo \tilde{f} , possuem a mesma latência marginal. Sejam \mathcal{P}'_i o conjunto dos caminhos usados pelo par OD $s_i - t_i$ no fluxo \tilde{f} e $\beta = l_P^*(\tilde{f})$, onde $P \in \mathcal{P}'_i$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l_P^*(\tilde{f})(f_P - \tilde{f}_P) &\geq \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \beta \cdot (f_P - \tilde{f}_P) \\ &= \beta \cdot \left[\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P - \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tilde{f}_P \right] \\ &= \beta \cdot (r_i - r_i) = 0, \text{ para todo } f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

□

Com base nesse resultado, formula-se o seguinte corolário.

Corolário 4.4.2 (Beckmann, McGuire e Winsten [11], Dafermos e Sparrow [29]). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s . Se l_e^* é a função de latência marginal do arco e , então f^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância (G, r, l) se e somente se f^{OPT} é um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l^*) .

Para ilustrar essa caracterização, considere a instância do Exemplo 3.2.8. Na instância modificada (G, r, l^*) , o arco superior tem latência $l_{e_1}^*(f_{e_1}) = 1$ e o arco inferior latência $l_{e_2}^*(f_{e_2}) = 2f_{e_2}$. O equilíbrio de Wardrop f^{EW} para a instância (G, r, l^*) satisfaz $l_{e_1}^*(f_{e_1}^{\text{EW}}) = l_{e_2}^*(f_{e_2}^{\text{EW}})$, o que implica que $f_{e_1}^{\text{EW}} = f_{e_2}^{\text{EW}} = \frac{1}{2}$. Dividir a demanda igualmente entre os arcos resulta no fluxo ótimo para a instância original.

4.5 Existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop

Roughgarden [87] demonstrou a existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop para instâncias cujas funções de latência pertencem à classe \mathcal{L} . Nesse caso, o equilíbrio de Wardrop é **essencialmente único**, no sentido de que todos os fluxos que são um equilíbrio de Wardrop induzem a mesma latência em um arco e , para todo $e \in E$. Consequentemente, esses fluxos possuem a mesma latência total. Roughgarden e Tardos [96] generalizaram esse resultado para jogos de congestionamento (ver Seção 5.4) não-atômicos com estratégias mistas.

Na Subseção 4.5.1, apresentamos uma função potencial para o problema de se calcular um equilíbrio de Wardrop. Na Subseção 4.5.2, demonstramos a existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop.

4.5.1 Função potencial

Seja \mathcal{F} o conjunto dos fluxos viáveis para uma instância (G, r, l) . Nessa seção, apresentamos uma função potencial $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ para o jogo de roteamento não-atômico (ver Seção 2.4). Desse modo,

um fluxo f é um mínimo global de Φ se e somente se f é um equilíbrio de Wardrop. Repare que, na seção anterior, o problema de se minimizar a latência total $C(f)$ foi resolvido calculando-se um equilíbrio de Wardrop para uma instância modificada. Fazemos, então, a pergunta inversa para achar a função potencial de um jogo não-atômico: qual função Φ devolve um equilíbrio de Wardrop como o mínimo global? Mais precisamente, queremos achar uma função Φ convexa onde a condição de otimalidade, dada pelo Teorema 2.2.5, implica a condição para um equilíbrio de Wardrop, dada na Definição 3.2.4. Para isso, suponha que existem funções $h_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ convexas e diferenciáveis, para cada arco $e \in E$. Então, definimos $\Phi(f) = \sum_{e \in E} h_e(f_e)$. Pela Proposição 4.4.1, f é uma solução ótima de Φ (ou seja, um fluxo ótimo para a instância (G, r, g) , onde $g_e(x) = h_e(x)/x$, para todo $e \in E$) se e somente se, para todo par OD s_i - t_i e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $f_P > 0$, temos que

$$h'_P(f) \leq h'_{\tilde{P}}(f), \quad (4.6)$$

onde $h_P(f) = \sum_{e \in P} h_e(f_e)$. Adicionalmente, se $h'_P(f) = l_P(f)$, então a condição (3.12) é satisfeita (ver Definição 3.2.4) e f é um equilíbrio de Wardrop. Fazendo $h_e(x) = \int_0^x l_e(y)dy$, onde $l_e \in \mathcal{L}$, temos o resultado desejado. A prova é similar à apresentada para a Proposição 4.4.1. Como supomos que a função l_e é contínua e não-decrescente, temos que a função h_e é continuamente diferenciável e convexa. Assim, a função potencial é dada por

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} l_e(x)dx. \quad (4.7)$$

Com o uso dessa função potencial, formulamos o problema de se calcular um equilíbrio de Wardrop para jogos não-atômicos como o seguinte problema de programação convexa:

$$\text{Minimize } \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} l_e(x)dx \quad (4.8a)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i, \text{ para todo } i \in \mathcal{I}, \quad (4.8b)$$

$$f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P, \text{ para todo } e \in E, \quad (4.8c)$$

$$f_P \geq 0, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}. \quad (4.8d)$$

Formalizando, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.5.1 (Beckmann et al. [11]). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} . Um fluxo viável para (G, r, l) é um equilíbrio de Wardrop se e somente se é um mínimo global da função potencial Φ definida em (4.7).

4.5.2 Prova da existência e unicidade de um equilíbrio de Wardrop

A seguir, apresentamos o teorema que demonstra a existência e unicidade essencial de um equilíbrio de Wardrop.

Teorema 4.5.2 (Beckmann et al. [11]). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica de um jogo de roteamento com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} . Então,

- (a) a instância (G, r, l) admite ao menos um fluxo que é um equilíbrio de Wardrop, e
- (b) se f e \tilde{f} são equilíbrios de Wardrop para (G, r, l) , então $l_e(f_e) = l_e(\tilde{f}_e)$ para todo arco $e \in E$.

Prova. Considere a função potencial $\Phi(f) = \sum_{e \in E} h_e(f_e)$, onde $h_e(x) = \int_0^x l_e(y)dy$, vista na seção anterior. A parte (a) segue dos seguintes dois fatos: com o pressuposto de que a função l_e é contínua e

não-decrescente, temos que a função Φ é convexa em \mathcal{F} , e, além disso, a região \mathcal{F} dos fluxos viáveis é compacta (fechada e limitada) devido à restrição (4.8b). Assim, o Teorema de Weierstrass (Teorema 2.2.1) garante a existência de uma solução ótima para o problema (4.8).

Para provar a parte (b), considere os equilíbrios de Wardrop f e \tilde{f} . Como a função Φ é convexa, temos que

$$\Phi(\lambda f + (1 - \lambda)\tilde{f}) \leq \lambda\Phi(f) + (1 - \lambda)\Phi(\tilde{f}), \text{ para todo } \lambda \in [0, 1]. \quad (4.9)$$

Porém, como f e \tilde{f} correspondem a mínimos globais de Φ , temos que $\Phi(f) = \Phi(\tilde{f})$. Assim, a desigualdade (4.9) é satisfeita na igualdade. Além disso, como a função h_e é convexa, isso só é possível se h_e é linear entre f_e e \tilde{f}_e . Logo, temos que $l_e(f_e) = l_e(\tilde{f}_e)$. \square

4.6 Ineficiência de um equilíbrio de Wardrop

Para jogos não-atômicos, o Preço da Anarquia está bem definido para várias classes de instâncias quando considera-se o custo social dado pela latência total. Roughgarden e Tardos [95] provaram que o PoA exato para jogos com funções de latência afins é $\frac{4}{3}$, e para jogos com funções de latência polinomiais de grau máximo d é $(1 - d \cdot (d + 1)^{-(d+1)/d})^{-1} = \theta(\frac{d}{\ln d})$. Eles também provaram o seguinte limite de bicritério: para qualquer fluxo viável f^* para a instância $(G, (1 + \delta)r, l)$, onde $\delta \geq 1$ e $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$, temos que $\frac{1}{\delta}C(f^*) \geq C(f)$, onde f é um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l) . Dafermos e Sparrow [29] demonstraram que, para instâncias com funções de latência do tipo $l(x) = c \cdot x^d$, onde c é uma constante e d é fixo, o equilíbrio de Wardrop é um fluxo ótimo. Roughgarden [91] introduziu o valor de anarquia $\alpha : \mathcal{L}_s \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e provou que instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s possuem PoA exato $\alpha(\mathcal{L}_s)$. Mas o resultado mais importante de Roughgarden [91] é a demonstração de que instâncias com apenas dois nós e arcos paralelos atingem o valor $\alpha(\mathcal{L}_s)$. Esse resultado é importante porque demonstra que o Preço da Anarquia para instâncias não-atômicas é independente da topologia da rede, sendo que o que realmente interfere no seu valor é a classe de funções de latência permitidas. Adicionalmente, o valor $\alpha(\mathcal{L}_s)$ foi calculado para algumas classes de funções. Em particular, para funções afins foi obtido o valor $\frac{4}{3} = 1,333$, para funções quadráticas o valor 1,626 e para funções cúbicas o valor 1,896. A generalização para polinômios de grau máximo d resulta no mesmo valor obtido por Roughgarden e Tardos [95], mencionado anteriormente. Roughgarden e Tardos [97] também generalizaram esses resultados para jogos de congestionamento (ver Seção 5.4).

Correa, Schulz e Stier-Moses [22] definiram outro valor de anarquia, a função $\beta : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Repare que o valor β é menos restritivo que o valor α , pois este último aceita apenas classes com funções semiconvexas. Correa, Schulz e Stier-Moses [25] provaram que o PoA para instâncias não-atômicas, com funções de latência pertencentes a uma classe $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ que contém as funções constantes, é exatamente $(1 - \beta(\mathcal{L}'))^{-1}$. Além disso, se f é um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l) , então $C(f) \leq C(\tilde{f}^{\text{OPT}})$, onde \tilde{f}^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, (1 + \beta(\mathcal{L}'))r, l)$. Adicionalmente, Correa et al. [25] demonstraram também que $\alpha(\mathcal{L}_s) = (1 - \beta(\mathcal{L}_s))^{-1}$ e, se $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}_s$ é tal que $l(0) = 0$ para todo $l \in \mathcal{L}'$, então $\alpha(\mathcal{L}') \leq \alpha(\mathcal{L}'')$, onde $\mathcal{L}'' \subseteq \mathcal{L}_s$ é tal que $l(0)$ é arbitrário para todo $l \in \mathcal{L}''$. Como os principais resultados obtidos com o valor de anarquia α são os mesmos obtidos com o valor de anarquia β , apresentamos nessa dissertação apenas o valor β , que é válido para uma classe maior de funções.

Na Subseção 4.6.1, apresentamos um limitante superior para o PoA obtido com o uso da função potencial definida em (4.7). Na Subseção 4.6.2, apresentamos o valor de anarquia β e as demonstrações dos principais resultados obtidos com ele. Na Subseção 4.6.3, apresentamos as demonstrações dos principais resultados de limites de bicritério. Na Subseção 4.6.4, apresentamos, por questão de completude, resultados de ineficiência do equilíbrio obtidos para outros modelos de instâncias não-atômicas.

4.6.1 Limitante superior para o PoA por função potencial

Roughgarden e Tardos [95] demonstraram uma delimitação superior para o PoA para instâncias não-atômicas usando a função potencial definida em (4.7). Esse foi um dos primeiros resultados nesse sentido e, por isso, o reproduzimos a seguir.

Proposição 4.6.1 (Roughgarden e Tardos [95]). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} , e suponha que $x \cdot l_e(x) \leq \gamma \cdot \int_0^x l_e(y) dy$ para todo $e \in E$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. O Preço da Anarquia para (G, r, l) é no máximo γ .

Prova. Sejam f^{EW} um equilíbrio de Wardrop e f^{OPT} um fluxo ótimo. Temos que

$$C(f^{\text{EW}}) \leq \gamma \cdot \Phi(f^{\text{EW}}) \leq \gamma \cdot \Phi(f^{\text{OPT}}) \leq \gamma \cdot C(f^{\text{OPT}}), \quad (4.10)$$

onde a primeira desigualdade segue da hipótese da proposição, a segunda desigualdade segue da propriedade da função potencial Φ (Subseção 4.5.1) e a terceira desigualdade segue da hipótese de não-decrescimento das funções de latência (o que assegura que $\int_0^x l_e(y) dy \leq x \cdot l_e(x)$ para todo arco e). \square

4.6.2 Valor de anarquia β

O valor de anarquia β foi definido por Correa et al. [22] da seguinte forma.

Definição 4.6.2 (Correa et al. [22]). Para toda função de latência $l \in \mathcal{L}$ e todo valor $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, define-se

$$\beta(v, l) := \frac{1}{vl(v)} \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{x(l(v) - l(x))\}, \quad (4.11)$$

onde, por convenção, $0/0 = 0$.

Temos que $\beta(v, l) \geq 0$ e, visto que $x(l(v) - l(x)) \leq 0$ para $x > v$, podemos restringir o máximo para o intervalo $[0, v]$. Definimos também $\beta(l) := \sup_{v \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \beta(v, l)$ e $\beta(\mathcal{L}) := \sup_{l \in \mathcal{L}} \beta(l)$. Note que $\beta(\mathcal{L}) \leq 1$.

Correa et al. [25] apresentaram uma interpretação geométrica para o valor de anarquia β . Para melhor entendê-la, considere uma instância não-atômica (G, r, l) com funções de latência afins. Apresentamos uma prova de que a razão de coordenação $\rho(G, r, l)$ é menor ou igual $\frac{4}{3}$, resultado mencionado no início dessa seção. Sejam f^{EW} um equilíbrio de Wardrop e f^{OPT} um fluxo ótimo. Então,

$$\begin{aligned} C(f^{\text{EW}}) &= \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{OPT}} \\ &= \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{OPT}}) f_e^{\text{OPT}} + \sum_{e \in E} (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e^{\text{OPT}})) f_e^{\text{OPT}} \\ &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{OPT}}) f_e^{\text{OPT}} + \sum_{e \in E: f_e^{\text{EW}} > f_e^{\text{OPT}}} (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e^{\text{OPT}})) f_e^{\text{OPT}} \\ &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{OPT}}) f_e^{\text{OPT}} + \frac{1}{4} \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &= C(f^{\text{OPT}}) + \frac{1}{4} C(f^{\text{EW}}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Logo, $\frac{C(f^{\text{EW}})}{C(f^{\text{OPT}})} \leq \frac{4}{3}$ e, daqui, conclui-se que $\rho(G, r, l) \leq \frac{4}{3}$. A primeira desigualdade segue da Proposição 4.3.1. A segunda desigualdade é obtida ignorando-se os termos da segunda somatória que dão

valores negativos ou nulos. A terceira desigualdade pode ser entendida observando-se a Figura 4.1. Nela, a área $f_e \cdot (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))$, da região cinza, é no máximo metade da área do triângulo definido pelos pontos $(0, l_e(f_e^{\text{EW}}))$, $(0, b_e)$ e $(f_e^{\text{EW}}, l_e(f_e^{\text{EW}}))$, que por sua vez é no máximo metade da área $f_e^{\text{EW}} \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})$.

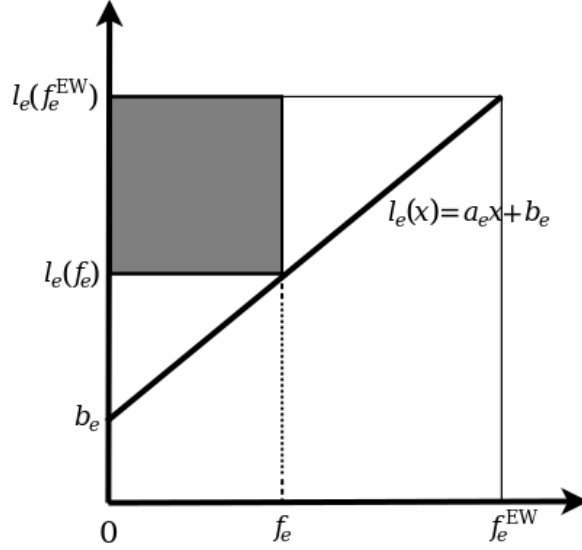


Figura 4.1: O valor $\beta(f_e^{\text{EW}}, l_e)$ corresponde à maior razão entre a área da região cinza, $f_e \cdot (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))$, obtida variando-se f_e , e a área $f_e^{\text{EW}} \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})$.

Generalizando para a classe \mathcal{L} , o cálculo do valor β é ilustrado na Figura 4.2. O teorema apresentado a seguir afirma que o PoA para instâncias com funções de latência pertencentes a \mathcal{L} é no máximo $(1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$. Isto é equivalente a dizer que, para um equilíbrio de Wardrop f^{EW} e um fluxo ótimo f^{OPT} , temos que $C(f^{\text{EW}}) \leq C(f^{\text{OPT}}) + \beta(\mathcal{L})C(f^{\text{EW}})$. Desse modo, a expressão (4.12) apenas nos diz que $\beta(\mathcal{L}_{af}) = \frac{1}{4}$, onde \mathcal{L}_{af} é a classe das funções afins.

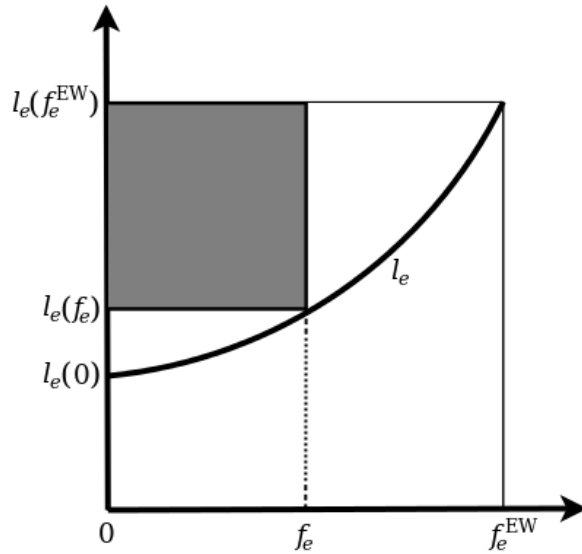


Figura 4.2: O valor $\beta(f_e^{\text{EW}}, l_e)$ corresponde à maior razão entre a área da região cinza, $f_e \cdot (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))$, obtida variando-se f_e , e a área $f_e^{\text{EW}} \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})$.

Teorema 4.6.3. Sejam (G, r, l) uma instância não-atômica com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} , f^{EW} um equilíbrio de Wardrop e f^{OPT} um fluxo ótimo para essa instância. Então,

$$C(f^{\text{EW}}) \leq C(f^{\text{OPT}}) + \beta(\mathcal{L})C(f^{\text{EW}}).$$

Prova. Seja f um fluxo viável. A prova segue da seguinte cadeia de desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e \\ &= \sum_{e \in E} l_e(f_e)f_e + \sum_{e \in E} (l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(f_e))f_e \\ &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e)f_e + \sum_{e \in E} \left[\max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{(l_e(f_e^{\text{EW}}) - l_e(x))x}{l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}}} \right] \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} \\ &= C(f) + \sum_{e \in E} \beta(f_e^{\text{EW}}, l_e) \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} \\ &\leq C(f) + \sum_{e \in E} \left[\sup_{l \in \mathcal{L}, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \beta(x, l) \right] \cdot l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} \\ &= C(f) + \beta(\mathcal{L}) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}})f_e^{\text{EW}} \\ &= C(f) + \beta(\mathcal{L})C(f_e^{\text{EW}}). \end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue da Proposição 4.3.1. O resultado segue fazendo-se $f = f^{\text{OPT}}$. \square

Repare que esse resultado implica que $C(f^{\text{EW}})/C(f^{\text{OPT}}) \leq (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$. Assim, o PoA para instâncias com funções de latência pertencentes a uma classe $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ é menor ou igual a $(1 - \beta(\mathcal{L}'))^{-1}$. Esse PoA é exato se consideramos uma classe $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ que contém funções constantes. Para ver isso, considere uma instância não-atômica com dois nós, s e t , e dois arcos paralelos ligando s a t : e_1 é o arco superior e e_2 é o arco inferior. O arco superior tem função de latência $l_{e_1}(x) = l(x)$ e o arco inferior tem função de latência constante $l_{e_2}(x) = l(r)$, onde r é a demanda total no único par OD $s - t$. O equilíbrio de Wardrop f^{EW} envia toda a demanda total pelo arco superior e tem latência total $C(f^{\text{EW}}) = r \cdot l(r)$. A latência total do fluxo ótimo f^{OPT} é dada por

$$C(f^{\text{OPT}}) = \min_{0 \leq x \leq r} \{xl(x) + (r-x)l(r)\} = rl(r) - \max_{0 \leq x \leq r} \{x(l(r) - l(x))\}. \quad (4.13)$$

Desse modo,

$$\frac{C(f^{\text{EW}})}{C(f^{\text{OPT}})} = \left(1 - \frac{\max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{x(l(r) - l(x))\}}{rl(r)} \right)^{-1} = (1 - \beta(\mathcal{L}'))^{-1}. \quad (4.14)$$

Por último, consideramos importante dizer que é possível, com o uso do valor de anarquia α (definido por Roughgarden [91]), obter POAs exatos para instâncias com funções de latência pertencentes a classes de funções que não contêm as funções constantes, desde que sejam classes contidas em \mathcal{L}_s . Roughgarden [91] demonstrou que o PoA para instâncias com funções de latência em $\mathcal{L}_{dv} \subseteq \mathcal{L}_s$, onde \mathcal{L}_{dv} é uma classe *diversa* de funções, é exatamente $\alpha(\mathcal{L}_{dv})$. Diz-se que uma classe \mathcal{L}_{dv} é *diversa* se, para cada escalar $c \in \mathbb{R}_{>0}$, existe uma função $l \in \mathcal{L}_{dv}$ tal que $l(0) = c$. A instância usada para encontrar o limitante inferior corresponde a uma rede com um único par OD e arcos paralelos os unindo. Além disso, Roughgarden [91] demonstrou que o PoA para instâncias com funções de latência em $\mathcal{L}_{nh} \subseteq \mathcal{L}_s$, onde \mathcal{L}_{nh} é uma classe *não-homogênea* de funções, é exatamente $\alpha(\mathcal{L}_{nh})$. Diz-se que uma classe \mathcal{L}_h de funções é *homogênea* se $l(0) = 0$ para todo $l \in \mathcal{L}_h$, e *não-homogênea* caso contrário. A instância usada para encontrar o limitante inferior corresponde a uma rede com um único par OD e que é uma *união*

de caminhos. Uma *união de caminhos* é uma rede obtida a partir de uma rede de arcos paralelos por processos de subdivisão de arcos.

Cálculo do valor β

Correa et al. [22] demonstraram uma delimitação superior para o valor β por uma expressão mais simples de ser computada.

Lema 4.6.4 (Correa et al. [22]). Considere uma classe $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ com funções satisfazendo $l(cx) \geq s(c)l(x)$, para todo $c \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e alguma função $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Então,

$$\beta(\mathcal{L}') \leq \sup_{0 \leq y \leq 1} \{y(1 - s(y))\}. \quad (4.15)$$

Prova. Primeiro, reescrevemos $\beta(v, l)$ da seguinte forma:

$$\beta(v, l) = \max_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - \frac{l(x)}{l(v)} \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Reescrevendo x como $(x/v)v$ e usando a hipótese, temos que $l(x) = l((x/v)v) \geq s(x/v) \cdot l(v)$. Assim,

$$\beta(v, l) \leq \sup_{0 \leq x \leq v} \left\{ \frac{x}{v} \left(1 - s\left(\frac{x}{v}\right) \right) \right\} = \sup_{0 \leq y \leq 1} \{y(1 - s(y))\}. \quad (4.17)$$

□

Para calcular o valor $\beta(\mathcal{L}_d)$, onde \mathcal{L}_d é a classe dos polinômios de grau máximo d , basta usar o Lema 4.6.4 com $s(c) = c^d$. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.6.5. Seja \mathcal{L}_d a classe dos polinômios de grau máximo d . Então,

$$\sup_{(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L}_d)} \rho(G, r, l) = \frac{1}{1 - \frac{d}{\sqrt[d]{(d+1)^{d+1}}}} = \theta \left(\frac{d}{\ln d} \right). \quad (4.18)$$

Prova. Primeiro, repare que $\mathcal{L}_d \subset \mathcal{L}$ e, portanto, usamos o Lema 4.6.4 para obter um limitante superior para o PoA. Para isso, fazemos $s(y) = y^d$ em (4.15). Daqui, temos que

$$\beta(\mathcal{L}_d) \leq \sup_{0 \leq y \leq 1} \{y(1 - y^d)\} = \frac{d}{\sqrt[d]{(d+1)^{d+1}}}.$$

Esse resultado é obtido calculando-se o y^* que maximiza o valor da função $f(y) = y(1 - y^d)$ (utilizando-se a condição de primeira ordem) e então calculando $f(y^*)$. Daqui,

$$\frac{1}{1 - \beta(\mathcal{L}_d)} \leq \frac{1}{1 - \frac{d}{\sqrt[d]{(d+1)^{d+1}}}}.$$

Pelo Teorema 4.6.3, temos que o PoA é limitado superiormente pela expressão do lado direito da desigualdade acima.

Para obter um limitante inferior, considere a instância não-atômica (G, r, l) , que possui dois nós, s e t , e dois arcos paralelos ligando s a t : e_1 é o arco superior e e_2 é o arco inferior. O arco superior tem função de latência constante $l_{e_1}(x) = 1$ e o arco inferior tem função de latência $l_{e_2}(x) = x^d$. A demanda total a ser transmitida de s a t é 1. Repare que o equilíbrio de Wardrop f^{EW} é o fluxo que envia toda a demanda pelo arco inferior. O fluxo ótimo f^{OPT} é calculado com o uso da Proposição 4.4.1, e corresponde ao fluxo

que envia uma quantidade $\frac{1}{\sqrt[d+1]{d+1}}$ de fluxo pelo arco inferior e o resto pelo arco superior. Basta calcular a razão $C(f^{\text{EW}})/C(f^{\text{OPT}})$ para obter que

$$\rho(G, r, l) = \frac{1}{1 - \frac{d}{\sqrt[d+1]{(d+1)^{d+1}}}}.$$

□

Particularmente, o resultado clássico para jogos de roteamento não-atômicos, que diz que o PoA para instâncias com funções de latência afins é $\frac{4}{3}$, é obtido facilmente a partir da expressão (4.18).

4.6.3 Limites de Bicritério

Roughgarden e Tardos [95] demonstraram o seguinte limite de bicritério.

Teorema 4.6.6. Se f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l) , onde $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$, e f^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, (1+\gamma)r, l)$, onde $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, então $C(f) \leq \frac{1}{\gamma} C(f^{\text{OPT}})$.

Prova. Seja $L_i(f^{\text{EW}})$ a latência comum dos caminhos usados pelo par OD $s_i - t_i$ no fluxo f^{EW} . A latência total é dada por

$$C(f^{\text{EW}}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}}) r_i. \quad (4.19)$$

Agora, considere funções de latência \bar{l}_e , para todo $e \in E$, dadas por

$$\bar{l}_e(x) = \begin{cases} l_e(f_e^{\text{EW}}) & \text{se } x \leq f_e^{\text{EW}} \\ l_e(x) & \text{se } x \geq f_e^{\text{EW}}. \end{cases}$$

Para todo arco $e \in E$ temos que $\bar{l}_e(x) - l_e(x) = 0$ para $x \geq f_e^{\text{EW}}$ e $\bar{l}_e(x) - l_e(x) \leq l_e(f_e^{\text{EW}})$ para $x < f_e^{\text{EW}}$. Assim, $x(\bar{l}_e(x) - l_e(x)) \leq l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}}$ para todo $x \geq 0$. A diferença entre a latência total do fluxo f^{EW} com respeito a \bar{l} e a latência total do fluxo f^{OPT} com respeito a l é limitada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \bar{l}_e(f_e^{\text{OPT}}) f_e^{\text{OPT}} - C(f^{\text{OPT}}) &= \sum_{e \in E} f_e^{\text{OPT}} (\bar{l}_e(f_e^{\text{OPT}}) - l_e(f_e^{\text{OPT}})) \\ &\leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &= C(f^{\text{EW}}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em palavras, se consideramos funções de latência \bar{l} , em vez de l , para avaliar a latência total de f^{OPT} , então seu valor é aumentado em no máximo $C(f^{\text{EW}})$.

Como l_e é não-decrescente para todo arco e , para todo $P \in \mathcal{P}_i$ temos que

$$\bar{l}_P(f^{\text{OPT}}) = \sum_{e \in P} \bar{l}_e(f_e^{\text{OPT}}) \geq \sum_{e \in P} l_e(f_e^{\text{EW}}) \geq L_i(f^{\text{EW}}).$$

Daqui, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{P \in \mathcal{P}} \bar{l}_P(f^{\text{OPT}}) f_P^{\text{OPT}} &\geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} L_i(f^{\text{EW}}) f_P^{\text{OPT}} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}}) \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^{\text{OPT}} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i(f^{\text{EW}}) (1 + \gamma) r_i \\
&= (1 + \gamma) C(f^{\text{EW}}).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A última igualdade segue da Equação (4.19). Com o uso de (4.20) e (4.21), obtemos que

$$C(f^{\text{OPT}}) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}} \bar{l}_P(f^{\text{OPT}}) f_P^{\text{OPT}} - C(f^{\text{EW}}) \geq (1 + \gamma) C(f^{\text{EW}}) - C(f^{\text{EW}}) = \gamma C(f^{\text{EW}}). \tag{4.22}$$

□

Esse resultado é essencialmente justo para todos os valores de $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Para ver isso, considere a instância de Pigou não-linear (Exemplo 3.2.9), cujo fluxo ótimo para a instância com demandas multiplicadas por $1 + \gamma$ tem latência total $1 + \gamma - d \cdot (d + 1)^{-(d+1)/d}$. Quando $d \rightarrow \infty$, esse valor tende a γ . Lembre que para a instância original a latência total do equilíbrio de Wardrop é 1.

Adicionalmente, a partir desse resultado obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.6.7. Se f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para a instância não-atômica (G, r, l) , onde $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$, e f^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, 2r, l)$, então $C(f^{\text{EW}}) \leq C(f^{\text{OPT}})$.

Com o Corolário 4.6.7, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.6.8 (Roughgarden [90], Corolário 3.6.4). Seja (G, r, l) uma instância não-atômica com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} , e considere a função de latência modificada \tilde{l}_e dada por $\tilde{l}_e(x) = \frac{1}{2} l_e(\frac{x}{2})$, para todo $e \in E$. Se \tilde{f}^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para (G, r, \tilde{l}) e f^* é um fluxo viável para (G, r, l) , então a latência total de \tilde{f}^{EW} , com respeito a \tilde{l} , é no máximo a latência total de f^* , com respeito a l .

Prova. Se f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para $(G, r/2, l)$ e f^* é um fluxo viável para (G, r, l) , então, pelo Corolário 4.6.7, temos que $C(f^{\text{EW}}) \leq C(f^*)$. Note que o fluxo $\tilde{f}^{\text{EW}} = 2f^{\text{EW}}$ é viável para a instância (G, r, \tilde{l}) . Temos que $\tilde{l}_e(\tilde{f}_e^{\text{EW}}) = \frac{1}{2} l_e(f_e^{\text{EW}})$ para todo arco e . Como f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para $(G, r/2, l)$, temos que \tilde{f}^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para (G, r, \tilde{l}) . Além disso, temos que

$$\sum_{e \in E} \tilde{l}_e(\tilde{f}_e^{\text{EW}}) \tilde{f}_e^{\text{EW}} = \sum_{e \in E} \left(\frac{1}{2} l_e(f_e^{\text{EW}}) \right) (2f_e^{\text{EW}}) = \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}}. \tag{4.23}$$

O resultado em (4.23) implica que $C(\tilde{f}^{\text{EW}}) \leq C(f^*)$, e sabemos que \tilde{f}^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para (G, r, \tilde{l}) . Assim, o resultado segue da unicidade do equilíbrio (Proposição 4.5.2(b)). □

Esse resultado é interessante quando consideramos as instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_Q das funções de atraso de filas M/M/1, onde, para cada arco e , temos que $l_e(f_e) = \frac{1}{u_e - f_e}$, para alguma capacidade (ou taxa de serviço) u_e . Se um fluxo viável f satisfaz $f_e < u_e$, para todo $e \in E$, então $\tilde{l}_e(f_e) = \frac{1}{2(u_e - f_e/2)} = \frac{1}{2u_e - f_e}$. O Corolário 4.6.8 nos diz que jogadores egoístas agindo individualmente podem obter o mesmo desempenho, em termos de latência total, que um controlador central capaz de induzir um fluxo ótimo na rede, bastando para isso que a capacidade de cada arco seja duplicada.

O último resultado apresentado nessa subseção é o seguinte teorema.

Teorema 4.6.9. Se f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para a instância não-atômica (G, r, l) , onde $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$, e f^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, (1 + \beta(\mathcal{L}))r, l)$, então $C(f^{\text{EW}}) \leq C(f^{\text{OPT}})$.

Prova. Primeiro, repare que $\frac{f^{\text{OPT}}}{1 + \beta(\mathcal{L})}$ é um fluxo viável para a instância (G, r, l) . Assim, utilizando a Proposição 4.3.1, temos que

$$\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \leq \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) \frac{f_e^{\text{OPT}}}{1 + \beta(\mathcal{L})}.$$

Então,

$$\begin{aligned} C(f^{\text{EW}}) &= (1 + \beta(\mathcal{L})) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} - \beta(\mathcal{L}) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &\leq (1 + \beta(\mathcal{L})) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) \frac{f_e^{\text{OPT}}}{1 + \beta(\mathcal{L})} - \beta(\mathcal{L}) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &= \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{OPT}} - \beta(\mathcal{L}) \sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{EW}} \\ &\leq C(f^{\text{OPT}}) + \beta(\mathcal{L}) C(f^{\text{EW}}) - \beta(\mathcal{L}) C(f^{\text{EW}}) \\ &= C(f^{\text{OPT}}). \end{aligned}$$

A segunda desigualdade segue da prova do Teorema 4.6.3, onde observa-se que

$$\sum_{e \in E} l_e(f_e^{\text{EW}}) f_e^{\text{OPT}} \leq C(f^{\text{OPT}}) + \beta(\mathcal{L}) C(f^{\text{EW}}).$$

□

4.6.4 Outros resultados

Correa et al. [25] consideraram o caso em que a latência de qualquer arco com fluxo 0 é uma fração η de sua latência em um equilíbrio de Wardrop. O principal argumento para se fazer esse tipo de análise é que a média da latência total, observada em várias situações reais que podem ser modeladas como um jogo de roteamento (por exemplo, o tráfego de uma rede de computadores ou o tráfego de uma rodovia), é tipicamente menor que a considerada no cálculo do Preço da Anarquia, isto é, que a latência total obtida para o pior equilíbrio de Wardrop (Jahn, Möhring, Schulz e Stier-Moses [61] e Qiu, Yang, Zhang e Shenker [83]). Por isso, faz sentido considerar que em fluxo 0 (por exemplo, uma avenida vazia durante a madrugada) a latência (ou seja, o tempo para um carro atravessar a avenida) é não nula e corresponde a uma fração da latência obtida numa situação de equilíbrio (por exemplo, a hora do *rush*). Os resultados para esse modelo, para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} , são: o PoA é menor ou igual a $(1 - (1 - \eta)\beta(\mathcal{L}))^{-1}$; e, se f^{EW} é um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l) , então $C(f^{\text{EW}}) \leq C(\tilde{f}^{\text{OPT}})$, onde \tilde{f}^{OPT} é um fluxo ótimo para a instância $(G, (1 + (1 - \eta)\beta(\mathcal{L}))r, l)$.

Karakostas, Kim, Viglas e Xia [62] propuseram um jogo de roteamento onde uma parcela dos jogadores é *absorta* (*oblivious*), no sentido de que os jogadores absortos escolhem os caminhos de menor latência independentemente do fluxo, ou seja, escolhem o caminho de menor latência em fluxo 0. Sejam r a demanda total para o único par OD, α a fração da demanda que é controlada por jogadores absortos, f^{EW} um equilíbrio de Wardrop obtido quando $\alpha = 0$ e e_s o arco de menor latência em fluxo 0. Para instâncias com arcos paralelos $e \in E$ e funções de latência afins ($l_e(x) = a_e x + b_e$), se $\alpha r \geq f_{e_s}^{\text{EW}}$, então o PoA é menor ou igual a $\frac{4}{3}(1 - \alpha) + \max\{\alpha, \alpha^2 p\}$, onde $p = \sum_{e \in E^{\text{OPT}}} a_{e_s}/a_e$ (E^{OPT} é o conjunto dos arcos usados pelo fluxo ótimo f^{OPT}), e se $\alpha r < f_{e_s}^{\text{EW}}$, então o PoA é menor ou igual a $4/3$. Para instâncias com redes genéricas e funções de latência afins, o PoA é menor ou igual a $\frac{4(1 - \alpha + |V|\alpha r \gamma_a / f_{\min}^{\text{OPT}})}{3 + \alpha}$, onde $\gamma_a = \frac{\max_e a_e}{\min_e a_e}$ e $f_{\min}^{\text{OPT}} = \min_e f_e^{\text{OPT}}$.

4.7 Jogos capacitados

Correa et al. [22] definiram um modelo de jogo de roteamento não-atômico onde alguns arcos possuem uma quantidade máxima de fluxo que suportam, não sendo possível enviar mais fluxo por um tal arco quando essa quantidade é atingida. As instâncias desse modelo são denominadas de capacitadas, e diz-se que um fluxo é um equilíbrio capacitado quando nenhum dos jogadores (não-atômicos) possui incentivo para mudar de caminho. Eles demonstraram que, mesmo para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} , pode haver múltiplos equilíbrios capacitados, ao contrário do que ocorre para o equilíbrio de Wardrop em instâncias não-capitadas com funções de latência em \mathcal{L} . Além disso, o Preço da Anarquia é ilimitado, mesmo para instâncias com funções de latência afins. Para contornar esse problema de PoA ilimitado, Correa et al. [22] definiram o equilíbrio BMW, que corresponde a um fluxo devolvido como solução de um problema de programação convexa. Mais especificamente, do problema (4.8) com a restrição adicional do máximo de fluxo que cada arco suporta. Então eles provaram que um equilíbrio BMW é um equilíbrio capacitado. O cálculo de um equilíbrio BMW, apesar de procurar fornecer um equilíbrio capacitado que não é o pior em termos de latência total, não fornece garantidamente o melhor. Entretanto, é possível fazer uma análise de ineficiência para esse conceito de equilíbrio, pois o PoA é limitado para instâncias com funções de latência semicontínuas inferiormente e não-decrescentes.

Capítulo 5

Jogos Atômicos com Fluxo Indivisível

Nesse capítulo, apresentamos o modelo e os principais resultados para os jogos atômicos com fluxo indivisível. Na Seção 5.1, definimos o conjunto dos fluxos viáveis para esses jogos e o equilíbrio de Nash puro. Na Seção 5.2, apresentamos os principais resultados de existência e unicidade do equilíbrio de Nash puro. Na Seção 5.3, apresentamos um resumo dos principais resultados para a ineficiência dos equilíbrios de Nash puro e misto. Na Seção 5.4, apresentamos o arcabouço da suavidade para jogos de congestionamento, que são uma superclasse dos jogos de roteamento. Os principais resultados de ineficiência obtidos com esse arcabouço são aplicáveis também aos jogos de roteamento atômicos com fluxo indivisível.

5.1 Modelo e equilíbrio de Nash puro

Nos jogos de roteamento atômicos com fluxo indivisível, cada jogador pode escolher apenas um dos caminhos disponíveis para atender a sua demanda r_i , enviando todo o seu fluxo por esse caminho. Assim, o conjunto de estratégias viáveis para o jogador i é

$$\mathcal{F}^i = \{f^i \mid f_P^i = r_i \text{ para algum } P \in \mathcal{P}_i \text{ e } f_{\tilde{P}}^i = 0, \text{ para todo } \tilde{P} \in \mathcal{P}_i \text{ com } \tilde{P} \neq P\}. \quad (5.1)$$

Denotamos $\mathcal{F} = \times_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}^i$ como o espaço de estratégias. Abusando da notação, dizemos que $P \in f^i$ se $f_P^i = r_i$, para algum $f^i \in \mathcal{F}^i$.

Para jogos atômicos com fluxo indivisível, definimos o equilíbrio de Nash puro da seguinte forma.

Definição 5.1.1 (Equilíbrio de Nash puro para jogos atômicos com fluxo indivisível). Seja (G, r, l) uma instância atômica com fluxo indivisível. Um fluxo f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro para essa instância se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ com $f_P^i > 0$, temos que

$$l_P(f^{\text{EN}}) \leq l_{\tilde{P}}(\tilde{f}), \quad (5.2)$$

onde \tilde{f} é um fluxo idêntico a f^{EN} exceto que $\tilde{f}_P^i = 0$ e $\tilde{f}_{\tilde{P}}^i = r_i$.

Essa definição é particularmente útil nas demonstrações de existência de um equilíbrio de Nash puro para os jogos com demanda uniforme e para os jogos com demanda genérica e funções de latência afins, apresentadas, respectivamente, nas Subseções 5.2.1 e 5.2.2.

5.2 Existência e unicidade de um equilíbrio de Nash puro

Para jogos atômicos com fluxo indivisível, há instâncias que não possuem um equilíbrio de Nash puro, mesmo que possuam funções de latência polinomiais no fluxo. O exemplo a seguir, apresentado por Goemans e Mirrokni [53], ilustra um caso.

Exemplo 5.2.1 (Instância atômica sem equilíbrio de Nash puro (Goemans e Mirrokni [53])). Considere a instância de um jogo de roteamento atômico ilustrada na Figura 5.1. Os rótulos dos arcs correspondem às suas funções de latência. Considere que há dois jogadores, 1 e 2, ambos com par OD $s - t$ e demandas $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Considere os caminhos $P_1 = (s, t)$, $P_2 = (s, v, t)$, $P_3 = (s, w, t)$ e $P_4 = (s, v, w, t)$. As quatro afirmações abaixo implicam que não há um equilíbrio de Nash puro para essa instância.

1. Se o jogador 2 seleciona o caminho P_1 ou P_2 , então a única escolha do jogador 1 que minimiza o seu custo individual é o caminho P_4 ;
2. Se o jogador 2 seleciona o caminho P_3 ou P_4 , então a única escolha do jogador 1 que minimiza o seu custo individual é o caminho P_1 ;
3. Se o jogador 1 seleciona o caminho P_4 , então a única escolha do jogador 2 que minimiza o seu custo individual é o caminho P_3 ;
4. Se o jogador 1 seleciona o caminho P_1 , então a única escolha do jogador 2 que minimiza o seu custo individual é o caminho P_2 .

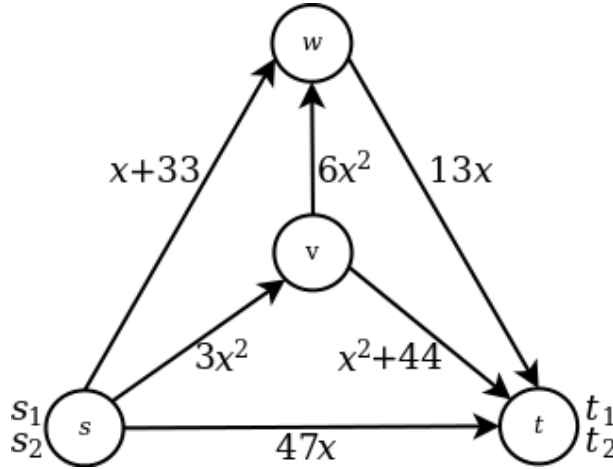


Figura 5.1: Instância atômica que não possui um equilíbrio de Nash puro.

Descrevemos no resto desta seção resultados sobre a existência de um equilíbrio de Nash puro para instâncias com demanda uniforme e instâncias com funções de latência afins. Um equilíbrio de Nash puro, para ambos os casos, pode não ser único e nem essencialmente único, como demonstra o Exemplo 3.2.5.

5.2.1 Função potencial para instâncias com demanda uniforme

Teorema 5.2.2 (Rosenthal [86]). Seja (G, r, l) uma instância atômica com fluxo indivisível, onde toda demanda r_i , para $i \in \mathcal{I}$, é igual a um valor comum R . Então (G, r, l) admite ao menos um equilíbrio de Nash puro.

Prova. Suponha, para simplificar, que $R = 1$. Considere a função potencial $\Phi_a : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida da seguinte forma:

$$\Phi_a(f) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j). \quad (5.3)$$

Mostramos que a função Φ_a , que é uma discretização da função Φ (equação (4.7)), é uma função potencial exata (Definição 2.4.3) para esse jogo. Suponha que f seja um fluxo viável. Considere o fluxo \tilde{f} obtido quando, a partir de f , o jogador i altera sua escolha do caminho P para o caminho \tilde{P} . As latências desses caminhos, com respeito aos seus respectivos fluxos, são dadas por

$$l_P(f) = \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} l_e(f_e) + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} l_e(f_e), \quad (5.4)$$

e

$$l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) = \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} l_e(f_e) + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} l_e(f_e + 1). \quad (5.5)$$

As funções potenciais para os fluxos f e \tilde{f} são, respectivamente,

$$\Phi_a(f) = \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j) + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j) + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j) + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j), \quad (5.6)$$

e

$$\Phi_a(\tilde{f}) = \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j) + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \sum_{j=1}^{f_e} l_e(j) + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \sum_{j=1}^{f_e+1} l_e(j) + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \sum_{j=1}^{f_e-1} l_e(j). \quad (5.7)$$

Repare que na expressão $\Phi_a(\tilde{f}) - \Phi_a(f)$ os dois primeiros termos de (5.6) e (5.7) se cancelam. Além disso, na expressão $l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - l_P(f)$ os primeiros termos de (5.4) e (5.5) se cancelam. Assim, temos que

$$\Phi_a(\tilde{f}) - \Phi_a(f) = l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - l_P(f) = \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} l_e(f_e + 1) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} l_e(f_e). \quad (5.8)$$

Logo, Φ_a é uma função potencial exata para o jogo atômico com demanda uniforme. Isso significa que se f é um mínimo global de Φ_a , então qualquer outro fluxo viável \tilde{f} , obtido a partir de f pela alteração do caminho P para o \tilde{P} por algum jogador i , é tal que $\Phi_a(\tilde{f}) \geq \Phi_a(f)$ e, portanto, $l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) \geq l_P(f)$. Assim, o jogador i não possui incentivo para mudar de caminho. A existência de ao menos um equilíbrio de Nash puro segue do fato da função Φ_a possuir ao menos um mínimo global, visto que o domínio \mathcal{F} é compacto (limitado e fechado). \square

Repare que essa prova não requer nenhum pressuposto sobre as funções de latência. O resultado é válido, inclusive, para instâncias com funções de latência decrescentes.

5.2.2 Função potencial para instâncias com demanda genérica e funções de latência afins

Teorema 5.2.3 (Nisan et al. [75], Capítulo 18). Seja (G, r, l) uma instância atômica com fluxo indivisível e funções de latência afins de coeficientes positivos. Então (G, r, l) admite ao menos um equilíbrio de Nash puro.

Prova. Suponha que $l_e(x) = a_e x + b_e$ para cada arco $e \in E$, onde $a_e, b_e \in \mathbb{R}_{>0}$. Considere a função potencial $\Phi_o : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida da seguinte forma:

$$\Phi_o(f) = \sum_{e \in E} \left(l_e(f_e) f_e + \sum_{i \in \mathcal{I}_e} l_e(r_i) r_i \right), \quad (5.9)$$

onde \mathcal{I}_e denota o conjunto de jogadores que escolhem, em f , um caminho que inclui o arco e .

Mostramos que Φ_o é uma função potencial ordinal (Definição 2.4.1) para esse jogo. Suponha que f seja um fluxo viável. Considere o fluxo \tilde{f} obtido quando, a partir de f , o jogador i altera sua escolha do caminho P para o caminho \tilde{P} . As latências desses caminhos, com respeito aos seus respectivos fluxos, são dadas por

$$\begin{aligned} l_P(f) &= \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} l_e(f_e) + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} l_e(f_e) \\ &= \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} (a_e f_e + b_e) + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} (a_e f_e + b_e), \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$\begin{aligned} l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) &= \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} l_e(f_e) + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} l_e(f_e + r_i) \\ &= \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} (a_e f_e + b_e) + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} [a_e (f_e + r_i) + b_e]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

As funções potenciais para os fluxos f e \tilde{f} são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Phi_o(f) &= \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \left[l_e(f_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \left[l_e(f_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] \\ &\quad + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left[l_e(f_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left[l_e(f_e) f_e + \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_e \setminus \{i\}} l_e(r_j) r_j \right) + l_e(r_i) r_i \right] \\ &= \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right] + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right] \\ &\quad + \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right] \\ &\quad + \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_e \setminus \{i\}} (a_e r_j + b_e) r_j \right) + (a_e r_i + b_e) r_i \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_o(\tilde{f}) &= \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \left[l_e(f_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \left[l_e(f_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] \\
&+ \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left[l_e(f_e + r_i)(f_e + r_i) + \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_e \setminus \{i\}} l_e(r_j) r_j \right) + l_e(r_i) r_i \right] \\
&+ \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left[l_e(f_e - r_i)(f_e - r_i) + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} l_e(r_j) r_j \right] \\
&= \sum_{e \in E \setminus (P \cup \tilde{P})} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right] + \sum_{e \in (P \cap \tilde{P})} \left[(a_e f_e + b_e) f_e + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right] \\
&+ \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left[[a_e(f_e + r_i) + b_e](f_e + r_i) + \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_e \setminus \{i\}} (a_e r_j + b_e) r_j \right) + (a_e r_i + b_e) r_i \right] \\
&+ \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left[[a_e(f_e - r_i) + b_e](f_e - r_i) + \sum_{j \in \mathcal{I}_e} (a_e r_j + b_e) r_j \right]. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Repare que na expressão $\Phi_o(\tilde{f}) - \Phi_o(f)$ os dois primeiros termos de (5.12) e (5.13) se cancelam. Além disso, na expressão $l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - l_P(f)$ os primeiros termos de (5.10) e (5.11) se cancelam. Assim, temos que

$$l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - l_P(f) = \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} [a_e(f_e + r_i) + b_e] - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} (a_e f_e + b_e), \tag{5.14}$$

e

$$\Phi_o(\tilde{f}) - \Phi_o(f) = 2r_i \cdot \left[\sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} [a_e(f_e + r_i) + b_e] - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} (a_e f_e + b_e) \right]. \tag{5.15}$$

Disso, conclui-se que $l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - l_P(f) \geq 0$ se e somente se $\Phi_o(\tilde{f}) - \Phi_o(f) \geq 0$. Portanto, Φ_o é uma função potencial ordinal para o jogo atômico com funções de latência afins. Isso significa que se f é um mínimo global de Φ_o , então qualquer outro fluxo viável \tilde{f} , obtido a partir de f pela alteração do caminho P para o \tilde{P} por algum jogador i , é tal que $\Phi_o(\tilde{f}) \geq \Phi_o(f)$ e, portanto, $l_{\tilde{P}}(\tilde{f}) \geq l_P(f)$. Assim, o jogador i não possui incentivo para mudar de caminho. A existência de ao menos um equilíbrio de Nash puro segue do fato da função Φ_o possuir ao menos um mínimo global, visto que o domínio \mathcal{F} é compacto (limitado e fechado). \square

5.3 Ineficiência de um equilíbrio de Nash

Os principais resultados de PoA, apresentados na Seção 5.4, foram obtidos para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p das funções positivas e não-decrescentes, e à classe $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_p$ que é **invariante sob escala** ($l(x) \in \mathcal{L}_f \Rightarrow c_1 \cdot l(c_2 \cdot x) \in \mathcal{L}_f$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$). A **invariância sob escala** significa que a classe de funções é invariante a alterações na unidade de medida.

Para instâncias com redes e funções de latência genéricas, Roughgarden e Tardos [95] demonstraram que o PoA pode ser ilimitado. Reproduzimos essa demonstração no Exemplo 5.3.1. Awerbuch et al. [5]

provaram que o PoA é exatamente 2,618 para instâncias com demanda genérica e funções de latência afins, considerando-se equilíbrios de Nash puros e mistos, e exatamente 2,5 para instâncias com demanda uniforme e funções de latência afins, considerando-se equilíbrios de Nash puros (que sempre existem nesse caso). Além disso, eles provaram que, para instâncias com funções de latência polinomiais no fluxo e com grau máximo d , o PoA é limitado superiormente por $d^{\theta(d)}$. Os mesmos resultados para instâncias com demanda uniforme foram encontrados independentemente por Christodoulou e Koutsoupias [19]. Posteriormente, Aland, Dumrauf, Gairing, Monien e Schoppmann [3] encontraram PoAs exatos para instâncias com funções de latência polinomiais no fluxo e demonstraram que os resultados são válidos tanto para jogos de roteamento quanto para jogos de congestionamento, considerando-se equilíbrios de Nash puros e mistos. Mais especificamente, eles demonstraram que, para instâncias com demanda genérica, o PoA exato para jogos de congestionamento e de roteamento com funções de latência polinomiais de grau máximo d é $(\Phi_d)^{d+1}$ (Teorema 5.4.10), onde Φ_d é a maior solução da equação $(x+1)^d = x^{d+1}$. Os resultados para instâncias com demanda uniforme são apresentados na Subseção 5.4.4.

O arcabouço utilizado por Aland et al. [3] foi generalizado por Roughgarden [93] para abranger os jogos de congestionamento com demanda uniforme e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p . Roughgarden [93] demonstrou que, para essas instâncias, o PoA é exatamente o valor de anarquia $\gamma(\mathcal{L}_p)$ (Equação (5.31)). Além disso, similarmente ao caso não-atômico, Roughgarden [93] definiu um jogo minimal, cuja razão de coordenação é igual ao PoA, e explicou como esse jogo pode ser adaptado para uma instância de um jogo de roteamento. Na Subseção 5.4.3, apresentamos essa instância em maiores detalhes. Posteriormente, Bhawalkar, Gairing e Roughgarden [15] generalizaram os resultados de Roughgarden [93] para jogos de congestionamento com demanda genérica. Eles demonstraram que o PoA é exato para jogos com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_f , e corresponde ao valor $\zeta(\mathcal{L}_f)$ (Equação (5.47)), que é uma generalização do valor $\gamma(\mathcal{L}_f)$ para abranger instâncias com demanda genérica. Entretanto, o jogo construído por eles possui razão de coordenação arbitrariamente próxima a $\zeta(\mathcal{L}_f)$ apenas quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito. Nesse caso, podemos dizer também que o PoA é assintoticamente exato. Esse jogo pode ser adaptado para uma instância de um jogo de roteamento assimétrico (ver parágrafo que segue a definição do valor de anarquia ζ). Bhawalkar et al. [15] também provaram que, para instâncias com um único par OD, arcos paralelos e funções de latência polinomiais de grau máximo d , o PoA de Φ_d^{d+1} é atingido quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito. Por último, provaram que o PoA para jogos simétricos com demanda uniforme, também quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito, é o mesmo que para jogos assimétricos com demanda uniforme (o valor $\gamma(\mathcal{L}_p)$ apresentado por Roughgarden [93]).

Exemplo 5.3.1 (Instância atômica com razão de coordenação ilimitada (Roughgarden e Tardos [95])). Considere a instância atômica ilustrada na Figura 5.2. Nela, há dois jogadores, ambos com par OD $s - t$ e demanda 1. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. Considere que $0 < \epsilon < 1$. O fluxo f^{EN} onde o jogador 1 envia toda a sua demanda pelo caminho (s, v, w, t) e o jogador 2 envia toda a sua demanda pelo caminho (s, t) é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, note que o jogador 1 tem custo individual $2 \cdot \frac{1}{2+\epsilon-1} = \frac{2}{1+\epsilon}$ e o jogador 2 tem custo individual $\frac{1}{\epsilon}$. Se o jogador 1 alterar para o caminho (s, t) , então ele passará a ter custo individual $\frac{1}{\epsilon} > \frac{2}{1+\epsilon}$. Se ele alterar ou para o caminho (s, v, t) ou para o (s, w, t) , então passará a ter custo individual $1 + \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} > \frac{2}{1+\epsilon}$. Se o jogador 2 alterar para o caminho (s, v, w, t) , então ele passará a ter custo individual $2 \cdot \frac{1}{2+\epsilon-2} = \frac{2}{\epsilon}$. Se ele alterar ou para o caminho (s, v, t) ou para o (s, w, t) , então passará a ter custo individual $1 + \frac{1}{2+\epsilon-2} = \frac{1+\epsilon}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$. A latência total de f^{EN} é $C(f^{\text{EN}}) = \frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{1+\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$. No fluxo ótimo, f^{OPT} , um jogador seleciona o caminho (s, v, t) e o outro o caminho (s, w, t) . A latência total de f^{OPT} é $C(f^{\text{OPT}}) = 2 \cdot \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} < 4$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $C(f^{\text{EN}})/C(f^{\text{OPT}}) \rightarrow \infty$.

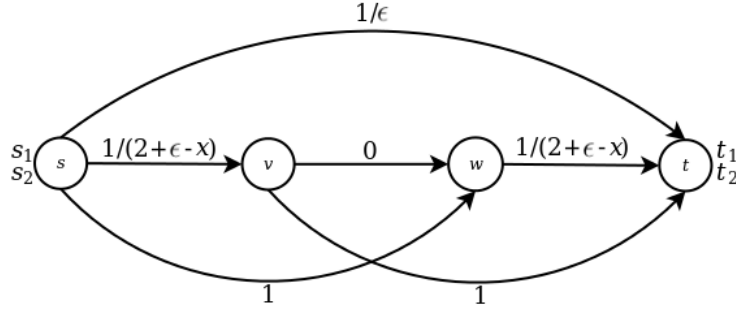


Figura 5.2: Instância atômica com fluxo indivisível e razão de coordenação ilimitada.

5.3.1 Outros resultados

Ao leitor interessado, aqui apresentamos uma breve descrição de resultados obtidos para outros modelos.

Koutsoupias e Papadimitriou [66] iniciaram o estudo do Preço da Anarquia, como já dito na Introdução. Eles analisaram instâncias com n jogadores atômicos, um único par OD com m arcos paralelos os unindo, funções de latência do tipo $l(x) = x/s$, onde $s \in \mathbb{R}_{>0}$ é a velocidade do arco, e custo social dado pela esperança da latência máxima (Equação (B.2)), visto que cada jogador seleciona qual arco irá usar de acordo com uma distribuição de probabilidades nos arcos disponíveis. Esse conjunto de instâncias é conhecido como modelo KP. Após esse primeiro artigo, vários outros surgiram propondo sucessivas melhorias no limitante superior para o PoA (Czumaj e Vöcking [27], Lücking, Mavronicolas, Monien e Rode [69], Gairing, Lücking, Mavronicolas, Monien e Rode [47], Hoefer e Souza [59], Gairing e Schoppmann [49], Hoefer e Souza [58]). Alguns deles com pequenas variações no modelo. Para o modelo KP, foi provado por Czumaj e Vöcking [27] que o PoA exato é $\theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$ para arcos com velocidades idênticas e $\theta\left(\frac{\log m}{\log \log \log m}\right)$ para arcos com velocidades genéricas. Como o foco dessa dissertação são as análises feitas com base na latência total, omitimos maiores detalhes do modelo KP. Os próximos resultados apresentados foram obtidos considerando-se a latência total como custo social.

Lücking et al. [69] e Gairing e Schoppmann [49] consideraram instâncias com um único par OD, m arcos paralelos e funções de latência lineares ($l(x) = ax$, para $a \in \mathbb{R}_{>0}$). Lücking et al. [69] provaram que o PoA puro é exatamente $\frac{4}{3}$ para instâncias com demanda uniforme e exatamente $\frac{9}{8}$ para instâncias com arcos idênticos (coeficientes a_e iguais a 1 para todos os arcos $e \in E$). Lücking et al. [69] provaram também que o PoA misto é exatamente $2 - \frac{1}{m}$ para instâncias com arcos idênticos. Adicionalmente, Gairing e Schoppmann [49] provaram que o PoA misto é exatamente $2 - \frac{1}{m}$ para instâncias com demanda uniforme.

Hoefer e Souza [58] analisaram o efeito de se limitar o conjunto de arcos que cada jogador pode escolher, em instâncias com um único par OD e arcos paralelos. Eles provaram que, para instâncias com arcos idênticos (todos com funções de latência $l(x) = x$) e estratégias mistas, o PoA e o **Preço da Estabilidade** (Equação (C.2)) coincidem em $\theta(n\sqrt{m}/R)$, onde R é a soma das demandas dos jogadores. Além disso, Hoefer e Souza [59] provaram que se os jogadores possuem acesso a todos os arcos e as funções de latência são do tipo $l(x) = x/s$, para $s \in \mathbb{R}_{>0}$, então o PoA é $\theta(n/R)$. Disso, conclui-se que a degradação no desempenho, em função das restrições de acesso aos arcos, é da ordem de $\theta(\sqrt{m})$.

5.4 Jogos de congestionamento suaves

5.4.1 Jogos de congestionamento

Jogos de congestionamento são uma superclasse dos jogos de roteamento. Em um jogo de congestionamento, em vez dos jogadores escolherem caminhos formados por uma sequência de recursos (arcos), eles escolhem um subconjunto genérico de recursos. Formalmente, definimos $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ como o conjunto dos n jogadores, e $r = (r_1, \dots, r_n)$ como o vetor de demandas dos jogadores, onde $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Cada recurso escolhido pelo jogador i recebe dele carga r_i , ou seja, a demanda do jogador não é dividida entre os recursos selecionados. Denotamos o conjunto dos m recursos por $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, onde cada recurso $e \in E$ possui função de latência $l_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada em função da carga total que recebe de todos os jogadores. Cada jogador i possui um conjunto $\mathcal{S}_i \subseteq 2^E$ de estratégias disponíveis, cada uma correspondendo a um subconjunto de E (note que um jogador i , de acordo com as estratégias disponíveis para ele, pode não ter acesso a todos os recursos).

Denotamos o espaço de estratégias por $\mathcal{S} = \times_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i$. A cada estratégia $s_i \in \mathcal{S}_i$ associamos um vetor $x^i = (x_{e_1}^i, \dots, x_{e_m}^i)$, onde $x_e^i = r_i$ se a estratégia s_i contém o recurso $e \in E$, e 0 caso contrário. Adicionalmente, definimos o vetor $(x_e)_{e \in E}$, onde x_e corresponde à carga total no recurso $e \in E$. Em outras palavras,

$$x_e = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_e^i \quad (5.16)$$

$$= \sum_{i | e \in s_i} r_i, \quad (5.17)$$

onde x^i é o vetor associado a s_i .

Repare que x pode corresponder tanto a um vetor de tamanho m , quando se refere à carga em cada um dos recursos, quanto a uma matriz $n \times m$, quando se refere à carga posta por cada jogador em cada recurso. Esse abuso de notação é recorrente na área e, portanto, é mantido nessa dissertação. Para ajudar no entendimento, ilustramos graficamente, nas Tabelas 5.1 e 5.2, as duas definições de x .

x	x_{e_1}	x_{e_2}	x_{e_3}	\dots	x_{e_m}
-----	-----------	-----------	-----------	---------	-----------

Tabela 5.1: Exemplo de vetor $x = (x_{e_1}, \dots, x_{e_m})$, representando o quanto cada recurso está recebendo de carga.

$\mathcal{I} \backslash E$	Vetor x^i , para $i \in \mathcal{I}$									
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	\dots	e_m	
1	$x_{e_1}^1$	$x_{e_2}^1$	$x_{e_3}^1$	$x_{e_4}^1$	$x_{e_5}^1$	$x_{e_6}^1$	$x_{e_7}^1$	\dots	$x_{e_m}^1$	x^1
2	$x_{e_1}^2$	$x_{e_2}^2$	$x_{e_3}^2$	$x_{e_4}^2$	$x_{e_5}^2$	$x_{e_6}^2$	$x_{e_7}^2$	\dots	$x_{e_m}^2$	x^2
\vdots	\dots									
n	$x_{e_1}^n$	$x_{e_2}^n$	$x_{e_3}^n$	$x_{e_4}^n$	$x_{e_5}^n$	$x_{e_6}^n$	$x_{e_7}^n$	\dots	$x_{e_m}^n$	x^n

Tabela 5.2: Exemplo de matriz $x = (x^1, \dots, x^n)$ associada a um perfil $s \in \mathcal{S}$, onde cada fluxo x^i , do jogador $i \in \mathcal{I}$, é um vetor indexado por E .

O custo individual $C_i(x)$ de um jogador i , onde $x = (x^1, \dots, x^n)$ é uma matriz associada a um perfil $s \in \mathcal{S}$ (x^i é associado a s_i , para todo $i \in \mathcal{I}$), é dado por

$$C_i(x) = \sum_{e \in E} x_e^i \cdot l_e(x_e) = r_i \cdot \sum_{e \in s_i} l_e(x_e) = C_i(s). \quad (5.18)$$

Para jogos de congestionamento com estratégias mistas, definimos Σ_i como o conjunto de todas as possíveis distribuições de probabilidades em \mathcal{S}_i . Denotamos o espaço de estratégias mistas por $\Sigma = \times_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_i$. A esperança de custo para o jogador i , induzida pela distribuição $\sigma \in \Sigma$, é dada por

$$\mathbb{E}_\sigma[C_i] = \sum_{s \in \mathcal{S}} C_i(s) \prod_{j \in \mathcal{I}} \sigma_j(s_j). \quad (5.19)$$

Denotamos um jogo de congestionamento com estratégias puras pela tupla $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$, e um jogo de congestionamento com estratégias mistas pela tupla $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$. A Definição 2.1.9 de um equilíbrio de Nash misto para jogos na forma normal pode ser particularizada para jogos de congestionamento atômicos da seguinte forma.

Definição 5.4.1 (Equilíbrio de Nash Misto). Seja $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo de congestionamento atômico. Um perfil $\sigma^{\text{EN}} \in \Sigma$ é um equilíbrio de Nash misto para esse jogo se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}} [C_i] \leq \mathbb{E}_{\sigma_{-i}^{\text{EN}}} [C_i(s_i, \cdot)], \text{ para todo } s_i \in \mathcal{S}_i, \quad (5.20)$$

onde

$$\mathbb{E}_{\sigma_{-i}^{\text{EN}}} [C_i(s_i, \cdot)] = \sum_{s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}} C_i(s_i, s_{-i}) \prod_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \sigma_j^{\text{EN}}(s_j). \quad (5.21)$$

Lembre-se que o conjunto das estratégias puras está contido no conjunto das estratégias mistas e, portanto, essa definição abrange o equilíbrio de Nash puro para as instâncias onde ele existe.

Podemos também definir o Preço da Anarquia para jogos de congestionamento com estratégias mistas. Para isso, considere o conjunto \mathcal{J} de jogos de congestionamento. Temos que $J \in \mathcal{J}$ é equivalente a uma tupla $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ para jogos com estratégias puras, e equivalente a uma tupla $(\mathcal{I}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ para jogos com estratégias mistas. A razão de coordenação de um jogo $J \in \mathcal{J}$ é dada por

$$\rho(J) = \max_{\sigma \in \Sigma^{\text{EQ}}} \frac{\mathbb{E}_\sigma[C]}{C(s^{\text{OPT}})}, \quad (5.22)$$

onde s^{OPT} é um perfil de estratégias ótimo, ou seja, um perfil que minimiza a latência total $C(s)$ (Equação (3.13)), e Σ^{EQ} é o conjunto de todos os perfis que são um equilíbrio de Nash misto.

O Preço da Anarquia PoA é dado por

$$\sup_{J \in \mathcal{J}} \rho(J). \quad (5.23)$$

5.4.2 Arcabouço da suavidade

Aland et al. [3] apresentaram um método de cálculo para o PoA de jogos de congestionamento atômicos com funções de latência polinomiais no fluxo. Esse método consiste na otimização de dois parâmetros, λ e μ , para jogos onde o PoA é limitado superiormente por $\lambda/(1-\mu)$. Supondo que as funções de latência são polinômios de grau máximo d , eles demonstraram que o PoA exato é $(\Phi_d)^{d+1}$, onde Φ_d é a maior solução da equação $(x+1)^d = x^{d+1}$. Esse valor, Φ_d , é uma generalização da razão áurea (*golden ratio*), que é a maior solução da equação $x+1 = x^2$, ou seja, Φ_2 , e corresponde ao PoA exato para jogos com funções de latência afins. Roughgarden [93] generalizou esse método para instâncias atômicas, e lhe deu o nome de *arcabouço da suavidade*. Além disso, ele demonstrou que o PoA é exato para jogos de congestionamento e de roteamento com demanda uniforme e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p . Nessa dissertação, seguimos as definições de Roughgarden [93].

O primeiro passo é definirmos um jogo de congestionamento suave.

Definição 5.4.2 (Jogos de Congestionamento Suaves (Roughgarden [93])). Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ com $\mu < 1$. Um jogo de congestionamento $J \in \mathcal{J}$ é (λ, μ) -suave se, para todo par $s, s^* \in \mathcal{S}$, temos que

$$\sum_{i=1}^n C_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \lambda \cdot C(s^*) + \mu \cdot C(s). \quad (5.24)$$

Para analisar a ineficiência de um equilíbrio de Nash para jogos de congestionamento, Roughgarden [93] definiu o Preço da Anarquia Robusto. Esse nome se deve ao fato do PoA obtido ser válido também para os equilíbrios correlacionado e correlacionado não-refinado.

Definição 5.4.3 (PoA Robusto (Roughgarden [93])). O Preço da Anarquia Robusto de um jogo de congestionamento $J \in \mathcal{J}$ é

$$\rho_r(J) = \inf \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} : (\lambda, \mu), \text{ com } \lambda \geq 0 \text{ e } \mu < 1, \text{ é tal que } J \text{ é } (\lambda, \mu)\text{-suave} \right\}. \quad (5.25)$$

O PoA para jogos de congestionamento com estratégias puras é limitado superiormente pelo PoA Robusto de tais jogos, conforme demonstra a proposição a seguir.

Proposição 5.4.4 (PoA para um Equilíbrio de Nash Puro (Roughgarden [93])). Seja $J \in \mathcal{J}$ um jogo de congestionamento com estratégias puras e PoA Robusto $\rho_r(J)$. Então, para todo equilíbrio de Nash puro s^{EN} e todo perfil $s \in \mathcal{S}$, temos que

$$C(s^{\text{EN}}) \leq \rho_r(J) \cdot C(s). \quad (5.26)$$

Prova. Se $\rho_r(J) = \infty$, então o resultado é óbvio. Caso contrário, suponha que existem $\lambda \geq 0$ e $\mu < 1$ tal que J é (λ, μ) -suave. Então,

$$C(s^{\text{EN}}) = \sum_{i=1}^n C_i(s^{\text{EN}}) \leq \sum_{i=1}^n C_i(s_i, s_{-i}^{\text{EN}}) \leq \lambda \cdot C(s) + \mu \cdot C(s^{\text{EN}}).$$

$$\text{Logo, } C(s^{\text{EN}}) \leq \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot C(s). \quad \square$$

Para jogos com estratégias mistas, Roughgarden [93] definiu a suavidade para distribuições de probabilidades da seguinte forma.

Lema 5.4.5 (Suavidade para Distribuições de Probabilidades (Roughgarden [93])). Sejam $J \in \mathcal{J}$ um jogo (λ, μ) -suave, σ uma distribuição de probabilidades em \mathcal{S} e $s^* \in \mathcal{S}$. Então,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\sigma_{-i}}[C_i(s_i^*, \cdot)] \leq \lambda \cdot C(s^*) + \mu \cdot \mathbb{E}_{\sigma}[C], \quad (5.27)$$

onde σ_{-i} é a distribuição marginal de σ para todos os jogadores exceto i , dada por

$$\sigma_{-i}(s_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i, s_{-i}). \quad (5.28)$$

Prova. Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\sigma_{-i}}[C_i(s_i^*, \cdot)] &= \sum_{i=1}^n \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) \cdot C_i(s_i^*, s_{-i}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s'_i \in S_i} \sigma(s'_i, s_{-i}) \cdot C_i(s_i^*, s_{-i}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{s \in S} \sigma(s_i, s_{-i}) \cdot C_i(s_i^*, s_{-i}) \\
&= \sum_{s \in S} \sigma(s) \cdot \sum_{i=1}^n C_i(s_i^*, s_{-i}) \\
&\leq \sum_{s \in S} \sigma(s) \cdot [\lambda \cdot C(s^*) + \mu \cdot C(s)] \\
&= \lambda \cdot C(s^*) + \mu \cdot \sum_{s \in S} \sigma(s) \cdot C(s) \\
&= \lambda \cdot C(s^*) + \mu \cdot \mathbb{E}_\sigma[C].
\end{aligned}$$

□

A seguir, demonstramos que o PoA para jogos de congestionamento com estratégias mistas também é limitado superiormente pelo PoA Robusto.

Proposição 5.4.6 (PoA para um Equilíbrio de Nash Misto (Roughgarden [93])). Seja $J \in \mathcal{J}$ um jogo de congestionamento com estratégias mistas e PoA Robusto $\rho_r(J)$. Então, para todo equilíbrio de Nash misto σ^{EN} e todo perfil $s \in \mathcal{S}$, temos que

$$\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C] \leq \rho_r(J) \cdot C(s). \quad (5.29)$$

Prova. Se $\rho_r(J) = \infty$, então o resultado é óbvio. Caso contrário, suponha que existem $\lambda \geq 0$ e $\mu < 1$ tal que J é (λ, μ) -suave. Então,

$$\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\sigma_{-i}^{\text{EN}}}[C_i(s_i, \cdot)] \leq \lambda \cdot C(s) + \mu \cdot \mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C].$$

Logo, $\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C] \leq \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot C(s)$.

□

5.4.3 Exatidão do PoA Robusto

Roughgarden [93] provou que o PoA para jogos com demanda uniforme e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p é exatamente o PoA Robusto de tais jogos. Para isso, ele mostrou que, nesse caso, existe um jogo de congestionamento cuja razão de coordenação é arbitrariamente próxima do PoA Robusto. Antes de construirmos esse jogo, apresentamos um valor de anarquia que é usado na demonstração do resultado. Assim, considere o conjunto

$$L = \{(\lambda, \mu) : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ e } \mu \in \mathbb{R} \text{ com } \mu < 1\}. \quad (5.30)$$

Para uma classe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$, considere o seguinte valor de anarquia:

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathcal{L}) = \inf \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} : \right. & (\lambda, \mu) \in L \text{ é tal que } l(x+1)x^* \leq \lambda \cdot l(x^*)x^* + \mu \cdot l(x)x, \\
& \text{para todo } x, x^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{ com } x^* \geq 1, \text{ e para todo } l \in \mathcal{L} \left. \right\}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Note que se não existe $(\lambda, \mu) \in L$ tal que todas as restrições em (5.31) são satisfeitas, então $\gamma(\mathcal{L}) = +\infty$.

Adicionalmente, Roughgarden [93] definiu $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ como o conjunto dos jogos de congestionamento com funções de latência pertencentes à classe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$. Então, ele provou que o valor de anarquia $\gamma(\mathcal{L})$ é um limitante superior para o PoA Robusto de jogos com demanda uniforme.

Proposição 5.4.7 (Roughgarden [93]). Seja $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$. O PoA Robusto de qualquer jogo $J \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$ com demanda uniforme é no máximo $\gamma(\mathcal{L})$.

Prova. Para provar o resultado basta provar que J é (λ, μ) -suave para todo (λ, μ) que satisfaz as restrições em (5.31). Sejam s^{OPT} um perfil ótimo e $x = (x_{e_1}, \dots, x_{e_m})$ um vetor associado ao perfil $s \in \mathcal{S}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n C_i(s_i^{\text{OPT}}, s_{-i}) &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e \in s_i^{\text{OPT}} \cap s_i} l_e(x_e) + \sum_{e \in s_i^{\text{OPT}} \setminus s_i} l_e(x_e + 1) \right] \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in s_i^{\text{OPT}}} l_e(x_e + 1) \\
 &= \sum_{e \in E} \sum_{i | e \in s_i^{\text{OPT}}} l_e(x_e + 1) \\
 &= \sum_{e \in E} l_e(x_e + 1) \sum_{i | e \in s_i^{\text{OPT}}} 1 \\
 &= \sum_{e \in E} l_e(x_e + 1) x_e^{\text{OPT}} \\
 &\leq \sum_{e \in E} [\lambda \cdot l_e(x_e^{\text{OPT}}) x_e^{\text{OPT}} + \mu \cdot l_e(x_e) x_e] \\
 &= \lambda \cdot C(s^{\text{OPT}}) + \mu \cdot C(s).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

A primeira desigualdade segue da hipótese de que as funções são não-decrescentes e a segunda desigualdade segue do fato de que estamos considerando pares (λ, μ) que satisfazem as restrições em (5.31). \square

Para provar que o PoA é exato, construímos um jogo com funções de latência pertencentes a uma classe finita $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$, cuja razão de coordenação é arbitrariamente próxima a $\gamma(\mathcal{L})$. Seja $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$ o conjunto dos pares (λ, μ) que satisfazem as restrições em (5.31), com as restrições adicionais $x \leq p$ e $x^* \leq p$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\mathcal{L}, p) = \{(\lambda, \mu) : & (\lambda, \mu) \in L \text{ é tal que } l(x+1)x^* \leq \lambda \cdot l(x^*)x^* + \mu \cdot l(x)x, \\
 & \text{para todo } x, x^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{ com } x^* \geq 1 \text{ e } x, x^* \leq p, \text{ e para todo } l \in \mathcal{L}\}.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

O conjunto $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$ é não vazio, pois o fato das funções de latência serem positivas e \mathcal{L} finito garante que para todo $\mu < 1$ existe um λ suficientemente grande que satisfaz todas as desigualdades em (5.31). A título de ilustração, considere a Figura 5.3, extraída de Roughgarden [93], que mostra a região $\mathcal{A}(\mathcal{L}_x, 2)$, onde \mathcal{L}_x é a classe que contém somente a função $l(x) = x$. Nela, o eixo das abscissas corresponde aos possíveis valores de λ e o eixo das ordenadas aos possíveis valores de μ . A região $\mathcal{A}(\mathcal{L}_x, 2)$ (de cor cinza) corresponde à área abaixo da reta $\mu = 1$ e à direita e acima de todos os semiplanos definidos pelas restrições em (5.31), para todo par de inteiros $x, x^* \leq 2$ com $x \geq 0$ e $x^* \geq 1$.

Seja $\gamma(\mathcal{L}, p)$ o ínfimo de $\lambda/(1 - \mu)$ para $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$. Mais precisamente,

$$\gamma(\mathcal{L}, p) = \inf \left\{ \frac{\lambda}{1 - \mu} : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \right\}. \tag{5.35}$$

Note que em um jogo que atinge o valor $\gamma(\mathcal{L})$, as desigualdades (5.32) e (5.33) são satisfeitas na igualdade. Isso só é possível para pares $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$ que determinam $\gamma(\mathcal{L}, p)$. O lema a seguir define

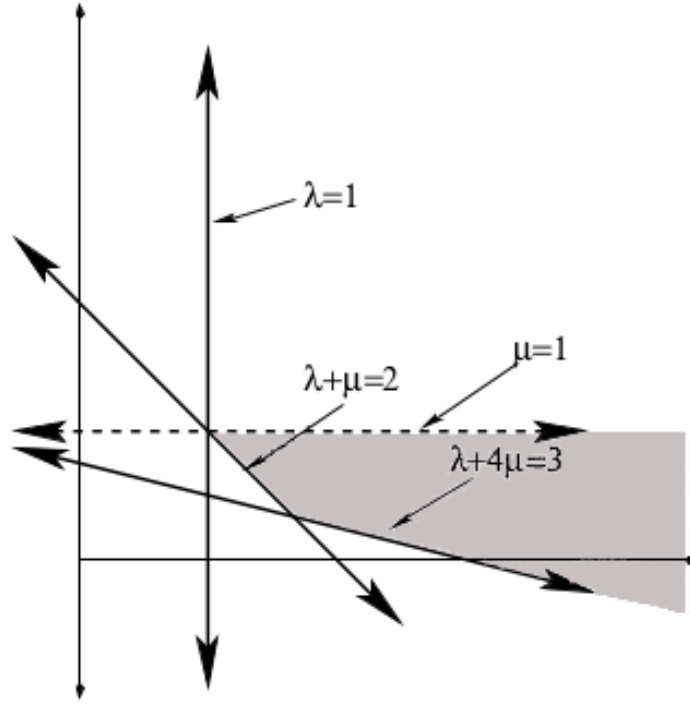


Figura 5.3: (Roughgarden [93]) Os semiplanos que definem a região $\mathcal{A}(\mathcal{L}_x, 2)$ (de cor cinza), onde \mathcal{L}_x é a classe que contém somente a função $l(x) = x$. Aqui, $\gamma(\mathcal{L}_x, 2) = \frac{\hat{\lambda}}{1 - \hat{\mu}} = \frac{5}{2}$, onde $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ é o ponto de intersecção entre as retas $\lambda + \mu = 2$ e $\lambda + 4\mu = 3$.

certas propriedades, desses pares (λ, μ) , que usamos para a construção do jogo.

Lema 5.4.8 (Roughgarden [93]). Sejam uma classe de funções $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$ e o valor $p \in \mathbb{N}_{>0}$. Suponha que existe $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ tal que

$$\frac{\hat{\lambda}}{1 - \hat{\mu}} = \gamma(\mathcal{L}, p). \quad (5.36)$$

Então existem $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$, $x_1, x_2 \in \{0, \dots, p\}$, $x_1^*, x_2^* \in \{1, \dots, p\}$, e $\eta \in [0, 1]$ tais que

$$l_j(x_j + 1)x_j^* = \hat{\lambda} \cdot l_j(x_j^*)x_j^* + \hat{\mu} \cdot l_j(x_j)x_j \quad (5.37)$$

para $j = 1, 2$, e

$$\eta \cdot l_1(x_1 + 1)x_1^* + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2 + 1)x_2^* = \eta \cdot l_1(x_1)x_1 + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2)x_2. \quad (5.38)$$

Prova. Sejam $l \in \mathcal{L}$ e $x, x^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $x^* \geq 1$. Considere o semiplano

$$\mathcal{H}_{l,x,x^*} = \{(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \in L \text{ é tal que } l(x+1)x^* \leq \lambda \cdot l(x^*)x^* + \mu \cdot l(x)x\}, \quad (5.39)$$

e a linha $\partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$ que corresponde à sua fronteira (pontos (λ, μ) que satisfazem a restrição em (5.39) na igualdade). Os pontos do semiplano \mathcal{H}_{l,x,x^*} satisfazem as restrições em (5.31). Considere também o valor

$$\beta_{l,x,x^*} = \frac{l(x)x}{l(x+1)x^*}, \quad (5.40)$$

que é bem definido pois $x^* \geq 1$ e todas as funções de latência são positivas. Note que se $x = 0$, então a restrição em (5.39) se reduz a $\lambda \geq \frac{l(1)}{l(x^*)}$, e como $x^* \in \{1, \dots, p\}$, temos que $\lambda \geq 1$. Para $x \geq 1$, podemos

expressar λ em termos de μ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \lambda &\geq \frac{l(x+1)x^*}{l(x^*)x^*} - \mu \cdot \frac{l(x)x}{l(x^*)x^*} \\
 &= \frac{l(x+1)}{l(x^*)} - \mu \cdot \frac{l(x)x}{l(x^*)x^*} \\
 &= \frac{l(x+1)}{l(x^*)} - \mu \cdot \frac{l(x+1)}{l(x^*)} \frac{l(x)x}{l(x+1)x^*} \\
 &= \frac{l(x+1)}{l(x^*)} \cdot \left[1 - \frac{l(x)x}{l(x+1)x^*} \cdot \mu \right] \\
 &= \frac{l(x+1)}{l(x^*)} \cdot [1 - \beta_{l,x,x^*} \cdot \mu].
 \end{aligned}$$

Desse modo, para pontos (λ, μ) pertencentes à face poliédrica $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$, temos a seguinte relação:

$$\frac{\lambda}{1-\mu} = \frac{l(x+1)}{l(x^*)} \frac{1 - (\beta_{l,x,x^*})\mu}{1-\mu}. \quad (5.41)$$

Temos os seguintes casos a considerar:

- (a) Se $\beta_{l,x,x^*} = 1$, então o valor de $\lambda/(1-\mu)$ é igual para todo ponto $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$.

De fato,

$$\frac{\lambda}{1-\mu} = \frac{l(x+1)}{l(x^*)} \frac{1-\mu}{1-\mu} = \frac{l(x+1)}{l(x^*)}.$$

- (b) Se $\beta_{l,x,x^*} < 1$ e $x \geq 1$, então o único minimizador de $\lambda/(1-\mu)$ entre os pontos de $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$ é aquele com o menor valor de μ e, daqui, o maior valor de λ (o ponto de intersecção mais à direita no gráfico $\lambda \times \mu$). Por exemplo, a reta $\lambda + \mu = 2$ da Figura 5.3.

Para ver isso note que, nesse caso, $1 - (\beta_{l,x,x^*})\mu > 1 - \mu$. Assim, a segunda fração do lado direito da Equação (5.41) decresce com a diminuição de μ .

Adicionalmente, se \mathcal{H}_{l,x,x^*} determina a (infinita) face mais à direita do poliedro, então o valor de $\lambda/(1-\mu)$ é estritamente crescente com λ tendendo ao infinito sobre a face.

- (c) Se $\beta_{l,x,x^*} > 1$, então o único minimizador de $\lambda/(1-\mu)$ entre os pontos $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$ é aquele com o maior valor de μ e, daqui, o menor valor de λ (o ponto de intersecção mais à esquerda no gráfico $\lambda \times \mu$). Por exemplo, a reta $\lambda + 4\mu = 3$ da Figura 5.3.

Para ver isso note que, nesse caso, $1 - (\beta_{l,x,x^*})\mu < 1 - \mu$. Assim, a segunda fração do lado direito da Equação (5.41) aumenta com o aumento de μ .

- (d) Todos os semiplanos do tipo $\mathcal{H}_{l,0,x^*}$ são redundantes, com exceção de $\mathcal{H}_{l,0,1} = \{(\lambda, \mu) : \lambda \geq 1\}$, visto que os demais semiplanos são do tipo $\lambda \geq \frac{l(1)}{l(x^*)}$, com $\frac{l(1)}{l(x^*)} < 1$. O único minimizador de $\lambda/(1-\mu)$ entre os pontos $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,0,1}$ é aquele com $\lambda = 1$ e o menor valor de μ (o ponto de intersecção mais abaixo no gráfico $\lambda \times \mu$).

Com o pressuposto de que existe um par $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ que atinge o ínfimo em (5.31), e considerando-se que $\lambda/(1-\mu)$ é estritamente decrescente com a diminuição de ambos, λ e μ (isto é, fixando-se um e diminuindo o outro), então sabemos que $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ localiza-se no sudoeste da região definida por $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$ e, além disso, pertence a alguma linha $\partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$, onde l, x e x^* satisfazem a Equação (5.37). Assim, se $\beta_{l,x,x^*} = 1$, então $l_1 = l_2 = l$, $x_1 = x_2 = x$ e $x_1^* = x_2^* = x^*$ satisfazem (5.38) para qualquer valor $\eta \in [0, 1]$. Se $\beta_{l,x,x^*} \neq 1$, então o ponto $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ pertence à intersecção de duas linhas, $\partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$ e $\partial\mathcal{H}_{l',y,y^*}$, onde: se $\beta_{l,x,x^*} < 1$ ($\beta_{l,x,x^*} > 1$), então $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ é o ponto de intersecção mais à direita (mais à esquerda) de $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$, e, daqui, também o ponto de intersecção mais à esquerda (mais à direita) de $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p) \cap \partial\mathcal{H}_{l',y,y^*}$, para algum semiplano \mathcal{H}_{l',y,y^*} com $\beta_{l',y,y^*} > 1$ ($\beta_{l',y,y^*} < 1$).

Substitua, respectivamente, l, l', x, x^*, y e y^* por $l_1, l_2, x_1, x_1^*, x_2$ e x_2^* . A Equação (5.37) é satisfeita para as duas linhas e, considerando-se $\beta_{l_1,x_1,x_1^*} < 1$ e $\beta_{l_2,x_2,x_2^*} > 1$, temos que $l_1(x_1+1)x_1^* > l_1(x_1)x_1$ e $l_2(x_2+1)x_2^* < l_2(x_2)x_2$. A Equação (5.38) é satisfeita escolhendo-se um $\eta \in [0, 1]$ adequado.

□

Com o uso do Lema 5.4.8 é possível provar o seguinte teorema.

Teorema 5.4.9 (Roughgarden [93]). Para toda classe de funções $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$, existem jogos de congestionamento com funções de latência em \mathcal{L} e demanda uniforme cuja razão de coordenação é arbitrariamente próxima a $\gamma(\mathcal{L})$.

Prova. Construímos um jogo cuja razão de coordenação é igual a $\gamma(\mathcal{L}, p)$. É possível construir tal jogo para qualquer $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$ finito e qualquer $p \in \mathbb{N}_{>0}$. Supondo que exista um par $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ tal que $\hat{\lambda}/(1 - \hat{\mu}) = \gamma(\mathcal{L}, p)$, utilizamos o Lema 5.4.8 para definir os parâmetros $l_1, l_2, x_1, x_2, x_1^*, x_2^*$ e η que satisfazem as igualdades (5.37) e (5.38). O conjunto dos recursos é formado por dois subconjuntos, E_1 e E_2 , onde cada subconjunto possui $k = \max\{x_1 + x_1^*, x_2 + x_2^*\}$ recursos nomeados de 1 a k . Cada subconjunto pode ser visto como um ciclo. Todo $e \in E_1$ possui função de latência $\eta l_1(x)$ e todo $e \in E_2$ possui função de latência $(1 - \eta) l_2(x)$. Há k jogadores, cada um com duas estratégias: a estratégia P_i do jogador i usa x_j recursos consecutivos de E_j ($j = 1, 2$), iniciando no i -ésimo recurso (continuando pelo recurso número 1, se necessário); a estratégia Q_i do jogador i usa x_j^* recursos consecutivos de E_j , terminando no recurso de número $i - 1$ (continuando pelo recurso número k , se necessário). O valor de k assegura que as estratégias P_i e Q_i são disjuntas. Além disso, considera-se que cada jogador é responsável por 1 unidade de carga em cada recurso que ele utiliza.

Sejam y o perfil obtido quando cada jogador i seleciona a sua estratégia P_i e y^* o perfil obtido quando cada jogador i seleciona a sua estratégia Q_i . Então, por simetria, $y_e = x_1$ e $y_e^* = x_1^*$ para todo $e \in E_1$, e $y_e = x_2$ e $y_e^* = x_2^*$ para todo $e \in E_2$.

O perfil y é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, note que, para todo jogador i , temos que

$$\begin{aligned} C_i(y) &= \sum_{e \in P_i \cap E_1} \eta \cdot l_1(y_e) + \sum_{e \in P_i \cap E_2} (1 - \eta) \cdot l_2(y_e) \\ &= \sum_{e \in P_i \cap E_1} \eta \cdot l_1(x_1) + \sum_{e \in P_i \cap E_2} (1 - \eta) \cdot l_2(x_2) \\ &= \eta \cdot l_1(x_1)x_1 + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2)x_2 \\ &= \eta \cdot l_1(x_1 + 1)x_1^* + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2 + 1)x_2^* \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\eta \cdot l_1(x_1 + 1) \sum_{e \in Q_i \cap E_1} \right) + \left((1 - \eta) \cdot l_2(x_2 + 1) \sum_{e \in Q_i \cap E_2} \right) \\ &= \sum_{e \in Q_i \cap E_1} \eta \cdot l_1(x_1 + 1) + \sum_{e \in Q_i \cap E_2} (1 - \eta) \cdot l_2(x_2 + 1) \\ &= \sum_{e \in Q_i \cap E_1} \eta \cdot l_1(y_e + 1) + \sum_{e \in Q_i \cap E_2} (1 - \eta) \cdot l_2(y_e + 1) \\ &= C_i(y_i^*, y_{-i}), \end{aligned} \tag{5.43}$$

onde (5.42) segue da restrição (5.38), e (5.43) do fato de que P_i e Q_i são disjuntos.

A partir de (5.42), derivamos

$$\begin{aligned} C(y) &= \sum_{i=1}^n C_i(y) \\ &= n \cdot [\eta \cdot l_1(x_1 + 1)x_1^* + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2 + 1)x_2^*] \\ &= n \cdot \eta \cdot (\hat{\lambda} \cdot l_1(x_1^*)x_1^* + \hat{\mu} \cdot l_1(x_1)x_1) + n \cdot (1 - \eta) \cdot (\hat{\lambda} \cdot l_2(x_2^*)x_2^* + \hat{\mu} \cdot l_2(x_2)x_2) \\ &= \hat{\lambda} \cdot n \cdot (\eta \cdot l_1(x_1^*)x_1^* + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2^*)x_2^*) + \hat{\mu} \cdot n \cdot (\eta \cdot l_1(x_1)x_1 + (1 - \eta) \cdot l_2(x_2)x_2) \\ &= \hat{\lambda} \cdot C(y^*) + \hat{\mu} \cdot C(y), \end{aligned} \tag{5.44}$$

onde (5.44) segue da restrição (5.37).

Daqui, temos que $C(y)/C(y^*) = \hat{\lambda}/(1 - \hat{\mu}) = \gamma(\mathcal{L}, p)$, completando a prova para o caso em que existe o par $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$. Resta considerar o caso em que não existe um par (λ, μ) que atinge o valor $\gamma(\mathcal{L})$. A afirmação (b) do Lema 5.4.8 demonstra que isso só ocorre para a face mais à direita do limite da região $\mathcal{A}(\mathcal{L}, p)$, quando o valor β é menor que 1. Nesse caso, o ínfimo é aproximado pelo valor $\lambda/(1 - \mu)$ para pontos da face quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow -\infty$. Essa face corresponde à linha $\partial\mathcal{H}_{l,x,x^*}$ de menor valor negativo de inclinação $-l(x^*)x^*/l(x)x$, isto é, corresponde à linha $\partial\mathcal{H}_{l,p,1}$ para instâncias onde $\beta_{l,p,1} < 1$. A partir da Equação (5.41), derivamos

$$\begin{aligned} \gamma(\mathcal{L}, p) &= \frac{l(p+1)}{l(1)} \cdot \frac{1 - (\beta_{l,p,1})\mu}{1 - \mu} \\ &= \frac{1}{1 - \mu} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \beta_{l,p,1} \cdot \frac{l(n+1)}{l(1)} \\ &= \frac{1}{1 - (-\infty)} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} - \frac{(-\infty)}{1 - (-\infty)} \cdot \beta_{l,p,1} \cdot \frac{l(n+1)}{l(1)} \\ &= \frac{1}{1 + \infty} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} + \frac{\infty}{1 + \infty} \cdot \beta_{l,p,1} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} \\ &= 0 + \beta_{l,p,1} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} &= \beta_{l,p,1} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} \\ &= \frac{l(p)p}{l(p+1)} \cdot \frac{l(p+1)}{l(1)} \\ &= \frac{l(p)p}{l(1)}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Como $\beta_{l,p,1} < 1$, nota-se, por (5.45) e (5.46), que $l(p+1) > l(p)p$.

Agora, considere o jogo J com o conjunto $E = \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ de recursos e o conjunto $\mathcal{I} = \{1, \dots, p+1\}$ de jogadores. As duas estratégias de cada jogador $i \in \mathcal{I}$ são $\{e_i\}$ e $E \setminus \{e_i\}$. Se todos os jogadores escolhem a estratégia de um único recurso, então o perfil resultante tem latência total $(p+1) \cdot l(1)$. Caso contrário, se todos os jogadores escolhem a estratégia com p recursos, então o perfil resultante tem latência total $(p+1) \cdot l(p)p$. Esse último perfil é um equilíbrio de Nash puro, pois se qualquer jogador i alterar de sua estratégia de p recursos para a de 1, então ele passará a ter custo individual $l(p+1) > l(p)p$. Assim, a razão de coordenação é ao menos $l(p)p/l(1) = \gamma(\mathcal{L}, p)$. \square

Os jogos usados para provar o Teorema 5.4.9 podem ser transformados em instâncias de um jogo de roteamento com o uso de um ciclo bidirecional, cuja topologia depende dos valores de x_1, x_1^*, x_2 e x_2^* que satisfazem o Lema 5.4.8. Por exemplo, podemos considerar o jogo de congestionamento que induz a região $\mathcal{A}(\mathcal{L}_x, 2)$, ilustrada na Figura 5.3. Nele, a reta $\lambda + \mu = 2$ corresponde aos valores $x_1 = x_1^* = 1$ e a reta $\lambda + 4\mu = 3$ corresponde aos valores $x_2 = 2$ e $x_2^* = 1$. Considerando-se $\eta = \frac{1}{2}$, pode-se verificar facilmente que esses valores satisfazem a condição (5.38). Assim, $k = 3$ é a quantidade de recursos em cada um dos subconjuntos, E_1 e E_2 , e a quantidade de jogadores. Sejam $E_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ e $E_2 = \{h_1, h_2, h_3\}$. Os recursos de ambos os subconjuntos possuem funções de latência $l(x) = \frac{x}{2}$. As duas estratégias do jogador i são $P_i = \{g_i, h_i, h_{i+1}\}$ e $Q_i = \{g_{i-1}, h_{i-1}\}$, onde os índices são calculados módulo 3. Se todos os jogadores escolhem sua estratégia P_i , então o custo individual para cada um deles é $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$, e o perfil y resultante tem latência total $C(y) = 3 \cdot \frac{5}{2}$. O perfil y é um equilíbrio de Nash puro, pois se qualquer jogador i alterar para a estratégia Q_i , então ele passará a ter custo individual $\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Portanto, não há incentivo para fazê-lo. Se todos os jogadores escolhem sua estratégia Q_i , então o custo individual para cada um deles é $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, e o perfil y^* resultante tem latência total $C(y^*) = 3 \cdot 1$. Daqui, temos

que $C(y)/C(y^*) = \frac{5}{2}$. A instância ilustrada na Figura 5.4 corresponde a um jogo de roteamento com o mesmo conjunto de jogadores e de recursos do jogo de congestionamento apresentado acima. Porém, cada uma das duas estratégias de um jogador i correspondem agora a caminhos de s_i até t_i , onde s_i corresponde, na Figura 5.4(a), ao nó cinza de nome i , e t_i ao nó com a borda mais grossa de nome i . Assim, as estratégias do jogador i são $P_i = (h_{i+1}, g_i, h_i)$ e $Q_i = (h_{i-1}, g_{i-1})$, onde os índices são calculados módulo 3. Os arcos sem rótulo possuem latência 0. Os rótulos das arestas correspondem aos nomes dos recursos que elas representam. A função de latência de cada um desses recursos é $l(x) = \frac{x}{2}$. Sejam y o perfil resultante quando todos os jogadores escolhem sua estratégia P_i e y^* o perfil resultante quando todos os jogadores escolhem sua estratégia Q_i . Então é fácil verificar que y é um equilíbrio de Nash puro e que $C(y)/C(y^*) = \frac{5}{2}$.

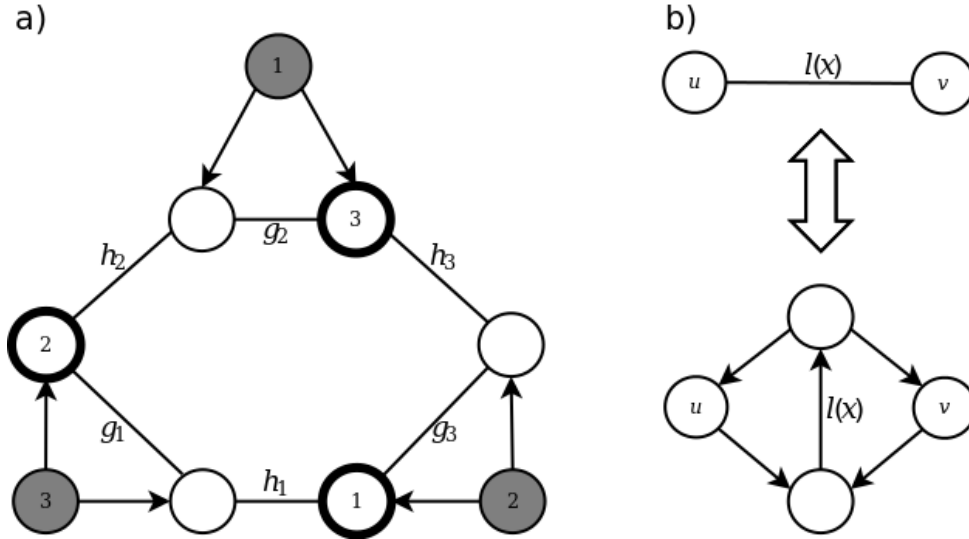


Figura 5.4: (a) Instância (G, r, l) de um jogo de roteamento com 3 jogadores e demanda uniforme. Os arcos sem rótulo possuem latência 0. Os rótulos das arestas correspondem ao nome do recurso que representam. Cada aresta possui função de latência $l(x) = \frac{x}{2}$. O nó de cor cinza de nome i corresponde à origem do jogador i , e o nó com a borda grossa de nome i corresponde ao destino do jogador i . (b) Cada aresta da instância em (a) é, na verdade, um subgrafo com 4 nós e 5 arcos, portanto pode ser percorrida em ambos os sentidos.

Por último, como já dito na Seção 5.3, o resultado de PoA exato para jogos de congestionamento foi generalizado por Bhawalkar et al. [15] para jogos com demanda genérica e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_f . O valor de anarquia considerado nesse caso é uma generalização de $\gamma(\mathcal{L}_f)$, dado por

$$\zeta(\mathcal{L}_f) = \inf \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} : (\lambda, \mu) \in L \text{ é tal que } l(x+x^*)x^* \leq \lambda \cdot l(x^*)x^* + \mu \cdot l(x)x, \right. \\ \left. \text{para todo } x, x^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ com } x^* \geq 1, \text{ e para todo } l \in \mathcal{L}_f \right\}. \quad (5.47)$$

Nesse caso, Bhawalkar et al. [15] construíram um jogo cuja razão de coordenação se aproxima assintoticamente de $\zeta(\mathcal{L}_f)$, ou seja, é igual a $\zeta(\mathcal{L}_f)$ quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito. Esse jogo pode ser representado como uma instância de um jogo de roteamento assimétrico, onde há um único par OD unido por caminhos com 1 ou 2 arcos e cada jogador pode escolher um dentre dois caminhos aos quais ele tem acesso.

5.4.4 Cálculo do PoA Robusto

Aland et al. [3] calcularam o valor de $\gamma(\mathcal{L}_d)$, onde \mathcal{L}_d é a classe dos polinômios de grau máximo d . Mais especificamente, eles apresentaram o seguinte teorema.

Teorema 5.4.10 (Aland et al. [3]). Seja $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Então,

$$\gamma(\mathcal{L}_d) = \min_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times (0,1)} \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} \mid \begin{array}{l} \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ e } l \in \mathcal{L}_d : \\ y \cdot l(x+y) \leq \lambda \cdot yl(y) + \mu \cdot xl(x) \end{array} \right\} = \Phi_d^{d+1}. \quad (5.48)$$

Relembrando: Φ_d é a maior solução da equação $(x+1)^d = x^{d+1}$. Para provar esse teorema, são necessários os seguintes dois lemas.

Lema 5.4.11 (Aland et al. [3]). Sejam $\mu \in (0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seja $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(r) = (x+1)^r - \mu \cdot x^{r+1}$. Então, para todo $d, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ com $d > r$ e $g(r) \geq 0$, temos que $g(d) \geq g(r)$.

Prova. Para o caso em que $x = 0$, temos que $g(d) = g(r) = 1$, satisfazendo o enunciado. Para o caso em que $x > 0$, temos

$$g'(r) = (x+1)^r \cdot \ln(x+1) - \mu \cdot x^{r+1} \cdot \ln(x) > \ln(x+1)[(x+1)^r - \mu \cdot x^{r+1}] \geq 0. \quad (5.49)$$

Por contradição, assumamos que $g(d) < g(r)$. Considere $\xi \in (r, d)$ como o valor minimal (mais à esquerda no gráfico de g) com $g'(\xi) = 0$. Sabemos que tal ξ existe porque, como assumimos que $g(d) < g(r)$, temos que g deve ser decrescente em algum ponto $x \in (r, d)$. Daqui, temos que $g'(r) > 0$ (por (5.49)) e $g'(x) < 0$ para algum $x \in (r, d)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário e o fato de g' ser contínuo em $[0, \infty)$, deve existir um ponto $\xi \in (r, d)$ tal que $g'(r) > g'(\xi) > g'(x)$. O fato de g ser crescente em r e ξ ser o ponto de inflexão mais à esquerda implica que $g(\xi) > g(r) \geq 0$. Assim, por (5.49) temos que $g'(\xi) > 0$, o que é uma contradição da definição de ξ . \square

Lema 5.4.12 (Aland et al. [3]). Sejam $\mu \in (0, 1]$ e $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Seja $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = (x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}$. Então, a função g tem exatamente um máximo local $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Além disso, a função g é estritamente crescente em $[0, \xi)$ e estritamente decrescente em (ξ, ∞) .

Prova. A condição de primeira ordem para um máximo local é dada por

$$g'(x) = d(x+1)^{d-1} - \mu(d+1)x^d = 0, \text{ isto é, } \left[x > 0 \text{ e } \frac{(x+1)^{d-1}}{x^d} = \frac{\mu \cdot (d+1)}{d} \right]. \quad (5.50)$$

Temos que $\lim_{x \downarrow 0} \frac{(x+1)^{d-1}}{x^d} = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{d-1}}{x^d} = 0$. Além disso, $\frac{(x+1)^{d-1}}{x^d}$ é continuamente diferenciável e, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(x+1)^{d-1}}{x^d} = -\frac{(x+1)^{d-2} \cdot (x+d)}{x^{d+1}} < 0.$$

Como $\frac{(x+1)^{d-1}}{x^d}$ é estritamente decrescente, temos que existe um único $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$ com $\frac{(\xi+1)^{d-1}}{\xi^d} = \frac{\mu \cdot (d+1)}{d}$. Adicionalmente, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$. Assim, a função g tem tanto um máximo local quanto global em ξ e, portanto, a função g é estritamente crescente em $[0, \xi)$ e estritamente decrescente em (ξ, ∞) . \square

Aland et al. [3] provaram, com o uso dos dois lemas acima, que a expressão do ínfimo pode ser simplificada por uma expressão mais fácil de ser computada. O seguinte lema fornece essa expressão.

Lema 5.4.13 (Aland et al. [3]). Seja $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Então,

$$\begin{aligned}\gamma(\mathcal{L}_d) &= \inf_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times (0,1)} \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} \mid \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, l \in \mathcal{L}_d : y \cdot l(x+y) \leq \lambda \cdot yl(y) + \mu \cdot xl(x) \right\} \\ &= \inf_{\mu \in (0,1)} \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \left\{ \frac{(x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}}{1-\mu} \right\} \right\}.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Prova. Pelo Lema 5.4.12, sabemos que o máximo no lado direito de (5.51) existe e é único, para qualquer $\mu \in (0,1)$.

Assuma que existe um par $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times (0,1)$ tal que

$$y \cdot l(x+y) \leq \lambda \cdot yl(y) + \mu \cdot xl(x), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ e } l \in \mathcal{L}_d. \quad (5.52)$$

Como todo $l \in \mathcal{L}_d$ é uma combinação linear de monômios, podemos simplificar (5.52) para ser satisfeita apenas para toda função l que seja um monômio de grau menor ou igual a d . Assim, (5.52) é equivalente a

$$y \cdot (x+y)^r \leq \lambda \cdot y^{r+1} + \mu \cdot x^{r+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, y \in \mathbb{R}_{>0} \text{ e } r \in \{0, \dots, d\}.$$

Dividindo por y^{r+1} e rearranjando resulta em

$$\lambda \geq \left(\frac{x}{y} + 1 \right)^r - \mu \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^{r+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, y \in \mathbb{R}_{>0} \text{ e } r \in \{0, \dots, d\}. \quad (5.53)$$

Por último, podemos denotar $\frac{x}{y}$ por uma única variável x , de modo que a expressão (5.53) é simplificada para

$$\lambda \geq (x+1)^r - \mu \cdot x^{r+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ e } r \in \{0, \dots, d\}. \quad (5.54)$$

Se $x = 0$, então para todo $r \in \{0, \dots, d\}$ temos que $(x+1)^r - \mu \cdot x^{r+1} = 1 > 0$. Assim, usando o Lema 5.4.11 podemos simplificar (5.54) para

$$\lambda \geq (x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

do que segue o resultado:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathcal{L}_d) &= \inf_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times (0,1)} \left\{ \frac{\lambda}{1-\mu} \mid \text{para todo } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \lambda \geq (x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1} \right\} \\ &= \inf_{\mu \in (0,1)} \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \left\{ \frac{(x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}}{1-\mu} \right\} \right\}.\end{aligned}$$

□

Por fim, o seguinte lema fornece o resultado desejado.

Lema 5.4.14 (Aland et al. [3]). Seja $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Então,

$$\gamma(\mathcal{L}_d) = \inf_{\mu \in (0,1)} \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \left\{ \frac{(x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}}{1-\mu} \right\} \right\} = \Phi_d^{d+1}. \quad (5.55)$$

Prova. Para provar esse resultado, demonstramos que tanto a desigualdade $\gamma(\mathcal{L}_d) \leq \Phi_d^{d+1}$ quanto a desigualdade $\gamma(\mathcal{L}_d) \geq \Phi_d^{d+1}$ são válidas. Para isso, considere a função $g : (0,1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$g(\mu, x) = \frac{(x+1)^d - \mu \cdot x^{d+1}}{1-\mu},$$

e a função $h : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$h(x) = \frac{d \cdot (x+1)^{d-1}}{(d+1) \cdot x^d}.$$

A desigualdade $\gamma(\mathcal{L}_d) \leq \Phi_d^{d+1}$ segue das seguintes duas afirmações:

(i) $h(\Phi_d) \in (0, 1)$.

Como $(\Phi_d + 1)^d = \Phi_d^{d+1}$, temos que

$$\begin{aligned} h(\Phi_d) &= \frac{d \cdot (\Phi_d + 1)^{d-1}}{(d+1) \Phi_d^d} \\ &= \frac{d}{(d+1) \Phi_d^d} \cdot \frac{(\Phi_d + 1)^d}{\Phi_d + 1} \\ &= \frac{d \Phi_d^{d+1}}{(d+1)(\Phi_d + 1) \Phi_d^d} \\ &= \frac{d \Phi_d}{(d+1)(\Phi_d + 1)} \in (0, 1). \end{aligned}$$

(ii) Suponha que exista um par $(\hat{\mu}, \hat{x}) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_{>0}$ com $\hat{\mu} = h(\hat{x})$. Então $g(\hat{\mu}, \hat{x}) = \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{g(\hat{\mu}, x)\}$.

Repare que \hat{x} satisfaz a condição de primeira ordem em (5.50) para o máximo local de $g(\hat{\mu}, \cdot)$. Pelo Lema 5.4.12, sabemos que \hat{x} é o único máximo local positivo e que $g(\hat{\mu}, \cdot)$ é estritamente crescente em $(0, \hat{x})$ e estritamente decrescente em (\hat{x}, ∞) . Isso implica o resultado.

Fixando $\hat{\mu} = h(\Phi_d)$, temos que

$$\begin{aligned} \gamma(\mathcal{L}_d) &\stackrel{(i)}{\leq} \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{g(\hat{\mu}, x)\} \stackrel{(ii)}{=} g(\hat{\mu}, \Phi_d) = \frac{(\Phi_d + 1)^d - \hat{\mu} \cdot \Phi_d^{d+1}}{1 - \hat{\mu}} \\ &= \frac{(\Phi_d + 1)^d - \frac{d \Phi_d}{(d+1)(\Phi_d + 1)} \cdot \Phi_d^{d+1}}{1 - \frac{d \cdot \Phi_d}{(d+1)(\Phi_d + 1)}} \\ &= \Phi_d^{d+1}. \end{aligned}$$

A desigualdade $\gamma(\mathcal{L}_d) \geq \Phi_d^{d+1}$ segue do fato de que $g(\mu, \Phi_d) = \Phi_d^{d+1}$ para qualquer $\mu \in (0, 1)$. \square

Os Lemas 5.4.13 e 5.4.14 implicam o Teorema 5.4.10.

Além desse resultado, Aland et al. [3] provaram também o seguinte resultado para jogos com demanda uniforme.

Teorema 5.4.15 (Aland et al. [3]). Sejam $d \in \mathbb{N}_{>0}$ e $k = \lfloor \Phi_d \rfloor$. Então,

$$\begin{aligned} \min_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times (0, 1)} \left\{ \frac{\lambda}{1 - \mu} \mid \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, l \in \mathcal{L}_d : y \cdot l(x+1) \leq \lambda \cdot yl(y) + \mu \cdot xl(x) \right\} \\ = \frac{(k+1)^{2d+1} - k^{d+1}(k+2)^d}{(k+1)^{d+1} - (k+2)^d + (k+1)^d - k^{d+1}}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Por questão de espaço, omitimos a prova. Porém, ela segue a mesma linha da prova do Teorema 5.4.10.

Capítulo 6

Jogos Atômicos com Fluxo Divisível

Nesse capítulo, apresentamos os principais resultados para jogos atômicos com fluxo divisível. Para tais jogos, um equilíbrio de Nash puro é dado pela Definição 3.2.1.

Na Seção 6.1, apresentamos os principais resultados de existência e unicidade de um equilíbrio de Nash puro, incluindo algumas funções potenciais. Na Seção 6.2, apresentamos os principais resultados para a ineficiência de um equilíbrio de Nash puro, incluindo fenômenos contraintuitivos, valores de anarquia e limites de bicritério. Na Seção 6.3, apresentamos o arcabouço de jogos de congestionamento localmente suaves, que nos permite obter melhores resultados de PoA para instâncias com estratégias puras e mistas.

6.1 Existência e unicidade de um equilíbrio de Nash puro

Jogos atômicos com fluxo divisível possuem um equilíbrio de Nash puro para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas, como mostrado por Cominetti et al. [21]. Além disso, para instâncias com certas características de rede e alguns pressupostos de convexidade nas funções de latência, um equilíbrio de Nash puro é essencialmente único: instâncias que possuem um único par OD com arcos paralelos os unindo, demanda uniforme e funções de latência positivas, estritamente crescentes, convexas e continuamente diferenciáveis (Orda, Rom e Shimkin [76]); instâncias com múltiplos pares OD e funções de latência que são monômios de mesmo grau ou polinômios de grau máximo 3 (Altman, Basar, Jimenez e Shimkin [4]); instâncias com um único par OD, funções de latência positivas, estritamente crescentes, estritamente semiconvexas e continuamente diferenciáveis, e onde a rede de tráfego é constituída sobre um grafo aproximadamente-paralelo com dois terminais (*two-terminals nearly-parallel graph*) (Richman e Shimkin [84]). Posteriormente, Bhaskar, Fleischer, Hoy e Huang [14] consideraram instâncias com demanda genérica e funções de latência positivas, não-decrescentes e semiconvexas. Os resultados provados por eles são essencialmente únicos para funções semiconvexas e únicos para funções estritamente semiconvexas. Eles provaram os seguintes resultados: para dois jogadores com pares OD distintos ou não, um equilíbrio de Nash puro é único se e somente se a rede de tráfego é constituída sobre um grafo série-paralelo generalizado (*generalized series-parallel graph*); para múltiplos jogadores de apenas dois tipos (a demanda de qualquer jogador é d_1 ou d_2) e um único par OD, um equilíbrio de Nash puro é único se e somente se a rede de tráfego é constituída sobre um grafo s - t série-paralelo (*s-t-series-parallel graph*); para mais de dois tipos de jogadores e múltiplos pares OD, um equilíbrio de Nash puro é único se e somente se a rede de tráfego é constituída sobre um grafo aproximadamente-paralelo generalizado (*generalized nearly-parallel graph*). As definições desses grafos não são apresentadas aqui por questão de espaço.

A seguir, apresentamos algumas funções potenciais para esses jogos. Na Subseção 6.1.1, apresentamos uma função potencial para instâncias com funções de latência afins. Na Subseção 6.1.2, apresentamos uma função potencial para instâncias com demanda uniforme e um único par OD.

6.1.1 Função potencial para instâncias com funções de latência afins

Considere uma instância cujas funções de latência são do tipo $l_e(f_e) = a_e f_e + b_e$, onde $a_e, b_e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, para todo $e \in E$. Seja $\hat{l}_e : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função de latência modificada, dada por

$$\hat{l}_e(\vec{f}_e) = a_e \sum_{i \leq j \in \mathcal{I}} f_e^i f_e^j + b_e \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i.$$

Demonstramos a seguir que a função

$$\hat{C}(\vec{f}) = \sum_{e \in E} \hat{l}_e(\vec{f}_e)$$

é uma função potencial, onde $\vec{f} = (f^1, \dots, f^n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times n}$. Lembre que n é a quantidade de jogadores e m é a quantidade de arcos no grafo que constitui a rede de tráfego. Assim, o problema (NLP-NE), que consiste na minimização de $\hat{C}(\vec{f})$, para um fluxo viável \vec{f} , tem como solução um equilíbrio de Nash puro para o jogo atômico com fluxo divisível. Repare que, como as funções afins são estritamente crescentes, as funções \hat{l} são estritamente convexas e a solução para o problema (NLP-NE) é essencialmente única. Para ver que $\hat{C}(\vec{f})$ é uma função potencial, ou seja, que ela é uma função objetivo para o problema de se calcular um equilíbrio de Nash puro, basta ver que a condição de otimalidade do problema (NLP-NE) coincide com a condição de otimalidade do problema (EN)ⁱ (Definição 3.2.1), dada pelas desigualdades em (3.5). Mais formalmente, Dattorro [31] (Teorema D.1.4.1.1) nos diz que o fluxo \vec{f} é ótimo para o problema (NLP-NE) se e somente se:

$$tr(\nabla_{\vec{f}} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\vec{f} - \vec{f})) \geq 0, \text{ para todo fluxo viável } \vec{f}. \quad (6.1)$$

Aqui, $tr(A)$ é o traço da matriz quadrada A . A expressão $tr(\nabla_{\vec{f}} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\vec{f} - \vec{f}))$ é a derivada direcional de \hat{C} no ponto \vec{f} e na direção apontada pelo vetor $\vec{f} - \vec{f}$ (ver comentário que segue o Teorema 2.2.5). O gradiente transposto $\nabla_{\vec{f}} \hat{C}(\vec{f})^T$ é a seguinte matriz $n \times m$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_1}^1} & \dots & \frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_m}^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_1}^n} & \dots & \frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_m}^n} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo (6.1) chegamos ao seguinte resultado para um fluxo viável \vec{f} :

$$\nabla_{f^1} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\tilde{f}^1 - f^1) + \dots + \nabla_{f^i} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\tilde{f}^i - f^i) + \dots + \nabla_{f^n} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\tilde{f}^n - f^n) \geq 0. \quad (6.2)$$

Agora, repare que o resultado em (6.2) deve ser válido para o fluxo viável $\vec{f} = (f^1, \dots, \tilde{f}^i, \dots, f^n)$, que é o fluxo onde apenas o jogador i possui uma estratégia diferente de sua estratégia em f . Disso resulta que, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos:

$$\nabla_{f^i} \hat{C}(\vec{f})^T \cdot (\tilde{f}^i - f^i) \geq 0, \text{ para todo fluxo viável } \vec{f}^i.$$

Para ver que essa condição coincide com a condição de otimalidade do problema (EN)ⁱ, basta de-

monstrarmos que $\nabla_{f^i} \hat{C}(\vec{f}) = \nabla_{f^i} C_i(f)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{f^i} \hat{C}(\vec{f}) &= \left(\frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_1}^i}, \dots, \frac{\partial \hat{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_m}^i} \right) \\
&= (a_{e_1} \cdot (\sum_{j \in \mathcal{I}} f_{e_1}^j + f_{e_1}^i) + b_{e_1}, \dots, a_{e_m} \cdot (\sum_{j \in \mathcal{I}} f_{e_m}^j + f_{e_m}^i) + b_{e_m}) \\
&= (a_{e_1} \cdot (f_{e_1} + f_{e_1}^i) + b_{e_1}, \dots, a_{e_m} \cdot (f_{e_m} + f_{e_m}^i) + b_{e_m}) \\
&= (a_{e_1} f_{e_1} + b_{e_1} + f_{e_1}^i a_{e_1}, \dots, a_{e_m} f_{e_m} + b_{e_m} + f_{e_m}^i a_{e_m}) \\
&= (l_{e_1}(f_{e_1}) + f_{e_1}^i \cdot l'_{e_1}(f_{e_1}), \dots, l_{e_m}(f_{e_m}) + f_{e_m}^i \cdot l'_{e_m}(f_{e_m})) \\
&= \left(\frac{\partial C_i(f^i, f^{-i})}{\partial f_{e_1}^i}, \dots, \frac{\partial C_i(f^i, f^{-i})}{\partial f_{e_m}^i} \right) \\
&= (l_{e_1}^i(\vec{f}_{e_1}), \dots, l_{e_m}^i(\vec{f}_{e_m})) \\
&= \nabla_{f^i} C_i(f).
\end{aligned}$$

Portanto, se f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro e $\vec{f}^{\text{EN}} = (f^{\text{EN}})^T$, então para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ temos que

$$\nabla_{f^{\text{EN}}, i} \hat{C}(\vec{f}^{\text{EN}})(\vec{f}^i - f^{\text{EN}, i}) = \nabla_{f^{\text{EN}}, i} C_i(f^{\text{EN}})(\vec{f}^i - f^{\text{EN}, i}) \geq 0, \text{ para todo } \vec{f}^i \in \mathcal{F}^i.$$

Podemos também considerar o caso em que há um misto de jogadores atômicos e jogadores não-atômicos. Seja $\tilde{\mathcal{I}}$ o conjunto dos jogadores atômicos. Definimos as funções modificadas

$$\tilde{l}_e(\vec{f}_e) = \frac{a_e}{2} \cdot (\sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i)^2 + \frac{a_e}{2} \cdot \sum_{i \in \tilde{\mathcal{I}}} (f_e^i)^2 + b_e \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i,$$

para todo $e \in E$. Definimos também a função $\tilde{C}(\vec{f}) = \sum_{e \in E} \tilde{l}_e(\vec{f}_e)$. Por um processo análogo ao apresentado acima é possível verificar que a condição de otimalidade nesse caso nos diz que um fluxo f é ótimo se e somente se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$\nabla_{f^i} \tilde{C}(\vec{f})^T \cdot (\vec{f}^i - f^i) \geq 0, \text{ para todo fluxo viável } \vec{f}^i.$$

Para ver que essa condição coincide com a condição de otimalidade do problema (EN)ⁱ, basta demonstrarmos que $\nabla_{f^i} \tilde{C}(\vec{f}) = \nabla_{f^i} C_i(f)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{f^i} \tilde{C}(\vec{f}) &= \left(\frac{\partial \tilde{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_1}^i}, \dots, \frac{\partial \tilde{C}(\vec{f})}{\partial f_{e_m}^i} \right) \\
&= (a_{e_1} \cdot (\sum_{j \in \mathcal{I}} f_{e_1}^j) + a_{e_1} \cdot f_{e_1}^i + b_{e_1}, \dots, a_{e_m} \cdot (\sum_{j \in \mathcal{I}} f_{e_m}^j) + a_{e_m} \cdot f_{e_m}^i + b_{e_m}) \\
&= (a_{e_1} f_{e_1} + b_{e_1} + f_{e_1}^i a_{e_1}, \dots, a_{e_m} f_{e_m} + b_{e_m} + f_{e_m}^i a_{e_m}) \\
&= (l_{e_1}(f_{e_1}) + f_{e_1}^i \cdot l'_{e_1}(f_{e_1}), \dots, l_{e_m}(f_{e_m}) + f_{e_m}^i \cdot l'_{e_m}(f_{e_m})) \\
&= \left(\frac{\partial C_i(f^i, f^{-i})}{\partial f_{e_1}^i}, \dots, \frac{\partial C_i(f^i, f^{-i})}{\partial f_{e_m}^i} \right) \\
&= (l_{e_1}^i(\vec{f}_{e_1}), \dots, l_{e_m}^i(\vec{f}_{e_m})) \\
&= \nabla_{f^i} C_i(f).
\end{aligned}$$

Portanto, se f^{EN} é um equilíbrio de Nash puro e $\vec{f}^{\text{EN}} = (f^{\text{EN}})^T$, então para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ temos que

$$\nabla_{f^{\text{EN}}, i} \tilde{C}(\vec{f}^{\text{EN}})(\vec{f}^i - f^{\text{EN}, i}) = \nabla_{f^{\text{EN}}, i} C_i(f^{\text{EN}})(\vec{f}^i - f^{\text{EN}, i}) \geq 0, \text{ para todo } \vec{f}^i \in \mathcal{F}^i.$$

6.1.2 Função potencial para instâncias com um único par OD e demanda uniforme

Cominetti et al. [21] apresentaram o programa (SNE) para calcular um equilíbrio de Nash puro para jogos de roteamento atômicos simétricos com fluxo divisível: jogos atômicos com fluxo divisível, um único

par OD $s - t$ e demanda uniforme. Para a formulação do programa, consideramos que há n jogadores atômicos, cada um com demanda r .

$$(SNE) \quad \text{Minimize} \quad \sum_{e \in E} f_e l_e(f_e) + (n-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} l_e(\tau) d\tau \quad (6.3a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{(u,v) \in E} f_{(u,v)} - \sum_{(v,w) \in E} f_{(v,w)} = 0, \text{ para todo } v \in V, \quad (6.3b)$$

$$f_{(t,s)} = r \cdot n, \quad (6.3c)$$

$$f_e \geq 0, \text{ para todo } e \in E. \quad (6.3d)$$

Repare que a função objetivo é um múltiplo de uma combinação convexa entre a função objetivo do problema de calcular um fluxo ótimo (Definição 3.2.7) e a função objetivo do problema de calcular um equilíbrio de Wardrop (Problema (4.8)). Quando há um único jogador, o segundo termo desaparece e, portanto, o fluxo devolvido como solução é ótimo. Quando a quantidade de jogadores tende ao infinito, o segundo termo predomina e, portanto, a solução devolvida é muito próxima de um equilíbrio de Wardrop. Se as funções de latência são estritamente crescentes, então há um único equilíbrio de Nash puro para a instância.

Assume-se que as funções de latência pertencem à classe \mathcal{L}_s . Nesse caso, a função objetivo (6.3a) é convexa e, portanto, podemos utilizar as condições de Karush-Kuhn-Tucker (Teorema 2.2.2) para demonstrar que uma solução ótima para o problema (SNE) é um equilíbrio de Nash puro para jogos de roteamento simétricos com jogadores atômicos.

Teorema 6.1.1 (Cominetti et al. [21]). Se f é uma solução ótima para o problema (SNE), então $\bar{f}^{\text{EN}} = (f^{\text{EN},1}, \dots, f^{\text{EN},n}) = (f/n, \dots, f/n)$ é um equilíbrio de Nash puro para o jogo de roteamento simétrico com n jogadores atômicos.

Prova. Aplicando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (Teorema 2.2.2) para o problema convexo (SNE), temos que f é uma solução ótima se e somente se existem constantes μ_e , para $e \in E$, e λ_v , para $v \in V$, tais que:

$$n \cdot l_e(f_e) + f_e l'_e(f_e) = \lambda_u - \lambda_v + \mu_e, \text{ para todo } e = (u, v) \in E, \quad (6.4)$$

$$0 = \lambda_t - \lambda_s + \lambda_{(t,s)}, \quad (6.5)$$

$$\mu_e f_e = 0, \text{ para todo } e \in E, \quad (6.6)$$

$$\mu \geq 0. \quad (6.7)$$

A condição (6.4), para $e = (u, v)$, é obtida fazendo-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial f_e} \left[\sum_{e \in E} f_e l_e(f_e) + (n-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} l_e(\tau) d\tau \right] \\ & + \lambda_v \frac{\partial}{\partial f_e} \left[\sum_{(x,v) \in E} f_{(x,v)} - \sum_{(v,y) \in E} f_{(v,y)} \right] + \lambda_u \frac{\partial}{\partial f_e} \left[\sum_{(x,u) \in E} f_{(x,u)} - \sum_{(u,y) \in E} f_{(u,y)} \right] + \mu_e \frac{\partial}{\partial f_e} (-f_e) = 0. \end{aligned}$$

A condição (6.5) é obtida fazendo-se

$$\lambda_t \frac{\partial}{\partial f_{(t,s)}} \left[\sum_{(u,t) \in E} f_{(u,t)} - f_{(t,s)} \right] + \lambda_s \frac{\partial}{\partial f_{(t,s)}} \left[f_{(t,s)} - \sum_{(s,v) \in E} f_{(s,v)} \right] + \lambda_{(t,s)} \frac{\partial}{\partial f_{(t,s)}} [r \cdot n - f_{(t,s)}] = 0.$$

Seja $f^{\text{EN},i} = f/n$, $\lambda^i = \lambda/n$ e $\mu^i = \mu/n$. O fluxo $f^{\text{EN},i}$ é viável para o problema (EN)ⁱ, pois envia toda a demanda r do jogador i . Além disso, o fluxo $f^{\text{EN},i}$ satisfaz as seguintes equações, obtidas dividindo-se

as equações de (6.4) a (6.7) por n :

$$l_e(f_e^{\text{EN}}) + f_e^{\text{EN},i} l'_e(f_e^{\text{EN}}) = \lambda_u^i - \lambda_v^i + \mu_e^i, \text{ para todo } e = (u, v) \in E, \quad (6.8)$$

$$0 = \lambda_t^i - \lambda_s^i + \lambda_{(t,s)}^i, \quad (6.9)$$

$$\mu_e^i f_e^{\text{EN},i} = 0, \text{ para todo } e \in E, \quad (6.10)$$

$$\mu^i \geq 0. \quad (6.11)$$

As equações de (6.8) a (6.11) correspondem às condições de Karush-Kuhn-Tucker para o problema (EN)ⁱ (ver Definição 3.2.1). Isso pode ser verificado por um processo análogo ao apresentado acima. Portanto, o fluxo $f^{\text{EN}} = (f^{\text{EN},1}, \dots, f^{\text{EN},n})$ é um equilíbrio de Nash puro para o jogo formulado pelo problema (SNE), ou seja, para o jogo de roteamento simétrico com n jogadores atômicos. \square

6.2 Ineficiência de um equilíbrio de Nash

Os principais resultados de PoA, apresentados na Seção 6.3, foram obtidos para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{cf} das funções não-decrescentes, continuamente diferenciáveis e semiconvexas, e à classe $\mathcal{L}_{ie} \subseteq \mathcal{L}_{cf}$, que é invariante sob escala ($l(x) \in \mathcal{L}_{ie} \Rightarrow c_1 \cdot l(c_2 \cdot x) \in \mathcal{L}_{ie}$, para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$).

Para jogos com fluxo divisível, o PoA é limitado superiormente para certas classes de funções de latência. Yang, Han e Lo [102] provaram que o PoA é exatamente 1 para instâncias com apenas um jogador atômico. Ou seja, nesse caso um equilíbrio de Nash é também um fluxo ótimo. Para instâncias com mais jogadores e funções de latência polinomiais no fluxo e com grau máximo d , eles provaram que o PoA é limitado superiormente por $\frac{1}{1-\xi}$, onde ξ é uma expressão calculada em função dos fluxos nos arcos, do grau d e do número de jogadores. Quando o número de jogadores tende ao infinito, essa expressão fornece, no limite, os mesmos resultados que os obtidos para instâncias não-atômicas com funções de latência polinomiais (ver Proposição 4.6.5). Fotakis et al. [43] demonstraram que, para instâncias com um único par OD, arcos paralelos e funções de latência não-decrescentes, um fluxo é ótimo com respeito à latência total se e somente se é ótimo com respeito à latência máxima (Equação (B.2)). Cominetti et al. [21] provaram que o PoA pode ser maior que $\frac{4}{3}$ para instâncias atômicas com funções de latência afins, ou seja, maior que o PoA obtido para instâncias não-atômicas com funções de latência afins (ver Exemplo 6.2.1). Além disso, o limite de bicritério para instâncias com as demandas duplicadas, obtido para os jogos não-atômicos (Corolário 4.6.7), não é válido para instâncias atômicas (ver Exemplo 6.2.2). O valor de anarquia $\beta^n : \mathcal{L}_s \rightarrow \mathbb{R}$, onde \mathcal{L}_s é a classe das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas, é uma generalização do valor $\beta(\mathcal{L}_s)$. Ele foi definido por Cominetti et al. [21] e limitado superiormente por uma expressão mais fácil de ser calculada. Eles provaram que o PoA é limitado superiormente por $(1 - \beta^n(\mathcal{L}_s))^{-1}$. Em particular, obtém-se que: para instâncias com funções de latência afins, o PoA é limitado superiormente por 1,5; para instâncias com funções de latência quadráticas, o PoA é limitado superiormente por 2,564; para instâncias com funções de latência cúbicas, o PoA é limitado superiormente por 7,826; para instâncias com funções de latência polinomiais de grau máximo maior que 3, o limite superior fornecido por $(1 - \beta^n(\mathcal{L}_s))^{-1}$ tende ao infinito. Cominetti et al. [21] analisaram também, para jogos com um único par OD, o PoA com relação à variação do poder de mercado dos jogadores, onde provaram que o PoA vai diminuindo à medida que os poderes de mercado dos jogadores vão se aproximando, ou seja, à medida que se vai aproximando de uma instância com demanda uniforme. Se cada jogador controla no máximo uma fração $\phi(n)$ da demanda total, tal que $\phi(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então o PoA é assintoticamente igual ao de jogos não-atômicos, ou seja, tende ao PoA de jogos não-atômicos quando o número de jogadores tende ao infinito. Além disso, se a demanda é uniforme, então a latência total do equilíbrio de Nash puro é limitada pela latência total do equilíbrio de Wardrop. Catoni e Pallottino [17] demonstraram um fenômeno contraintuitivo: para instâncias com múltiplos pares OD, se

nós dividimos um jogador de demanda r em dois jogadores de demanda $r/2$, então o PoA pode diminuir, a despeito de haver menos cooperação no jogo.

Para **jogos de congestionamento divisíveis**, ou seja, jogos de congestionamento onde um jogador pode dividir sua demanda entre as estratégias puras disponíveis para ele (ver Seção 6.3), Roughgarden e Schoppmann [94] demonstraram que o PoA pode ser próximo de 1 para instâncias com funções de latência não tão não-lineares. Para isso, foi definido o arcabouço da *suavidade local* (um relaxamento do arcabouço da *suavidade*, apresentado na Seção 5.4), que nos fornece condições suficientes para que um jogo com funções de latência em \mathcal{L}_{cf} tenha PoA limitado, além de melhores limitantes superiores para o PoA do que aqueles obtidos por Cominetti et al. [21]. Além disso, esse arcabouço também nos permite obter PoAs exatos para jogos com funções de latência em \mathcal{L}_{ie} (Subseção 6.3.2). Para isso, Roughgarden e Schoppmann [94] definiram o valor de anarquia $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$ (Equação (6.28)) e construíram um jogo cuja razão de coordenação é assintoticamente igual a $\gamma_l(\mathcal{L}_{ie})$, ou seja, tende a $\gamma_l(\mathcal{L}_{ie})$ quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito. Em particular, para instâncias com funções de latência polinomiais de grau máximo 2 ou de grau máximo 3, são encontrados, respectivamente, PoAs exatos de 2,549 e 5,063, que são melhores que os limitantes calculados por Cominetti et al. [21]. Generalizando, o PoA para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_d dos polinômios de grau máximo d é exatamente $(\frac{1+\sqrt{d+1}}{2})^{d+1}$. Portanto, diferentemente da expressão encontrada por Cominetti et al. [21], o PoA pode ser calculado para polinômios de grau máximo maior que 3. Todos esses resultados são válidos também para jogos de roteamento atômicos com fluxo divisível.

Na Subseção 6.2.1, apresentamos dois contraexemplos para resultados válidos para jogos não-atômicos. Na Subseção 6.2.2, apresentamos o valor de anarquia β^n e os principais resultados derivados a partir dele. Além disso, apresentamos também o valor de anarquia $\tilde{\beta}$, usado para se derivar resultados de PoA em função da variação do poder de mercado dos jogadores. Na Subseção 6.2.3, apresentamos os principais resultados de limites de bicritério.

6.2.1 Contraexemplos para resultados de jogos não-atômicos

Apesar de ser contraintuitivo, nem todo resultado para jogos não-atômicos se aplica também a jogos atômicos com fluxo divisível. Cominetti et al. [21] apresentaram dois contraexemplos para afirmações incorretas feitas em outros artigos. Roughgarden [92] e Correa, Schulz e Stier-Moses [25] afirmaram que o PoA para jogos atômicos com fluxo divisível não excede o PoA para jogos não-atômicos, porém Cominetti et al. [21] apresentaram uma instância com funções de latência afins cuja razão de coordenação é maior que $\frac{4}{3}$, com respeito à latência total. Reproduzimos essa instância no Exemplo 6.2.1. Roughgarden e Tardos [95] afirmaram, incorretamente, que o limite de bicritério para instâncias com demandas duplicadas, válido para o caso não-atômico (ver Corolário 4.6.7), seria válido também para o caso atômico com fluxo divisível. Novamente, Cominetti et al. [21] apresentaram uma instância onde a latência total de qualquer fluxo viável para a instância com demandas duplicadas é menor que a latência total de um equilíbrio de Nash puro para a instância original. Reproduzimos essa instância no Exemplo 6.2.2.

Em ambos os casos, foram apresentadas demonstrações incorretas, por se basearem em uma caracterização incorreta do equilíbrio de Nash puro.

Exemplo 6.2.1 (PoA para instâncias com funções de latência afins pode ser maior que $\frac{4}{3}$ (Cominetti et al. [21])). Considere a instância da Figura 6.1. Nela, o par OD $s_1 - t_1$ possui um aglomerado de jogadores não-atômicos com demanda total 1, e o par OD $s_2 - t_2$ possui um jogador atômico com demanda 1. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. Os arcos com latência não nula são definidos como $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (w, x)$ e $e_3 = (y, z)$. O fluxo f^{EN} , que envia pelo arco e_2 toda a unidade de demanda não-atômica e 0,9 da unidade de demanda do jogador atômico, e pelo arco e_3 0,1 da unidade de demanda do jogador atômico, é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, considere que os jogadores não-atômicos escolhem primeiramente o arco e_2 , pois este tem, considerando-se apenas a demanda não-atômica, latência máxima 1, ao passo que o arco e_1 possui latência constante 1,9. Como

o equilíbrio de Nash puro para o jogador atômico deve obedecer às desigualdades em (3.9), temos que $l_{e_2}^2(f_{e_2}^{\text{EN}}) = l_{e_3}^2(f_{e_3}^{\text{EN}}) \Rightarrow f_{e_2}^{\text{EN}} + f_{e_2}^{\text{EN},2} = 2,8 \Rightarrow 1 + 2 \cdot f_{e_2}^{\text{EN},2} = 2,8 \Rightarrow f_{e_2}^{\text{EN},2} = 0,9$. A latência total do fluxo f^{EN} é $C(f^{\text{EN}}) = 1 \cdot 1,9 + 0,9 \cdot 1,9 + 0,1 \cdot 2,8 = 3,89$. Repare que, se o jogador 2 tentar se antecipar à demanda não-atômica, enviando fluxo 1 pelo arco e_2 e forçando os jogadores não-atômicos a enviarem 0,9 por este arco, então o fluxo f resultante não é um equilíbrio de Nash puro. Para ver isso, observe que o custo individual para o jogador 2, no fluxo f , é $C_2(f) = 1,9$. Assim, se o jogador 2 desviar uma quantidade ϵ do arco e_2 para o arco e_3 , ele estará minimizando o seu custo individual somente se ϵ é tal que $2,8 \cdot \epsilon + (1,9 - \epsilon) \cdot (1 - \epsilon) < 1,9$. Resolvendo, temos que $\epsilon < 0,1$ e, portanto, o fluxo f não é um equilíbrio de Nash puro. No fluxo ótimo, f^{OPT} , para essa instância, a demanda não-atômica é toda enviada pelo arco e_1 e a demanda atômica é enviada pelo arco e_2 . A latência total do fluxo ótimo é $C(f^{\text{OPT}}) = 1 \cdot 1,9 + 1 \cdot 1 = 2,9$. Então, temos que $C(f^{\text{EN}})/C(f^{\text{OPT}}) = 1,34 > \frac{4}{3}$. Logo, o PoA para jogos atômicos com fluxo divisível é maior que $\frac{4}{3}$.

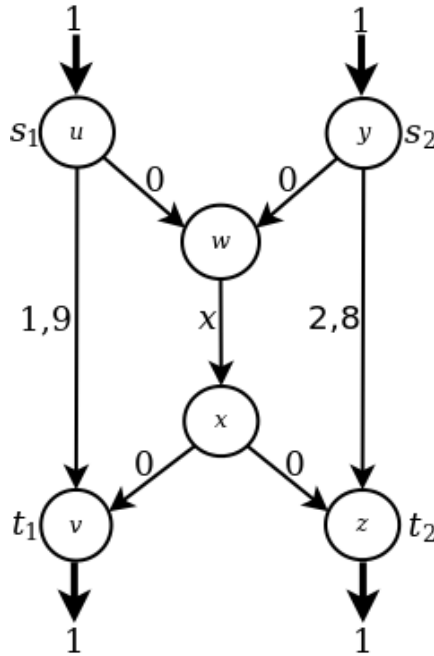


Figura 6.1: Instância atômica com funções de latência afins onde a razão de coordenação é maior que $\frac{4}{3}$.

Cominetti et al. [21] mencionaram o importante fato de que, para o Exemplo 6.2.1 funcionar, não é preciso que o par OD $s_1 - t_1$ possua apenas jogadores não-atômicos. Se considerarmos k jogadores atômicos, com k suficientemente grande, por exemplo $k = 1000$, então a razão de coordenação já é maior que $\frac{4}{3}$.

Exemplo 6.2.2 (Limite de bicritério para a instância com demandas duplicadas não é válido no jogo atômico (Cominetti et al. [21])). Considere a instância da Figura 6.2. O par OD $s_1 - t_1$ possui um aglomerado de jogadores não-atômicos com demanda total $\frac{3}{4}$, e o par OD $s_2 - t_2$ possui um único jogador atômico com demanda $\frac{1}{2}$. Os rótulos dos arcos correspondem às suas funções de latência. Os arcos com latência não nula são definidos como $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (w, x)$ e $e_3 = (y, z)$. Seja $M = (1 - \varepsilon)^b + b(\frac{1}{4} - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{b-1}$, onde ε é tal que $(1 - \varepsilon)^b < \frac{1}{b}$. É possível escolher M e ε tais que o equilíbrio de Nash puro f^{EN} corresponda aos jogadores não-atômicos enviando todos os $\frac{3}{4}$ de unidades da demanda não-atômica pelo arco e_2 , e o jogador atômico enviando $(\frac{1}{4} - \varepsilon)$ pelo arco e_2 e o resto pelo arco e_3 . Repare que, nesse caso, temos que o arco e_2 possui latência $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \varepsilon)^b = (1 - \varepsilon)^b$ e, pelo nosso pressuposto sobre ε , é mesmo vantajoso para os jogadores não-atômicos enviarem toda a sua demanda por esse arco. A latência total

de f^{EN} é $C(f^{\text{EN}}) = \frac{3}{4}(1-\varepsilon)^b + (\frac{1}{4}-\varepsilon)(1-\varepsilon)^b + (\frac{1}{4}+\varepsilon)M = (1-\varepsilon)^{b+1} + (\frac{1}{4}+\varepsilon)M$. Agora, considere a instância com as demandas duplicadas. Nela, seja f o fluxo que envia os $\frac{3}{2}$ de unidades da demanda não-atômica pelo arco e_1 , $1-\varepsilon$ do jogador atômico pelo arco e_2 e ε pelo arco e_3 . A latência total desse fluxo é $C(f) = \frac{3}{2}\frac{1}{b} + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)^b + \varepsilon M = \varepsilon M + (1-\varepsilon)^{b+1} + \frac{3}{2b}$. Para provar que o limite de bicritério não é válido, basta encontrar um ε e um M tais que $C(f^{\text{EN}}) > C(f) \Rightarrow Mb/6 > 1$ e $b(1-\varepsilon)^b < 1$ (este último para garantir que os jogadores não-atômicos não queiram mudar de e_2 para e_1 em f^{EN}). Fazendo $\varepsilon = 0,1$ e $b = 34$, temos que ambas as desigualdades são atendidas. Além disso, Cominetti et al. [21] argumentaram que, para instâncias com funções de latência polinomiais de grau arbitrário, a latência total de um equilíbrio de Nash puro pode ser feita arbitrariamente maior que a latência total de um fluxo ótimo para a instância com demandas duplicadas.

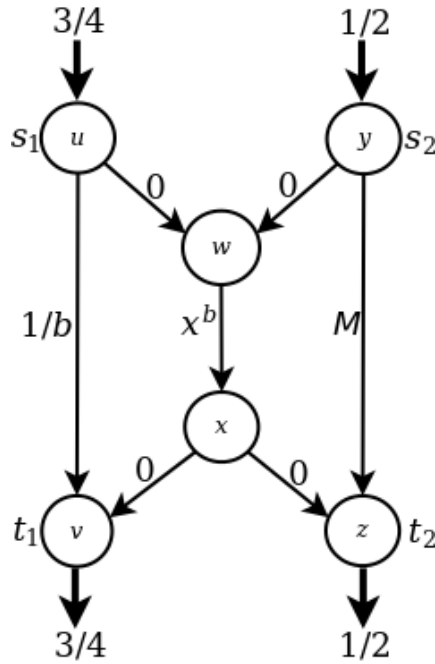


Figura 6.2: Instância atômica onde o limite de bicritério para a instância com demandas duplicadas não é válido.

Outro resultado importante de Cominetti et al. [21] refere-se ao fato de que esse tipo de limite, onde são consideradas expansões constantes das demandas, não funciona para instâncias com funções de latência arbitrárias. Isso é exemplificado por uma instância modificada da ilustrada na Figura 6.2, onde, para um $0 < \delta < \frac{1}{2}$, a demanda não-atômica é $1-\delta$ e a demanda atômica é 2δ . A função de latência do arco e_1 é $l_{e_1}(f_{e_1}) = 0$, do arco e_2 é $l_{e_2}(f_{e_2}) = 0$ para $x \leq 1$, e $l_{e_2}(f_{e_2}) = 1$ caso contrário, e do arco e_3 é $l_{e_3}(f_{e_3}) = 2$. O equilíbrio de Nash puro f^{EN} envia toda a demanda não-atômica de $1-\delta$ pelo arco e_2 , e a demanda do jogador atômico é dividida em δ para o arco e_2 e δ para o arco e_3 . Nenhum jogador não-atômico possui interesse em mudar para o arco e_1 , pois passaria a ter o mesmo custo individual 0, e o jogador atômico não lucra em desviar parte do seu fluxo, tanto do arco e_2 para o e_3 , quanto o contrário. A latência total desse fluxo é $C(f^{\text{EN}}) = (1-\delta) \cdot 0 + \delta \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 2\delta$. Quando as demandas são ampliadas por $\frac{1}{2\delta}$, o fluxo ótimo envia toda a demanda não-atômica de $\frac{1-\delta}{2\delta}$ pelo arco e_1 e a demanda atômica de 1 pelo arco e_2 . A latência total desse fluxo é $C(f) = \frac{1-\delta}{2\delta} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$.

6.2.2 Valor de anarquia β^n

Seja \mathcal{L}_s uma classe de funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas. Cominetti et al. [21] definiram o valor de anarquia $\beta^n : \mathcal{L}_s \rightarrow \mathbb{R}$. Esse valor é aplicável à classe mais geral dos jogos de congestionamento divisíveis, e serve tanto para os jogos atômicos com fluxo divisível, quanto para os jogos atômicos com estratégias mistas e os jogos não-atômicos. Isso porque esses dois últimos são equivalentes ao primeiro quando o número de jogadores tende ao infinito. Formalmente, $\beta^n(l)$ é dado por

$$\beta^n(l) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l^i(\vec{x}) - l(y))y^i + (l(x) - l^i(\vec{x}))x^i\}}{xl(x)}, \quad (6.12)$$

onde $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\vec{y} = (y^1, \dots, y^n)$, $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} x^i$ e $y = \sum_{i \in \mathcal{I}} y^i$. Aqui, os valores x, y, \vec{x} e \vec{y} correspondem a fluxos em um único arco. Lembre que $l^i(\vec{x}) = l(x) + x^i \cdot l'(x)$. Então, definimos $\beta^n(\mathcal{L}_s) = \sup_{l \in \mathcal{L}_s} \beta^n(l)$. Esse valor de anarquia é uma generalização do valor $\beta(\mathcal{L})$, apresentado na Subseção 4.6.2, para os casos em que é importante considerar a quantidade de jogadores. Trivialmente, temos que $\beta^n(\mathcal{L}_s) \geq 0$. Se $\beta^n(\mathcal{L}_s) \geq 1$, então assume-se que $(1 - \beta^n(\mathcal{L}_s))^{-1} = +\infty$. Nessas condições, temos a seguinte proposição.

Proposição 6.2.3 (Cominetti et al. [21]). Considere um jogo de congestionamento com n jogadores atômicos e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s . Seja f^{EN} um equilíbrio de Nash puro e f^{OPT} um fluxo ótimo. Então, $C(f^{\text{EN}}) \leq (1 - \beta^n(\mathcal{L}_s))^{-1} C(f^{\text{OPT}})$.

Prova. Seja $\vec{x}_e = (x_e^1, \dots, x_e^n)$, para todo $e \in E$. Temos que

$$\begin{aligned} C(x^{\text{EN}}) &= \sum_{e \in E} x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}}) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} x_e^{\text{EN}, i} \cdot l_e(x_e^{\text{EN}}) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})x_e^{\text{EN}, i}\} \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{x_e^{\text{EN}, i} l_e(x_e^{\text{EN}}) + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})(x_e^{\text{EN}, i} - x_e^{\text{EN}, i})\} \\ &\leq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{x_e^{\text{EN}, i} l_e(x_e^{\text{EN}}) + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})(y_e^i - x_e^{\text{EN}, i})\} \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

A desigualdade (6.13) segue da condição de equilíbrio em (3.5) para um fluxo viável y . Agora, repare que

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}) - l_e(y_e))y_e^i + (l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i}\}}{x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}})} \\ \sum_{e \in E} \beta^n(\mathcal{L}_s) \cdot x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}}) &\geq \sum_{e \in E} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}) - l_e(y_e))y_e^i + (l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i}\}}{x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}})} \cdot x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}}) \\ \sum_{e \in E} x_e^{\text{EN}} l_e(x_e^{\text{EN}}) \beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})y_e^i - y_e^i l_e(y_e)\} \\ C(x^{\text{EN}}) \beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\vec{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\} - \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} y_e^i l_e(y_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(x^{\text{EN}})\beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\} - \sum_{e \in E} l_e(y_e) \sum_{i \in \mathcal{I}} y_e^i \\
C(x^{\text{EN}})\beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\} - \sum_{e \in E} l_e(y_e)y_e \\
C(x^{\text{EN}})\beta^n(\mathcal{L}_s) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\} - C(y) \\
C(x^{\text{EN}})\beta^n(\mathcal{L}_s) + C(y) &\geq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(x_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}}))x_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{x}_e^{\text{EN}})y_e^i\}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
C(x^{\text{EN}}) &\leq C(x^{\text{EN}})\beta^n(\mathcal{L}_s) + C(y) \\
C(x^{\text{EN}})(1 - \beta^n(\mathcal{L}_s)) &\leq C(y) \\
C(x^{\text{EN}}) &\leq (1 - \beta^n(\mathcal{L}_s))^{-1}C(y).
\end{aligned}$$

Fazendo-se $y = f^{\text{OPT}}$ e $x^{\text{EN}} = f^{\text{EN}}$, obtemos o resultado desejado. \square

Cálculo do valor de anarquia β^n

Apresentamos aqui algumas técnicas usadas por Cominetti et al. [21] para se calcular o valor $\beta^n(\mathcal{L}_s)$. Começamos com a seguinte proposição, que limita superiormente o valor de anarquia $\beta^n(l)$ por uma expressão mais fácil de ser calculada.

Teorema 6.2.4. O valor de $\beta^n(l)$ é no máximo

$$\beta^n(l) \leq \sup_{x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(y^2/4 - (x - y/2)^2)/n}{xl(x)}. \quad (6.14)$$

Prova. Primeiro, reescrevemos $\beta^n(l)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\beta^n(l) &= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l^i(\bar{x}) - l(y))y^i + (l(x) - l^i(\bar{x}))x^i\}}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} l^i(\bar{x})(y^i - x^i) - \sum_{i \in \mathcal{I}} y^i l(y) + \sum_{i \in \mathcal{I}} x^i l(x)}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{xl(x) - yl(y) + \sum_{i \in \mathcal{I}} l^i(\bar{x})(y^i - x^i)}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{xl(x) - yl(y) + \sum_{i \in \mathcal{I}} [l(x) + x^i l'(x)](y^i - x^i)}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{xl(x) - yl(y) + \sum_{i \in \mathcal{I}} y^i l(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} y^i x^i l'(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} x^i l(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2 l'(x)}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{xl(x) - yl(y) + yl(x) - xl(x) + l'(x)(\sum_{i \in \mathcal{I}} y^i x^i - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2)}{xl(x)} \\
&= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(\sum_{i \in \mathcal{I}} y^i x^i - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2)}{xl(x)}. \quad (6.15)
\end{aligned}$$

O fato de l ser não-decrescente implica que $l'(x) \geq 0$. Adicionalmente, consideramos, sem perda de generalidade, que $x^1 \geq x^i$, para todo $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$. Consequentemente, para maximizar a expressão

em (6.15) basta fazer $y^1 = y$ e $y^i = 0$, para todo $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$. Desse modo, a expressão em (6.15) pode ser reescrita como

$$\beta^n(l) = \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}_{>0}^n; y \in \mathbb{R}_{>0} \\ x = \sum_{i \in \mathcal{I}} x^i, \\ x^1 = \max(\vec{x})}} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(x^1 y - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2)}{xl(x)}. \quad (6.16)$$

Para acharmos a melhor decomposição de \vec{x} , basta resolvermos o seguinte problema:

$$\max \left\{ x^1 y - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2 : \vec{x} \in \mathbb{R}_{>0}^n, x^1 = \max(\vec{x}) \right\}.$$

Por simetria, a solução satisfaz $x^2 = \dots = x^n$. Assim, fazemos $x^1 = u$ e $x^i = (x - u)/(n - 1)$, para todo $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$. Então resolvemos o seguinte problema:

$$\max_{x \geq u \geq x/n} \left\{ uy - u^2 - (n - 1) \cdot \frac{(x - u)^2}{(n - 1)^2} \right\} = \max_{x \geq u \geq x/n} \left\{ uy - u^2 - \frac{(x - u)^2}{n - 1} \right\}. \quad (6.17)$$

Pela condição de primeira ordem encontramos que $u = \frac{y(n-1)}{2n} + \frac{x}{n}$, que é equivalente a $u = \frac{(x-y/2)}{n} + \frac{y}{2}$. Os fluxos dos demais jogadores são encontrados subtraindo u do fluxo total x e então dividindo por $n - 1$. Assim, temos que

$$x - u = x - \frac{x}{n} - \frac{y(n-1)}{2n} = (n-1) \cdot \left(\frac{x}{n} - \frac{y}{2n} \right),$$

e o fluxo de cada jogador $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$ é $x^i = \left(\frac{x}{n} - \frac{y}{2n} \right)$.

Substituindo o u em (6.17), deriva-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} uy - u^2 - \frac{(x-u)^2}{n-1} &= \left[\frac{(x-y/2)}{n} + \frac{y}{2} \right] \cdot y - \left[\frac{(x-y/2)}{n} + \frac{y}{2} \right]^2 - (n-1) \cdot \left[\frac{(x-y/2)}{n} \right]^2 \\ &= \frac{(x-y/2)y}{n} + \frac{y^2}{2} - \frac{(x-y/2)^2}{n^2} - \frac{(x-y/2)y}{n} - \frac{y^2}{4} - (n-1) \cdot \frac{(x-y/2)^2}{n^2} \\ &= \frac{2y^2 - y^2}{4} - \frac{(x-y/2)^2}{n^2} (1 + n - 1) \\ &= \frac{y^2}{4} - \frac{(x-y/2)^2}{n}. \end{aligned}$$

O problema em (6.17) é um problema de programação côncava. O valor ótimo de u , encontrado acima pela condição de primeira ordem, pode ser maior que x , de modo que a solução real do problema deve ser $u^* = \min\{x, x/n + y(n-1)/2n\}$. Assim, $x^1 = u^*$ e $x^i = \max\{0, x/n - y/2n\}$, para todo $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$. Daqui, concluímos que

$$\begin{aligned} \beta^n(l) &= \max \left\{ \sup_{0 \leq y \leq 2x} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(y^2/4 - (x-y/2)^2/n)}{xl(x)}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 \leq 2x \leq y} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(xy - x^2)}{xl(x)} \right\} \\ &\leq \sup_{x, y \geq 0} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(y^2/4 - (x-y/2)^2/n)}{xl(x)}. \end{aligned}$$

O primeiro elemento do max ocorre quando $u^* = x/n + y(n-1)/2n$ e o segundo quando $u^* = x$. Repare que se $y = 2x$, então $u^* = x$. A desigualdade decorre do relaxamento da restrição $u \leq x$ em (6.17), de modo que seja considerado sempre o u^* ótimo, mesmo que ele seja maior que o fluxo total x . \square

A partir desse limitante é proposto o seguinte corolário.

Corolário 6.2.5 (Cominetti et al. [21]). Se $xl(x)$ é uma função convexa, então

$$\beta^n(l) = \sup_{0 \leq y \leq x} \frac{yl(x) - yl(y) + l'(x)(y^2/4 - (x - y/2)^2/n)}{xl(x)}. \quad (6.18)$$

Quando o número de jogadores tende ao infinito, temos que

$$\beta^\infty(l) = \sup_{0 \leq y \leq x} \left(l(x) - l(y) + \frac{l'(x)y}{4} \right) \frac{y}{xl(x)}. \quad (6.19)$$

Por último, temos que $\beta^n(l) \leq \beta^\infty(l)$.

Prova. Considere $h(y) = yl(x) - yl(y) + l'(x)(x^1y - \sum_{i \in \mathcal{I}} (x^i)^2)$ o numerador do supremo em (6.16). Provamos que para $y > x$ temos que $h'(y) < 0$, ou seja, a função $h(y)$ é decrescente nesse caso e, portanto, esses pontos não precisam ser considerados. Para ver isso, considere $h'(y) = l(x) - l(y) - yl'(y) + x^1l'(x)$. Então,

$$\begin{aligned} h'(y) &< 0 \\ l(x) - l(y) - yl'(y) + x^1l'(x) &< 0 \\ l(x) + x^1l'(x) &< l(y) + yl'(y) \\ l(x) + xl'(x) &< l(y) + yl'(y) \text{ para } x < y. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato de que $xl(x)$ é convexo e, portanto, a sua derivada é crescente. O valor $\beta^\infty(l)$ é derivado fazendo $n \rightarrow \infty$ em $\beta^n(l)$. \square

A seguinte proposição nos fornece uma expressão ainda mais fácil de ser computada, que pode ser usada para o cálculo do PoA para classes de funções polinomiais. Entretanto, como na Seção 6.3 apresentamos resultados exatos para o PoA, e, portanto, mais atuais que os resultados obtidos com o valor $\beta^n(\mathcal{L}_s)$, omitimos a sua prova.

Proposição 6.2.6 (Cominetti et al. [21]). Seja l uma função positiva, não-decrescente e contínua. Se $l(cx) \geq s(c)l(x)$, para todo $c \in [0, 1]$, onde $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função diferenciável satisfazendo $s(1) = 1$, então

$$\beta^\infty(l) \leq \max_{0 \leq u \leq 1} u \left(1 - s(u) + s'(1) \frac{u}{4} \right). \quad (6.20)$$

A partir dessa proposição, obtém-se o seguinte corolário.

Corolário 6.2.7. Seja \mathcal{L}_d a classe dos polinômios de grau máximo d . O Preço da Anarquia para instâncias com funções de latência pertencentes a \mathcal{L}_d é no máximo

$$\left(1 - \max_{0 \leq u \leq 1} u(1 - u^d + du/4) \right)^{-1}. \quad (6.21)$$

Prova. A função $s(x) = x^d$ satisfaz o pressuposto da Proposição 6.2.6. Assim, $s'(1) = d$ e $\beta^\infty(l) \leq \max_{0 \leq u \leq 1} u(1 - u^d + du/4)$. \square

Para calcular o valor em (6.21), basta usar a condição de primeira ordem. Fazendo as contas, encontram-se limitantes superiores de 1,5 para funções afins, 2,564 para funções quadráticas, 7,826 para funções cúbicas, e tendendo ao infinito para polinômios de grau máximo maior que 3.

Para finalizar, Cominetti et al. [21] definiram, para instâncias atômicas com um único par OD, um valor de anarquia que leva em consideração o índice Herfindahl, que é uma medida padrão da indústria de concentração. Esse índice é definido como $H = \sum_{i \in \mathcal{I}} (r_i/R)^2$, onde $R = \sum_{i \in \mathcal{I}} r_i$ é a demanda total presente no jogo. Esse valor é um número entre $1/n$ e 1, onde $H = 1$ corresponde a um monopólio e $H = 1/n$ corresponde a uma instância com jogadores simétricos, ou seja, com demanda uniforme. A

proposição a seguir apresenta esse valor de anarquia e uma particularização da Proposição 6.2.3 para esse caso.

Proposição 6.2.8. Considere uma instância de um jogo de roteamento com um único par OD e índice Herfindahl igual a H . Então,

$$\tilde{\beta}(l, H) := \sup_{0 \leq y \leq x} \frac{y(l(x) - l(y) + l'(x)yH/4)}{xl(x)}, \quad (6.22)$$

e $\tilde{\beta}(\mathcal{L}_s, H) := \sup_{l \in \mathcal{L}_s} \tilde{\beta}(l, H)$. Além disso, temos que $C(f^{\text{EN}}) \leq (1 - \tilde{\beta}(\mathcal{L}_s, H))^{-1} C(f^{\text{OPT}})$.

Omitimos a prova aqui, mas ela segue a mesma linha das provas da Proposição 6.2.3 e do Teorema 6.2.4. O importante de se notar nesse valor de anarquia é que ele foi criado com o intuito de se estimar um limitante superior para o PoA de acordo com a variação do poder de mercado dos jogadores. Como $H \leq 1$, temos que o valor $\tilde{\beta}(\mathcal{L}_s, H)$ (e, consequentemente, o PoA) diminui à medida que se vai de instâncias com poucos jogadores oligopolistas dominando o mercado para instâncias com jogadores cujos poderes de mercado sejam similares (ou seja, as demandas dos jogadores são mais próximas entre si). Além disso, se cada jogador controla uma fração $\phi(n)$ da demanda total, onde $\phi(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então temos que o PoA para a instância é assintoticamente igual ao PoA para instâncias não-atômicas.

6.2.3 Limites de Bicritério

Primeiramente, apresentamos a seguinte proposição, que é uma generalização dos resultados discutidos no Exemplo 6.2.2.

Proposição 6.2.9 (Cominetti et al. [21]). Seja f^{EN} um equilíbrio de Nash puro e, para um $\alpha > 1$ arbitrário, seja f^{OPT} o fluxo ótimo para a instância com as demandas multiplicadas por α . Então existe uma instância do jogo de roteamento atômico com funções de latência não-decrescentes e convexas tal que $C(f^{\text{EN}}) > C(f^{\text{OPT}})$.

Essa proposição basicamente nos diz que é sempre possível achar um multiplicador $\alpha > 1$ (mas não qualquer α) tal que a latência total do fluxo ótimo para a instância atômica com demandas multiplicadas por α é menor que a latência total do equilíbrio de Nash puro para a instância original. Entretanto, apesar desse resultado ruim, ainda é possível obter um limite de bicritério se considerarmos um multiplicador adequado, conforme definido na proposição a seguir.

Proposição 6.2.10 (Cominetti et al. [21]). Seja f^{EN} um equilíbrio de Nash puro para o jogo de congestionamento atômico com n jogadores e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s . Se f^{OPT} é o fluxo ótimo para o jogo com demandas multiplicadas por $1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)$, então $C(f^{\text{EN}}) \leq C(f^{\text{OPT}})$.

Prova. Seja y o fluxo que envia $(1 + \beta^n(\mathcal{L}_s))r_i$ unidades de demanda pelo par OD $s_i - t_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Então,

$$\begin{aligned} C(f^{\text{EN}}) &= \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^{\text{EN}, i} \cdot l_e(f_e^{\text{EN}}) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}}))f_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}})f_e^{\text{EN}, i}\} \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}}))f_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}})f_e^{\text{EN}, i}\} + \beta^n(\mathcal{L}_s)C(f^{\text{EN}}) - \beta^n(\mathcal{L}_s)C(f^{\text{EN}}) \\ &= (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{(l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}}))f_e^{\text{EN}, i} + l_e^i(\bar{f}_e^{\text{EN}})f_e^{\text{EN}, i}\} - \beta^n(\mathcal{L}_s)C(f^{\text{EN}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \{f_e^{\text{EN},i} l_e(f_e^{\text{EN}}) + l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})(f_e^{\text{EN},i} - f_e^{\text{EN},i})\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&\leq (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ f_e^{\text{EN},i} l_e(f_e^{\text{EN}}) + l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) \left(\frac{y_e^i}{1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)} - f_e^{\text{EN},i} \right) \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&= (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ (l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})) f_e^{\text{EN},i} + \frac{l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) y_e^i}{1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)} \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}),
\end{aligned}$$

onde a desigualdade segue do uso de (3.5) com o fluxo viável $y/(1 + \beta^n(\mathcal{L}_s))$. Daqui, temos que

$$\begin{aligned}
C(f^{\text{EN}}) &\leq (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ (l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})) f_e^{\text{EN},i} + \frac{l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) y_e^i}{1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)} \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&= (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)) \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{(1 + \beta^n(\mathcal{L}_s))(l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})) f_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) y_e^i}{1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)} \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&= \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ (1 + \beta^n(\mathcal{L}_s))(l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})) f_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) y_e^i \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&\leq \sum_{e \in E} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left\{ (l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}})) f_e^{\text{EN},i} + l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) y_e^i \right\} - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&\leq C(f^{\text{EN}}) \beta^n(\mathcal{L}_s) + C(y) - \beta^n(\mathcal{L}_s) C(f^{\text{EN}}) \\
&= C(y),
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue do fato de que $l_e(f_e^{\text{EN}}) - l_e^i(\bar{f}^{\text{EN}}) \leq 0$, para todo $e \in E$, e a terceira foi demonstrada na prova da Proposição 6.2.3.

O resultado segue fazendo-se $y = f^{\text{OPT}}$. □

Para jogos de roteamento atômicos com fluxo divisível, um único par OD e demanda uniforme (jogos de roteamento atômicos simétricos com fluxo divisível), temos a seguinte proposição.

Proposição 6.2.11 (Cominetti et al. [21]). Seja f^{EN} um equilíbrio de Nash puro para um jogo de roteamento simétrico com n jogadores atômicos que controlam r unidades de demanda cada, e seja y^{EN} um equilíbrio de Nash puro para um jogo de roteamento simétrico com $\tilde{n} < n$ jogadores atômicos que controlam $\tilde{r} = r \cdot n / \tilde{n}$ unidades de demanda cada. Então, $C(y^{\text{EN}}) \leq C(f^{\text{EN}})$.

Prova. Os fluxos f^{EN} e y^{EN} são encontrados resolvendo-se o problema (SNE) (Equação (6.3)), apresentado na Subseção 6.1.2. Repare que, como $\tilde{r} = r \cdot n / \tilde{n}$, temos que a restrição (6.3c) do problema (SNE) é satisfeita com $f_{(t,s)} = r \cdot n$. Portanto, y^{EN} é um fluxo viável para a instância do fluxo f^{EN} , e vice-versa.

Pela otimalidade de y^{EN} para o problema (SNE), temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} y_e^{\text{EN}} l_e(y_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n} - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau &\leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n} - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \Rightarrow \\
\sum_{e \in E} y_e^{\text{EN}} l_e(y_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n} - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau &+ (n - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
&\leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n} - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau + (n - 1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e \in E} y_e^{\text{EN}} l_e(y_e^{\text{EN}}) + (n-1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
& \leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (n-\tilde{n}) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau + (1-1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
& = \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (n-\tilde{n}) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Pela otimalidade de f^{EN} para o problema (SNE), temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (n-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau & \leq \sum_{e \in E} y_e^{\text{EN}} l_e(y_e^{\text{EN}}) + (n-1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
& \leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (n-\tilde{n}) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
& \quad + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \leq \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau$, o que implica:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} y_e^{\text{EN}} l_e(y_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau & \leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{f_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau \\
& \leq \sum_{e \in E} f_e^{\text{EN}} l_e(f_e^{\text{EN}}) + (\tilde{n}-1) \sum_{e \in E} \int_0^{y_e^{\text{EN}}} l_e(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, desconsiderando-se os segundos termos de ambos os lados da segunda desigualdade, temos que $C(y^{\text{EN}}) \leq C(f^{\text{EN}})$. \square

Essa proposição basicamente nos diz que o PoA para jogos de roteamento atômicos simétricos com fluxo divisível aumenta com o aumento do número de jogadores. Em especial, quando o número de jogadores tende ao infinito obtemos o seguinte resultado.

Corolário 6.2.12 (Cominetti et al. [21]). A latência total de um equilíbrio de Nash puro para um jogo de roteamento atômico simétrico é limitada superiormente pela latência total de um equilíbrio de Wardrop para o jogo não-atômico correspondente.

Esse corolário nos diz que, para jogos de roteamento atômicos simétricos com fluxo divisível, o equilíbrio obtido com jogadores atômicos não é degradado em comparação àquele obtido com jogadores não-atômicos. Diferentemente do que ocorre em jogos genéricos (rede genérica e demanda genérica), como já vimos no Exemplo 6.2.1. Adicionalmente, Cominetti et al. [21] explicaram que esse resultado é válido também para jogos com um único par OD mas demanda genérica, desde que considere-se que todos os arcos usados por um equilíbrio de Nash puro são, necessariamente, usados por todos os jogadores. Nesse caso, Orda et al. [76] provaram que o equilíbrio de Nash puro é único.

6.3 Jogos de congestionamento localmente suaves

Nessa seção, apresentamos o critério da suavidade local, que nos permite encontrar melhores limitantes superiores para o PoA para jogos com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{cf} . Na Subseção 6.3.1,

apresentamos os jogos de congestionamento divisíveis e a definição de jogos de congestionamento localmente suaves. Na Subseção 6.3.2, provamos o limitante superior e apresentamos a justeza do PoA para jogos localmente suaves com funções de latência em \mathcal{L}_{ie} . Na Subseção 6.3.3, apresentamos resultados de PoA para instâncias com funções de latência polinomiais.

6.3.1 Suavidade local

Para jogos de congestionamento, diz-se que um jogo é divisível se cada jogador pode dividir sua demanda entre as estratégias disponíveis, e indivisível caso contrário. Para jogos divisíveis, definimos, para cada jogador $i \in \mathcal{I}$, um conjunto $\mathcal{B}_i \subseteq 2^E \setminus \emptyset$ de estratégias básicas. O conjunto de estratégias fracionais para cada jogador i é $\mathcal{S}_i = \{x^i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^E \mid \sum_{b \in \mathcal{B}_i} x_b^i = r_i\}$, ou seja, os possíveis modos de se dividir sua demanda entre as estratégias básicas. Adicionalmente, e abusando novamente da notação, definimos a carga que o jogador i coloca no arco e como $x_e^i = \sum_{b \in \mathcal{B}_i: e \in b} x_b^i$, e o total de carga no arco e como $x_e = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_e^i$. O perfil de estratégias é o vetor $x = (x^i)_{i \in \mathcal{I}}$. O custo de um perfil x para o jogador i é dado por $C_i(x) = \sum_{e \in E} x_e^i \cdot l_e(x_e)$. O equilíbrio de Nash misto é dado pela Definição 5.4.1, onde consideramos que $x^i \equiv s_i \in \mathcal{S}_i$. Utilizamos essa definição mais abrangente em nossas demonstrações, apesar de ser sabido que um equilíbrio de Nash puro sempre existe para jogos de congestionamento divisíveis e finitos (Orda et al. [76] e Rosen [85]). Outro ponto importante é que os resultados obtidos por Roughgarden e Schoppmann [94] são válidos também para a classe mais geral do equilíbrio correlacionado.

Roughgarden e Schoppmann [94] definiram um jogo de congestionamento localmente suave da seguinte forma.

Definição 6.3.1 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Um jogo de congestionamento é localmente (λ, μ) -suave, com respeito a um perfil y , se para todo perfil x temos que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} [C_i(x) + \nabla_{x^i} C_i(x)^T (y^i - x^i)] \leq \lambda \cdot C(y) + \mu \cdot C(x), \quad (6.23)$$

onde $\nabla_{x^i} C_i = (\partial C_i / \partial x_{b_1}^i, \dots, \partial C_i / \partial x_{b_{m_i}}^i)$ é o gradiente de C_i com respeito a x^i , e $m_i = |\mathcal{B}_i|$.

Aqui, consideramos que cada C_i é continuamente diferenciável com uma derivada limitada. A suavidade local relaxa o critério de suavidade (Definição 5.4.2), ao requerer que as desigualdades em (5.24) sejam satisfeitas apenas com respeito a um perfil y , “arbitrariamente próximo” de x , ao invés de entre todos os pares de perfis viáveis. Assim, diminui-se o número de restrições e, conseqüentemente, aumenta-se o número de pares (λ, μ) viáveis, permitindo potencialmente melhores limitantes. Além disso, repare que o conjunto das estratégias fracionais contém o conjunto das estratégias não-fracionais, e as restrições em (5.24) são mais restritivas para os jogos divisíveis, no sentido de induzir um menor número de pares (λ, μ) , e, portanto, o PoA obtido a partir delas só pode ser maior. Assim, o ínfimo de $\frac{\lambda}{1-\mu}$ obtido a partir das restrições em (5.24) não atinge o PoA tipicamente menor dos jogos divisíveis.

Se um jogo é localmente (λ, μ) -suave para $\mu < 1$, então a esperança da latência total de todo equilíbrio de Nash é no máximo $\lambda/(1 - \mu)$ vezes a latência total de um perfil ótimo, como vemos no teorema a seguir.

Teorema 6.3.2 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Seja σ^{EN} um equilíbrio de Nash misto. Se o jogo é localmente (λ, μ) -suave com respeito a um perfil y , então $E_{\sigma^{\text{EN}}}[C] \leq \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot C(y)$.

Prova. Primeiramente, note que $C : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma variável aleatória cujo valor é dada por $C = \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i$, onde cada $C_i : \mathcal{S}_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma variável aleatória. Para um σ^{EN} que é um equilíbrio de Nash misto, a condição de otimalidade do problema (EN^i) para estratégias mistas nos diz que, para todo $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \sigma^{\text{EN}}(x) \cdot [\nabla_{x^i} C_i(x)^T (y^i - x^i)] \geq 0, \text{ para todo perfil viável } x. \quad (6.24)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C_i] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{x \in \mathcal{S}} \sigma^{\text{EN}}(x) \cdot C_i(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{x \in \mathcal{S}} \sigma^{\text{EN}}(x) \cdot [C_i(x) + \nabla_{x^i} C_i(x)^T (y^i - x^i)] \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}} \sigma^{\text{EN}}(x) \cdot \sum_{i=1}^n [C_i(x) + \nabla_{x^i} C_i(x)^T (y^i - x^i)] \\
&\leq \sum_{x \in \mathcal{S}} \sigma^{\text{EN}}(x) \cdot [\lambda \cdot C(y) + \mu \cdot C(x)] \\
&= \lambda \cdot C(y) + \mu \cdot \mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C].
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{E}_{\sigma^{\text{EN}}}[C] \leq \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot C(y)$. A primeira igualdade segue da linearidade da esperança (ver Proposição 2.1.7). A primeira desigualdade segue de (6.24) e a segunda desigualdade segue da Definição 6.3.1. \square

6.3.2 Exatidão do PoA

Para provar a justeza do PoA, Roughgarden e Schoppmann [94] definiram o valor de anarquia $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$. Primeiramente, eles provaram que o PoA para jogos de congestionamento divisíveis é no máximo $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$. Então, eles construíram um jogo cuja razão de coordenação é assintoticamente igual a $\gamma_l(\mathcal{L}_{ie})$, onde $\mathcal{L}_{ie} \subseteq \mathcal{L}_{cf}$. Por se tratar de uma demonstração muito longa, omitimos a construção do jogo que fornece o limitante inferior. Para a prova do limitante superior, utiliza-se a função $\kappa(p, q)$, dada por

$$\kappa(p, q) = \begin{cases} \frac{q^2}{4}, & \text{se } p \geq \frac{q}{2}, \\ p(q - p), & \text{se } p < \frac{q}{2}. \end{cases} \quad (6.25)$$

Note que a condição de primeira ordem para a expressão $p(q - p)$ nos diz que ela é maximizada com $p = \frac{q}{2}$, resultando em $\frac{q^2}{4}$. Então, temos o seguinte lema.

Lema 6.3.3 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Sejam $i \in \mathcal{I}$ e $p, q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Para todo $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ com $\sum_i p^i = p$ e $\sum_i q^i = q$, temos que $\sum_i (q^i \cdot p^i - (p^i)^2) \leq \kappa(p, q)$.

Prova. Seja $p_{\max} = \max_i p^i$, temos que

$$\sum_i (q^i \cdot p^i - (p^i)^2) \leq q \cdot p_{\max} - (p_{\max})^2 = \frac{q^2}{4} - \left(\frac{q}{2} - p_{\max}\right)^2.$$

\square

A proposição a seguir nos fornece uma condição para que um jogo de congestionamento divisível seja localmente (λ, μ) -suave.

Proposição 6.3.4 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Se

$$ql(p) + \kappa(p, q) \cdot l'(p) \leq \lambda \cdot ql(q) + \mu \cdot pl(p), \quad (6.26)$$

para todo $l \in \mathcal{L}_{cf}$ e $p, q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, então todo jogo de congestionamento divisível com funções de latência em \mathcal{L}_{cf} é localmente (λ, μ) -suave com respeito a todos os perfis.

Prova. Para todo par de perfis x e y , temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n [C_i(x) + \nabla_{x^i} C_i(x)^T (y^i - x^i)] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{e \in E} [x_e^i \cdot l_e(x_e) + y_e^i \cdot l_e'(x_e) - x_e^i \cdot l_e'(x_e)] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{e \in E} [x_e^i \cdot l_e(x_e) + y_e^i \cdot (l_e(x_e) + x_e^i \cdot l_e'(x_e)) - x_e^i \cdot (l_e(x_e) + x_e^i \cdot l_e'(x_e))] \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{e \in E} [x_e^i \cdot l_e(x_e) + y_e^i \cdot l_e(x_e) + y_e^i \cdot x_e^i \cdot l_e'(x_e) - x_e^i \cdot l_e(x_e) - (x_e^i)^2 \cdot l_e'(x_e)] \\
&= \sum_{e \in E} \left[y_e \cdot l_e(x_e) + l_e'(x_e) \cdot \sum_{i \in \mathcal{I}} (y_e^i \cdot x_e^i - (x_e^i)^2) \right] \\
&\leq \sum_{e \in E} [y_e \cdot l_e(x_e) + \kappa(x_e, y_e) \cdot l_e'(x_e)] \\
&\leq \sum_{e \in E} [\lambda \cdot y_e l_e(y_e) + \mu \cdot x_e l_e(x_e)] \\
&= \lambda \cdot C(y) + \mu \cdot C(x).
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue do Lema 6.3.3 e a segunda desigualdade segue da hipótese (6.26). \square

Agora, definimos a seguinte função:

$$g_{l,p,q}(\mu) = \frac{ql(p) + \kappa(p, q) \cdot l'(p) - \mu \cdot pl(p)}{ql(q) \cdot (1 - \mu)}, \quad (6.27)$$

para toda função $l \in \mathcal{L}_{cf}$ e valores $p \geq 0$ e $q > 0$, com $l(q) > 0$. Pela desigualdade em (6.26), obtemos:

$$\begin{aligned}
ql(p) + \kappa(p, q) \cdot l'(p) - \mu \cdot pl(p) &\leq \lambda \cdot ql(q) \\
\frac{ql(p) + \kappa(p, q) \cdot l'(p) - \mu \cdot pl(p)}{ql(q)} &\leq \lambda \\
\frac{ql(p) + \kappa(p, q) \cdot l'(p) - \mu \cdot pl(p)}{ql(q) \cdot (1 - \mu)} &\leq \frac{\lambda}{1 - \mu} \\
g_{l,p,q}(\mu) &\leq \frac{\lambda}{1 - \mu}.
\end{aligned}$$

Então, definimos o valor $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$ como

$$\begin{aligned}
\gamma_l(\mathcal{L}_{cf}) &:= \inf_{\mu \in [0,1]} \sup_{\substack{l \in \mathcal{L}_{cf} \\ p \geq 0, q > 0, l(q) > 0}} g_{l,p,q}(\mu), \\
&\quad p \geq 0, q > 0, l(q) > 0
\end{aligned} \quad (6.28)$$

com a convenção de que $\sup \emptyset = 1$.

O Teorema 6.3.2, a Proposição 6.3.4 e a definição de $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$ implicam o seguinte corolário.

Corolário 6.3.5 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Para todo jogo de congestionamento divisível com funções de latência em \mathcal{L}_{cf} , o PoA é no máximo $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$.

Para finalizar, Roughgarden e Schoppmann [94] construíram um jogo de congestionamento divisível cuja razão de coordenação é assintoticamente igual a $\gamma_l(\mathcal{L})$, onde $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{ie}$. A exemplo do jogo construído para jogos de congestionamento indivisíveis (ver Subseção 5.4.3), esse jogo também é constituído por dois subconjunto de recursos, de modo que a particularização para jogos de roteamento com fluxo divisível é possível com o uso de um ciclo bidirecional. Omitimos os detalhes por questão de espaço. A seguinte proposição formaliza esse resultado.

Proposição 6.3.6. Seja $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{ie}$. Temos que o PoA para jogos de congestionamento atômicos divisíveis com funções de latência em \mathcal{L} é exatamente $\gamma_l(\mathcal{L})$.

6.3.3 Cálculo do valor de anarquia $\gamma_l(\mathcal{L}_d)$

Roughgarden e Schoppmann [94] calcularam o valor de $\gamma_l(\mathcal{L}_d)$, onde \mathcal{L}_d é a classe dos polinômios de grau máximo d . Para isso, definiram os valores $g_{l,x,y}^*$ e $\gamma_l^*(\mathcal{L})$, como em (6.27) e (6.28), respectivamente, porém substituindo $\kappa(p, q)$ por $\frac{q^2}{4}$. Então, demonstraram que $\gamma_l(\mathcal{L}_d) = \gamma_l^*(\mathcal{L}_d)$. Adicionalmente, definiram Ψ_d como a única solução real positiva da equação $k^d + \frac{d \cdot k^{d-1}}{4} = k^{d+1}$, ou seja, $\Psi_d = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d+1})$. O seguinte corolário fornece os principais resultados.

Corolário 6.3.7 (Roughgarden e Schoppmann [94]). Considere \mathcal{L} uma classe de funções de latência. Temos que:

1. se \mathcal{L} é a classe das funções lineares, então $\gamma_l(\mathcal{L}) = (\Psi_1)^2 \approx 1,457$;
2. se $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$, então $\gamma_l(\mathcal{L}) = \frac{3}{2} > (\Psi_1)^2$;
3. se $\mathcal{L} = \mathcal{L}_d$, para $d \geq 2$, então $\gamma_l(\mathcal{L}) = (\Psi_d)^{d+1}$.

Novamente, por questão de espaço omitimos os detalhes.

Capítulo 7

Conclusão

Nessa dissertação, vimos os principais modelos de jogos de roteamento, destacando as diferenças entre eles. Vimos que modelos distintos induzem definições distintas de um equilíbrio, funções potenciais distintas e resultados distintos. Aqui, apresentamos um breve resumo dos resultados de existência, unicidade e ineficiência de equilíbrio, focando na comparação entre os modelos. Apresentamos também uma breve discussão sobre a importância dos resultados e alguns problemas em aberto.

Começamos a nossa comparação com a análise da existência e unicidade dos equilíbrios de Wardrop e de Nash puro. Vimos, na Seção 4.5, que instâncias não-atômicas com funções de latência contínuas e não-decrescentes possuem um equilíbrio de Wardrop essencialmente único. Contudo, vimos também, na Seção 4.7, que instâncias não-atômicas capacitadas podem possuir múltiplos equilíbrios, mesmo que possuam apenas funções de latência afins.

Os jogos atômicos com fluxo indivisível nem sempre possuem um equilíbrio de Nash puro, mesmo para instâncias com funções de latência polinomiais, como visto no Exemplo 5.2.1. Apesar disso, foram apresentadas funções potenciais para instâncias com demanda uniforme e para instâncias com demanda genérica e funções de latência afins (Subseções 5.2.1 e 5.2.2, respectivamente), garantindo assim a existência de ao menos um equilíbrio de Nash puro para esses casos. Além disso, a existência de múltiplos equilíbrios de Nash puro é possível, como ilustrado no Exemplo 3.2.5. Já para os jogos atômicos com fluxo divisível, vimos, na Seção 6.1, que é garantida a existência de ao menos um equilíbrio de Nash puro para instâncias com funções de latência contínuas, não-decrescentes e semiconvexas, em função da convexidade dos problemas (EN^i) que o definem. Então, apresentamos, para os jogos com funções de latência afins, uma função potencial que devolve como solução um equilíbrio de Nash puro essencialmente único (Subseção 6.1.1). Há também uma função potencial para os jogos com um único par OD e demanda uniforme, cuja solução devolvida é um equilíbrio de Nash puro, único para instâncias com funções de latência crescentes (Subseção 6.1.2). Além disso, vimos no início da Seção 6.1 que a unicidade de um equilíbrio pode depender da topologia da rede.

Com relação à ineficiência dos equilíbrios de Wardrop e de Nash, estudamos os principais resultados obtidos para duas métricas: Preço da Anarquia (PoA) e Limite de Bicritério. Para jogos não-atômicos, vimos que instâncias com um único par OD e arcos paralelos atingem o PoA, desde que possuam apenas funções de latência contínuas e não-decrescentes. Já para os jogos não-atômicos capacitados, o PoA pode ser ilimitado, mesmo para instâncias com funções de latência afins.

Os jogos atômicos com fluxo indivisível e demanda uniforme possuem PoAs exatos para instâncias com funções de latência positivas e não-decrescentes. Para provar esse resultado, foi utilizado o arcabouço da suavidade para jogos de congestionamento (ver Seção 5.4) e foi definida uma instância minimal que atinge o PoA, tal como para os jogos não-atômicos. Para os jogos com demanda genérica, foi possível obter, utilizando-se o mesmo arcabouço da suavidade, PoAs assintoticamente exatos para instâncias com funções positivas, não-decrescentes e invariantes sob escala. De forma análoga, foram demonstrados

PoAs assintoticamente exatos para jogos de roteamento com fluxo divisível e funções de latência não-decrescentes, continuamente diferenciáveis, semiconvexas e invariantes sob escala, utilizando-se para isso o arcabouço da suavidade local para jogos de congestionamento divisíveis (ver Seção 6.3).

Para jogos com fluxo divisível e um único par OD, foi provado por Cominetti et al. [21] (Subseção 6.2.2) que o PoA diminui quando se vai de instâncias com poucos jogadores oligopolistas para instâncias com jogadores cujos poderes de mercado são similares, isto é, quando se aproxima de uma instância com demanda uniforme. Isso reforça a ideia de que a competição é benéfica para o custo social de um equilíbrio. Não obstante, se a demanda é uniforme, então a latência total de um equilíbrio de Nash puro é limitada superiormente pela latência total de um equilíbrio de Wardrop para a instância não-atômica correspondente (Corolário 6.2.12). Esse resultado contrasta com os obtidos para instâncias genéricas (múltiplos pares OD), onde a latência total pode ser maior que a obtida para a instância não-atômica correspondente, conforme ilustrado no Exemplo 6.2.1.

A Tabela 7.1 exibe PoAs exatos para instâncias com funções de latência polinomiais, para os três principais modelos de jogos: não-atômico, atômico com fluxo indivisível e atômico com fluxo divisível. Nela, percebe-se claramente tendências que se estendem a outras classes de funções. Assim, os PoAs obtidos para instâncias não-atômicas são exponencialmente inferiores comparados aos obtidos para instâncias atômicas. Além disso, os PoAs para jogos com fluxo indivisível são maiores que os PoAs para jogos com fluxo divisível. Dentro da categoria jogos com fluxo indivisível, os PoAs para jogos com demanda genérica são maiores que os PoAs para jogos com demanda uniforme. Note que os resultados dos três modelos confirmam a tendência de aumento do PoA com o aumento do grau de inclinação da classe de funções.

Grau	Atômico divisível [94]	Atômico indivisível [3]		Não-atômico [95]
		Demanda uniforme	Demanda genérica	
1	1, 500	2, 500	2, 618	1, 333
2	2, 549	9, 583	9, 909	1, 626
3	5, 063	41, 54	47, 82	1, 896
4	11, 09	267, 6	277, 0	2, 251
5	26, 32	1.514	1.858	2, 394
6	66, 88	12.345	14.099	2, 630
7	180, 3	98.734	118.926	2, 858
8	512, 0	802.603	1.101.126	3, 081
d	$\left(\frac{1+\sqrt{d+1}}{2}\right)^{d+1}$	$\frac{(k+1)^{2d+1}-k^{d+1}(k+2)^d}{(k+1)^{d+1}-(k+2)^d+(k+1)^d-k^{d+1}}$	$(\Phi_d)^{d+1} = \theta\left(\frac{d}{\ln d}\right)^{d+1}$	$\frac{1}{1-\frac{d}{\sqrt[d]{(d+1)^{d+1}}}} = \theta\left(\frac{d}{\ln d}\right)$

Tabela 7.1: Preço da Anarquia Exato para jogos de congestionamento/roteamento com funções de latência polinomiais. Temos que $k = \lfloor \Phi_d \rfloor$.

Com relação ao limite de bicritério, vimos na Subseção 4.6.3 que a latência total de qualquer equilíbrio de Wardrop é limitada superiormente por $\frac{1}{\gamma}$ vezes a latência total de um fluxo ótimo para a instância com as demandas multiplicadas por $1 + \gamma$. Repare que para os casos em que $\gamma < 1$, esse limite de bicritério não nos fornece um bom limitante. Entretanto, se multiplicamos as demandas por $1 + \beta(\mathcal{L})$, onde $\beta(\mathcal{L}) \leq 1$, então demonstramos que a latência total de um equilíbrio de Wardrop para a instância original é no máximo a latência total de um fluxo ótimo para a instância modificada, considerando-se que as duas instâncias possuem funções de latência pertencentes a uma classe \mathcal{L} de funções positivas, contínuas e não-decrescentes. Esse resultado é válido também para instâncias atômicas com fluxo divisível, quando comparamos as latências totais de um equilíbrio de Nash puro para uma instância original e de um fluxo ótimo para a instância com as demandas multiplicadas por $1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)$, onde \mathcal{L}_s é a classe das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas. Porém, nesse caso, se as demandas da instância original são multiplicadas por qualquer outro valor diferente de $1 + \beta^n(\mathcal{L}_s)$, então é possível que o limite de bicritério não seja válido, como ilustrado no Exemplo 6.2.2 e na Proposição 6.2.9.

Os resultados sumarizados acima ajudam a ampliar a nossa visão sobre diversos sistemas que fazem roteamento, como as redes de computadores locais e a própria Internet. Primeiro, é importante observar que as classes de funções consideradas são aplicáveis a diversos casos reais. Por exemplo, as funções de atraso de filas M/M/1 e de filas M/G/1 são úteis para modelar redes de computadores, e funções polinomiais são usadas para modelar o congestionamento em rodovias (*US Bureau of Public Roads* [100]). Todos os três principais modelos possuem instâncias minimais que atingem o PoA, construídas em função da classe de funções de latência. Isso implica que, para todos eles, o tamanho e a topologia da rede não são os fatores que determinam o PoA, mas sim as funções de latência consideradas. Redes grandes, como a Internet e rodovias, são melhor modeladas por jogos não-atômicos. Para esses casos, os resultados na Tabela 7.1 parecem sugerir que as ações independentes e egoístas dos jogadores não causam grande degradação no desempenho global da rede. Ainda assim, em alguns casos mais críticos pode ser útil o uso de mecanismos de roteamento, como o sistema de orientação de rotas proposto por Schulz e Stier-Moses [98]. Jogos atômicos com fluxo indivisível modelam mais adequadamente o problema de roteamento em redes virtuais. Para esses casos, os resultados na Tabela 7.1 podem ser considerados como negativos, reforçando assim a importância de se adotar protocolos de roteamento. Para redes *peer-to-peer* que suportam reagrupamento de dados pelo cliente, jogos atômicos com fluxo divisível fornecem um bom modelo teórico. Nesse caso, os resultados na Tabela 7.1 sugerem que um protocolo de roteamento talvez seja útil, dependendo do quão importante é a vazão média na rede. Por exemplo, uma vazão alta é fundamental para redes que contenham aplicativos de tempo real.

Para concluir, apresentamos alguns problemas em aberto. Bhawalkar et al. [15] construíram um jogo de congestionamento simétrico, com demanda uniforme e funções de latência positivas e não-decrescentes, que atinge o PoA quando o número de jogadores e de recursos tendem ao infinito. Entretanto, permanece em aberto descobrir se existe uma instância de um jogo de roteamento com fluxo indivisível, sob condições equivalentes, que atinge o PoA. Além disso, Bhawalkar et al. [15] demonstraram que instâncias com um único par OD, arcos paralelos e demanda genérica (jogos atômicos simétricos com demanda genérica), cujas funções de latência são polinômios de grau máximo d , atingem o PoA Φ_d^{d+1} , ficando em aberto descobrir se é possível generalizar esse resultado para outras classes de funções. Nesse último caso, eles provaram a necessidade do número de jogadores e de recursos tenderem ao infinito para que a instância atinja o PoA. Entretanto, para jogos atômicos assimétricos com demanda genérica e jogos atômicos simétricos com demanda uniforme, eles apenas argumentaram acreditar que isso seja necessário. Permanece em aberto descobrir se realmente é necessário que o número de jogadores e de recursos tendam ao infinito para que esses jogos atinjam o PoA. Essa mesma questão é pertinente também a jogos atômicos com fluxo divisível.

Apêndice A

Resumo dos Resultados

Considere as seguintes classes de funções:

- \mathcal{L}_p : classe das funções positivas e não-decrescentes;
- \mathcal{L} : classe das funções positivas, contínuas e não-decrescentes;
- \mathcal{L}_{pf} : classe das funções positivas, não-decrescentes e semiconvexas;
- \mathcal{L}_f : classe invariante sob escala ($l(x) \in \mathcal{L}_f \Rightarrow c_1 \cdot l(c_2 \cdot x) \in \mathcal{L}_f$, para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$) de funções positivas e não-decrescentes;
- \mathcal{L}_s : classe das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas;
- \mathcal{L}_{cf} : classe das funções positivas, não-decrescentes, continuamente diferenciáveis e semiconvexas;
- \mathcal{L}_{ie} : classe invariante sob escala ($l(x) \in \mathcal{L}_{ie} \Rightarrow c_1 \cdot l(c_2 \cdot x) \in \mathcal{L}_{ie}$, para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$) de funções positivas, não-decrescentes, continuamente diferenciáveis e semiconvexas;
- \mathcal{L}_{pc} : classe das funções positivas, estritamente crescentes, continuamente diferenciáveis e convexas;
- \mathcal{L}_{ps} : classe das funções positivas, estritamente crescentes, continuamente diferenciáveis e estritamente semiconvexas;
- \mathcal{L}_d : classe dos polinômios de grau máximo d ;
- \mathcal{L}_{m_d} : classe dos monômios de grau d ;
- \mathcal{L}_{af} : classe das funções afins.

Na Seção A.1, apresentamos um resumo dos resultados de existência e unicidade. Na Seção A.2, apresentamos um resumo dos resultados de PoA.

A.1 Existência e Unicidade

- **Instâncias não-atômicas:** um equilíbrio de Wardrop sempre existe e é essencialmente único para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}
- **Instâncias não-atômicas capacitadas:** pode haver múltiplos equilíbrios de Wardrop para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}

- **Instâncias com fluxo indivisível:**

- um equilíbrio de Nash puro nem sempre existe
- para instâncias com demanda uniforme, um equilíbrio de Nash puro sempre existe, mas não é garantido que seja único
- para instâncias com demanda genérica e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{af} , um equilíbrio de Nash puro sempre existe, mas não é garantido que seja único

- **Instâncias com fluxo divisível:**

- um equilíbrio de Nash puro sempre existe para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_s
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com um único par OD, arcos paralelos, demanda uniforme e funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{pc}
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{m_d} , para $d > 0$, ou à classe \mathcal{L}_d , com $d \leq 3$
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com um único par OD e rede de tráfego constituída sobre um grafo aproximadamente-paralelo com dois terminais (*two-terminals nearly-parallel graph*)
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com dois jogadores, de pares OD distintos ou não, funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{pf} , e rede de tráfego constituída sobre um grafo série-paralelo generalizado (*generalized series-parallel graph*)
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com múltiplos jogadores de apenas dois tipos (a demanda de qualquer jogador é d_1 ou d_2), um único par OD, funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{pf} e rede de tráfego constituída sobre um grafo s-t série-paralelo (*s-t-series-parallel graph*)
- um equilíbrio de Nash puro sempre existe e é essencialmente único para instâncias com mais de dois tipos de jogadores, múltiplos pares OD, funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{pf} e rede de tráfego constituída sobre um grafo aproximadamente-paralelo generalizado (*generalized nearly-parallel graph*)

A.2 Preço da Anarquia

- **Instâncias não-atômicas:** instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L} possuem POA exato $(1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$

- **Instâncias com fluxo indivisível:**

- Instâncias com demanda uniforme: instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p possuem POA exato $\gamma(\mathcal{L}_p)$
- Instâncias com demanda genérica: instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_p possuem POA limitado superiormente por $\zeta(\mathcal{L}_p)$, e instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_f possuem POA assintoticamente exato $\zeta(\mathcal{L}_f)$

- **Instâncias com fluxo divisível:**

- instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{cf} possuem POA limitado superiormente por $\gamma_l(\mathcal{L}_{cf})$, e instâncias com funções de latência pertencentes à classe \mathcal{L}_{ie} possuem POA assintoticamente exato $\gamma_l(\mathcal{L}_{ie})$

Apêndice B

Outros Custos Sociais

O custo social utilitário conhecido como **soma das latências** corresponde à soma das latências dos arcos usados. Formalmente:

$$C(f) = \sum_{e \in E: f_e > 0} l_e(f_e). \quad (\text{B.1})$$

Para o equilíbrio de Nash puro f^{EN} , do Exemplo 3.2.3, a soma das latências é $C(f^{\text{EN}}) = l_{e_1}(f_{e_1}^{\text{EN}}) + l_{e_2}(f_{e_2}^{\text{EN}}) + l_{e_3}(f_{e_3}^{\text{EN}}) = 1,48 + 2,43 + 2 \cdot 1,09 = 6,09$. Para o equilíbrio de Wardrop f^{EW} , para a mesma instância do Exemplo 3.2.3, a soma das latências é $C(f^{\text{EW}}) = l_{e_1}(f_{e_1}^{\text{EW}}) + l_{e_2}(f_{e_2}^{\text{EW}}) + l_{e_3}(f_{e_3}^{\text{EW}}) = 3 \cdot 2 = 6$. Para a instância atômica do Exemplo 3.2.5, a soma das latências do fluxo f é $C(f) = l_{(u,v)}(f_{(u,v)}) + l_{(v,w)}(f_{(v,w)}) + l_{(u,w)}(f_{(u,w)}) + l_{(w,v)}(f_{(w,v)}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = l_{(u,v)}(f_{(u,v)}) + l_{(v,w)}(f_{(v,w)}) + l_{(w,u)}(f_{(w,u)}) + l_{(v,u)}(f_{(v,u)}) + l_{(u,w)}(f_{(u,w)}) + l_{(w,v)}(f_{(w,v)}) = 2 + 1 + 0 + 0 + 2 + 1 = 6$. Para a instância não-atômica do Exemplo 3.2.6, a soma das latências do fluxo f é $C(f) = l_{e_1}(f_{e_1}) + l_{e_2}(f_{e_2}) = 1 + 1 = 2$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = l_{e_3}(\tilde{f}_{e_3}) = 0$.

Considerando-se os custos sociais igualitários, temos a **latência máxima**, que corresponde à latência máxima experimentada por algum jogador em um único arco, ou seja, o maior valor de latência de um arco, dentre todos os arcos que recebem fluxo de algum jogador.

$$C(f) = \max_{e \in E: f_e > 0} l_e(f_e). \quad (\text{B.2})$$

Para o equilíbrio de Nash puro f^{EN} , do Exemplo 3.2.3, a latência máxima é $C(f^{\text{EN}}) = \max\{l_{e_1}(f_{e_1}^{\text{EN}}), l_{e_2}(f_{e_2}^{\text{EN}}), l_{e_3}(f_{e_3}^{\text{EN}})\} = \max\{1,48; 2,43; 2,18\} = 2,43$. Para a instância atômica do Exemplo 3.2.5, a latência máxima do fluxo f é $C(f) = \max\{l_{(u,v)}(f_{(u,v)}), l_{(v,w)}(f_{(v,w)}), l_{(u,w)}(f_{(u,w)}), l_{(w,v)}(f_{(w,v)})\} = \max\{1, 1, 1, 1\} = 1$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = \max\{2, 1, 2, 1\} = 2$. Para a instância não-atômica do Exemplo 3.2.6, a latência máxima do fluxo f é $C(f) = \max\{1, 1\} = 1$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = 0$.

Outro custo social igualitário é o **custo individual máximo**, dado por

$$C(f) = \max_{i \in \mathcal{I}} C_i(f). \quad (\text{B.3})$$

Para o equilíbrio de Nash puro f^{EN} , do Exemplo 3.2.3, o custo individual máximo é $C(f^{\text{EN}}) = \max\{C_1(f^{\text{EN}}), C_2(f^{\text{EN}})\} = \max\{3,454; 7,0175\} = 7,0175$. O custo individual máximo do equilíbrio de Wardrop f^{EW} é $C(f^{\text{EW}}) = \max\{C_1(f^{\text{EW}})\} = 2$. Para a instância atômica do Exemplo 3.2.5, o custo individual máximo do fluxo f é $C(f) = \max\{C_1(f), C_2(f), C_3(f), C_4(f)\} = \max\{1, 1, 1, 1\} = 1$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = \max\{3, 3, 2, 2\} = 3$. Para a instância não-atômica do Exemplo 3.2.6, o custo individual máximo do fluxo f é $C(f) = 1$, e do fluxo \tilde{f} é $C(\tilde{f}) = 0$.

É importante observar que todos os custos sociais apresentados acima são facilmente generalizados

para jogos com estratégias mistas. Para isso, basta considerar a esperança do custo social.

Um ponto interessante, que pode ser observado no Exemplo 3.2.8, é que o fluxo ótimo depende do custo social que se está considerando. Na instância de Pigou, o fluxo f^{OPT} só é ótimo se consideramos como custo social a latência total (Equação (3.14)). Se consideramos, ao invés, a soma das latências (Equação (B.1)), então o fluxo ótimo é o f^{EW} . Para ver isso, repare que, nesse caso, $C(f^{\text{EW}}) = l_{e_2}(f_{e_2}) = 1$ e $C(f^{\text{OPT}}) = l_{e_1}(f_{e_1}^{\text{OPT}}) + l_{e_2}(f_{e_2}^{\text{OPT}}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Isso demonstra que a otimalidade de uma instância ou classe de instâncias e, conseqüentemente, a análise acerca da ineficiência da mesma, está intrinsecamente relacionada ao tipo de custo social que se está considerando.

Apêndice C

Outras Métricas de Ineficiência

C.1 Preço da Estabilidade

O Preço da Estabilidade (PoS, de *Price of Stability*) corresponde à maior razão, dentre todas as instâncias permitidas, entre os custos sociais do equilíbrio de menor custo social e de um fluxo ótimo. Ele nos fornece uma medida de garantia para a eficiência de um conjunto de instâncias. Isto é, mesmo se o Preço da Anarquia é ilimitado, é possível que, achando-se o equilíbrio de menor custo social, a perda decorrida da falta de coordenação entre os jogadores não seja tão grande.

Seja $\tilde{\rho}$ a razão entre os custos sociais do equilíbrio de menor custo social e de um fluxo ótimo, ou seja,

$$\tilde{\rho}(G, r, l) = \min_{f \in \mathcal{F}^{EQ}} \frac{C(f)}{C(f^{\text{OPT}})}, \quad (\text{C.1})$$

onde \mathcal{F}^{EQ} é o conjunto dos fluxos que são um equilíbrio e f^{OPT} é um fluxo ótimo. Então o Preço da Estabilidade é definido da seguinte forma.

Definição C.1.1 (Preço da Estabilidade). Sejam uma classe de grafos \mathcal{G} , um vetor de demandas r e uma classe de funções de latência \mathcal{L} , tal que $(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ se $G \in \mathcal{G}$ e $l_e \in \mathcal{L}$ para todo $e \in E$. O Preço da Estabilidade para esse conjunto de instâncias é dado por

$$\sup_{(G, r, l) \in (\mathcal{G}, r, \mathcal{L})} \tilde{\rho}(G, r, l). \quad (\text{C.2})$$

Para ilustrar, considere que o conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias permitidas contém apenas a instância do Exemplo 3.2.6. Nela, o equilíbrio de Wardrop \tilde{f} tem latência total $C(\tilde{f}) = 0$. Portanto, \tilde{f} é também um fluxo ótimo para essa instância, com respeito à latência total, e, adotando-se a convenção de que $0/0 = 1$, o PoS para o conjunto $(\mathcal{G}, r, \mathcal{L})$ de instâncias é 1. Em palavras, a ação individual dos jogadores é capaz de garantir um fluxo que seja também benéfico à rede de uma forma geral.

C.2 Injustiça

A medida chamada de Injustiça não quantifica a ineficiência de um equilíbrio em função do custo social, ou seja, o quanto esse equilíbrio se distancia do mais benéfico à rede ou aos jogadores de maneira geral. Ao invés, essa medida nos diz o quanto um determinado fluxo, ou um conjunto de fluxos viáveis para uma instância, pode beneficiar alguns jogadores em detrimento de outros. Essa medida foi definida por Roughgarden [89] e Correa et al. [23] para jogos de roteamento não-atômicos. Apesar das duas definições serem ligeiramente distintas, elas compartilham da mesma ideia central.

Roughgarden [89] definiu a Injustiça da seguinte forma.

Definição C.2.1 (Injustiça de um equilíbrio de Wardrop). Sejam \mathcal{F}^{EW} o conjunto dos fluxos que são um equilíbrio de Wardrop para a instância (G, r, l) e f^{OPT} um fluxo ótimo para essa instância. Então, a Injustiça $u(G, r, l)$ dessa instância é dada por

$$u(G, r, l) := \sup_{f^{\text{EW}} \in \mathcal{F}^{\text{EW}}} \left\{ \frac{l_{P_1}(f^{\text{OPT}})}{l_{P_2}(f^{\text{EW}})} : P_1, P_2 \in \mathcal{P}_i, f_{P_1}^{\text{OPT}} > 0, f_{P_2}^{\text{EW}} > 0, \text{ para todo } i \in \mathcal{I} \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Lembre que para o caso não-atômico o conjunto \mathcal{I} representa os pares origem-destino. Essa métrica nos diz o quão prejudicial um fluxo ótimo pode ser para alguns dos jogadores, comparando o custo individual que eles tem num fluxo ótimo f^{OPT} , por exemplo, enviando seu fluxo pelo caminho P_1 , com o que eles teriam num equilíbrio de Wardrop f^{EW} em que escolhessem o caminho P_2 . Para ilustrar, considere o Exemplo 3.2.9. Nele, o equilíbrio de Wardrop f^{EW} induz custo individual 1 para todos os jogadores. Porém, o fluxo ótimo f^{OPT} envia $(1 - \epsilon)$ pelo arco e_2 , onde $\epsilon \rightarrow 0$, resultando em custo individual $(1 - \epsilon)^d$ para todos os jogadores enviando seu fluxo pelo arco e_2 . Quando d tende ao infinito, esse custo tende a 0, logo, o arco que fornece a maior razão é o arco e_1 , onde há uma quantidade ϵ de jogadores enfrentando custo individual 1. Assim, $l_{e_1}(f_{e_1}^{\text{OPT}})/l_{e_2}(f_{e_2}^{\text{EW}}) = 1$ e conclui-se que o fluxo ótimo não prejudica o desempenho dos jogadores.

Correa et al. [23] definiram a Injustiça da seguinte forma.

Definição C.2.2 (Injustiça de um fluxo viável). Seja f um fluxo viável para a instância (G, r, l) . Então, a Injustiça $U(f)$ desse fluxo é dada por

$$U(f) := \max \left\{ \frac{l_{P_1}(f)}{l_{P_2}(f)} : P_1, P_2 \in \mathcal{P}_i, f_{P_1} > 0, f_{P_2} > 0, \text{ para todo } i \in \mathcal{I} \right\} \quad (\text{C.4})$$

Essa métrica nos diz o quanto um fluxo viável f , podendo este ser um fluxo ótimo ou um equilíbrio de Wardrop, beneficia uns jogadores em detrimento de outros. Por exemplo, os jogadores enviando seu fluxo pelo caminho P_1 podem ter que enfrentar um custo individual muito maior que aqueles enviando seu fluxo pelo caminho P_2 . Para ilustrar, considere o Exemplo 3.2.8. Nele, o fluxo ótimo f^{OPT} induz custo individual 1 para os jogadores enviando seu fluxo pelo arco e_1 e custo individual $\frac{1}{2}$ para os jogadores enviando seu fluxo pelo arco e_2 . Logo, $U(f^{\text{OPT}}) = 1/\frac{1}{2} = 2$, ou seja, os jogadores utilizando o arco e_1 estão enfrentando o dobro de custo em relação aos jogadores utilizando o arco e_2 .

Apêndice D

Algoritmos e Complexidade

Nesse apêndice, apresentamos um breve resumo da análise de complexidade dos problemas de calcular um equilíbrio e um fluxo ótimo, além dos principais algoritmos desenvolvidos.

D.1 Jogos não-atômicos

Nessa seção, apresentamos alguns algoritmos propostos na literatura para o cálculo do equilíbrio de Wardrop. Esses algoritmos se valem da convexidade do problema (4.8), utilizando-se de métodos iterativos para se obter um mínimo global para a função objetivo (4.7). Esses algoritmos não calculam um equilíbrio de Wardrop exato, visto que pode ser computacionalmente custoso fazê-lo. Em vez disso, define-se um nível de precisão desejado para a solução devolvida, isto é, o quanto ela se aproxima de um equilíbrio de Wardrop exato. O nível de precisão de uma solução é determinado por uma métrica denominada **lacuna relativa** (*relative gap*), de modo que quanto menor é a lacuna relativa, maior é a precisão da solução. Assim, uma das formas de se avaliar a eficiência de um algoritmo é pela verificação da menor lacuna relativa aceitável para o cálculo de uma solução em tempo viável.

Um dos mais antigos algoritmos é o Frank-Wolfe, proposto por Frank e Wolfe [44]. Esse algoritmo pode demonstrar um desempenho pobre em termos de convergência, em função de sua tendência ao comportamento *zig-zag* em torno de um equilíbrio de Wardrop. Apesar disso, ele é considerado suficientemente bom para uso prático, sendo, portanto, utilizado na maioria das implementações comerciais (Correa e Stier-Moses [26]). Para tentar solucionar o problema de lentidão na convergência, outros algoritmos foram propostos. Ao leitor interessado em se aprofundar na pesquisa desses algoritmos, listamos dos mais antigos para os mais atuais, sendo que os mais atuais apresentam, segundo os seus autores, desempenhos melhores, ou seja, são mais rápidos e capazes de devolver uma solução com um nível de precisão maior (uma lacuna relativa menor). Bar-Gera [9] apresentou o algoritmo OBA (*Origin-based Algorithm*); Dial [34] apresentou o algoritmo B; Gentile [50] apresentou o algoritmo LUCE (*Linear User Cost Equilibrium*); e Bar-Gera [10] apresentou o algoritmo TAPAS (*Traffic Assignment by Paired Alternative Segments*). Para todos eles foram feitas análises experimentais, sendo que os algoritmos mais usados para comparação foram o Frank-Wolfe e o OBA.

Com relação à complexidade, Beckmann et al. [11] demonstraram que o problema de calcular um equilíbrio de Wardrop tem tempo polinomial. Fischer, Räcke e Vöcking [40] apresentaram um algoritmo distribuído que é polinomial na inclinação relativa de uma classe de funções, onde a inclinação relativa γ de uma função diferenciável l é tal que $l'(x) \leq \gamma \cdot l(x)/x$, e γ é uma inclinação relativa para a classe de funções \mathcal{L} se é uma inclinação relativa para todo $l \in \mathcal{L}$. Então, eles provaram que a inclinação relativa é justamente o parâmetro que determina a velocidade de convergência.

D.2 Jogos atômicos com fluxo indivisível

Nessa seção, apresentamos os principais resultados em termos de complexidade dos cálculos de um equilíbrio de Nash e de um fluxo ótimo. Primeiramente, apresentamos os resultados para jogos com n jogadores e um único par OD com m arcos paralelos. Para esse caso, Lücking et al. [69] definiram a complexidade do cálculo da latência total para jogos com funções de latência lineares. Eles demonstraram que a otimalidade da latência total para um fluxo induzido por estratégias puras pode ser verificada em tempo $O(n + m^2)$, para jogos com demanda uniforme. O leitor interessado pode consultar os demais resultados no artigo.

Gairing et al. [47] apresentaram o algoritmo COMPUTENASH, que computa o equilíbrio de Nash puro em tempo $O(m \log m \log n)$, para jogos com demanda uniforme e funções de latência não-decrescentes e convexas. Além disso, demonstraram que, para jogos com demanda genérica, os problemas de cálculo do melhor e do pior equilíbrio de Nash puro, com respeito à latência total, são NP-Completo, e os problemas de cálculo das quantidades de melhores e de piores equilíbrios de Nash puro são #P-Completo. Para instâncias com demanda genérica, Even-Dar e Mansour [37] apresentaram um algoritmo capaz de computar o equilíbrio de Nash em tempo $O(2^{m^2})$.

Gairing, Lücking, Mavronicolas e Monien [46] apresentaram um algoritmo para jogos onde os jogadores possuem restrições no conjunto de arcos que podem escolher. Para jogos com arcos idênticos (todo arco possui função de latência $l(x) = x/s$, para algum $s \in \mathbb{R}_{>0}$), esse algoritmo computa o equilíbrio de Nash puro em tempo $O(nmA(\log R + m^2))$, onde R é a soma das demandas dos jogadores e $A = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\mathcal{A}_i|$ (\mathcal{A}_i é o conjunto dos arcos que o jogador i pode escolher).

Agora, consideramos os jogos com redes genéricas. Nesse caso, Dunkel e Schulz [35] demonstraram que o problema de decisão sobre se existe um equilíbrio de Nash puro é fortemente NP-Completo.

Fabrikant, Papadimitriou e Talwar [38] apresentaram um algoritmo polinomial no número de arcos para se calcular um equilíbrio de Nash puro em jogos de roteamento atômicos com um único par OD e demanda uniforme. Esse algoritmo é, na verdade, uma redução para o problema de minimização de custo de fluxo (*minimum cost flow problem*). Fotakis [42] demonstrou que, para instâncias com caminhos linearmente independentes (todo caminho $s - t$ contém ao menos um arco não pertencente a qualquer outro caminho $s - t$) e demanda uniforme, toda **sequência de melhor resposta** (a cada iteração um jogador é selecionado para escolher uma estratégia que é sua melhor resposta para o perfil atual) converge para um equilíbrio de Nash puro em no máximo n etapas. Para jogos de roteamento com múltiplos pares OD e demanda uniforme, Fabrikant et al. [38] demonstraram que o problema de se calcular um equilíbrio de Nash puro é PLS-Completo, onde PLS corresponde a *Polynomial Local Search*.

Para instâncias com um único par OD e demanda genérica, Fotakis et al. [43] apresentaram um algoritmo que calcula um equilíbrio de Nash puro em tempo pseudopolinomial em R . Panagopoulou e Spirakis [79] apresentaram o algoritmo NASHIFY que, para instâncias com funções de latência $l(x) = x$ para todos os arcos, converge, a partir de um fluxo arbitrário, para um equilíbrio de Nash puro em tempo polinomial no número de jogadores e $\log R$. Goemans, Mirrokni e Vetta [53] demonstraram que, para instâncias com múltiplos pares OD, demanda genérica e funções de latência afins, uma **caminhada aleatória de melhor resposta** (*random best response walk*), onde a cada iteração um jogador é selecionado aleatoriamente para escolher uma estratégia que é sua melhor resposta para o perfil atual, pode convergir em tempo polinomial no número de jogadores para uma solução constante-aproximada de um fluxo ótimo.

Com relação ao cálculo de um fluxo ótimo, Christodoulou, Mirrokni e Sidiropoulos [20] provaram que, para uma instância com demanda uniforme e funções de latência afins, o fluxo resultante de uma etapa de melhor resposta é $\theta(n)$ -aproximado de um fluxo ótimo. Isto é, sejam f^{OPT} o fluxo ótimo e f o fluxo resultante de uma etapa de melhor resposta, então $C(f) \leq \theta(n) \cdot C(f^{\text{OPT}})$. Awerbuch, Azar, Epstein, Mirrokni e Skopalik [6] apresentaram uma dinâmica de melhor resposta para uma instância com demanda uniforme e funções de latência que satisfazem a propriedade de **salto limitado** (*bounded jump*

- Awerbuch et al. [6], Definição 2.2), chamada por eles de dinâmica α -Nash. Essa dinâmica converge para uma solução PoA-aproximada de um fluxo ótimo em tempo polinomial no número de jogadores. Na dinâmica α -Nash, um jogador selecionado para alterar sua estratégia, em uma iteração, só o faz para uma estratégia cujo custo resultante seja inferior a $1 - \alpha$ do custo da sua estratégia atual. O resultado também é válido para instâncias com demanda genérica e funções de latência afins.

De uma forma mais geral, Papadimitriou [80] demonstrou que o problema de se calcular um equilíbrio de Nash misto para jogos na forma normal (o que inclui os jogos de congestionamento e de roteamento) é PPAD-Completo, onde PPAD corresponde a *Polynomial Parity Argument in a Directed Graph*.

D.3 Jogos atômicos com fluxo divisível

Cominetti et al. [21] citaram o algoritmo proposto por Potra e Ye [82] para resolver o problema (NLP-NE) (Subseção 5.2.2) em tempo polinomial, porém devolvendo apenas uma solução aproximada. Um algoritmo que retorne uma solução exata é impossível, visto que um equilíbrio de Nash puro geralmente requer números irracionais. O algoritmo de Potra e Ye [82] adota, a cada iteração, o método de Newton puro para resolver um sistema de equações lineares, de uma forma a garantir a convergência quadrática e manter a viabilidade primal.

Huang [60] apresentou um algoritmo que, para instâncias com um único par OD e funções de latência afins com coeficientes racionais, é capaz de calcular um equilíbrio de Nash puro em tempo polinomial. Entretanto, esse algoritmo funciona apenas para instâncias que satisfazem o pressuposto adicional de que a rede é bem-projetada (*well-designed network*). Numa rede bem projetada há um único par OD e o fluxo em cada arco, com respeito ao fluxo ótimo, aumenta com o aumento da demanda total. Por exemplo, uma rede série-paralela com funções de latência convexas é sempre bem-projetada.

Apêndice E

Outros Modelos

Nesse apêndice, apresentamos uma breve descrição de outros modelos de jogos de roteamento não analisados nessa dissertação. Primeiro, apresentamos alguns tipos de funções de latência que um jogo de roteamento pode possuir.

Um jogo de roteamento pode possuir funções de latência inseparáveis. Uma função de latência inseparável recebe como parâmetro não apenas o fluxo presente em seu arco, mas também fluxos presentes em outros arcos. Uma situação onde isso é útil é, por exemplo, na modelagem do cruzamento entre duas avenidas, pois o tempo que um veículo leva para atravessar o cruzamento depende também do tráfego na avenida perpendicular. O valor β para jogos não-atômicos foi generalizado para funções inseparáveis por Correa et al. [25], onde foram demonstrados os mesmos resultados dos Teoremas 4.6.3 e 4.6.9, obtidos para funções separáveis. Ao leitor interessado, mais resultados para jogos com funções inseparáveis são encontrados em Chau e Sim [18], Perakis [81], Correa, Schulz e Stier-Moses [24] e as referências neles. Um jogo de roteamento pode possuir também funções de latência jogadores-específicas. Uma função de latência jogador-específica está associada a um jogador e um arco, ou seja, ela calcula a latência em um determinado arco para um jogador em específico. Isso permite que jogadores distintos enxerguem latências distintas em um mesmo arco. Esse tipo de função é útil, por exemplo, para modelar sistemas distribuídos de redes de computadores em que cada jogador (computador) mede a latência dos arcos (enlaces) independentemente, obtendo, assim, estimativas independentes. Ao leitor interessado, resultados para jogos com funções jogador-específicas são encontrados em Dafermos [28], Orda et al. [76], Milchtaich [71], Ackermann, Röglin e Vöcking [2], Georgiou, Pavlides e Philippou [51] e as referências neles. Por último, outro tipo de função de latência que um jogo de roteamento pode possuir é a estocástica. Uma função de latência é estocástica (oposto de determinística) se a sua latência é calculada considerando-se um erro (ou desvio) dado por uma variável aleatória com valor de esperança e desvio padrão. Esse caso é mais realista, pois leva em consideração a incerteza que se tem sobre os reais valores de congestionamento de um arco. Ao leitor interessado, resultados para jogos com funções de latência estocásticas são encontrados em Dial [33], Daganzo e Sheffi [30], Fisk [41], Baillon e Cominetti [7], Nikolova e Stier-Moses [74] e as referências neles.

Com relação à demanda de um jogador ou de um par OD, existem jogos onde ela é elástica (oposto de inelástica). Uma demanda é dita elástica se não corresponde a um valor fixo. Nesse caso, cada jogador possui uma função de utilidade que deseja maximizar, cujo parâmetro é a soma dos fluxos que envia em cada recurso (arco) ou caminho. Ao leitor interessado, resultados de jogos com demandas elásticas são encontrados em Frank [65], Hayrapetyan, Tardos e Wexler [56], Acemoglu e Ozdaglar [1], Ozdaglar [78] e as referências neles.

Com relação ao conceito de equilíbrio, existe também o equilíbrio *sorvedouro* (*sink equilibrium*), proposto por Goemans et al. [53] para jogos com demanda uniforme. Esse equilíbrio corresponde a uma componente fortemente conexa do grafo direcionado que representa uma caminhada de melhor resposta.

Detalhes no próprio artigo. O importante desse conceito de equilíbrio é que se pode chegar a ele mesmo em jogos de roteamento atômicos que não possuem equilíbrio de Nash puro, porém com uma garantia de eficiência exponencial no grau máximo do polinômio (considerando-se funções de latência polinomiais).

Com relação ao objetivo de um jogador, temos que um jogador pode ter como objetivo a minimização da maior latência dentre os recursos (arcos) usados por ele. Jogos onde os jogadores possuam tal objetivo são chamados de jogos de congestionamento/roteamento de gargalo (*bottleneck congestion/routing games*). Uma consequência interessante dessa mudança de objetivo é que, nesse caso, tanto jogos atômicos com fluxo indivisível quanto com fluxo divisível, com funções de latência contínuas e crescentes, possuem um equilíbrio de Nash puro (Banner e Orda [8]). Ao leitor interessado, mais resultados de jogos de gargalo são encontrados em Libman e Orda [68], Banner e Orda [8] e as referências neles.

Outros modelos de jogos não-atômicos que possuem restrições adicionais à restrição de atendimento da demanda de todos os jogadores, além dos jogos capacitados apresentados na Seção 4.7, são os formulados por Karakostas e Kolliopoulos [63] e por Schulz e Stier-Moses [98]. Karakostas e Kolliopoulos [63] definiram um conjunto convexo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^P$ para descrever restrições adicionais para cada caminho $P \in \mathcal{P}$ disponível na instância. O princípio de Wardrop (Definição 3.2.4) foi estendido por Maugeri, Oettli e Schlger [70] para abranger esse tipo de restrição, no que eles denominaram de **Princípio de Wardrop Estendido** (Karakostas e Kolliopoulos [63], Definição 3). Schulz e Stier-Moses [98] propuseram um jogo onde um controlador central decide o caminho que será adotado por cada jogador, de modo a respeitar um nível pré-definido de tolerância a caminhos subótimos. Eles argumentaram que esse modelo é mais realista para sistemas de direcionamento de tráfego, pois não busca direcionar os veículos de modo a se obter um fluxo ótimo, visto que o fluxo ótimo pode ser bastante injusto para alguns dos jogadores (motoristas). Ao contrário, busca justamente limitar o nível dessa injustiça. Mais detalhes sobre a análise da injustiça de um fluxo são encontrados no Apêndice C.2.

Para concluir, gostaríamos de falar um pouco sobre o efeito de se permitir coalizão entre os jogadores, tanto os atômicos quanto os não-atômicos, e sobre as estratégias de Stackelberg. Uma coalizão corresponde à união de um ou mais jogadores atômicos ou não-atômicos (no caso não-atômico, considera-se um contínuo de jogadores não-atômicos com uma demanda associada), formando um único jogador atômico cuja estratégia de equilíbrio de Nash é dada pelo problema (ENⁱ). Hayrapetyan, Tardos e Wexler [57] demonstraram que, para jogos não-atômicos com um único par OD, arcos paralelos e funções de latência convexas, uma coalizão beneficia a latência total de um equilíbrio de Nash, ou seja, a instância com coalizão possui latência total de um equilíbrio de Nash menor que a latência total de um equilíbrio de Nash para a instância sem coalizão. Entretanto, se há restrição no conjunto de arcos que cada coalizão tem acesso, então a latência total de um equilíbrio de Nash para a instância com coalizão pode ser arbitrariamente maior que aquela de um equilíbrio de Nash para a instância sem coalizão. Para jogos atômicos, Hayrapetyan et al. [57] demonstraram que a latência total de um equilíbrio de Nash para a instância com coalizão é no máximo duas vezes a latência total de um equilíbrio de Nash para a instância sem coalizão. Huang [60] demonstrou que para instâncias bem-projetadas (ver Seção D.3), com funções de latência afins, coalizões são sempre benéficas para a latência total de um equilíbrio de Nash. Harks [54] apresentou o valor de anarquia $\omega(\mathcal{L}, c, \lambda)$, onde c é o número de coalizões, λ é um valor real a ser otimizado e \mathcal{L} é uma classe de funções não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas. Então, ele provou que o PoA para jogos de roteamento com fluxo divisível e c coalizões são limitados superiormente por $\inf_{\lambda} [\lambda(1 - \omega(\mathcal{L}, c, \lambda))^{-1}]$.

Em jogos de roteamento com estratégias de Stackelberg, uma fração da demanda total do jogo fica sob o controle de um único jogador, tido como o líder. Esse líder transmite essa demanda de acordo com alguma política de roteamento, que é distinta de uma simples estratégia de equilíbrio. Por exemplo, Roughgarden [88] propôs, para jogos não-atômicos com um único par OD e arcos paralelos, a estratégia LLF (*Largest Latency First*). Essa estratégia consiste no líder calcular um fluxo ótimo f^{OPT} e, então, atribuir o fluxo ótimo para cada arco, de forma decrescente a partir do arco de maior latência em f^{OPT} , até ter atribuído toda a sua demanda. Os demais jogadores agem de acordo com suas estratégias de

equilíbrio. O objetivo desses jogos é que o custo social seja minimizado ao se permitir que uma fração da demanda total seja atribuída por um controlador central. Mais resultados para jogos com estratégias de Stackelberg são encontrados em Roughgarden [88], Harks [54], Bonifaci, Harks e Schäfer [16] e as referências neles.

Índice Remissivo

- \mathcal{L} : classe das funções positivas, contínuas e não-decrescentes, 33
- \mathcal{L}_Q : classe das funções de atraso de filas M/M/1, 44
- \mathcal{L}_{af} : classe das funções afins, 40
- \mathcal{L}_{cf} : classe das funções não-decrescentes, continuamente diferenciáveis e semiconvexas, 71
- \mathcal{L}_{dv} : classe diversa de funções, 41
- \mathcal{L}_{ie} : classe invariante sob escala de funções não-decrescentes, continuamente diferenciáveis e semiconvexas, 71
- \mathcal{L}_f : classe invariante sob escala de funções positivas e não-decrescentes, 51
- \mathcal{L}_h : classe homogênea de funções, 41
- \mathcal{L}_{nh} : classe não-homogênea de funções, 41
- \mathcal{L}_p : classe das funções positivas e não-decrescentes, 51
- \mathcal{L}_s : classe das funções positivas, não-decrescentes, diferenciáveis e semiconvexas, 22, 33
- índice Herfindahl, 78
- ação, 10
- caminhada de melhor resposta, 98
- caminhos, 19
- competição, 1, 5
- conjunto convexo, 13
- correspondência de melhor resposta, 12
- corrida armamentista, 8
- custo individual de um jogador atômico em um jogo de congestionamento, 54
- custo individual de um jogador atômico em um jogo de congestionamento divisível, 82
- custo individual de um jogador atômico em um jogo de roteamento, 20
- custo individual de um jogador não-atômico em um jogo de roteamento, 20
- custo individual máximo, 93
- custo social, 2, 27
- custo social ótimo, 28
- custo social igualitário, 27
- custo social utilitário, 27
- Debreu, Glicksberg, Fan, 9
- demanda, 1, 19, 54
- demanda elástica, 101
- demanda genérica, 3
- demanda total, 26
- demanda uniforme, 3
- derivada direcional, 15
- desigualdades variacionais, 15
- Dilema do Prisioneiro, 7
- distribuição de probabilidades, 10
- equilíbrio, 2, 6
- equilíbrio BMW, 46
- equilíbrio capacitado, 45
- equilíbrio de Nash misto, 11, 12, 55
- equilíbrio de Nash puro, 8, 17, 22, 23, 47
- equilíbrio de Wardrop, 24
- equilíbrio essencialmente único, 36, 37
- equilíbrio sorvedouro, 101
- espaço amostral, 9
- espaço de ações, 10
- espaço de ações de todos os jogadores exceto i , 11
- espaço de estratégias, 6, 54
- espaço de estratégias de todos os jogadores exceto i , 6
- espaço de estratégias mistas, 11
- espaço de estratégias mistas de todos os jogadores exceto i , 11
- espaço probabilístico discreto, 10
- esperança, 10
- esperança de custo de um jogador atômico, 55
- esperança de ganho de um jogador, 11
- estratégia, 6, 7, 54
- estratégia básica, 82
- estratégia de Stackelberg, 102
- estratégia dominante, 7
- estratégia fracional, 82
- estratégia mista, 10
- evento, 10

- externalidade negativa de congestionamento, 28
- fluxo, 19, 21
- fluxo ótimo, 2, 28
- fluxo de um jogador, 19, 21
- fluxo divisível, 3
- fluxo indivisível, 3
- fluxo viável (\mathcal{F}), 19, 22, 47
- função convexa, 13
- função de custo, 6
- função de latência, 19, 54
- função de latência estocástica, 101
- função de latência inseparável, 101
- função de latência jogador-específica, 101
- função de utilidade, 6
- função estritamente convexa, 14
- função estritamente monótona, 16
- função fortemente convexa, 14
- função fortemente monótona, 16
- função monótona, 16
- função potencial exata, 17
- função potencial ordinal, 17
- função potencial para jogos atômicos com fluxo divisível e funções de latência afins, 68
- função potencial para jogos atômicos com fluxo indivisível e demanda uniforme, 49
- função potencial para jogos atômicos com fluxo indivisível e funções de latência afins, 50
- função potencial para jogos atômicos simétricos com fluxo divisível, 70
- função potencial para o jogo não-atômico, 37
- ganho, 6
- inclinação relativa de uma função, 97
- injustiça de um equilíbrio de Wardrop, 96
- injustiça de um fluxo viável, 96
- instância atômica com dois equilíbrios, 26
- instância atômica com fluxo indivisível e razão de coordenação ilimitada, 52
- instância atômica com funções de latência afins e razão de coordenação maior que $\frac{4}{3}$, 72
- instância atômica onde o limite de bicritério para a instância com demandas duplicadas não é válido, 73
- instância capacitada, 45
- instância de Pigou, 29
- instância de Pigou não-linear, 30
- instância de um jogo de roteamento, 20
- instância não-atômica com dois equilíbrios, 26
- jogador atômico, 2, 25
- jogador não-atômico, 2, 25
- jogo atômico, 2
- jogo capacitado, 45
- jogo de congestionamento, 53
- jogo de congestionamento divisível, 82
- jogo de congestionamento localmente suave, 82
- jogo de congestionamento suave, 56
- jogo de minimização de custos, 6
- jogo de roteamento, 1, 19
- jogo de roteamento com coalizão, 102
- jogo de roteamento de gargalo, 102
- jogo finito, 8
- jogo infinito, 8
- jogo não-atômico, 3
- jogo na forma extensiva, 5
- jogo na forma normal, 5, 6
- jogo potencial, 17
- jogo simétrico, 7
- Karush-Kuhn-Tucker (KKT), 13
- lacuna relativa, 97
- latência de um caminho, 20
- latência máxima, 93
- latência marginal para um jogador da variação de seu fluxo em um arco, 22
- latência marginal para um jogador da variação de seu fluxo em um caminho, 22
- latência total, 27
- limite de bicritério, 31
- linearidade da esperança, 10
- matriz de valores de utilidade, 7
- melhor resposta, 11
- otimização contínua, 5, 12
- otimização convexa, 5, 13
- par origem-destino (OD), 1, 19
- perfil de ações, 10
- perfil de estratégias, 6, 54, 82
- perfil de estratégias mistas, 11, 55
- perfil estável, 2
- poder de mercado, 2
- Preço da Anarquia (PoA), 31, 55
- Preço da Anarquia assintoticamente exato, 52, 72
- Preço da Anarquia exato, 31
- Preço da Anarquia justo, 31
- Preço da Anarquia Robusto, 56
- Preço da Estabilidade (PoS), 95

Princípio de Wardrop Estendido, 102
problema de se calcular um equilíbrio de Wardrop,
37
problema de se calcular um fluxo ótimo, 28

razão de coordenação, 30, 55
recursos, 54
rede bem-projetada, 99
rede de tráfego, 19

sequência de melhor resposta, 98
soma das latências, 93
Stackelberg, 102

Teorema de Weierstrass, 13
Teorema do Princípio Mínimo, 14
tolerância a caminhos subótimos, 102
tráfego de veículos, 1
transporte de mercadorias, 1

união de caminhos, 41

valor de anarquia, 31
valor de anarquia β , 39
valor de anarquia β^n , 75
valor de anarquia γ , 57
valor de anarquia γ_l , 84
valor de anarquia ω , 102
valor de anarquia $\tilde{\beta}$, 79
valor de anarquia ζ , 63
valor de utilidade, 6
variável aleatória, 10
vetor de demandas, 19, 54
vetor de funções de latência, 19

Referências Bibliográficas

- [1] Daron Acemoglu and Asuman Ozdaglar. Flow control, routing, and performance from service provider viewpoint. 2004.
- [2] Heiner Ackermann, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. Pure nash equilibria in player-specific and weighted congestion games. Theoretical Computer Science, 410(17):1552–1563, April 2009.
- [3] Sebastian Aland, Dominic Dumrauf, Martin Gairing, Burkhard Monien, and Florian Schoppmann. Exact price of anarchy for polynomial congestion games. In Proceedings of the 23rd Annual Conference on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS’06, pages 218–229, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag.
- [4] Eitan Altman, Tamer Basar, Tania Jimenez, and Nahum Shimkin. Competitive routing in networks with polynomial costs. IEEE Transactions on Automatic Control, 47(1):92–96, January 2002.
- [5] Baruch Awerbuch, Yossi Azar, and Amir Epstein. The price of routing unsplittable flow. In Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’05, pages 57–66, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [6] Baruch Awerbuch, Yossi Azar, Amir Epstein, Vahab Seyed Mirrokni, and Alexander Skopalik. Fast convergence to nearly optimal solutions in potential games. In Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce, EC’08, pages 264–273, New York, NY, USA, 2008. ACM.
- [7] J.-B. Baillon and R. Cominetti. Markovian traffic equilibrium. Mathematical Programming, 111(1-2):33–56, January 2008.
- [8] R. Banner and A. Orda. Bottleneck routing games in communication networks. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 25(6):1173–1179, August 2007.
- [9] Hillel Bar-Gera. Origin-based algorithm for the traffic assignment problem. Transportation Science, 36(4):398–417, November 2002.
- [10] Hillel Bar-Gera. Traffic assignment by paired alternative segments. Transportation Research Part B: Methodological, 44(8–9):1022 – 1046, 2010.
- [11] M. Beckmann, C. B. McGuire, and C. B. Winsten. Studies in the Economics of Transportation. Yale University Press, 1956.
- [12] D. P. Bertsekas. Nonlinear Programming. Athena Scientific, 2nd edition, 1999.
- [13] D. P. Bertsekas, A. Nedić, and A. E. Ozdaglar. Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific, 2003.
- [14] Umang Bhaskar, Lisa Fleischer, Darrell Hoy, and Chien-Chung Huang. Equilibria of atomic flow games are not unique. In Proceedings of the 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA’09, pages 748–757, Philadelphia, PA, USA, 2009. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [15] Kshipra Bhawalkar, Martin Gairing, and Tim Roughgarden. Weighted congestion games: Price of anarchy, universal worst-case examples, and tightness. In Mark Berg and Ulrich Meyer, editors, Algorithms – ESA 2010, volume 6347 of Lecture Notes in Computer Science, pages 17–28. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [16] Vincenzo Bonifaci, Tobias Harks, and Guido Schäfer. Stackelberg routing in arbitrary networks. Mathematics of Operations Research, 35(2):330–346, May 2010.
- [17] S. Catoni and S. Pallottino. Traffic equilibrium paradoxes. Transportation Science, 25(3):240–244, 1991.
- [18] Chi Kin Chau and Kwang Mong Sim. The price of anarchy for non-atomic congestion games with symmetric cost maps and elastic demands. Operations Research Letters, 31(5):327–334, September 2003.
- [19] George Christodoulou and Elias Koutsoupias. The price of anarchy of finite congestion games. In Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’05, pages 67–73, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [20] George Christodoulou, Vahab S. Mirrokni, and Anastasios Sidiropoulos. Convergence and approximation in potential games. In In Proc 23th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS’06, pages 349–360. Springer, 2006.
- [21] Roberto Cominetti, José R. Correa, and Nicolás E. Stier-Moses. The impact of oligopolistic competition in networks. Operations Research, 57(6):1421–1437, November 2009.
- [22] Jose R. Correa, A. S. Schulz, and N. E. Stier-Moses. Selfish routing in capacitated networks. Mathematics of Operations Research, 29:2004, 2003.
- [23] José R. Correa, Andreas S. Schulz, and Nicolás E. Stier-Moses. Fast, fair, and efficient flows in networks. Operations Research, 55:215–225, March 2007.
- [24] José R Correa, Andreas S Schulz, and Nicolás E Stier-Moses. A geometric approach to the price of anarchy in nonatomic congestion games. Games and Economic Behavior, 64(2):457–469, November 2008.
- [25] José R. Correa, Andreas S. Schulz, and Nicolás E. Stier-Moses. On the inefficiency of equilibria in congestion games. In Michael Jünger and Volker Kaibel, editors, Integer Programming and Combinatorial Optimization, volume 3509 of Lecture Notes in Computer Science, pages 167–181. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [26] José R. Correa and Nicolás E. Stier-Moses. Wardrop Equilibria. John Wiley and Sons, Inc., 2010.
- [27] Artur Czumaj and Berthold Vöcking. Tight bounds for worst-case equilibria. In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA’02, pages 413–420, Philadelphia, PA, USA, 2002. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [28] S. C. Dafermos. The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks. Transportation Science, 6:73–87, 1972.
- [29] S. C. Dafermos and F. T. Sparrow. The traffic assignment problem for a general network. In Journal of Research of the National Bureau of Standards, Series B, pages 91–118. 1969.
- [30] C. Daganzo and Y. Sheffi. On stochastic models of traffic assignment. Transportation Science, 11(3):253–274, 1977.

- [31] Jon Dattorro. Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry. Meboo Publishing, 2005.
- [32] Gerard Debreu. A social equilibrium existence theorem. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 38(10):886–893, October 1952.
- [33] R. B. Dial. A probabilistic multi-path traffic assignment algorithm which obviates path enumeration. Transportation Research, 5(2):83–111, 1971.
- [34] Robert B. Dial. A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration. Transportation Research Part B: Methodological, 40(10):917 – 936, 2006.
- [35] Juliane Dunkel and Andreas S. Schulz. On the complexity of pure-strategy nash equilibria in congestion and local-effect games. In Proceedings of the Second International Conference on Internet and Network Economics, WINE’06, pages 62–73, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag.
- [36] Amir Epstein, Michal Feldman, and Yishay Mansour. Efficient graph topologies in network routing games. Games and Economic Behavior, 66(1):115–125, May 2009.
- [37] Eyal Even-Dar and Yishay Mansour. Fast convergence of selfish rerouting. In Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, SODA’05, pages 772–781, Philadelphia, PA, USA, 2005. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [38] Alex Fabrikant, Christos Papadimitriou, and Kunal Talwar. The complexity of pure nash equilibria. In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’04, pages 604–612, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [39] Ky Fan. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 38(2):121–126, 1952.
- [40] Simon Fischer, Harald Räcke, and Berthold Vöcking. Fast convergence to wardrop equilibria by adaptive sampling methods. In Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’06, pages 653–662, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [41] Caroline Fisk. Some developments in equilibrium traffic assignment. Transportation Research Part B: Methodological, 14(3):243 – 255, 1980.
- [42] Dimitris Fotakis. Congestion games with linearly independent paths: Convergence time and price of anarchy. Theory of Computing Systems, 47(1):113–136, July 2010.
- [43] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, and Paul Spirakis. Selfish unsplittable flows. Theoretical Computer Science, 348(2-3):226–239, 2005.
- [44] Marguerite Frank and Philip Wolfe. An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistics Quarterly, 3(1-2):95–110, 1956.
- [45] Drew Fudenberg and Jean Tirole. Game Theory. MIT Press, August 1991.
- [46] Martin Gairing, Thomas Lücking, Marios Mavronicolas, and Burkhard Monien. Computing nash equilibria for scheduling on restricted parallel links. In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’04, pages 613–622, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [47] Martin Gairing, Thomas Lücking, Marios Mavronicolas, Burkhard Monien, and Manuel Rode. Nash equilibria in discrete routing games with convex latency functions. Journal of Computer and System Sciences, 74(7):1199–1225, November 2008.

- [48] Martin Gairing, Thomas Lücking, Marios Mavronicolas, and Burkhard Monien. The price of anarchy for polynomial social cost. In Mathematical Foundations of Computer Science, volume 3153 of Lecture Notes in Computer Science, pages 574–585. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [49] Martin Gairing and Florian Schoppmann. Total Latency in Singleton Congestion Games. In Xiaotie Deng and Fan Graham, editors, Internet and Network Economics, volume 4858 of Lecture Notes in Computer Science, chapter 42, pages 381–387. Springer Berlin / Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [50] Guido Gentile. Linear user cost equilibrium: a new algorithm for traffic assignment, 2010.
- [51] Chryssis Georgiou, Theophanis Pavlides, and Anna Philippou. Network uncertainty in selfish routing. In Proceedings of the 20th International Conference on Parallel and Distributed Processing, IPDPS’06, pages 105–105, Washington, DC, USA, 2006. IEEE Computer Society.
- [52] I. L. Glicksberg. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium points. Proceedings of the American Mathematical Society, 3(1):170–174, 1952.
- [53] M. Goemans, Vahab Mirrokni, and A. Vetta. Sink equilibria and convergence. In Proceedings of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pages 142–151, 2005.
- [54] Tobias Harks. Stackelberg strategies and collusion in network games with splittable flow. Theory of Computing Systems, 48(4):781–802, May 2011.
- [55] A. Haurie and P. Marcotte. On the relationship between nash-cournot and wardrop equilibria. Networks, 15(3):295–308, 1985.
- [56] Ara Hayrapetyan, Éva Tardos, and Tom Wexler. A network pricing game for selfish traffic. In Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Principles of distributed computing, PODC’05, pages 284–291, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [57] Ara Hayrapetyan, Éva Tardos, and Tom Wexler. The effect of collusion in congestion games. In Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC’06, pages 89–98, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [58] Martin Hoefer and Alexander Souza. The influence of link restrictions on (random) selfish routing. In Proceedings of the 1st International Symposium on Algorithmic Game Theory, SAGT’08, pages 22–32, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.
- [59] Martin Hoefer and Alexander Souza. Tradeoffs and average-case equilibria in selfish routing. ACM Transactions on Computation Theory, 2(1):2:1–2:25, November 2010.
- [60] Chien-Chung Huang. Collusion in atomic splittable routing games. In Luca Aceto, Monika Henzinger, and Jiří Sgall, editors, Automata, Languages and Programming, volume 6756 of Lecture Notes in Computer Science, pages 564–575. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [61] Olaf Jahn, Rolf H. Möhring, Andreas S. Schulz, and Nicolás E. Stier-Moses. System-optimal routing of traffic flows with user constraints in networks with congestion. Operations Research, 53(4):600–616, July 2005.
- [62] George Karakostas, Taeyon Kim, Anastasios Viglas, and Hao Xia. Selfish routing with oblivious users. In Proceedings of the 14th International Conference on Structural Information and Communication Complexity, SIROCCO’07, pages 318–327, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.

- [63] George Karakostas and Stavros G. Kolliopoulos. Selfish routing in the presence of side constraints. Technical report, McMaster University, 2003.
- [64] H. Jerome Keisler. Elementary calculus. An infinitesimal approach. Prindle, Weber & Schmidt, 1986.
- [65] Frank Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. European Transactions on Telecommunications, 8(1):33–37, 1997.
- [66] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. In in Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, pages 404–413, 1999.
- [67] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, pages 481–492. Berkeley: University of California Press, 1951.
- [68] Lavy Libman and Ariel Orda. The designer’s perspective to atomic noncooperative networks. IEEE/ACM Transactions on Networking, 7(6):875–884, December 1999.
- [69] Thomas Lücking, Marios Mavronicolas, Burkhard Monien, and Manuel Rode. A new model for selfish routing. Theoretical Computer Science, 406(3):187–206, October 2008.
- [70] A. Maugeri, W. Oettli, and D. Schlger. A flexible form of wardrop’s principle a for traffic equilibria with side constraints. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, III(48):185–193, 1997.
- [71] Igal Milchtaich. Congestion games with Player-Specific payoff functions. Games and Economic Behavior, 13(1):111–124, March 1996.
- [72] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Potential games. Games and Economic Behavior, 14(1):124 – 143, 1996.
- [73] J.F. Nash. Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54(2):286–295, 1951.
- [74] Evdokia Nikolova and Nicolas E. Stier-Moses. Stochastic selfish routing. In Proceedings of the 4th International Conference on Algorithmic Game Theory, SAGT’11, pages 314–325, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer-Verlag.
- [75] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, and Vijay V. Vazirani, editors. Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007.
- [76] Ariel Orda, Raphael Rom, and Nahum Shimkin. Competitive routing in multiuser communication networks. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1(5):510–521, October 1993.
- [77] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. A course in game theory. The MIT Press, July 1994.
- [78] Asuman Ozdaglar. Price competition with elastic traffic. Networks - Games, Interdiction, and Human Interaction Problems on Networks, 52(3):141–155, October 2008.
- [79] Panagiota N. Panagopoulou and Paul G. Spirakis. Algorithms for pure nash equilibria in weighted congestion games. Journal of Experimental Algorithmics, 11, February 2007.
- [80] Christos H. Papadimitriou. On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. Journal of Computer and System Sciences, 48(3):498–532, June 1994.
- [81] Georgia Perakis. The price of anarchy under nonlinear and asymmetric costs. Mathematics of Operations Research, 32(3):614–628, August 2007.
- [82] F. Potra and Y. Ye. A quadratically convergent polynomial algorithm for solving entropy optimization problems. SIAM Journal on Optimization, 3(4):843–860, 1993.

- [83] Lili Qiu, Yang Richard Yang, Yin Zhang, and Scott Shenker. On selfish routing in internet-like environments. In Proceedings of the 2003 Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications, SIGCOMM'03, pages 151–162, New York, NY, USA, 2003. ACM.
- [84] Oran Richman and Nahum Shimkin. Topological uniqueness of the nash equilibrium for selfish routing with atomic users. Mathematics of Operations Research, 32(1):215–232, February 2007.
- [85] J. B. Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. Econometrica, 33(3):520–534, 1965.
- [86] R. W. Rosenthal. The network equilibrium problem in integers. Networks, 3(1):53–59, 1973.
- [87] T Roughgarden. Potential functions and the inefficiency of equilibria. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM), 3:1071–1094, 2006.
- [88] Tim Roughgarden. Stackelberg scheduling strategies. In Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC'01, pages 104–113, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [89] Tim Roughgarden. How unfair is optimal routing? In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA'02, pages 203–204, Philadelphia, PA, USA, 2002. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [90] Tim Roughgarden. Selfish Routing. PhD thesis, Faculty of the Graduate School of Cornell University, 2002.
- [91] Tim Roughgarden. The price of anarchy is independent of the network topology. Journal of Computer and System Sciences, 67(2):341–364, September 2003.
- [92] Tim Roughgarden. Selfish routing with atomic players. In Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA'05, pages 1184–1185, Philadelphia, PA, USA, 2005. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [93] Tim Roughgarden. Intrinsic robustness of the price of anarchy. In Proceedings of the 41st Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC'09, pages 513–522, New York, NY, USA, 2009. ACM.
- [94] Tim Roughgarden and Florian Schopmann. Local smoothness and the price of anarchy in atomic splittable congestion games. In Proceedings of the 22nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA'11, pages 255–267. SIAM, 2011.
- [95] Tim Roughgarden and Éva Tardos. How bad is selfish routing? Journal of the ACM, 49(2):236–259, March 2002.
- [96] Tim Roughgarden and Éva Tardos. Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games. Games and Economic Behavior, 47(2):389 – 403, 2004.
- [97] Tim Roughgarden and Éva Tardos. Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games. Games and Economic Behavior, 47(2):389 – 403, 2004.
- [98] Andreas S. Schulz and Nicolás E. Stier-Moses. Efficiency and fairness of system-optimal routing with user constraints. Networks, 48(4):223–234, December 2006.
- [99] Gesualdo Scutari, Daniel P. Palomar, Francisco Facchinei, and Jong-Shi Pang. Convex optimization, game theory and variational inequality theory. IEEE Signal Processing Magazine, pages 35 – 49, May 2010.

- [100] US Bureau of Public Roads. Traffic Assignment Manual, 1964.
- [101] J. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, 1(36):352–362, 1952.
- [102] Hai Yang, Deren Han, and Hong Lo. Efficiency of atomic splittable selfish routing with polynomial cost functions. Networks and Spatial Economics, 8(4):443–451, 2008.